



Munich Personal RePEc Archive

## **Public infrastructure, investment and economic growth in Chile.**

Idrovo Aguirre, Byron

Cámara Chilena de la Construcción

1 March 2012

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/39857/>  
MPRA Paper No. 39857, posted 06 Jul 2012 14:49 UTC

Cámara Chilena de la Construcción A.G.  
Gerencia de Estudios

**N°69**

Marzo 2012

INVERSIÓN EN INFRAESTRUCTURA PÚBLICA Y CRECIMIENTO  
ECONÓMICO, EVIDENCIA PARA CHILE

Byron Idrovo

La publicación de los Documentos de Trabajo no está sujeta a la aprobación previa de la Mesa Directiva de la Cámara Chilena de la Construcción A.G. Tanto el contenido de los Documentos de Trabajo como también el análisis y conclusiones que de ellos se deriven, son de exclusiva responsabilidad de su(s) autor(es) y no reflejan necesariamente la opinión de la Cámara Chilena de la Construcción A.G. o sus directivos. Se prohíbe la reproducción total o parcial de este documento sin autorización previa de la Cámara Chilena de la Construcción A.G.

## Documento de Trabajo N°69

# Inversión en Infraestructura Pública y Crecimiento Económico, Evidencia para Chile \*

Byron Idrovo A.\*\*

Marzo 2012

### Resumen

El objetivo principal del presente documento es proveer, a partir de una evaluación empírica, una actualización del orden de magnitud de la sensibilidad del PIB a los cambios marginales del nivel de gasto en infraestructura pública (incluyendo la inversión en concesiones neta de gastos administrativos) para el período anual 1960-2010. Basado en un análisis de cointegración de variables económicas, se obtiene una medida de elasticidad de infraestructura pública del PIB de 0,17% en el largo plazo, es decir, por cada 10% que aumenta la inversión en infraestructura pública, el PIB crece en promedio 1,7% en términos per cápita –con un rango de oscilación de 1,1% a 2,3% (al 95% de confianza). Por otro lado, a partir del modelo de corrección de errores se desprende que el ajuste del PIB tiene un efecto rezagado a las perturbaciones económicas y el factor de ajuste es en promedio 35% anual una vez ocurrida la perturbación. En otras palabras, el tiempo que tardan las variables económicas en alcanzar una relación de equilibrio, luego de ocurrida una perturbación en el sistema, podría superar los dos años. Es importante aclarar que si bien el término *equilibrio* en economía es bastante amplio, aquí se refiere sólo a una relación estadística estable entre las variables económicas. En este contexto, se concluye que el gasto de inversión en infraestructura pública (sumado el efecto de la inversión de concesiones de obras) tiene un rol fundamental en la productividad total de factores. A nivel regional, la Región Metropolitana explica el 38% de la relación de largo plazo entre la infraestructura pública y el PIB agregado, mientras que el 62% restante es atribuido a las restantes regiones del país. Otro hallazgo es que las tasas de incidencia regional en la relación infraestructura-PIB no son constantes en el tiempo y, en algunos casos, se observa una marcada volatilidad –coherente con la conducta cíclica de la inversión en grandes obras de ingeniería que inciden marcadamente en la economía de algunas regiones del país.

---

\*Se agradecen los valiosos comentarios de los profesionales del Ministerio de Obras Públicas, la eficiente colaboración de Marcela Ruiz-Tagle y las recomendaciones del equipo de la Gerencia de Estudios de la Cámara Chilena de la Construcción. Cualquier error es responsabilidad del autor.

\*\*Gerencia de Estudios, Cámara Chilena de la Construcción A.G. e-mail: bidrovo@cchc.cl

# 1. Introducción

El interés por estudiar la dinámica entre la inversión en infraestructura y la actividad económica agregada desde una perspectiva más de largo plazo, se populariza hacia fines de los años 80's con los trabajos de Eberts (1986) y Ascheur (1989) que –basándose en la estimación clásica de funciones de producción para Estados Unidos–, concluyen que la inversión en infraestructura pública es un determinante clave de la productividad total de factores.<sup>1</sup> Ambos trabajos, entre otros, constituyen una primera aproximación estadística de la relación entre infraestructura y comportamiento económico, considerando a la infraestructura como un insumo gratuito (bien público) que, una vez producido, representa un insumo estructural y común para todas las firmas. En otras palabras, el acervo de la infraestructura puede proveer una estructura de costos favorable para las firmas, dando lugar a la generación transversal de externalidades positivas que inducen a elevar la productividad (esto implica lograr una combinación más eficiente de los factores productivos como principal fuente de crecimiento de largo plazo). Munell (1990), basándose en una función de producción *Cobb Douglas*, concluyó que el lento crecimiento de la productividad experimentado por Estados Unidos en la década de los 70's se debió, entre otros factores, a la declinación del gasto público en infraestructura de ese país, ratificando así la importancia relativa del rubro en la trayectoria del PIB.

No obstante, otros trabajos –que emplearon técnicas de cointegración de variables– evidenciaron problemas de consistencia en las estimaciones conocidas del multiplicador del gasto público en infraestructura. Por ejemplo, Tatom (1991), en su intento por determinar si la infraestructura pública incide sobre la productividad total de factores en Estados Unidos –a través de un enfoque de función de producción– no descarta la presencia de correlación *espúrea* entre dichas variables y concluye que, empíricamente, aún no está zanjada la preponderancia y dirección de causalidad entre las variables PIB e infraestructura pública. Ford & Poret (1991) y Straub (2008) tampoco hallaron evidencia estadística de la robustez del efecto de la infraestructura pública sobre el PIB en un estudio de sección cruzada de varios países. En contraste, Woodward & Hall (2009) estiman que el gasto público en infraestructura presenta un multiplicador estadísticamente distinto de cero para la economía norteamericana, i.e., el PIB real aumenta significativamente frente al mayor gasto del sector público en la formación de capital. Investigaciones efectuadas por distintos profesionales del

---

<sup>1</sup>Eberts (1986), a partir de un modelo de crecimiento exógeno, estimó una función generalizada (*translog*) de la función de producción *Cobb Douglas* (CD) –en la que incluyó el stock de capital público como un insumo productivo, además de las variables de empleo y stock de capital privado. Ascheur (1989), basándose en un modelo de crecimiento endógeno con externalidades, especificó una función de producción tipo (CD), considerando al gasto público en infraestructura como un factor más de producción.

Banco Mundial (1994) coinciden en que la mayor disponibilidad (oferta) y calidad de los servicios de infraestructura, sumado su efecto a otros sectores económicos conexos, contribuyen de manera importante al crecimiento económico –a través de la mayor productividad y competitividad de las economías. Fernald (1999) haciendo uso de medidas alternativas de infraestructura en 29 localidades de Estados Unidos, argumenta que el crecimiento de construcción de carreteras incide positiva y significativamente en la productividad de las firmas, principalmente, en industrias que son intensivas en la utilización de transporte.

En la última década, varios estudios han evaluado la hipótesis de que la infraestructura afecta el PIB, controlando por la potencial heterogeneidad entre economías, mediante el uso de datos de panel de países, ajustados por distintas funciones de producción de largo plazo (Torrise, 2009 y 2010). Canning & Benathan (2000) encuentran que las variables de capacidad de generación eléctrica y largas distancias de pavimentación de caminos son preponderantes en el crecimiento económico de largo plazo. Esfahani & Ramírez (2003), luego de controlar por la causalidad al incluir rezagos de las variables infraestructura pública y producción, no descartan la importancia que tiene la infraestructura pública sobre el producto agregado. Por su parte, Calderón & Servén (2004), en un estudio de panel que incluye a los países de América Latina, Asia del Este y el Pacífico, estiman que la infraestructura –medida por el volumen de stocks y calidad de su servicio– tiene un impacto positivo y significativo sobre el PIB. Dichos autores, luego de utilizar varias técnicas de estimación con variables instrumentales para aliviar los problemas de endogeneidad, encontraron que el acervo de la infraestructura de mejor calidad no sólo ayuda a mejorar el desempeño de la actividad económica, sino que además contribuye ampliamente a disminuir la desigualdad del nivel de ingreso en la sociedad.

Si bien para el caso específico de Chile aún no hay evidencia concluyente respecto del efecto generado por el *boom* de las obras públicas concesionadas en la desigualdad del ingreso, se tiene la concepción de que el desarrollo de la infraestructura (sea esta de servicios hospitalarios, formación de capital humano, red vial, telecomunicaciones, energía, etc) es capaz de proveer las condiciones para que los habitantes de zonas marginales estén más conectados con la actividad económica del país, permitiéndoles el acceso a nuevas actividades productivas. Esto porque el desarrollo de la infraestructura también aporta positivamente al capital humano, genera oportunidades de trabajo y niveles de ingresos más altos.<sup>2</sup>

Para Toledo & Rivera (2004) y Rozas (2010) la dinámica de la relación entre el desarrollo de

---

<sup>2</sup>Estache, 2003; Estache et. al 2000; Calderón & Servén, 2004.

infraestructura pública y el crecimiento económico es relativamente transparente. Por un lado, el aumento del gasto público en infraestructura podría afectar positivamente el valor esperado de las ganancias directas e indirectas del sector privado, ya sea por su participación en la ejecución de obras –a través del fortalecimiento de acuerdos público-privado (concesiones de obras), por ejemplo– y/o por la generación de externalidades positivas asumidas por las empresas (como la disminución de los tiempos de viaje, debido a la ampliación de redes viales y mejoras en la calidad de su servicio). Los menores costos de logística para las empresas implican menores costos de producción local, dado el uso eficiente de los factores productivos. La mayor rentabilidad del mercado induce la inversión y por lo tanto el crecimiento económico que, bajo ciertas condiciones de mejor calidad y accesibilidad a los servicios de infraestructura, es posible reducir la desigualdad del ingreso (Calderón & Servén, 2004).<sup>3</sup> Por otro lado, el crecimiento económico a su vez implica un aumento de la demanda de servicios de infraestructura, generándose mayores requerimientos o necesidades de inversión en la industria. De este modo, la evidencia empírica da cuenta de una relación positiva y significativa entre el PIB y la inversión en infraestructura, pero no es del todo concluyente respecto de la dirección de causalidad entre ambas variables (Rozas, 2010; Rozas & Sanchez, 2004; Canning & Pedroni, 1999).

En Chile, Rivera & Toledo (2004), a partir de los trabajos de Glomm & Ravikumar (1994) y Yoke (2001), sostienen que si bien existe una relación estadística entre el capital público (sin concesiones) y el PIB, ésta carece de consistencia para el período analizado (1975-2000).<sup>4</sup> En este contexto, la estimación del efecto de la infraestructura pública en el crecimiento económico de largo plazo y el sentido de la causalidad continúa siendo un tema abierto al debate. A pesar de ello, un número significativo de estudios a nivel mundial, usando diferentes tipos de muestra y técnicas de estimación, no rechazan la tesis de que la mayor infraestructura explica, en parte, el mayor crecimiento económico de largo plazo. De hecho, varios autores sostienen que los países que han experimentado tasas de crecimiento mayores, justamente son aquellos que no sólo han destinado una mayor proporción del PIB al desarrollo de infraestructura, sino que ésta ha sido más estable en el tiempo.

En el plano de la política económica, el creciente interés por estudiar este fenómeno constituye un gran aporte para comprender el impacto, en materia de desarrollo económico, de los ajustes del presupuesto público en infraestructura. Principalmente, en la actual situación internacional en que las presiones de consolidación de las cuentas fiscales de varias economías industrializadas, podrían

---

<sup>3</sup>Otros trabajos citados son: Morrison & Schwartz, 1996; Gausch & Kogan, 2001; CEPAL, 2004.

<sup>4</sup>No obstante, tales autores concluyen que en el largo plazo la elasticidad infraestructura pública del PIB es 0,16 %, i.e., por cada 10 puntos porcentuales que aumenta la inversión pública en infraestructura, el PIB crece 1,6 puntos porcentuales.

generar recortes de la tasa de inversión en infraestructura relativa al PIB. Esta situación podría semejarse a la experiencia de los años 80's, cuando a raíz de la crisis de deuda se observaron importantes recortes presupuestarios para la acumulación de capital público, con el consecuente impacto en el PIB potencial mundial. De este modo, en los últimos años la infraestructura continúa captando mayor atención tanto desde el ámbito académico como político. Por lo que, dado su impacto en materia de crecimiento y desarrollo económico, la política de inversión en infraestructura pública en Chile debe internalizar una mirada estratégica de más largo plazo que maximice el crecimiento, evitando así reaccionar tardíamente a la creciente demanda por nueva y mejor infraestructura pública.

El objetivo principal del presente documento es proveer, a partir de una evaluación empírica, una actualización del orden de magnitud de la sensibilidad del PIB a los cambios marginales del nivel de gasto en infraestructura pública (incluyendo la inversión en concesiones neta de gastos administrativos), i.e., se aproxima a grandes rasgos qué fracción del crecimiento del PIB es explicado por un cambio marginal de la inversión en infraestructura pública nacional durante el período 1960-2010 y su repartición o distribución a nivel regional. En efecto, la principal originalidad del presente trabajo respecto de otras publicaciones es que, por una parte, se utiliza información estadística actualizada en la medición de la elasticidad *infraestructura pública-PIB* de largo plazo, lo que permite medir la reacción del PIB a cambios del gasto en infraestructura pública –incluyendo el gasto de concesiones de obras, neto de gastos administrativos. Mientras que por otro lado, se innova en la estimación de la distribución a nivel regional de la elasticidad de largo plazo de la *infraestructura pública-PIB*.

Para este propósito, el enfoque metodológico considera la estimación de una función generalizada de producción (función de elasticidad constante, CES), para luego contrastar la hipótesis de que ésta (la función CES) colapsa en una estructura funcional de tipo *Cobb Douglas* –intensamente usada en estudios internacionales. Este procedimiento está basado en los trabajos de Hoff (2004) y Henningsen & Henningsen (2011). Cabe señalar que, a diferencia del trabajo de Rivera & Toledo (2004), aquí la variable infraestructura se mide como gasto de inversión en obras públicas, por lo que ésta incluye tanto el gasto de origen público como el concerniente a concesiones (financiamiento privado de obras públicas). Adicionalmente, este trabajo provee una herramienta estadística para estimar el aporte de la inversión en infraestructura regional en el PIB, a partir de la desagregación de la serie de elasticidad *infraestructura-PIB* (obtenida de la estimación por Filtro de Kalman de una función de producción con coeficiente variable). Para obtener la desagregación regional se utilizan dos indicadores parciales de actividad sectorial (despachos de cemento y empleo del sector construcción) que sirven como instrumentos relativos a la infraestructura observados en cada región. El método de esti-

mación está basado en el modelo originalmente propuesto por Chow y Lin (1971), pero en su versión modificada que permite transformar o desagregar un dato nacional de la relación *Infraestructura-PIB* en datos regionales.

La presente investigación se divide en seis secciones: la primera corresponde a la introducción; la segunda sección aborda el modelo económico y la estrategia de estimación; la tercera sección analiza la base de datos con sus distintas fuentes; en la cuarta sección se discuten los resultados; la quinta sección muestra los resultados de la desagregación a nivel regional de la elasticidad *Infraestructura-PIB* y la última sección, concluye.

## 2. El Modelo

Para modelar la relación de largo plazo entre el crecimiento de la infraestructura pública y el comportamiento económico agregado, en primer lugar, se opta el enfoque de funciones de producción basado en la metodología usada por la extensa literatura económica internacional que aborda este tema (Ver sección 1). No obstante, a diferencia de un importante número de trabajos que deciden *a priori* utilizar una estructura lineal (modelo *log-log*) de la función de producción *Cobb Douglas*, aquí primero se evalúa empíricamente la especificación de una función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES) –con tasa de progreso técnico sesgada o neutral exógena en el sentido de Harrod– y linealizada mediante el método de aproximación lineal de primer orden de series de Taylor (método de Kmenta, 1967). El progreso técnico en el sentido de Harrod, supone que los trabajadores tienden a ser más eficientes en sus tareas laborales, afectando favorablemente la tecnología con que se combinan los factores productivos. En este caso el trabajo es medido en términos de unidades de eficiencia en lugar de número de trabajadores. Asimismo, se demuestra (en el Anexo 2. de este documento) que especificaciones anidadas de la forma funcional lineal inicialmente propuesta, pueden derivarse de funciones de producción CES con tasa de progreso técnico neutral exógeno en el sentido de Hicks –la cual postula que los cambios tecnológicos a lo largo del tiempo pueden afectar a todos los factores productivos utilizados.

Conceptualmente la función CES representa un modelo de regresión intrínicamente no lineal respecto de las variables y los parámetros; fue desarrollada en 1961 por Arrow, Chenery, Minhas y Solow. La estructura de este tipo de modelo constituye una generalización de funciones de producción que, bajo ciertas condiciones de sustitución y de rendimientos a escala de los factores productivos, se



deriva la función de producción de *Cobb-Douglas* –intensamente utilizada en la literatura económica, debido a lo simple que resulta su linealización e interpretación.

La idea principal de este enfoque de funciones de producción, aplicado al análisis sectorial, se basa en los trabajos de Eberts (1986) y Ascheur (1989), en el sentido de que la mayor dotación de infraestructura podría definir la base tecnológica para lograr una combinación más eficiente de los factores productivos. Por lo que la infraestructura puede ser considerada como un insumo tecnológico que contribuye al crecimiento económico de largo plazo. Así, con el propósito de definir un modelo del cual podamos estimar la relación de largo plazo entre el gasto en obras públicas (incluida la inversión en concesiones) y PIB, se incluye como factor tecnológico en la función CES el financiamiento público-privado de obras de infraestructura pública. Formalmente, la ecuación [1] describe la función de producción CES, la cual supone que la elasticidad de sustitución es constante pero no necesariamente igual a la unidad. Por lo que captura la posible heterogeneidad de los procesos de producción en la industria. Al respecto, cabe señalar que la consistencia de los resultados obtenidos a partir de la estimación de este modelo, está sujeta a que efectivamente exista una relación de largo plazo entre la combinación de insumos productivos y el PIB. En términos econométricos, se debe cumplir que el conjunto de variables consideradas como exógenas cointegren con la variable endógena del modelo de regresión. Esto último permite definir una relación de equilibrio en sentido estadístico entre las variables económicas, por lo que las desviaciones entre el PIB y sus fundamentos de largo plazo corresponden a desequilibrios de corto plazo o desviaciones transitorias.

La función de producción *CES* con tasa de progreso técnico en el sentido de Harrod posee la siguiente expresión:

$$Y_t = \gamma \tilde{G}_t^\theta \left[ \delta K_t^{-\rho} + (1 - \delta) ((1 + r)^t L_t)^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}} e^{\mu t} \quad (1)$$

$$\tilde{G}_t = \frac{G_t}{K_t^\phi ((1 + r)^t L_t)^{1-\phi}}$$

$$G_t = G_t^d + C_t$$

Donde  $Y_t$  es la cantidad producida (correspondiente al PIB en millones de pesos de 2003) en el instante  $t$ ;  $G_t^d$  y  $C_t$  son el gasto público directo en infraestructura públicas y el gasto en obras públicas concesionadas, respectivamente;  $K$ ,  $L$  y  $\tilde{G}$  son los insumos productivos en la función CES y representan el nivel de stock de capital privado, nivel de empleo nacional y la productividad de la inversión en infraestructura de origen público –la cual a su vez se define como la relación entre el

gasto de inversión en infraestructura pública y la combinatoria de los insumos productivos utilizados (capital y mano de obra). Esta expresión permite ajustar la función de producción por el efecto de ciclo económico en el origen de la demanda de capital y trabajo. Particularmente, el efecto de ciclo económico (también llamado efecto congestión) supone que la disponibilidad (o utilización) de los servicios de infraestructura puede aumentar o disminuir, según el estado por el que transite el ciclo de la economía (basado en el trabajo de Rivera & Toledo, 2004). Por su parte,  $\gamma$  es el parámetro que mide el grado de eficiencia con que se combinan los factores productivos ( $K$ ,  $L$ ,  $G$ ) para obtener un determinado nivel de producto (PIB);  $\delta$  y  $\theta$  son los parámetros de distribución o preponderancia de los factores capital, trabajo e infraestructura;  $\nu$  es el coeficiente que mide el rendimiento a escala de los factores utilizados;  $\rho$  es el parámetro de sustitución de los factores utilizados;  $r$  es la tasa de progreso tecnológico neutral en el sentido de Harrod; y  $\mu$  es la perturbación estocástica centrada en el origen y con varianza constante.

Tomando logaritmo neperiano a ambos miembros de [1] y aplicando el método de Kmenta (1967)<sup>5</sup> –basado en el desarrollo de series de Taylor– es posible obtener la siguiente aproximación lineal de primer orden de la ecuación [1] en torno a  $\rho = 0$ :

$$\ln Y_t = h(G_t, K_t, L_t, t) + \rho\nu(1 - \delta)\delta \left[ -\frac{1}{2} \{ \ln K_t - \ln L_t - t \ln(1 + r) \}^2 \right] + \mu_t \quad (2)$$

$$h(G_t, K_t, L_t, t) = \left\{ \begin{array}{l} \ln \gamma + \theta \ln G_t + (\nu\delta - \phi\theta) \ln K_t + \\ (\nu(1 - \delta) - \theta(1 - \phi)) \ln L_t + t(\nu(1 - \delta) - \theta(1 - \phi)) \ln(1 + r) \end{array} \right\}$$

La ecuación [2] se puede dividir en dos partes, la función  $h(G_t, K_t, L_t, t)$  puede ser reparametrizada para obtener una función de tipo *Cobb Douglas* linealizada (modelo *log-log*) con tendencia determinística, mientras que el remanente constituye un término de corrección cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Por lo que de existir una relación de largo plazo (relación de cointegración en términos estadísticos) entre las variables del modelo, la ecuación [2] puede ser estimada en base a la forma funcional [4]:

- Si  $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow$  CES:

$$\ln Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln G_t + \alpha_3 \ln K_t + \alpha_4 \ln L_t + t\alpha_5 + \alpha_6 \left[ -\frac{1}{2} \{ \ln K_t - \ln L_t - t\alpha_7 \}^2 \right] + \mu_t \quad (3)$$

- Si  $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow$  *Cobb Douglas* linealizada con tendencia determinística. Al respecto cabe señalar que esta forma funcional puede ser obtenida a través de la reparametrización de la aproximación

---

<sup>5</sup>Para mayor detalle de la demostración, ver Anexo 2 al final del presente documento.

de primer orden de series de Taylor (método Kmenta, 1967) de una función CES con progreso técnico en el sentido de Hicks (Ver Anexo 2).

$$\ln Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln G_t + \alpha_3 \ln K_t + \alpha_4 \ln L_t + t\alpha_5 + \mu_t \quad (4)$$

Para evaluar si la función que se adecúa a la realidad chilena es CES o su versión particular de *Cobb-Douglas* con tendencia, es necesario identificar qué restricción deben cumplir los parámetros del modelo [3] con relación al modelo [2]. Teóricamente, una función *Cobb-Douglas* resulta cuando el parámetro  $\rho$  converge cero ( $\rho \rightarrow 0$ ), en tal caso se dice que no es posible producir usando capital sin trabajo (o viceversa). En otras palabras, se requiere de la combinación de todos los factores para obtener un determinado nivel de producción. Lo anterior implica una transformación de la función [3] de tal forma que disminuye el número de incógnitas del modelo, lo que da lugar al reemplazo de una función CES por una función de *Cobb Douglas*. Por otro lado, si además el rendimiento a escala de los factores es constante y tendiente a uno ( $\nu \rightarrow 1$ ), i.e, si un aumento de una unidad de capital y trabajo, respectivamente, implican un aumento de una unidad de producto, entonces la expresión [3] puede experimentar una transformación adicional que, además de simplificarla, hace posible la interpretación de los resultados en términos del número de trabajadores (per-cápita), como se verá más adelante. Todo lo anterior es posible evaluar a partir del siguiente sistema que resulta de la comparación de los parámetros de las ecuaciones [2] y [3]. El parámetro  $\nu$  puede ser identificado a partir del siguiente sistema:

Ecuaciones		Solución
$\alpha_2 = \theta$		$\theta = \alpha_2$
$\alpha_3 = \nu\delta - \phi\theta$		$\alpha_3 = \nu\delta - \phi(\alpha_2)$
$\alpha_4 = \nu(1 - \delta) - \theta(1 - \phi)$	$\alpha_4 = \nu - (\alpha_2) - \underbrace{(\nu\delta - \phi(\alpha_2))}_{\alpha_3}$	$\nu = \sum_{i=1}^3 \alpha_i$

Con relación al parámetro  $\rho$ , al ser parte de la relación  $\alpha_6 = \rho\nu(1 - \delta)\delta$ , basta con que  $\alpha_6$  sea igual a cero para que  $\rho$  sea cero. Por lo tanto si  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$  y  $\alpha_6 = 0$ , la función de producción CES [2] puede ser expresada como una función de producción *Cobb-Douglas* en términos del número de trabajadores.

$$\ln \left[ \frac{Y_t}{L_t} \right] = \ln \gamma + \theta \ln \left[ \frac{G_t}{L_t} \right] + (\delta - \phi\theta) \ln \left[ \frac{K_t}{L_t} \right] + t(1 - \delta - \theta(1 - \phi)) \ln(1 + r) + \mu_t \quad (5)$$

Y su representación en forma reducida es:

$$\ln \left[ \frac{Y_t}{L_t} \right] = \alpha_1 + \alpha_2 \ln \left[ \frac{G_t}{L_t} \right] + \alpha_3 \ln \left[ \frac{K_t}{L_t} \right] + t\alpha_4 + \mu_t \quad (6)$$

De esta forma, si el modelo es de crecimiento endógeno, entonces  $\delta + \theta(1 - \phi) = 1$  y  $(1 - \delta - \theta(1 - \phi))\ln(1 + r) = 0$  en el modelo [5]. En este caso la economía crece a una tasa constante en el largo plazo y la variable de innovación tecnológica es determinada dentro del propio sistema. Por lo que la hipótesis a contrastar es  $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 0$  en el modelo reparametrizado [6]. De este modo, un gasto público en infraestructura estratégico, es decir, aquel que busca maximizar el crecimiento económico anticipando la demanda futura (en lugar de ir respondiendo rezagadamente a la demanda por nueva y mejor infraestructura), contribuiría significativamente al mayor crecimiento del PIB. Por el contrario, si  $(\delta + \theta(1 - \phi) < 1$  y  $(1 - \delta - \theta(1 - \phi))\ln(1 + r) \neq 0$ ) en el modelo [5] o lo que es lo mismo  $\alpha_2 + \alpha_3 < 1$  y  $\alpha_4 \neq 0$  en el modelo [6], entonces el comportamiento del PIB en Chile puede ser ajustado por un modelo de crecimiento exógeno, es decir, los fundamentos del progreso tecnológico –que contribuyen al mayor crecimiento económico– provienen principalmente de fuentes externas relativo al acervo de los factores productivos (incluyendo la inversión en infraestructura pública).

## 2.1. Estrategia de Estimación

*A priori* el enfoque de funciones de producción suponen que la infraestructura causa el crecimiento económico y no en sentido contrario. Sin embargo, la mayor renta también podría implicar una mayor demanda de servicios de infraestructura. En este caso, la dirección de causalidad iría en ambos sentidos. Por lo que, descartar tempranamente la posible existencia de *bicausalidad* entre ambas variables podría generar estimaciones sesgadas respecto del efecto de la infraestructura pública en el producto agregado de la economía. Es decir, podríamos hablar de efectos *spillover* cuando en realidad no fue así ó simplemente subestimar la medida de impacto real. Para evitar tales problemas de sesgo, recurriremos a la estimación de un modelo de corrección de errores, siempre y cuando se identifique una relación de cointegración entre las variables del modelo (PIB, empleo, stock de capital y gasto en infraestructura pública). Para ello, se aplicará el procedimiento bietápico de Engel y Granger, estimando una estructura dinámica de regresión y utilizando como variable explicativa los residuos obtenidos de la regresión estática. Stock (1987) sostiene que los estimadores *OLS* de una regresión cointegradora son *superconsistentes*, ya que los parámetros del vector de cointegración convergen en probabilidad a sus verdaderos valores a una tasa de  $O_p(T)$ , mayor a la tasa de convergencia clásica  $O_p(T^{\frac{1}{2}})$ . Además, la consistencia de las estimaciones se mantienen asintóticamente independiente de la variable que se use como dependiente, e.i., se puede optar por distintas normalizaciones del vec-

tor de cointegración, sin que ello altere las buenas propiedades estadísticas de los estimadores. Sin embargo, en muestras pequeñas la estimación del vector de cointegración por *OLS* estático no sólo podría ser sesgado, sino que la función de distribución límite de los estimadores tiende a distanciarse de una normal.

Para enfrentar este problema, los parámetros de la regresión cointegradora son estimados con el método *Fully Modified OLS (FMOLS)*, propuesto por Phillips & Hansen (1990). Tales autores emplean una corrección semi-paramétrica para eliminar los problemas generados por la correlación de largo plazo entre residuos de la regresión cointegradora y las innovaciones del sistema de ecuaciones de los regresores. Formalmente, se considera la siguiente representación triangular estándar de un modelo de regresión lineal que supone la existencia de cointegración entre las variables.

$$y_{t(1 \times 1)} = \mathbf{X}'_{t(1 \times m)} \beta_{(m \times 1)} + \mathbf{D}'_{1t(1 \times n_1)} \gamma_{(n_1 \times 1)} + \mu_{1t(1 \times 1)} \quad (7)$$

$\mathbf{D}'_{1t}$  es un vector de variables exógenas (variables de tendencias determinísticas), el vector  $(y_t, \mathbf{X}'_t)$  está conformado por procesos estocásticos integrados de orden  $d \geq 1$ , y  $\mu_{1t}$  es la perturbación estacionaria o integrada de orden cero  $I(d = 0)$ . Por lo que  $\mu_{1t}$  resulta de una combinación lineal de series con el mismo orden de integración ( $d \geq 1$ ); siendo  $(1, -\beta', -\gamma)'$  el vector de cointegración. En segundo lugar, la especificación triangular aquí propuesta supone que  $\mathbf{X}'_t$  es gobernado por el sistema de ecuaciones que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{t(m \times 1)} &= \Pi'_{21(m \times n_1)} \mathbf{D}_{1t(n_1 \times 1)} + \Pi'_{22(m \times n_2)} \mathbf{D}_{2t(n_2 \times 1)} + \eta_{t(m \times 1)} \\ \mu_{2t(m \times 1)} &= \Delta_1 \eta_{t(m \times 1)} \end{aligned} \quad (8)$$

Donde  $\mathbf{D}_{1t(n_1 \times 1)}$  y  $\mathbf{D}_{2t(n_2 \times 1)}$  son vectores de regresores exógenos. Nótese que  $\mathbf{D}'_{1t}$  está incluido en las dos estructuras de ecuaciones [7] y [8], mientras que  $\mathbf{D}'_{2t}$  está contenido en el sistema de regresores [8] pero excluida de la ecuación cointegradora [7]. De este modo, si una variable como la constante está presente en el modelo, ésta pertenece sólo al vector  $\mathbf{D}'_{1t}$ . En el Anexo 1. se ejemplifica el sesgo asintótico que se genera de la estimación por *OLS* estático y su corrección basada en una versión simplificada del método *FMOLS*.

Por último, se evalúa la especificación de un modelo VAR con vector de corrección de errores, identificado a partir del test de Johansen. Este último es un método alternativo para identificar una o más relaciones cointegradoras respecto del procedimiento propuesto inicialmente por Engel & Granger.

Antes de estimar el efecto de largo plazo del gasto *público-privado* en infraestructura pública a través del enfoque metodológico propuesto en la sección 2, es necesario corroborar la existencia de una relación de equilibrio entre el PIB y las variables inputs de la función de producción linealizada. En Economía, una situación de equilibrio tiene un amplio significado, sin embargo aquí nos referiremos al equilibrio en el sentido estadístico que implica movimientos relativamente sincronizados entre el PIB y sus variables explicativas (también llamada relación de *cointegración*). De tal modo que cualquier perturbación del sistema económico será sólo de carácter transitorio. Así, como primer análisis de cointegración, esta sección analiza estadísticamente la existencia de una relación de largo plazo entre las variables basado en el método bietápico de Engel y Granger:

- El primer paso consiste en contrastar que las series sujetas al análisis sean no estacionarias o integradas  $I(d)$  de orden  $d$ .
- El siguiente paso consiste en probar estadísticamente si alguna combinación de estas variables generan un proceso estacionario  $I(0)$ . En cuyo caso, diremos que existe cointegración, condición necesaria y suficiente para obtener estimadores superconsistentes de los modelos económicos planteados en la sección anterior.

### 3. Los datos

Las principales variables en las que se basa el presente estudio son: PIB, empleo, stock de capital e inversión en infraestructura pública, todas con frecuencia anual desde 1960 hasta 2010. El PIB (output) de la economía está expresado en millones de pesos de 2003 y corresponde a las cifras empalmadas de cuentas nacionales del Banco Central de Chile, según la compilación de referencia de Cuentas Nacionales 2003. Por su parte, el empleo (input de producción nacional) es medido en miles de trabajadores y publicado periódicamente por el INE. Cabe indicar que –en el desarrollo del presente documento– la estadística de ocupados constituye una serie empalmada, debido al cambio metodológico implementado por el INE a partir de febrero de 2010. Otro factor de producción utilizado es el stock de capital (a precios constantes de 2003) y cuya elaboración está basada en el método de inventarios perpetuos.

Por último, el gasto en construcción asociado al desarrollo de infraestructura pública (también medido en millones de pesos de 2003) forma parte del set de factores (inputs) productivos que explican el crecimiento del PIB. Esto porque, presuntamente, la creación de infraestructura pública

contribuye al uso eficiente de los recursos disponibles por parte del sector privado, lo que a su vez incide en el comportamiento del PIB. Al respecto, Rivera y Toledo (2004) plantean el siguiente ejemplo: las inversiones viales pueden implicar la disminución de los costos de transporte de las firmas, y con ello una caída en los costos totales de producción, las inversiones en obras de riego permiten mejorar la productividad de ciertos campos cultivables vía lo que se denomina seguridad de riego, las inversiones en puertos pueden disminuir los costos de exportación, etc. De este modo, es razonable pensar que la inversión en obras públicas podría semejar un insumo tecnológico -que aporta a la capacidad productiva por medio de externalidades asumidas por las firmas- y con ello, permitir a la economía alcanzar nuevas fronteras de producción.

A diferencia de otros trabajos, el presente estudio considera la inversión real en infraestructura pública como la suma de la inversión real del MOP (proyectos y transferencias de capital al Metro), inversión en infraestructura del MINVU (en materia de vialidad urbana y pavimentación), gasto en infraestructura del Ministerio del Interior (FNDR, Mejoramiento Urbano, Fondo Social), gasto en construcción de establecimientos públicos (referente a educación, salud, justicia e instituto del deporte), transferencias de capital a ferrocarriles (FFCC), inversión en obras de riego y dirección general de aeronáutica civil (D.G.A.C).

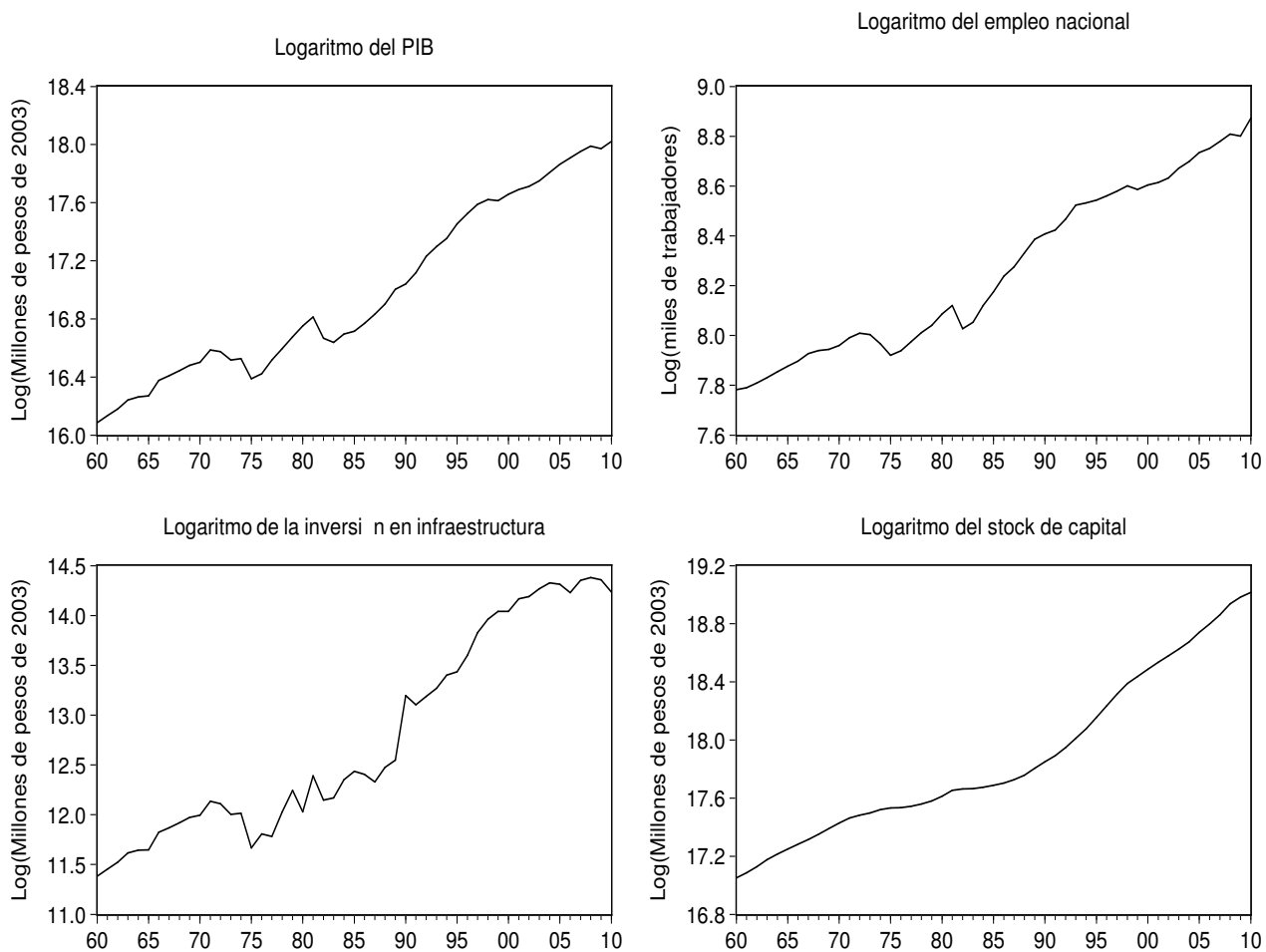
Por otro lado, la inversión en infraestructura pública muestra un importante aumento de su nivel a partir de 2006 –coherente con la política de mayores alzas de la inversión en infraestructura vial (ítem de mayor preponderancia en el gasto del MOP) y las nuevas asignaciones presupuestarias del APR (agua potable rural). En este contexto, existe la posibilidad de que la mayor acumulación de infraestructura a partir de 2006 pudo significar una reducción significativa de su déficit respecto de años anteriores, por lo que la productividad marginal del insumo estatal pudo ser menor respecto de lo observado en años previos a 2006 –toda vez que la contribución marginal del factor disminuya a medida que este último aumenta (principio de la marginalidad decreciente). No obstante, las pruebas estadísticas para verificar la existencia de un posible cambio estructural en dicho período, no son del todo concluyentes (robustas), debido a que los test de quiebre estructural pierden poder cuando el tamaño de muestra es relativamente pequeño y/o los puntos de quiebre se encuentran cerca de los extremos de la muestra.

Sin embargo, más adelante (Sección 5) se muestra que la estimación del coeficiente variable de la relación entre infraestructura pública y PIB arroja un comportamiento creciente, aunque con una aceleración moderada en la última década –en línea con la conjetura de contribución marginal decre-

ciente de la relación PIB-infraestructura.

A continuación se muestra gráficamente la evolución de los niveles de las variables descritas anteriormente.

Figura 1: PIB, empleo, stock de capital y gasto de inversión en infraestructura pública



Fuente: Elaboración propia en base a las estadísticas del BCCh e INE.

## 4. Resultados

Previo a la estimación de la relación de largo plazo entre el gasto en infraestructura pública y el PIB, se procede al estudio de las propiedades estadísticas de las variables económicas incluidas en los modelos propuestos en la sección 2. Como se mencionó antes, tales variables son: PIB, empleo, gasto



en obras de infraestructura pública y stock de capital, las cuales son analizadas tanto en su versión original como sus transformaciones (en términos por trabajador) consideradas en la aproximación lineal de los modelos. En primer lugar, todas las variables presentan una evolución creciente (media cambiante en el tiempo). En este sentido, cualquier perturbación aleatoria en las variables tiene un efecto permanente en su trayectoria.

En el análisis de series de tiempo, las variables que presentan media y varianza inestables, se les llama series *no estacionarias* o también se dice que poseen raíz unitaria. Algunos economistas atribuyen este comportamiento extraño a la consecuencia teórica del uso racional de la información disponible en el mercado.

A partir de los resultados del Cuadro 1, que muestra las pruebas tradicionales de raíz unitaria (Dickey-Fuller Aumentado y Phillips-Perron), se tiene que las variables económicas no son estacionarias, ya que en todos los casos la probabilidad (p-value) supera largamente los niveles de significancia de 5% y 10%. No obstante, al transformar las series tomando su variación anual las convierte en estacionarias. De este modo se concluye que las series son integradas de primer orden  $I(1)$ , condición necesaria para proceder a evaluar la existencia de una relación de equilibrio (o de largo plazo) entre el PIB y los insumos productivos (capital, infraestructura y empleo). Es importante aclarar que si bien el término *equilibrio* en economía es bastante amplio, en adelante nos referiremos sólo a una relación estadística estable entre las variables económicas.

Cuadro 1: *P-values* de las pruebas de raíz unitaria de las series en niveles

Variables	ADF		P-P	
	Intercepto	Intercepto y tendencia	Intercepto	Intercepto y tendencia
$\ln Y_t$	0.9681	0.6825	0.9695	0.7523
$\ln L_t$	0.9926	0.6157	0.9894	0.7745
$\ln G_t$	0.8932	0.6560	0.8932	0.6919
$\ln K_t$	0.9706	0.5735	0.9999	0.9897
$\ln(Y_t/L_t)$	0.8925	0.6668	0.8768	0.6998
$\ln(G_t/L_t)$	0.8033	0.5829	0.8033	0.6348
$\ln(K_t/L_t)$	0.9052	0.7692	0.9787	0.9446

Nota 1: Los valores corresponden a la probabilidad de no rechazo de la hipótesis nula. La hipótesis nula es que la serie tiene raíz unitaria.

Nota 2:  $\ln Y$ : logaritmo del Producto Interno Bruto (PIB);  $\ln L$ : logaritmo de ocupados;  $\ln G$ : logaritmo del gasto en infraestructura pública;  $\ln K$ : logaritmo del stock de capital;  $\ln(Y/L)$ : logaritmo del PIB por unidad de trabajador.

Fuente: Autor.

En segundo lugar, tras concluir que las series son no estacionarias (integradas de primer orden  $I(1)$ ), la estimación de los modelos propuestos en la sección 2 no arrojó suficiente evidencia estadística

de cointegración entre las variables expresadas en niveles (sin transformación en términos de unidades de trabajadores), según los estadísticos de prueba de cointegración de Engel & Granger y de Durbin & Watson –considerando los valores críticos de Sargay & Bhargava. Por lo tanto, la mayoría de los modelos del Cuadro 2, excepto los modelos 4 y 6 que fueron estimados por OLS y FMOLS, respectivamente, presentan una débil relación de equilibrio entre las variables, ya que los estadísticos de prueba de Engel & Granger resultaron significativos sólo al 10 % de significancia.

La especificación de los modelos 4 y 6 –que incluyen un quiebre de nivel entre sus variables explicativas– fue evaluado utilizando el método de Bai & Perron (1997) que permite contrastar posibles quiebres de nivel o de tendencia en la estructura de modelos multivariados de series de tiempo. Basado en el test *SupF* contra un número fijo de quiebres, se encontró un quiebre de nivel en el año 1982 –período de una significativa recesión en Chile, vinculada a la crisis de deuda de los años 80's. Así, los resultados sugieren que una especificación de nivel local podría ser apropiada para dar cuenta de la relación de largo plazo entre la infraestructura y el PIB (*cointegration with structural break*). Esto último permite realizar un nuevo filtro para identificar la mejor forma funcional entre los modelos candidatos. En efecto, el signo del coeficiente que acompaña a la variable de gasto de inversión en infraestructura pública de los modelos propuestos es coherente con lo esperado desde la perspectiva económica. Este hallazgo es coincidente tanto desde la estimación por el método *OLS* como por *FMOLS*. No obstante, este último entrega una estimación de los coeficientes marginalmente inferior a la obtenida por *OLS* –consistente con el sesgo que podría producirse en la estimación de los modelos por el método OLS estático en muestras pequeñas (Phillips & Hansen, 1990).

En línea con las estimaciones de los distintos modelos que muestran la relación entre la inversión en infraestructura pública y el PIB, se tiene que, dependiendo de la especificación del modelo y del método de estimación usado, el promedio de los valores obtenidos con relación a la elasticidad *Infraestructura-PIB* oscila en torno a 0,1 %, basado en los modelos 4 y 6 –que presentan una relación estadística entre el PIB y sus fundamentos de largo plazo al 10 % de significancia. Por ejemplo, el modelo 4 (estimado por *OLS* estático) entrega una elasticidad infraestructura pública del PIB en torno a 0,099 % (con una desviación estándar de 0,047 %), i.e, por cada 10 puntos porcentuales que aumenta el gasto en infraestructura pública (incluido el gasto de inversión en concesiones de obras públicas), el PIB se expande en promedio cerca de 1 % (con un rango que puede oscilar entre 0.1 % y 1,9 %, al 95 % de confianza). Por su parte, el modelo 6 (estimado por *FMOLS*) provee una elasticidad infraestructura pública del PIB cerca de 0,096 % (con una desviación estándar de 0,023 %), por lo que, un incremento de 10 puntos porcentuales del gasto de inversión en infraestructura pública (incluido

concesiones) podría reflejarse en un aumento del PIB de entre 0,5 % y 1,4 % (al 95 % de confianza).

Cuadro 2: Estimación de la relación de largo plazo entre la infraestructura y PIB

Dependent Variable: $LnY_t$	OLS estático [1-4]			FMOLS [5-6]		
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
Intercepto	-139.3407** (47.1595)	-100.3748** (38.3869)	-61.1193** (18.8104)	-151.9063** (42.9689)	-57.1177** (25.3309)	-152.3508** (22.7686)
$LnG_t$	<b>0.0775*</b> (0.0391)	<b>0.0821*</b> (0.0465)	<b>0.1027**</b> (0.0467)	<b>0.0986**</b> (0.0465)	<b>0.0954</b> (0.0624)	<b>0.0955**</b> (0.0230)
$LnK_t$	29.6660** (10.3795)	21.1082** (8.2110)	12.5726** (3.5829)	33.0771 (9.1586)**	11.7424** (4.8610)	33.3141** (4.9088)
$LnL_t$	-27.8111** (10.3137)	-19.4943** (8.1718)	-10.9473** (3.3967)	-31.4901** (9.0515)	-10.1395** (4.6399)	-31.7493** (4.8787)
Tendencia linea ( $t$ )	-0.4087* (0.2402)	-0.1076** (0.0871)	-0.0119** (0.0040)	-0.4433** (0.1397)	-0.0116** (0.0052)	-0.4638** (0.0836)
$(Lnk_t - LnL_t)^2$	-1.5698** (0.5751)	-1.0787** (0.4397)	-0.6187** (0.1794)	-1.7699** (0.4937)	-0.5727** (0.2462)	-1.7879** (0.2663)
$(LnK_t - LnL_t) * t$	0.0436 (0.0267)	0.0103 (0.0094)	-	0.0480** (0.0153)	-	0.0504** (0.0092)
Tendencia cuadrática ( $t^2$ )	-0.0005 (0.0003)	-	-	-0.0004** (0.0002)	-	-0.0004** (0.0001)
$Dummy_{82_t}$ (1 si $t \geq 1982$ , 0 e.o.c.)	-	-	-	-0.1122** (0.0243)	-	-0.1250** (0.0177)
Adjusted R-squared	0.9971	0.9967	0.9967	0.9981	0.9962	0.9979
Durbin-Watson stat	0.9588	0.8640	0.8248	1.6192	0.7652	1.6200
Jarque-Bera (p-vale)	0.9654	0.0874	0.0451	0.6476	0.1548	0.6375
Phillip-Perron test residuos (p-value)	0.0042	0.0069	0.0088	0.0000	0.0157	0.0000
Engel-Granger test cointegración (Ho: Series are not cointegrated) <sup>a</sup>						
tau-statistic (p-value)	0.6209	0.6044	0.5014	0.0812*	0.5120	0.0865*
z-statistic (p-value)	0.5901	0.5788	0.4810	0.0561*	0.4922	0.0608*
Observations	51	51	51	51	51	51

\*\*Significativo 5 %, \*Significativo al 10 %. [1] Aproximación lineal de primer orden de series de Taylor (Kmenta, 1967) en torno a  $\rho = 0$  de una función de producción CES (con progreso técnico exógeno en el sentido de Harrod). [2] Estimación por OLS estático del modelo [1] donde el coeficiente que acompaña a la variable  $t^2$  es igual a cero, según test  $t$ -student al 95 % de confianza. [3] Aproximación lineal logarítmica de una función de producción CES con progreso técnico en el sentido de Hicks. [4] Se añade una variable *dummy* de serie de tiempo que controla por el efecto de nivel del PIB tras la recesión de 1982 de la crisis de deuda internacional. [5] Cointegrating equation deterministic: Intercepto y Tendencia. Long-run covariance estimate (Prewhitening with lags = 1 from SIC maxlags = 3, Bartlett kernel, Newey-West automatic bandwidth = 4.6822, NW automatic lag length = 3). [5] Cointegrating equation deterministic: Intercepto y Tendencia y Tendencia cuadrática. Long-run covariance estimate (Prewhitening with lags = 1 from SIC maxlags = 3, Bartlett kernel, Newey-West automatic bandwidth = 2.4384, NW automatic lag length = 3).

<sup>a</sup> Los p-values menores al 10 % rechazan la hipótesis nula de no cointegración a favor de la alternativa de existencia de cointegración, MacKinnon (1996). Automatic lags specification based on Schwarz criterion (maxlag=10). Las estimaciones consideran la matriz HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 4.0000).

Fuente: Autor.

Por otro lado, la escasa evidencia estadística de cointegración obtenida a partir de las estimaciones de las distintas especificaciones de los modelos de regresión presentados en el Cuadro 2, limita la posibilidad de aseverar que un modelo de regresión –basado en una aproximación lineal de primer orden de series de Taylor de una función de producción CES–, resulte más apropiado que un modelo *log-log* de una función de producción *Cobb-Douglas* para estimar la relación de largo plazo entre el PIB y sus fundamentos.

A pesar de ello, se estimaron nuevas especificaciones de modelos de regresión con coeficientes restringidos, en línea con los modelos propuestos por varios trabajos internacionales que *a priori* suponen una función de producción de *Cobb Douglas* para especificar la relación de largo plazo entre el valor agregado de la economía y los insumos productivos disponibles para la producción.

Siguiendo el trabajo de Rivera & Toledo (2004) se consideró la restricción  $\rho = 0$  en la función de producción CES, discutida en la Sección 2. En otras palabras se dice que el parámetro de sustitución de los factores productivos utilizados es igual a cero, por lo que la generación de valor agregado en la economía requiere de la combinatoria de todos los factores productivos (no es posible producir usando sólo capital o sólo trabajo). Este supuesto implica que la función CES (propuesta en la Sección 2) colapsa en una función de producción del tipo Cobb-Douglas con progreso técnico neutral en el sentido de Harrod (que supone mayor eficiencia del trabajo a lo largo del tiempo). La aproximación lineal logarítmica de tal función resultante arroja un modelo de regresión basado en una función lineal de Cobb-Douglas con tres factores productivos (todos medidos en términos de trabajo efectivo) más una variable de tendencia determinística –que captura el componente exógeno del cambio tecnológico. Adicionalmente, en el análisis de cointegración se evalúa la especificación de modelos de nivel local, i.e., modelos que incluyen entre sus variables explicativas una *dummy* de cambio estructural de nivel. Esta última variable captura el efecto de la crisis de 1982 en Chile, similar a los modelos del Cuadro 2.

A continuación el Cuadro 3 muestra los resultados de las estimaciones basadas en los modelos con coeficientes restringidos.

Cuadro 3: Resultados relación de largo plazo entre la infraestructura y el PIB

	OLS [7-9]			FMOLS [10-12]		
	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
Constante	4.3183** (0.5183)	4.7113** (0.5997)	6.3982** (0.7236)	3.9665** (0.5889)	4.0651** (0.5951)	5.7319** (0.6208)
$Dummy_{82_t}$ (1 si $t \geq 1982$ , 0 e.o.c.)	-	-	-0.1260** (0.0210)	-	-	-0.0939** (0.0325)
$\ln(G_t/L_t)$	<b>0.2782**</b> (0.0286)	<b>0.2378**</b> (0.0372)	<b>0.2551**</b> (0.0311)	<b>0.2581**</b> (0.0255)	<b>0.2092**</b> (0.0349)	<b>0.2464**</b> (0.0262)
$\ln(K_t/L_t)$	0.3270** (0.0662)	0.2987** (0.0714)	0.1076 (0.0870)	0.3721** (0.0713)	0.3809** (0.0685)	0.1844** (0.0707)
Tendencia lineal	-	0.0025* (0.0013)	0.0081** (0.0013)	-	0.0019 (0.0016)	0.0061** (0.0020)
R2 (Ajustado)	0.9734	0.9752	0.9826	0.9682	0.9696	0.9791
Durbin-Watson stat	0.9985	0.9241	1.4104	0.8979	0.8053	1.2644
Jarque-Bera (P-value)	0.0938	0.2067	0.0012	0.2650	0.8067	0.1086
Phillip-Perron test residuos (p-value)	0.0020	0.0045	0.0001	0.0055	0.0129	0.0006
Engel-Granger test cointegración (Ho: Series are not cointegrated) <sup>a</sup>						
tau-statistic	0.0297**	0.1164	0.0178**	0.0349**	0.1389	0.0104**
z-statistic	0.0254**	0.1073	0.0146**	0.0275**	0.1244	0.0081**
Number of observations	51	51	51	51	51	51

\*\*Significativo 5%, \*Significativo al 10%. <sup>a</sup> Los p-values menores al 10% rechazan la hipótesis nula de no cointegración a favor de la alternativa de existencia de cointegración, MacKinnon (1996). Nota: lnY: logaritmo del Producto Interno Bruto (PIB); lnL: logaritmo de ocupados; lnG: logaritmo del gasto en infraestructura pública; lnK: logaritmo del stock de capital; ln(Y/L): logaritmo del PIB por unidad de trabajador.

Del Cuadro anterior se desprende que todos los modelos de regresión lineal estimados (desde el modelo 7 al 12) arrojaron coeficientes de elasticidad *infraestructura pública-PIB* significativos y con signo positivo, lo que es coherente con lo esperado en base a la teoría económica. Sin embargo, de acuerdo a los estadísticos de prueba de Engel-Granger, no en todas las especificaciones se halló una relación cointegradora o relación de largo plazo entre el PIB y sus fundamentos (incluido el gasto de inversión en infraestructura pública). En efecto, los modelos de nivel local con tendencia determinística (modelos [9] y [12] que incluyen el quiebre de nivel en 1982 y una variable de tendencia lineal) arrojaron un mayor ajuste y una baja probabilidad de aceptar la hipótesis nula de no cointegración (en base a los estadísticos de prueba de Engel-Granger). Este resultado es consistente con los estadísticos de Durbin y Watson respecto de los valores críticos de Sargay & Bhargava y el comportamiento estacionario de la serie de residuos de las regresiones lineales [9] y [12], según el test de Phillip-Perron. En otros términos, se dice que estadísticamente no es posible descartar una relación de equilibrio o relación de largo plazo entre el nivel de actividad económica (medido por el PIB) y la inversión en infraestructura pública. No obstante, como se puede notar en el Cuadro 3 la magnitud de las medidas de elasticidad *infraestructura pública-PIB* varió respecto de su versión anterior exhibida en el Cuadro 2 –cuando los modelos fueron estimados sin considerar mayores transformaciones en las variables y restricciones en los parámetros. Al respecto, cabe recordar que en el Cuadro 2 la escasa evidencia de cointegración impidió establecer mayores conclusiones respecto de la consistencia de

las estimaciones obtenidas. Por lo que, se procedió a estimar las especificaciones alternativas que se exponen en el Cuadro 3, siguiendo los modelos citados en trabajos internacionales, así como también en el estudio de Rivera & Toledo (2004). Así, se tiene que por cada 10 puntos porcentuales que varía el gasto en infraestructura pública (incluyendo la inversión en concesiones de obras públicas) el producto medido por unidad de trabajador se expande en torno a 2,5% (modelo [12] estimado por FMOLS), con un rango de oscilación de entre 2% y 3% (al 95% de confianza).

Cabe señalar que estas medidas de elasticidad no son del todo comparables con la estimación realizada por Rivera & Toledo (2004), ya que la variable de infraestructura utilizada por estos autores (para el período 1975-2000) difiere de la utilizada en el presente estudio. Específicamente, dichos autores no incluyen el gasto en concesiones en obras públicas, ya que el *boom* de la mayor participación privada en el desarrollo de infraestructura del Estado ocurrió durante los años 2001-2006.

A partir de estos resultados, se contrastó la hipótesis de crecimiento exógeno vs crecimiento endógeno de la economía chilena. Los estadísticos de prueba de Wald permiten concluir que la especificación de un modelo de crecimiento exógeno (o modelo de crecimiento neoclásico de Solow) sería el más apropiado para reproducir el PIB de Chile (Cuadro 5), ya que en todos los casos se rechaza la hipótesis nula  $(\alpha_2 + \alpha_3 = 1) \wedge (\alpha_4 = 0)$  a favor de la alternativa  $(\alpha_2 + \alpha_3 < 1)$  y  $(\alpha_4 \neq 0)$ .

En otras palabras, en un horizonte de tiempo relativamente largo, el modelo de crecimiento exógeno señala que la manera de alcanzar mayores niveles de producción es mediante la acumulación fija de capital (tales como maquinaria, equipos, infraestructura pública y privada). Sin embargo, la tasa de crecimiento del capital por trabajador (capital per cápita efectivo) podría frenarse e incluso ser negativa –toda vez que la tasa de crecimiento de la población sea positiva y la dotación de capital (la infraestructura vial, por ejemplo) sea insuficiente para cubrir la mayor demanda y la depreciación del mismo, lo que conlleva a un menor nivel de crecimiento económico. Por lo que el progreso tecnológico (esto es un cambio positivo en la productividad total de factores), determinado exógenamente en el modelo, requiere de un mayor nivel de capital per cápita efectivo (infraestructura por unidad de trabajador, por ejemplo), lo que a su vez permite alcanzar mayores niveles de producción (PIB). Lo anterior, necesariamente implica una mayor inversión o acumulación de capital en el largo plazo, pero con una mirada más estratégica de la política de inversión, de tal forma que su desarrollo permita satisfacer las necesidades futuras (demanda futura) en lugar de reaccionar rezagadamente a los requerimientos de la población.

Cuadro 4: Contraste de hipótesis de crecimiento endógeno versus crecimiento exógeno

	Hipótesis	Prueba de Wald (p-value)		Conclusión
		F-statistic	Chi-square	
Modelo 8	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = 0$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_4 = 0$	0.0751	0.0687	No se rechaza Ho
Modelo 9	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = 0$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_4 = 0$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
Modelo 11	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = 0$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_4 = 0$	0.2288	0.2223	No se rechaza Ho
Modelo 12	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = 0$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$	0.0000	0.0000	Se rechaza Ho
	$\alpha_4 = 0$	0.0030	0.0017	Se rechaza Ho

Nota 1: Los valores corresponden a la probabilidad de no rechazo de la hipótesis nula. La hipótesis nula es que la serie tiene raíz unitaria.  
 Nota 2: lnY: logaritmo del Producto Interno Bruto (PIB); lnL: logaritmo de ocupados; lnG: logaritmo del gasto en infraestructura pública; lnK: logaritmo del stock de capital; ln(Y/L): logaritmo del PIB por unidad de trabajador.

De la relación de cointegración es posible reformular la dinámica de corto plazo entre el producto y sus determinantes, almismo tiempo que se estima la tasa de convergencia al estado de equilibrio de largo plazo, luego de producirse perturbaciones en el sistema económico. En la ecuación de corto plazo, la variable PIB y los factores productivos (todos en términos por unidad de trabajador) son ingresados en primeras diferencias (o variación absoluta), añadiendo el residuo de la regresión cointegradora como factor explicativo de la dinámica de corto plazo del PIB. El coeficiente que acompaña al residuo de la ecuación cointegradora (desequilibrio temporal entre el PIB y sus determinantes de largo plazo), corresponde a la velocidad de ajuste hacia el equilibrio de largo plazo del sistema económico. La significancia de este coeficiente, en parte, valida las estimaciones de largo plazo realizadas anteriormente.

La siguiente tabla muestra que, tras una perturbación aleatoria, los desequilibrios de corto plazo que se producen entre la inversión en infraestructura y el PIB, tienden a ser transitorios, y su factor de corrección es en promedio 40% anual, es decir, una vez ocurrida la perturbación y suponiendo linealidad del proceso de ajuste, el tiempo que toma alcanzar nuevamente el equilibrio de largo plazo podría superar los dos años. Esto último pone en relieve la importancia de mantener, al menos, una tasa de inversión estable en el tiempo.

Cuadro 5: Dinámica de corto plazo entre infraestructura-PIB y el ajuste de largo plazo

	$MCE_{Modelo_9}$	$MCE_{Modelo_{12}}$
Constante	0.0103 (0.0062)	0.0094 (0.0066)
$\Delta \ln(\frac{Y_{t-1}}{L_{t-1}})$	0.5314** (0.1938)	0.5372** (0.2072)
$\Delta \ln(\frac{G_{t-1}}{L_{t-1}})$	-0.0548 (0.0368)	-0.0486 (0.0378)
$\Delta \ln(\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}})$	0.0589 (0.1596)	0.0805 (0.1593)
$Residuo_{t-1}$	<b>-0.4380**</b> (0.1399)	<b>-0.4072**</b> (0.1535)
$\Delta Dummy_{82_{t-1}}$	0.0286 (0.0185)	0.0200 (0.0186)
$Dummy_{75}$ (1 si $t = 1975$ , 0 e.o.c)	-0.1342** (0.0098)	-0.1366** (0.0104)

\*\*Significativo 5 %, \*Significativo al 10 %. Nota 1: Los valores corresponden a la probabilidad de no rechazo de la hipótesis nula. La hipótesis nula es que la serie tiene raíz unitaria.

Nota 2: lnY: logaritmo del Producto Interno Bruto (PIB); lnL: logaritmo de ocupados; lnG: logaritmo del gasto en infraestructura pública; lnK: logaritmo del stock de capital; ln(Y/L): logaritmo del PIB por unidad de trabajador.

Adicionalmente, se estima un sistema dinámico de ecuaciones simultáneas (modelo VAR) para describir la relación de corto plazo entre el PIB y los factores de producción por unidad de trabajador. La estimación del VAR considera un vector de cointegración o relación de largo plazo entre el producto y sus determinantes expresados en términos per cápita efectivo, en línea con los hallazgos de cointegración a partir de la estimación de los modelos [9] y [12] del Cuadro 3. El modelo arrojó una significativa tasa promedio de convergencia de 34,3 % anual, cifra coherente con el orden de magnitud obtenido en estimaciones previas. De este modo, se concluye que, en el largo plazo, el tiempo que tardan las variables económicas en alcanzar una relación de equilibrio, luego de ocurrida una perturbación aleatoria en el sistema, podría superar los dos años. Sin embargo, la elasticidad *infraestructura pública-PIB* de largo plazo es algo menor a sus símiles obtenidas en base a la aplicación de otras metodologías (OLS estático y FMOLS), en las que no se consideró la estimación conjunta de un sistema dinámico de ecuaciones simultáneas para modelar la relación de corto y largo plazo entre las variables económicas. Por lo que, en este caso particular de la estimación del modelo VAR con vector de corrección de errores, la medida de elasticidad de largo plazo fue 0,17 %, es decir, por cada 10 % que aumenta la inversión en infraestructura pública, el PIB crece 1,7 % con un intervalo de confianza al 95 % de 1,1 % a 2,3 %.



Cuadro 6: Resultados relación de largo plazo entre la infraestructura y el PIB

Cointegrating Eq:	CointEq1		
$\ln(\frac{Y_{t-1}}{L_{t-1}})$	1		
$\ln(\frac{G_{t-1}}{L_{t-1}})$	<b>-0.1661**</b>		
	(0.0281)		
$\ln(\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}})$	-0.2762**		
	(0.0706)		
<i>Dummy</i> <sub>82t-1</sub>	0.0661**		
	(0.0291)		
Tendencia lineal	-0.0071**		
	(0.0014)		
Constante	-5.1663		
Error Correction:	$\Delta \ln(\frac{Y}{L})$	$\Delta \ln(\frac{G}{L})$	$\Delta \ln(\frac{K}{L})$
CointEq1	<b>-0.3428**</b>	0.8614	0.5071**
	(0.1586)	(0.6473)	(0.1146)
$\Delta \ln(\frac{Y_{t-1}}{L_{t-1}})$	0.5249**	0.6979	-0.2276
	(0.1898)	(0.7746)	(0.1372)
$\Delta \ln(\frac{G_{t-1}}{L_{t-1}})$	-0.0268	-0.3443**	0.0761**
	(0.0358)	(0.1462)	(0.0259)
$\Delta \ln(\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}})$	0.1725	-0.5510	0.1954
	(0.1696)	(0.6923)	(0.1226)
$\Delta$ <i>Dummy</i> <sub>82t-1</sub>	0.0074	0.1095	-0.0677**
	(0.0353)	(0.1441)	(0.0255)
Constante	0.0078	0.0505	0.0150**
	(0.0069)	(0.0281)	(0.0050)
<i>Dummy</i> <sub>75</sub> (1 si $t = 1975$ , 0 e.o.c)	-0.1422**	-0.3154**	0.0476*
	(0.0348)	(0.1418)	(0.0251)
Adj. R-squared	0.2371	0.2082	0.5430
F-statistic	3.4863	3.1033	10.507
Log likelihood	103.28	34.362	119.19
Schwarz SC	-3.6594	-0.8465	-4.3090
Det. resid cov. (dof adj.)		0.0000	
Log likelihood		304.47	
Schwarz criterion		-9.8062	

\*\*Significativo 5 %, \*Significativo al 10 %. Nota 1: Los valores corresponden a la probabilidad de no rechazo de la hipótesis nula. La hipótesis nula es que la serie tiene raíz unitaria.

Nota 2: lnY: logaritmo del Producto Interno Bruto (PIB); lnL: logaritmo de ocupados; lnG: logaritmo del gasto en infraestructura pública; lnK: logaritmo del stock de capital; ln(Y/L): logaritmo del PIB por unidad de trabajador.

## 5. Desagregación a nivel regional de la elasticidad infraestructura pública del PIB

A nivel regional el análisis econométrico de la relación de largo plazo entre la inversión en infraestructura pública (incluyendo las obras concesionadas) aún no ha sido mayormente abordada por los trabajos de investigación en Chile, debido principalmente a la falta de información estadística fiable y comparable entre regiones. Pese a ello es de gran utilidad para el diseño de política económica contar con una medida del aporte que hace la dotación de capital público para el desarrollo de la

infraestructura regional al crecimiento económico nacional. Principalmente porque su medición sistemática constituye una necesidad imperiosa al momento de asignar eficientemente los recursos para el desarrollo de obras públicas que contribuyan a maximizar la renta per cápita de manera sostenida, y simultáneamente disminuir la desigualdad en materia de desarrollo económico entre regiones.

Con el propósito de estimar la participación de la actividad en obras de infraestructura pública regional en la elasticidad de *infraestructura pública-PIB*, se aplican dos procedimientos estadísticos frecuentemente utilizados para el análisis de series de tiempo. El primero consiste en la estimación por filtro de Kalman del coeficiente de elasticidad *infraestructura pública-PIB* –el cual se asume variable en el tiempo, coherente con la presunción de la marginalidad decreciente. Para ello, la función de producción de Coob-Douglas linealizada –que relaciona el PIB con el gasto en infraestructura pública y los factores tradicionales de producción– es representada como un sistema de estado-espacio. El segundo procedimiento, basado en el método de desagregación temporal de Chow & Lin (1971), permite distribuir dicha medida de elasticidad entre las antiguas trece regiones. Para ello se utilizan indicadores parciales de desagregación temporal disponibles en cada región: los despachos de cemento, cuya fuente es el instituto chileno del cemento y el hormigón; y empleo del sector construcción, publicado por el INE. Ambas variables reflejan, aunque parcialmente, el estado de la actividad del subsector infraestructura. Lamentablemente no disponemos de mayor información que permita hacer la distinción del origen (público/privado) de la demanda de cemento y la contratación de mano de obra, y qué proporción de cada insumo es con destino a obras de edificación versus obras civiles y de ingeniería. Por lo que, los resultados obtenidos en el este apartado constituyen sólo una primera aproximación de la distribución regional de la sensibilidad del PIB a la mayor inversión en infraestructura pública.

Formalmente, se supone que la dinámica de la variable de estado (medida de elasticidad *infraestructura pública-PIB*) sigue un proceso de caminata aleatoria sin deriva, técnicamente se refiere a un modelo de nivel local. De esta forma el sistema de estado-espacio a estimar tiene la siguiente representación matemática:

$$\ln \left[ \frac{Y_t}{L_t} \right] = Z_t \zeta_t + \mu_t \quad \text{var}(\mu_t) = \sigma_\mu \quad (9)$$

$$\zeta_t = \zeta_{t-1} + \tau_t \quad (10)$$

$$Z_t = \left[ 1 \quad \ln \left[ \frac{G_t}{L_t} \right] \quad \ln \left[ \frac{K_t}{L_t} \right] \quad \text{Dummy}_{s2t} \right] \quad (11)$$

$$\zeta_t = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{2t} \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\tau_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{var}(\tau_{1t}) = \sigma_{\tau_{1t}} \quad (13)$$

Los resultados de la estimación se muestran en el cuadro 8. La estimación permite obtener una serie de tiempo para la variable de elasticidad *infraestructura pública-PIB* a nivel nacional, la cual será distribuída en cada región a través del método de desagregación de Chow-Lin (1997).

Cuadro 7: Estimación del sistema de estado-espacio

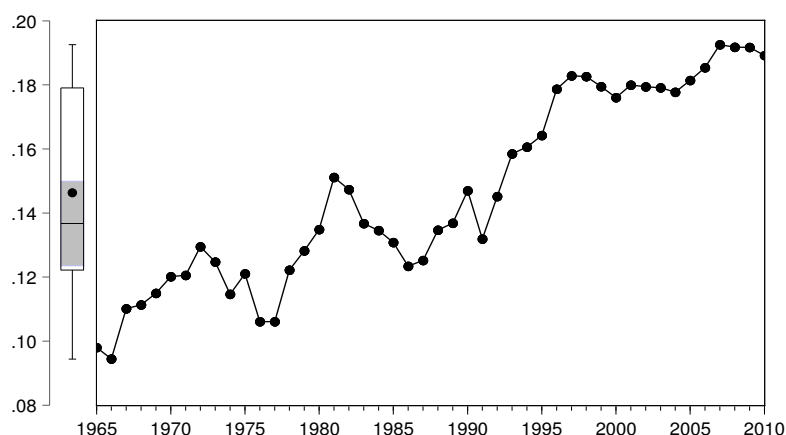
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
$\alpha_1$	8.60149	1.19331	7.20811	0.00000
$\alpha_3$	-0.04374	0.11887	-0.36800	0.71290
$\alpha_4$	-0.05722	0.08257	-0.69308	0.48830
$\sigma_\mu$	1.2E-12	1.2E+08	0.00000	1.00000
$\sigma_\eta$	6.0E-05	0.38569	-25.2131	0.00000
$\gamma$	0.00329	0.00112	2.93745	0.00330
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
$\alpha_{2t}$	0.20234	0.00773	25.7431	0.00000
Log likelihood	88.1055	Akaike info criterion		-3.21982
Parameters	6	Schwarz criterion		-2.99255
Diffuse priors	1	Hannan-Quinn criter.		-3.13298

Fuente: Elaboración propia.

Del cuadro anterior se desprende que durante 2010 la relación entre el PIB y la inversión en infraestructura pública nacional arroja una medida de elasticidad entre 0,18 y 0,21 al 95 % de confianza. Esto significa que por cada 10 % de crecimiento de la inversión en infraestructura pública (incluyendo la inversión de concesiones de obras), el producto se expande en un rango de 1,8 % y 2,1 % –cifras que resultan concordantes con las obtenidas en estimaciones previas. Por otra parte, la Figura 2 muestra que, a diferencia de lo supuesto en modelos anteriores, la medida de elasticidad *infraestructura pública-PIB* no ha sido constante en el tiempo. La participación de la dotación de capital público en el PIB exhibe una evolución creciente a tasa decreciente, lo que en parte valida el supuesto de marginalidad decreciente de la acumulación del factor. En otras palabras, el efecto en el crecimiento económico de la dotación de una unidad adicional de capital público (mayor inversión)

tiende a ser menor en la medida que disminuye el déficit de infraestructura pública. En la última década, la participación de la inversión en infraestructura pública en el PIB a resultado relativamente más estable en torno a 0,19 (esto es, por cada 10% de aumento de la inversión, el PIB se expande 1,9%). No obstante, si tomamos todo el período muestral (1960-2010), la incidencia de la mayor inversión en infraestructura pública sobre el PIB promedia 1,5%, guarismo similar al obtenido en el modelo VAR con vector de cointegración.

Figura 2: Evolución de la elasticidad infraestructura-PIB



Fuente: Elaboración propia

Como siguiente paso, se aplica el procedimiento de desagregación temporal de Chow & Lin (1971) al coeficiente que relaciona la inversión en infraestructura pública con el PIB. Este método de estimación consiste en una versión modificada del modelo propuesto originalmente por Chow y Lin (1971) como base metodológica de un modelo de desagregación de series nacionales en series regionales, donde se busca transformar o desagregar un dato nacional de la relación Infraestructura-PIB en datos regionales. Particularmente, se busca desagregar cada observación del coeficiente temporal de la relación *Infraestructura-PIB* en 13 observaciones regionales<sup>6</sup>. Para ello, los instrumentos de desagregación regional, relacionados con la actividad en infraestructura y disponibles en cada región son: ocupados del sector construcción en cada región y los despachos anuales del insumo cemento, intensivamente usado en la ejecución de obra gruesa (etapa inicial de las obras civiles y obras de ingeniería, por ejemplo). En términos formales, la incidencia de cada región ( $i$ ) en la relación macro *PIB-infraestructura* puede expresarse de la siguiente manera:

<sup>6</sup>El estudio se focaliza en las antiguas 13 regiones, ya que se dispone de una data más larga respecto de la nueva división geográfica

$$\alpha_{2t,i} = \mathbf{z}'_{t,i} \zeta + \varrho_{t,i} \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, 13 \text{ y } t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (14)$$

donde  $\alpha_{2t,i}$  es la contribución marginal de un incremento de 10% de la infraestructura de la región  $i$  en el PIB nacional durante el período  $t$ , esta variable tiene la característica de ser no observable,  $\mathbf{z}$  es el vector columna que contiene las dos variables (despachos de cemento y empleo) usadas como instrumentos parciales de desagregación regional, y  $\zeta$  es un vector de parámetros que relaciona los indicadores parciales del subsector infraestructura con la evolución de la medida de elasticidad regional. Por último,  $\varrho_{t,i}$  es un vector de errores aleatorios que sigue una distribución normal con media cero y varianza constante. De esta manera y usando los dos indicadores regionales podemos definir la medida de elasticidad agregada como:

$$\Theta_{2t,i} = \sum_{i=1}^{13} \alpha_{2i,t} \text{ con } t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (15)$$

De igual modo, se definen las contrapartes agregadas de los indicadores parciales contenidos en el vector  $\mathbf{z}_{t,i}$  como:

$$Z^I_{t,i} = \sum_{i=1}^{13} z^I_{i,t} \text{ con } t = 1, 2, 3, \dots, T \text{ y } I = 1, 2 \quad (16)$$

Matricialmente podemos expresar la ecuación (14) en términos agregados como:

$$\Theta_2 = C\alpha_2^r = Cz\zeta + C\varrho = Z\zeta + \Sigma \quad (17)$$

Donde  $\alpha_2^r$  es un vector regional de dimensión  $((13xT)x1)$ ,  $\Theta_2$  es un vector  $(Tx1)$ ,  $z$  es una matriz  $((13xT)x2)$ ,  $Z$  es una matrix  $(Tx2)$  y  $C$  es una matriz de agregación de tamaño  $(Tx(13xT))$  con la siguiente estructura:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo a Chow y Lin (1971), el objetivo de la estimación es recuperar el vector  $\alpha_2^r$  de cada región usando  $z$  y a partir de la relación existente entre los indicadores agregados dada en la ecuación (17). El estimador óptimo de  $\alpha_2^r$  tiene la siguiente expresión:

$$\widehat{\alpha}_2^r = z\widehat{\zeta} + (\Phi C')(C\Phi C')\widehat{\Sigma} \quad (18)$$

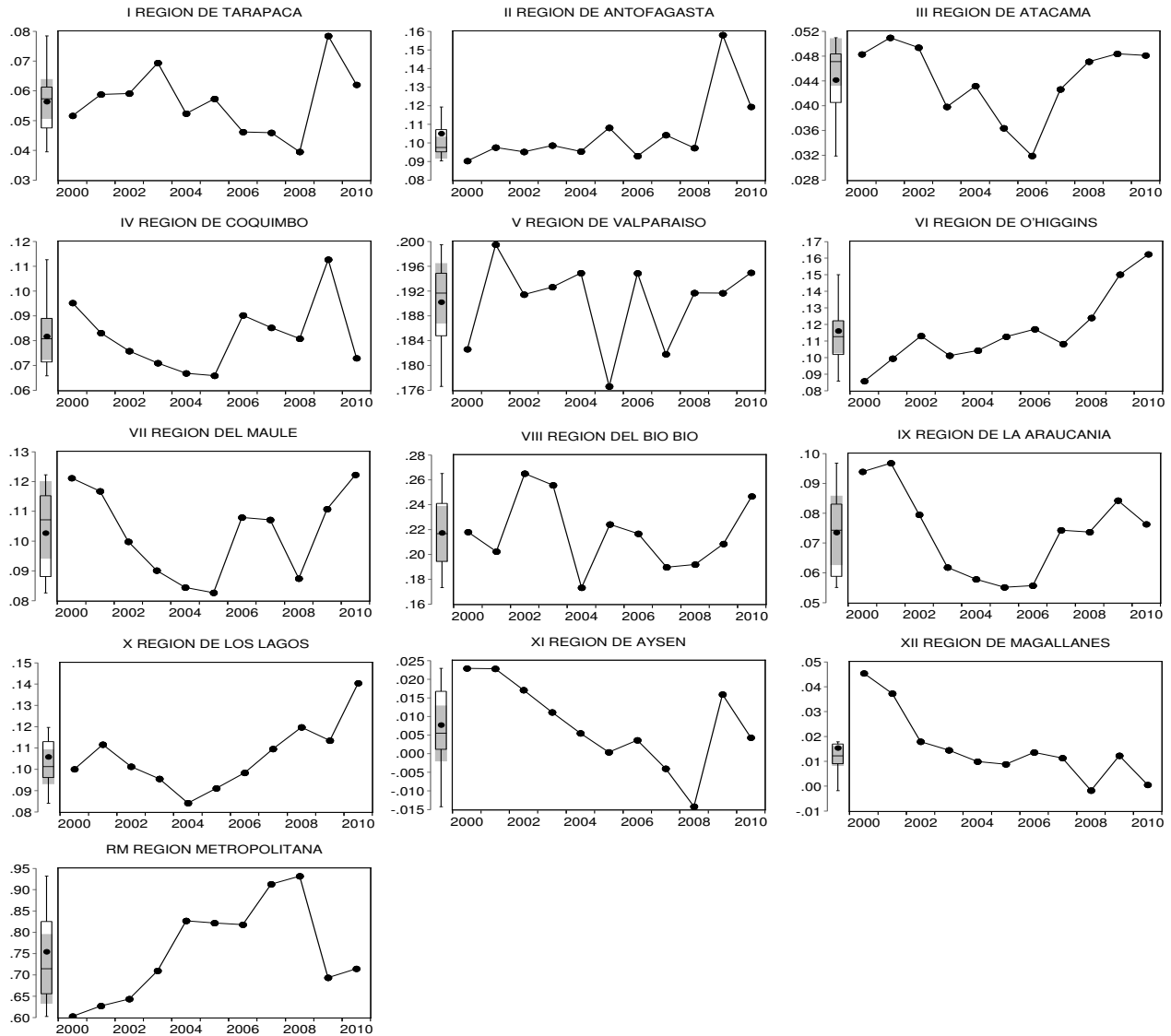
Donde  $C\Phi C' = cov(\Sigma) = Ccov(\varrho)C'$  y  $\widehat{\zeta}$  es el estimador por mínimos cuadrados generalizados (MCG) de  $\zeta$ , el cual presenta la siguiente estructura:

$$\widehat{\zeta} = [Z'cov(\Sigma)^{-1}Z]^{-1}[Z'cov(\Sigma)^{-1}\Theta_2] \quad (19)$$

De esta forma, la estimación de los parámetros se realiza sobre la base de los indicadores agregados, los cuales están disponibles en todo momento del tiempo –particularmente, la información estadística de las variables en cada región corresponde a los años 2000-2010. Las medidas de incidencia regional en el PIB nacional, se definen como la suma de dos partes que son: el componente explicado de la regresión lineal entre la medida de elasticidad agregada y los indicadores parciales (despachos de cemento, empleo), cuya estructura funcional a nivel regional se asume idéntica a la relación agregada (por lo que se utilizan los mismos parámetros estimados,  $\zeta$ ). El segundo componente de la suma, es el error regional, el cual es estimado desagregando el error de la relación agregada mediante la información provista por la matriz de varianzas y covarianzas.

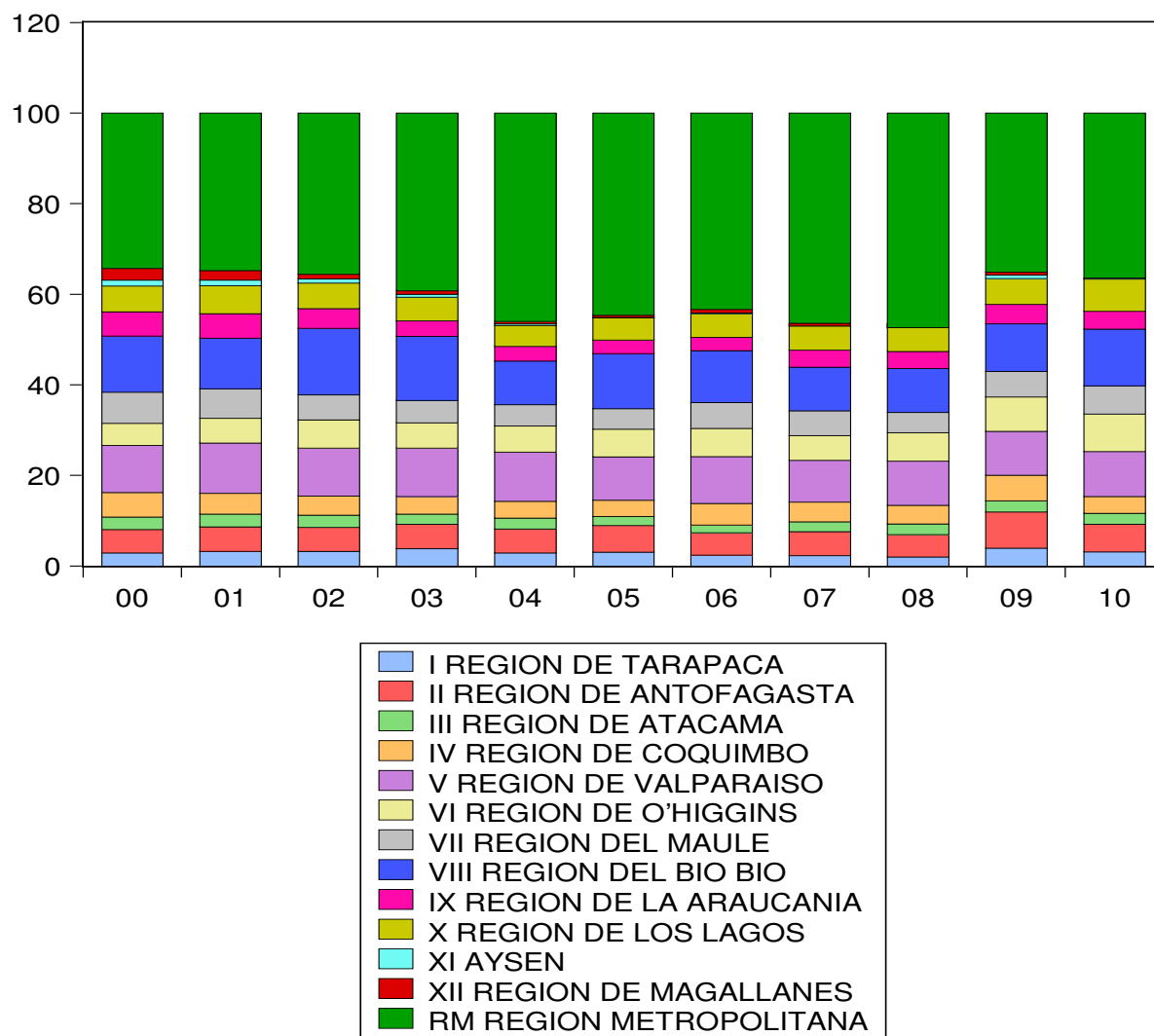
La Figura 3 expone los resultados de la desagregación a nivel regional de la medida de elasticidad *infraestructura-PIB*, en base a los indicadores parciales disponibles en cada región. En el eje vertical de cada figura se encuentra la incidencia parcial de la región en la medida de elasticidad agregada. Por lo que la suma (o agregación) de todas las incidencias regionales, definen la evolución de la relación dinámica PIB-infraestructura de la Figura 2. Por ejemplo, en 2010 la elasticidad infraestructura pública del PIB resultó 0,19, lo que significa que por cada 10 % de aumento de la inversión en infraestructura pública, el PIB aumenta 1,9 %. De este incremento del PIB, la región Metropolitana explica la mayor parte del crecimiento, 0,71 puntos porcentuales (pp), seguido por las regiones del Bío Bío (0,24 pp), Valparaíso (0,19 pp), O'Higgins (0,16 pp), Los Lagos (0,14 pp), Maule (0,12 pp) y Antofagasta (0,11 pp). El resto de las regiones del País contribuyeron en 0,23 puntos porcentuales de la variación de 1,9 puntos del PIB. De la Figura 3 también se desprende que las tasas de incidencia regional no son constantes en el tiempo y, en algunos casos, se observa una marcada volatilidad. En términos distribucionales, la Región Metropolitana explica el 38 % de la relación entre la infraestructura pública y el PIB agregado, mientras que el 62 % restante es atribuido a las restantes regiones del país. (Figura 4).

Figura 3: Aporte regional a la elasticidad infraestructura pública del crecimiento económico de Chile (En puntos porcentuales por cada 10% de incremento de la inversión en infraestructura pública)



Fuente: Elaboración propia en base a las estadísticas del BCCh e INE.

Figura 4: Distribución del aporte regional a la elasticidad infraestructura pública del crecimiento económico de Chile (En porcentaje)



Fuente: Elaboración propia en base a las estadísticas del BCCh e INE.

## 6. Conclusiones

El objetivo principal del presente documento ha sido proveer, a partir de una evaluación empírica, una actualización del orden de magnitud de la sensibilidad del PIB a los cambios marginales del nivel de gasto en infraestructura pública (incluyendo la inversión en concesiones neta de gastos



administrativos) para el período anual 1960-2010. Basado en un análisis de cointegración de variables económicas y la estimación de un modelo VAR con vector de corrección de errores –que, en parte, captura la participación rezagada de la inversión en el producto agregado de la economía–, se obtuvo que la medida de elasticidad infraestructura pública del PIB bordea el 0,17% en el largo plazo, es decir, por cada 10% que aumenta la inversión en infraestructura pública, el PIB crece en promedio 1,7% en términos per cápita –con un rango de oscilación de 1,1% a 2,3% (al 95% de confianza). Por otro lado, a partir del modelo de corrección de errores se desprende que el ajuste del PIB tiene un efecto rezagado a las perturbaciones económicas y el factor de ajuste es en promedio 35% anual una vez ocurrida la perturbación. En otras palabras, el tiempo que tardan las variables económicas en alcanzar una relación de equilibrio, luego de ocurrida una perturbación en el sistema, podría superar los dos años. Es importante aclarar que si bien el término *equilibrio* en economía es bastante amplio, aquí se refiere sólo a una relación estadística estable entre las variables económicas. En este contexto, se concluye que el gasto de inversión en infraestructura pública (sumado el efecto de la inversión de concesiones de obras) tiene un rol fundamental en la productividad total de factores. Dado el impacto del gasto en infraestructura en materia de crecimiento económico, la política de inversión en infraestructura pública debe internalizar una mirada estratégica de más largo plazo, evitando así reaccionar tardíamente a la creciente demanda por nuevos y mejores servicios de infraestructura.

A nivel regional, la Región Metropolitana explica el 38% de la relación de largo plazo entre la infraestructura pública y el PIB agregado, mientras que el 62% restante es atribuido a las restantes regiones del país. Particularmente, en 2010 la elasticidad infraestructura pública del PIB resultó 0,19, lo que significa que por cada 10% de aumento de la inversión en infraestructura pública, el PIB se expande 1,9% en promedio. De este incremento del PIB, la región Metropolitana explica la mayor parte del crecimiento, 0,71 puntos porcentuales (pp), seguido por las regiones del Bío Bío (0,24 pp), Valparaíso (0,19 pp), O'Higgins (0,16 pp), Los Lagos (0,14 pp), Maule (0,12 pp) y Antofagasta (0,11 pp). El resto de las regiones del País contribuyeron en 0,23 puntos porcentuales de la variación de 1,9 puntos del PIB. Otro hallazgo es que las tasas de incidencia regional en la relación infraestructura-PIB no son constantes en el tiempo y, en algunos casos, se observa una marcada volatilidad –coherente con la conducta cíclica de la inversión en grandes obras de ingeniería que inciden marcadamente en la economía de algunas regiones del país. Para estimar el aporte de la inversión en infraestructura regional en el PIB, se utilizó el procedimiento de desagregación temporal de CHow & Lin (1971) a la serie de elasticidad *infraestructura pública-PIB* –la cual a su vez fue calculada de la estimación por Filtro de Kalman de una función de producción tipo *Coob-Douglas* con coeficiente variable. Este método de desagregación consiste en una versión modificada del modelo originalmente planteado por

Chow & Lin (1971) como base metodológica de un modelo de desagregación de series nacionales en series regionales, donde precisamente se busca distribuir un dato nacional de la relación *Infraestructura pública-PIB* en datos regionales. Para ello se utilizaron dos indicadores parciales de actividad sectorial (despachos de cemento y empleo del sector construcción) que sirvieron como instrumentos de desagregación relativos a la actividad de infraestructura observada en cada región. Por último, cabe indicar que los resultados obtenidos a nivel regional deben ser considerados como una primera aproximación de la distribución regional de la sensibilidad del PIB a la mayor inversión en infraestructura pública en el largo plazo.

**Anexo: Sesgo asintótico de la estimación por *OLS* estático y su corrección basada en una versión simplificada del método *FMOLS***

A partir del vector de sucesiones estocásticas  $m + 1$  dimensional  $(y_t, \mathbf{X}'_t)_{1 \times (m+1)}$ , considere la siguiente representación triangular estándar de un modelo de regresión lineal que –basado en el trabajo de Phillips & Hansen (1990)– supone la existencia de cointegración entre las variables. En primer lugar, asuma la siguiente expresión formal de la ecuación cointegradora:

$$y_{t(1 \times 1)} = \mathbf{X}'_{t(1 \times m)} \beta_{(m \times 1)} + \mathbf{D}'_{1t(1 \times n_1)} \gamma_{(n_1 \times 1)} + \mu_{1t(1 \times 1)} \quad (20)$$

$\mathbf{D}'_{1t}$  es un vector de variables exógenas (variables de tendencias determinísticas), el vector  $(y_t, \mathbf{X}'_t)$  está conformado por procesos estocásticos integrados de orden  $d \geq 1$ , y  $\mu_{1t}$  es la perturbación estacionaria o integrada de orden cero ( $I(d = 0)$ ). Por lo que  $\mu_{1t}$  resulta de una combinación lineal de series con el mismo orden de integración ( $d \geq 1$ ); siendo  $(1, -\beta', -\gamma)'$  el vector de cointegración. En segundo lugar, la especificación triangular aquí propuesta supone que  $\mathbf{X}'_t$  es gobernado por el sistema de ecuaciones que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{t(m \times 1)} &= \Pi'_{21(m \times n_1)} \mathbf{D}_{1t(n_1 \times 1)} + \Pi'_{22(m \times n_2)} \mathbf{D}_{2t(n_2 \times 1)} + \eta_{t(m \times 1)} \\ \mu_{2t(m \times 1)} &= \Delta_1 \eta_{t(m \times 1)} \end{aligned} \quad (21)$$

Suponga  $\mathbf{D}_{t((n_1+n_2) \times 1)} = (\mathbf{D}'_{1t}, \mathbf{D}'_{2t})'$  un vector de regresores exógenos (tendencias determinísticas) del sistema de ecuaciones [2]. Nótese que  $\mathbf{D}'_{1t}$  está incluido en las dos estructuras de ecuaciones [1] y [2], mientras que  $\mathbf{D}'_{2t}$  está contenido en el sistema de regresores [2] pero excluida de la ecuación cointegradora [1]. De este modo, si una variable como la constante está presente en el modelo, ésta pertenece sólo al vector  $\mathbf{D}'_{1t}$ .

Por otra parte, sea  $\mathbf{Z}'_{t(1 \times (m+n_1))} = (\mathbf{X}'_t, \mathbf{D}'_{1t})$  y  $\Theta'_{(1 \times (m+n_1))} = (\beta, \gamma)'$ . Por lo que el vector de estimadores OLS de  $\Theta$  es:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{OLS((m+n_1) \times 1)} &= \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{(m \times 1)} \\ \hat{\gamma}_{(n_1 \times 1)} \end{pmatrix} = \left[ \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}'_t \right]_{(m+n_1)}^{-1} \left[ \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t y_t \right]_{((m+n_1) \times 1)} \\ &= \left[ \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}'_t \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t (\mathbf{Z}'_t \Theta + \mu_{1t}) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$= \Theta + \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'}{T} \right]^{-1} \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mu_{1t}}{T} \right]$$

**Teorema 1** Dado el modelo de regresión lineal con especificación triangular estándar, si  $E(\mu_{1t}^2) = \sigma_{11} < \infty$ ,  $E(\mu_{2t}\mu_{2t}') = \Sigma_{22}$ ,  $E(\mathbf{Z}_t' \mathbf{Z}_t) < \infty$ ,  $E(\mu_{1t}\mu_{2t}') = \sigma'_{12}$ ,  $E(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t') = \mathbf{K}$ ,  $E(\mu_{2t-s}\mu_{1t-p}) = E(\mu_{1t-s}\mu_{1t-p}) = E(\mu_{2t-s}\mu_{2t-p}) = \mathbf{0} \forall s \neq p$ ,  $E(\mathbf{D}_{1t}\mu_{1t}) = E(\mathbf{D}_{2t}\mu_{1t}) = E(\eta_{t-1}\mu_{1t}) = \mathbf{0}$ , entonces:

i  $\frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'}{T} \xrightarrow{p} \mathbf{K}$

ii  $\frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mu_{1t}}{T} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$

iii  $\hat{\Theta}_{OLS} \xrightarrow{p} \Theta + \mathbf{K}^{-1} \sigma_{12}$

### Prueba del teorema 1

i  $E(\mathbf{Z}_t' \mathbf{Z}_t) = E(z_{1t}^2) + E(z_{2t}^2) < \infty$ , luego  $E(z_{it}^2) < \infty$  Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz  $E|z_{it}z_{jt}| \leq E|z_{it}|^{\frac{1}{2}} E|z_{jt}|^{\frac{1}{2}} < \infty$ . Por la convergencia débil de la ley de grandes números (Weak Laws of Large Numbers, Kinchine):  $\frac{\sum_{t=1}^T z_{it}^2}{T} \xrightarrow{p} E(z_{it}^2)$ ,  $\frac{\sum_{t=1}^T z_{it}z_{jt}}{T} \xrightarrow{p} E(z_{it}z_{jt})$ . Por lo tanto,  $\frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'}{T} \xrightarrow{p} \mathbf{K}$  ■

ii  $E(\mathbf{Z}_t \mu_{1t}) = \begin{pmatrix} E(\mathbf{X}_t \mu_{1t}) \\ E(\mathbf{D}_{1t} \mu_{1t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\mathbf{X}_t \mu_{1t}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi'_{21} E(\mathbf{D}_{1t} \mu_{1t}) + \Pi'_{22} E(\mathbf{D}_{2t} \mu_{1t}) + E(\eta_t \mu_{1t}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} \Pi'_{21}(0) + \Pi'_{22}(0) + E(\eta_t \mu_{1t}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\mu_{2t} \mu_{1t}) + E(\eta_{t-1} \mu_{1t}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\mu_{2t} \mu_{1t}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Sea  $\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_{1t} \\ \mu_{2t} \end{pmatrix}$

$$E(\mu_t \mu_t') = \begin{bmatrix} E(\mu_{1t}^2) & E(\mu_{1t} \mu_{2t}') \\ E(\mu_{2t} \mu_{1t}) & E(\mu_{2t} \mu_{2t}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Por el supuesto del teorema 1 se tiene que  $\sum_{s,p=-\infty}^{+\infty} E(\mu_{t-s} \mu_{t-p}') = \mathbf{0} \forall s \neq p$ . Finalmente, por la convergencia débil de la ley de grandes números (Weak Laws of Large Numbers, Kinchine):

$$\frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mu_{1t}}{T} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

iii Por último, dado  $\hat{\Theta}_{OLS} = \Theta + \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'}{T} \right]^{-1} \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mu_{1t}}{T} \right]$ . Por el teorema de *Continuous Mapping*, si  $plim \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'}{T} = \mathbf{K}$ , entonces  $plim \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'}{T} \right]^{-1} = \mathbf{K}^{-1}$ . Aplicando el teorema de *Slutsky*

$\lim_{T \rightarrow \infty} Prob \left[ \left\| \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t'}{T} \right]^{-1} \left[ \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mu_{1t}}{T} \right] - \mathbf{K}^{-1} \sigma_{21} \right\| \geq \epsilon \right] = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$ 
 Por lo que se concluye que  $\hat{\Theta}_{OLS} \xrightarrow{p} \Theta + \mathbf{K}^{-1} \sigma_{21} \blacksquare$

En otras palabras, el teorema 1 muestra que  $\hat{\Theta}_{OLS}$  es inconsistente, con sesgo asintótico  $EA(\hat{\Theta}_{OLS}) - \Theta = \mathbf{K}^{-1} \sigma_{21}$ . En este contexto, para eliminar los problemas de correlación de largo plazo entre la ecuación cointegradora y las perturbaciones de los regresores estocásticos, se plantea la siguiente corrección al estimador *OLS*:

$$\hat{\Theta}^+ = \hat{\Theta}_{OLS} - \left[ \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t' \right]^{-1} T \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{21} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por los *terema 1* es directo que  $\hat{\Theta}^+ \xrightarrow{p} \Theta$ . Por lo que  $\hat{\Theta}^+$  resulta débilmente consistente.

**Anexo: Aproximación de primer orden de las series de Taylor (Kmenta, 1967) para la función CES que incluye el gasto público como factor de productividad**

En esta sección se muestra la derivación algebraica de la aproximación de primer orden de las series de Taylor (método de Kmenta) para la función de producción CES, que incluye el gasto en infraestructura pública como insumo productivo.

[1] La función CES estocástica (con progreso técnico en el sentido de Harrod) que incluye el gasto en infraestructura pública como insumo productivo tiene la siguiente representación:

$$Y_t = \gamma \tilde{G}_t^\theta \left[ \delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}} e^{\mu t} \quad (23)$$

$$\tilde{G}_t = \frac{G_t}{K_t^\phi \left( (1+r)^t L_t \right)^{1-\phi}} \quad (24)$$

Reemplazando [2] en [1] se tiene la siguiente expresión:

$$Y_t = \gamma \left[ \frac{G_t}{K_t^\phi \left( (1+r)^t L_t \right)^{1-\phi}} \right]^\theta \left[ \delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}} e^{\mu t} \quad (25)$$

Aplicando logaritmo a la expresión anterior:

$$\ln Y_t = \ln \gamma + \theta \ln G_t - \theta \phi \ln K - \theta (1 - \phi) \ln \left( (1+r)^t L_t \right) - \frac{\nu}{\rho} \ln \left[ \delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} \right] + \mu t \quad (26)$$

Para facilitar el cálculo, considere la siguiente función:

$$\Phi(\rho) = -\frac{\nu}{\rho} \ln \left[ \delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} \right] \quad (27)$$

Por lo que la función logarítmica CES admite la siguiente representación:

$$\ln Y_t = \ln \gamma + \theta \ln G_t - \theta \phi \ln K - \theta (1 - \phi) \ln \left( (1+r)^t L_t \right) + \Phi(\rho) + \mu t \quad (28)$$

Ahora se procede a la aproximación lineal de primer orden en torno a  $\rho = 0$ :

$$\ln Y_t = \ln \gamma + \theta \ln G_t - \theta \phi \ln K - \theta (1 - \phi) \ln \left( (1+r)^t L_t \right) + \Phi(0) + \frac{\partial \Phi(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} \rho + \mu t \quad (29)$$

Para ello, considere la siguiente función auxiliar:

$$\Sigma(\rho) = \delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} \quad (30)$$

Por lo que:

$$\Phi(\rho) = -\frac{\nu}{\rho} \ln(\Sigma(\rho)) \quad (31)$$

Ahora se calculan las derivadas parciales de las funciones  $\Sigma(\rho)$  y  $\Phi(\rho)$ :

$$\frac{\partial \Sigma(\rho)}{\partial \rho} \equiv \Sigma'(\rho) = - \left[ \delta_1 K_t^{-\rho} \ln K_t + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} \ln \left( (1+r)^t L_t \right) \right] \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma(\rho)}{\partial \rho^2} \equiv \Sigma''(\rho) = \delta_1 K_t^{-\rho} (\ln K_t)^2 + \delta_2 \left( (1+r)^t L_t \right)^{-\rho} (\ln \left( (1+r)^t L_t \right))^2 \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\rho)}{\partial \rho^2} \equiv \Phi'(\rho) = -\frac{\nu}{\rho^2} \left( \frac{\rho \Sigma'(\rho)}{\Sigma(\rho)} - \ln \Sigma(\rho) \right) = \frac{\nu \ln \Sigma(\rho)}{\rho^2} - \frac{\nu \Sigma'(\rho)}{\rho \Sigma(\rho)} \quad (34)$$

Evaluando  $\rho = 0$  en  $\Sigma(\rho)$  y sus derivadas parciales:

$$\Sigma(0) = \delta_1 + \delta_2 \quad (35)$$

$$\Sigma'(0) = - \left[ \delta_1 \ln K_t + \delta_2 \ln \left( (1+r)^t L_t \right) \right] \quad (36)$$

$$\Sigma''(0) = \delta_1 (\ln K_t)^2 + \delta_2 (\ln \left( (1+r)^t L_t \right))^2 \quad (37)$$

Ahora obtenemos el límite para  $\Phi(\rho)$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho) = -\nu \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(\Sigma(\rho))}{\rho} \quad (38)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho) = -\nu \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\Sigma'(\rho))}{1 \Sigma(\rho)} \quad (39)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho) = \nu \left( \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right) \ln K_t + \nu \left( \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \ln \left( (1+r)^t L_t \right) \quad (40)$$

El límite de  $\Phi'(\rho)$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ :

$$\Phi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi'(\rho) \quad (41)$$

$$\Phi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\nu \ln \Sigma(\rho)}{\rho^2} - \frac{\nu \Sigma'(\rho)}{\rho \Sigma(\rho)} \right) \quad (42)$$

$$\Phi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\nu \ln \Sigma(\rho) - \frac{\nu \rho \Sigma'(\rho)}{\Sigma(\rho)}}{\rho^2} \right) \quad (43)$$

$$\Phi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\nu \Sigma'(\rho)}{\Sigma(\rho)} - \frac{\nu(\Sigma'(\rho) + \rho \Sigma''(\rho))\Sigma(\rho) - \nu \rho (\Sigma'(\rho))^2}{\Sigma(\rho)^2}}{2\rho} \right) \quad (44)$$

$$\Phi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\nu \Sigma'(\rho)}{\Sigma(\rho)} - \frac{\nu \Sigma'(\rho)}{\Sigma(\rho)} - \frac{\nu \rho \Sigma''(\rho)\Sigma(\rho) - (\Sigma'(\rho))^2}{\Sigma(\rho)^2}}{2\rho} \right) \quad (45)$$

$$\Phi'(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} -\frac{\nu}{2} \left( \frac{\Sigma''(\rho)\Sigma(\rho) - (\Sigma'(\rho))^2}{\Sigma(\rho)^2} \right) \quad (46)$$

$$\Phi'(0) = -\frac{\nu}{2} \left( \frac{\Sigma''(0)\Sigma(0) - (\Sigma'(0))^2}{\Sigma(0)^2} \right) \quad (47)$$

$$\Phi'(0) = -\frac{\nu}{2} \left( \frac{\left( \delta_1 (\ln K_t)^2 + \delta_2 (\ln((1+r)^t L_t))^2 \right) (\delta_1 + \delta_2) - \left( -[\delta_1 \ln K_t + \delta_2 \ln((1+r)^t L_t)] \right)^2}{(\delta_1 + \delta_2)^2} \right) \quad (48)$$

$$\Phi'(0) = -\frac{\nu}{2(\delta_1 + \delta_2)^2} \left( \delta_1 \delta_2 (\ln K_t - \ln_t((1+r)^t L_t))^2 \right) \quad (49)$$

$$\Phi'(0) = -\frac{\nu \delta_1 \delta_2}{2(\delta_1 + \delta_2)^2} (\ln K_t - \ln_t - t \ln(1+r))^2 \quad (50)$$

Finalmente, se obtiene la siguiente aproximación de primer orden de series de Taylor:

$$\ln Y_t = \left\{ \begin{array}{l} \ln \gamma + \theta \ln G_t - \theta \phi \ln K - \theta (1 - \phi) \ln((1+r)^t L_t) + \nu \left( \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right) \ln K_t \\ + \nu \left( \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right) \ln((1+r)^t L_t) - \frac{\nu \delta_1 \delta_2}{2(\delta_1 + \delta_2)^2} (\ln K_t - \ln_t - t \ln(1+r))^2 + \mu_t \end{array} \right\} \quad (51)$$

Agrupando términos:



$$\ln Y_t = \left\{ \begin{array}{l} \ln \gamma + \theta \ln G_t + \left( \frac{\nu \delta_1}{\delta_1 + \delta_2} - \theta \phi \right) \ln K_t + \left( \frac{\nu \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} - \theta (1 - \phi) \right) \ln ((1 + r)^t L_t) \\ - \frac{\nu \delta_1 \delta_2}{2(\delta_1 + \delta_2)^2} (\ln K_t - \ln L_t - t \ln(1 + r))^2 + \mu_t \end{array} \right\} \quad (52)$$

El modelo de regresión (reparametrizado) a estimar para este tipo de función de producción es:

$$\ln Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln G_t + \alpha_2 \ln K + \alpha_3 L_t + \alpha_4 t + \alpha_5 (\ln K_t - \ln L_t - t \alpha_6)^2 + \mu_t \quad (53)$$

$$\ln Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln G_t + \alpha_2 \ln K + \alpha_3 L_t + \alpha_4 t + \alpha_5 (\ln K_t - \ln L_t)^2 - 2\alpha_5 \alpha_6 (\ln K_t - \ln L_t) t + \alpha_5 \alpha_6^2 t^2 + \mu_t \quad (54)$$

$$\ln Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln G_t + \alpha_2 \ln K + \alpha_3 L_t + \alpha_4 t + \alpha_5 (\ln K_t - \ln L_t)^2 + \alpha'_6 (\ln K_t - \ln L_t) t + \alpha_7 t^2 + \mu_t \quad \blacksquare \quad (55)$$

[2] La función CES estocástica (con progreso técnico en el sentido de Hicks) que incluye el gasto en infraestructura pública como insumo productivo tiene la siguiente representación:<sup>7</sup>

$$Y_t = \gamma e^{\lambda t + \mu t} \tilde{G}_t^\theta [\delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 L_t^{-\rho}]^{-\frac{\nu}{\rho}} \quad (56)$$

$$\tilde{G}_t = \frac{G_t}{K_t^\phi ((1 + r)^t L_t)^{1-\phi}} \quad (57)$$

Reemplazando [2] en [1] se tiene la siguiente expresión:

$$Y_t = \gamma e^{\lambda t + \mu t} \left( \frac{G_t^\theta}{K_t^{\phi \theta} ((1 + r)^t L_t)^{(1-\phi)\theta}} \right) [\delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 L_t^{-\rho}]^{-\frac{\nu}{\rho}} \quad (58)$$

Aplicando logaritmo a la expresión anterior:

$$\ln Y_t = \ln \gamma + \lambda t + \theta \ln G_t - \theta \phi \ln K - \theta (1 - \phi) \ln L_t - \frac{\nu}{\rho} \ln [\delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 L_t^{-\rho}] + \mu_t \quad (59)$$

Para facilitar el cálculo, considere la siguiente función:

$$\Phi(\rho) = -\frac{\nu}{\rho} \ln [\delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 L_t^{-\rho}] \quad (60)$$

Por lo que la función logarítmica CES admite la siguiente representación:

$$\ln Y_t = \ln \gamma + \lambda t + \theta \ln G_t - \theta \phi \ln K - \theta (1 - \phi) \ln L_t + \Phi(\rho) + \mu_t \quad (61)$$

---

<sup>7</sup>El cálculo fue obtenido de Henningsen & Henningsen (2011).

Ahora se procede a obtener la aproximación de primer orden en torno a  $\rho = 0$ . Los cálculos son obtenidos a partir de aplicar límite a las derivadas (utilizando la regla de *L'Hôpital*) de las siguientes funciones:

$$\Sigma(\rho) = \delta_1 K_t^{-\rho} + \delta_2 L_t^{-\rho} \quad (62)$$

$$\Phi(\rho) = -\frac{\nu}{\rho} \ln(\Sigma(\rho)) \quad (63)$$

Para mayor detalle de la aproximación lineal de primer orden de este tipo de función CES, revisar Henningsen & Henningsen (2011). La estructura lineal de la función CES con progreso técnico en el sentido de Hicks es:

$$\ln Y_t = \ln \gamma + \lambda t + \theta \ln G_t + \left( \frac{\nu \delta_1}{\delta_1 + \delta_2} - \phi \theta \right) \ln K_t + \left( \frac{\nu \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} - (1 - \phi) \theta \right) \ln L_t + \frac{\nu \delta_1 \delta_2 \rho}{2(\delta_1 + \delta_2)^2} (\ln K_t - \ln L_t)^2 + \mu_t \quad (64)$$

Reparametrizando este modelo de regresión lineal:

$$\ln Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \ln G_t + \alpha_3 \ln K_t + \alpha_4 \ln L_t + \alpha_5 (\ln K_t - \ln L_t)^2 + \mu_t \quad (65)$$

A partir de la ecuación anterior es directo notar que esta expresión es equivalente a la ecuación (55) cuando  $\alpha'_6 = \alpha_7 = 0$  ■

## Referencias

- Ascheur, D. (1989), "Is Public Expenditure Productive?", *Journal of Monetary Economics*, 23, pp. 177-200.
- Eberts, R. (1986), "Estimating the Contribution of Urban Public Infrastructure to Regional Growth", Working Paper, Federal Reserve Bank-Cleveland.
- Munnell, A. (1990), "Why Has Productivity Growth Declined? Productivity and Public Investment", *New England Economic Review*, Federal Reserve Bank of Boston, issue Jan, pp. 3-22.
- Tatom, J. (1991), "Should Government Spending on Capital Goods Be Raised?", *Review*, Federal Reserve Bank of St. Louis, issue Mar, pp. 3-15.
- Ford, R. y Poret, P. (1991), "Infrastructure and Private-Sector Productivity." *Economic Studies*, OECD, Autumn, pp. 63-89.
- Straub, S. (2008), "Infrastructure and growth in developing countries: recent advances and research challenges", Policy Research Working Paper Series 4460, The World Bank.
- Woodward, S. y Hall, R. (2009), "Measuring the Effect of infrastructure Spending GDP", The World Bank.
- World Bank. (1994), *World Development Report*: Washington, DC, The World Bank.
- Fernald, J.G. (1999), "Roads to Prosperity? Assessing the Link Between Public Capital and Productivity." *The American Economic Review* 89, pp. 619-38.
- Torrisi, G. (2009), "Public infrastructure: definition, classification and measurement issues", MPRA Paper 12990, University Library of Munich, Germany.
- Torrisi, G. (2010), "Infrastructures and Economic Performance: A Critical Comparison Across Four Approaches," *Theoretical and Practical Research in Economic Fields*, Association for Sustainable Education, Research and Science, vol. 0(1), pages 86-96.
- Canning, D. y Bennathan, E. (2000), "The social rate of return on infrastructure investments," Policy Research Working Paper Series 2390, The World Bank.
- Esfahani, H. y Ramirez, M. (2003), "Institutions, infrastructure, and economic growth," *Journal of Development Economics*, Elsevier, vol. 70(2), pp. 443-477.
- Calderón y Servén (2004), "The Effects of Infrastructure Development on Growth and Income Distribution", Working Paper No. 270, Banco Central de Chile.
- Estache, A. (2003), "On Latin America's Infrastructure Privatization and its Distributional Effects", Washington, DC: The World Bank, Mimeo.
- Estache, A., Gomez-Lobo, A., Leipziger, D. (2000), "Utility Privatization and the Needs

- of the Poor in Latin America”, The World Bank, Mimeo.
- Toledo, P. y Rivera, J. (2004), “Efectos de la Infraestructura Pública Sobre el Crecimiento de la Economía, Evidencia para Chile”, Estudios de Economía, Vol. 31-No.1, pp. 21-38.
- Rozas, P. (2010), “América LATina: Problemas y Desafíos del Financiamiento de la infraestructura”, serie Recursos nacturales e infraestructura, No. 101, CEPAL.
- Rozas, P. y Sánchez, R. (2004), “Desarrollo de infraestructura y crecimiento económico: revisión conceptual”, serie Recursos nacturales e infraestructura, No. 75, CEPAL.
- Canning, D. y Pedroni, P. (1999), “The Contribution of Infraestructure to Aggregate Output”, Belfast, Reino Unido, Queen’s University Belfast.
- Glomm, G. y Ravikumar, B. (1994), “Public Investment in Infraestructure in a Simple Growth Model”. Journal of Economic Dynamics and Control, 18, pp. 1173-1187.
- Yoke, T. (2001), “Public Infraestructure Spillovers and Growth: theory and Time Series Evidence for Australia”. Working Paper, Departamento de Economía, Universidad de Melbourne.
- Hoff, A. (2004), “The Linear Approximation of the CES Function with n Input Variables”. Marine Resource Economics, Volume 19, pp. 295-306.
- Henningsen, A. y Henningsen, G. (2011). “Econometric Estimation of the Constant Elasticity of Substitution Function in R: Package micEconCES”, Working Paper, Institute of Food and Resource Economics, University of Copenhagen.