Altruistic Punishment: the Bridge Leading to the Other Side of the Evolution

Dai, Darong

School of Business, Nanjing University

1 September 2011

利他惩罚：通往演化彼岸的桥

戴大荣

（南京大学，商学院，经济学系）

通讯地址：

E-mail: daidarong998@163.com

Tel: 0086-13270871648

鸣谢：本文的写作源于与汪丁丁教授的交流，他给予我很多启发，并及时纠正我的错误，在此表示感谢。当然，文责自负。

利他惩罚：通往演化彼岸的桥

戴大荣

摘 要：本文以囚徒困境（PD）为背景，在一条嵌入马氏链上建立起突变-选择动态（mutation-selection dynamics），研究“合作”、“背叛”、“利他惩罚”三策略互动，证得如下结论：其一，即使“利他惩罚”不是一个 Nash 均衡，当群体数量趋于无穷时，其也可成为唯一的突变-选择均衡（mutation-selection equilibrium）；其二，即使“合作”在矩阵博弈中分别被“背叛”及“利他惩罚”严格占优，当群体数量趋于无穷时，其也可成为唯一的演化动态均衡，即“利他惩罚”可以在很弱的条件下，以十分有效的方式促进合作行为的演化。

关键词：囚徒困境；演化博弈论；突变-选择均衡

Altruistic Punishment: the Bridge Leading to the Other Side of the Evolution

Darong Dai

(School of Business, Nanjing University)

Abstract: In this paper, in order to study the strategic interactions between “cooperation”, “defection” and “altruistic punishment”, a mutation-selection dynamic, with the Prisoner's Dilemma as the background, has been established on an embedded Markov chain, proved the following conclusions: First, the “altruistic punishment”, even though not a Nash equilibrium, can be the only mutation-selection equilibrium when the population size goes to infinity; Second, the “cooperation”, even if been strictly dominated by the defection and altruistic punishment in the matrix game, will be the unique equilibrium of the evolutionary dynamics as the population size approaches infinity; that is to say, the altruistic punishment, even in very weak conditions, can effectively promote the evolution of cooperation.

Key Words: Prisoner's Dilemma; Evolutionary Game Theory; Mutation-Selection Equilibrium.

JEL Classification: C72; D74; Z13.

利他惩罚：通往演化彼岸的桥

戴大荣[*]

摘 要：本文以囚徒困境（PD）为背景，在一条嵌入马氏链上建立起突变-选择动态（mutation-selection dynamics），研究“合作”、“背叛”、“利他惩罚”三策略互动，证得如下结论：其一，即使“利他惩罚”不是一个 Nash 均衡，当群体数量趋于无穷时，其也可成为唯一的突变-选择均衡（mutation-selection equilibrium）；其二，即使“合作”在矩阵博弈中分别被“背叛”及“利他惩罚”严格占优，当群体数量趋于无穷时，其也可成为唯一的演化动态均衡，即“利他惩罚”可以在很弱的条件下，以十分有效的方式促进合作行为的演化。

关键词：囚徒困境；演化博弈论；突变-选择均衡

一 引 言

社会科学知识如果不能预测人类的未来，则必须通过批判性反思人类演化历史的最普遍现象及逻辑性回答人类演化历史的最根本问题去启发当下的人类存在。什么是最普遍现象？什么是最根本问题？答案很可能不是唯一的，但却可以断言：“人类合作”是最普遍现象之一，“人类如何逻辑自洽地走出囚徒困境？”是最根本问题之一。事实上，现在人类学、生物学、经济学、社会学、政治学、心理学、数学、哲学以及脑科学都在从各自的学术角度关注这个根本性问题，为何？因为对这个最根本问题的思考及回答，不仅有助于我们回答“人类合作秩序如何得到扩展？”，更将在人类面对 Hardin(1968,1998)所谓“公地悲剧”(the tragedy of the commons)时提供深刻的智识教益。

关于“如何逻辑自洽地走出囚徒困境？”问题的思考与回答，有如下尝试：第一，无限重复博弈中所谓的俗定理（folk theorem）（Fudenberg & Maskin,1986;Fudenberg & Maskin,1990; Bó,2005），然而无限重复博弈至多可以解释有关系的个体(related individuals)间的合作现象而无法解释“人类合作秩序的扩展”；第二，Sally(2001)提出带同情心的博弈以及 Binmore(2005)将囚徒困境转化为“囚徒乐事”(Prisoner’s Delight)可以引向单次囚徒困境中的合作均衡，然而致命的问题是这两种尝试所基于的假设已经不再符合经典的囚徒困境，囚徒困境必须要求局中人是自涉的(self-regarding)而非他涉的(other-regarding)。总之，上面两种尝试都无法给出“人类合作秩序如何得到扩展？”的令人满意的回答。第三，Fehr & Gächter(2002)的实

[*] 南京大学商学院经济学系。

验证据表明，由没有关系的个体(unrelated individuals)构成的大群体中的人类合作演化研究应当将焦点放在解释“利他惩罚”(altruistic punishment)行为上。无可否认，背叛行为普遍存在，没有人不痛恨违反合作规则的行为，然而任何个体都可能违反合作规则。可如果背叛行为肆意蔓延，合作必然走向崩溃。怎么办？本文证明：“利他惩罚”是人类走出囚徒困境的关键演化机制，它是人类通往演化彼岸的一座桥。

然而，首先必须回答如下问题：利他惩罚能够促进合作演化吗？利他惩罚本身能否得到演化？若能，人们采用利他惩罚的动机又是什么？现有相关文献都是基于回答如上问题展开的，但却没有形成一致解答。关于前两个问题，有两种截然相反的回答，第一种观点认为利他惩罚不会得到演化且不能促进合作演化：Rand, Ohtsuki ＆ Nowak(2009); Ohtsuki, Iwasa ＆ Nowak(2009)认为利他惩罚（或者高代价惩罚：costly punishment）并非合作演化的单独机制，而是直接互惠（direct reciprocity）(Taylor＆Nowak,2007)或间接互惠（indirect reciprocity）(Nowak ＆ Sigmund,2005;Brandt ＆ Sigmund,2005)的一种形式，其中，在直接互惠中惩罚是报复（retaliation）的一种形式；而在间接互惠中，惩罚通过声誉效应（reputation effects）以及第三方行为产生作用，故任何对利他惩罚的讨论都应当纳入直接或间接互惠的框架之下。然而，Rand, Ohtsuki ＆ Nowak(2009)建立的“合作”,“背叛”,“利他惩罚”三策略的演化动态，证明在直接互惠演化机制下，利他惩罚不可能成为演化均衡，也不可能促进合作行为演化；Ohtsuki,Iwasa ＆ Nowak(2009)证明在间接互惠机制下，只有在很小的参数区间上，利他惩罚可以引向有效率的均衡(efficient equilibrium)，并认为在间接互惠机制下，对背叛者最有效的策略不是惩罚而是不提供帮助（withhold help）。Hauert, Traulsen, Brandt, Nowak ＆ Sigmund (2007)在一个简单的公共品博弈（PG）模型中证明，如果局中人有弃权（stand aside）的自由，则对背叛的惩罚可以促进合作演化；相反，若强制性要求每个个体都参与到联合努力（joint endeavour）中去，则会产生相反的效果。Fehr ＆ Rockenbach(2003)通过博弈实验发现若惩罚行为维护的是惩罚实施者自己的利益，并且这种惩罚被使用去维持一个惩罚者偏好的但是又不公平的支付分配时，这种惩罚行为会大大降低其他博弈方的利他回应(altruistic responses)。Dreber, Rand, Fudenberg ＆ Nowak(2008)在重复囚徒困境博弈实验中发现，利他惩罚能够增进合作，但却不能提高群体的平均支付，并发现在总支付和利他惩罚的使用之间存在强负相关关系，即赢家都不会使用惩罚（winners don’t punish）。Milinski ＆ Rockenbach(2008)也认为惩罚者将会消亡(punishers perish)，获益最多的始终是那些永远不会惩罚的个体。Wu *et al*(2009)的两人囚徒困境博弈实验证据显示，高代价的惩罚不仅不利于增加合作，反而会减少合作。Egas ＆ Riedl(2008)的公共品博弈实验表明，仅仅当利他惩罚

者承担的成本很小而其惩罚行为又能对被惩罚者产生重大影响（high impact）的时候，高水平的合作才能通过利他惩罚得到保持，然而此时的实际支付水平却是最低的。

第二种观点认为利他惩罚可以得到演化且可以促进合作演化：Henrich ＆ Boyd(2001)在一个文化演化模型中证明通过支付偏转传播（payoff-biased transmission）和遵纪守法者传播（conformist transmission）两种认知机制（cognitive mechanisms），经过有限期的惩罚便可在合作困境（cooperative dilemmas）中令合作行为稳定下来。Gächter，Renner ＆ Sefton(2008)通过公共品博弈实验说明，惩罚行为不仅可以提升合作水平，而且从长期来看，群体平均支付将会得到改善。Guzmán, Rodríguez-Sickert ＆ Rowthorn(2007)在合作困境背景下建立一个行为策略与社会学习规则的共生演化模型，证明利他惩罚可以维持合作。Sripada(2005)认为是惩罚而非互惠能够使得伦理规范（moral norms）得以维持。Fehr ＆ Gächter(2000)的公共品博弈实验证据表明惩罚能够保持很高的合作水平，甚至可以使全体合作（full cooperation）。Fehr ＆ Gächter(2002)通过公共品博弈实验发现不仅惩罚机会（punishment opportunity）的存在会提高合作水平，而且真实的惩罚（actual punishment）也可以提高合作水平。Boyd, Gintis, Bowles ＆ Richerson(2003)通过仿真模拟发现，在更大的群体中，群体选择（group selection）可以有效促进利他惩罚的演化。Fowler(2005)在自愿公共品博弈（voluntary PG）模型中证明利他惩罚可以不依赖于群体选择（group selection）而得到演化，但是不同于俗定理（folk theorem）预测的惩罚能够使任何策略得到演化，利他惩罚只会促进那些支付提高型策略（payoff-improving strategies）的演化，即利他惩罚促进合作演化是有条件的。Brandt, Hauert ＆ Sigmund(2003)的空间公共品博弈（spatial PG）表明引入惩罚机会可以促进合作水平的大幅度提高。Marlowe *et al*(2007)的跨文化经济博弈实验证据显示在更大更复杂的社会群落中，会出现更多的利他惩罚。Bernhard, Fehr ＆ Fischbacher(2006); Bernhard, Fischbacher＆Fehr (2006)第三方惩罚博弈（the third-party punishment game）实验表明只有当背叛行为的受害者属于惩罚者的那个群组时，惩罚者才更愿意采取实质性的惩罚行动。Fehr ＆ Fischbacher(2004)实验证据表明大约有 60％的第三方会惩罚那些违反合作规则的行为，并且违反规则越多，被惩罚也越多。Gargner ＆ West(2004)的模型证明在惩罚者接受到的合作与惩罚者实际采取的惩罚行动之间存在正相关关系，即只有当惩罚者接受到更多的合作时，才更愿意对背叛行为实施利他惩罚。Gintis, Bowles, Boyd ＆ Fehr(2003)博弈实验证据显示，群内选择（inter-group selection）允许利他惩罚的演化，而且利他惩罚可以促进群体中的合作演化，并且证明在一定条件下，一小群强互惠者可以侵入一群自涉（self-regarding）的个体中，且强互惠（strong reciprocity）是演化

稳定策略（ESS）。除此之外，Kosfeld ＆ Riedl,2004;Price,2005;Fehr ＆ Rockenbach, 2004; Clutton-Brock ＆ Parker,1995; Wong, Buston, Munday ＆Jones, 2007; Smirnov, 2007; Lehmann, Rousset, Roze ＆ Keller,2007 等均持利他惩罚可以促进合作演化的观点。

目前关于利他惩罚背后的动机也尚无一致看法，大致有如下几种，第一，持平等主义动机（egalitarian motives），文献如 Fowler, Johnson ＆ Smirnov, 2004; Henrich *et al*, 2006; Dawes, Fowler, Johnson, McElreath ＆ Smirnov, 2007; Fehr, Bernhard ＆ Rockenbach, 2008。第二，持报复性动机（retaliation motives）等消极情绪（negative emotions），文献如 Fehr ＆ Gächter (2004); Fehr ＆ Gächter(2002); Fehr ＆ Fischbacher(2004); Xiao ＆ Houser(2005); O'Gorman, Wilson ＆ Miller(2005)。第三，强调所谓观众效应（audience effects），文献如 Kurzban, DeScioli ＆ O'Brien(2007); Milinski ＆ Rockenbach(2007)。第四，强调规范内化（internalize norms）如 Gintis(2003)。最后，强调利他惩罚背后的神经基础（the neural basis），主要文献有 Sanfey *et al* (2003); Quervain *et al*(2004); Singer *et al*(2004a,2004b); Singer *et al*(2006); Sanfey(2007)。

易发现，以上来自正面的和反面的看法几乎都是依据博弈实验而得出的结论，然而同样的博弈实验却可能因为实验对象和实验背景差异而得出两种截然不同的结论，因此我们更需要一个逻辑一致的数理模型。本文的演化数理模型证明在一定条件下，利他惩罚可以得到演化，但却是一个帕累托低劣均衡；同时，在一定条件下，利他惩罚可以十分有效地促进合作演化，并且这是一个全局帕累托最优均衡，因此，本文认为利他惩罚不是演化目标而仅仅是人类通往演化彼岸的桥。

本文的结构安排如下，第二部分是理论模型，陈述了本文的主要理论观点；第三部分是结论，以及从本文主要理论观点导出的对现实制度安排的一些启示；最后部分是附录，给出了第二部分主要定理的数学证明。

二 模 型

现在考虑如下 2×2 对称博弈：

$$\begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & a_1 & a_2 \\ B & a_3 & a_4 \end{array}$$

矩阵 2.1

其中，a_1表示行、列博弈方均采用策略A时，行博弈方所得支付；a_3表示当列博弈方采用策略A时，行博弈方采用策略B所得支付，其余可以类似定义。

本文只考虑一个有限群体，并假定该群体由m个个体构成，其中$m \in \mathbb{Z}^{+}\left(m \geq 2\right)$，为任意给定常数，再令$i$表示第$n$期使用策略$A$的个体数，表示群体在第$n$期的状态。虽然有大量文献如 Imhof & Nowak(2006); Nowak, Sasaki, Taylor & Fudenberg(2004); Ohtsuki & Nowak(2006)在定义策略主体的适存度（fitness）时，会引入一个外生参数$\omega \in [0,1]$来度量博弈矩阵支付(payoff)对其适存度的贡献，并且如 Ohtsuki, Pacheco＆Nowak(2007); Taylor＆Nowak(2007)都假定$0 < \omega \ll 1$，即他们考察弱选择（weak selection）情形下，演化博弈动态的均衡行为。本文并不否认这种操作在全面分析策略主体行为演化方面的价值与意义；但是，基于比较静态的观点和本文考察的重点，将演化动态的背景局限于博弈矩阵本身是合理的，令选择强度（the selection intensity）$\omega = 1$,即本文研究强选择（strong selection）情形下的演化博弈动态，于是可定义行博弈方的适存度（=支付）为：

$$
\begin{aligned}
f_i &= \frac{i-1}{m-1}a_1 + \frac{m-i}{m-1}a_2 \\
g_i &= \frac{i}{m-1}a_3 + \frac{m-i-1}{m-1}a_4
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

对于任一固定有限群体中的行为演化分析，可利用一般化 Moran 过程来建立选择动态（selection dynamics），该过程规定，在每一期，有且只有一个个体被赋予机会按照与其适存度成比例的概率进行繁殖（reproduction）。此处的繁殖可以是生物学意义上的有性生殖或无性生殖，也可以是社会文化意义上的学习（learning）或模仿（imitation），若是前者，其后代（offspring）将代替群体余下个体中被随机选到的一个，若是后者则没有这个替代过程，而只有策略类型的转换，总之，群体总数保持不变，即若在第n期有i个个体使用策略A，则在第$n+1$期有且仅有三种情况发生：仍有i个个体使用策略A，有$i+1$个个体使用策略A，有$i-1$个个体使用策略A。于是，若令随机变量X_n表示状态，任意给定初始状态分布，则集合$\left\{X_n, n \geq 0\right\}$定义好了一条有限状态马氏链；另外，由于$f_i, g_i \left(0 \leq i \leq m\right)$可能取负值，为了满足某种正则性要求，定义其转移概率为：

$$
p_{i,i+1} = \frac{i\left|f_i\right|}{i\left|f_i\right| + \left(m-i\right)\left|g_i\right|}\frac{m-i}{m}
$$

$$p_{i.i-1} = \frac{(m-i)|g_i|}{i|f_i| + (m-i)|g_i|} \frac{i}{m}$$

$$p_{i,i} = 1 - p_{i.i+1} - p_{i.i-1} \tag{2.2.}$$

其中$|f|$表示对f取绝对值，显然$p_{0,0} = p_{m,m} = 1$，即状态“0”，“m”是两个吸收态，据此可将$\{X_n, n \geq 0\}$理解成带有两个吸收壁的随机游走过程。令$x_i\,(1 \leq i \leq m-1)$表示从状态i出发，最后被状态m吸收的概率，则有递归方程：

$$x_i = p_{i,i+1}x_{i+1} + p_{i,i}x_i + p_{i,i-1}x_{i-1} \tag{2.3}$$

其边界条件为$x_0 = 0, x_m = 1$。将（2.2）代入（2.3）即得：

$$x_{i+1} - x_i = \left|\frac{g_i}{f_i}\right|(x_i - x_{i-1}) \tag{2.4}$$

进一步递推，并利用$x_0 = 0$即得：

$$x_i = \left[1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=1}^{j} \left|\frac{g_k}{f_k}\right|\right] x_1 \tag{2.5}$$

利用$x_m = 1$得：

$$x_1 = \left[1 + \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{k=1}^{j} \left|\frac{g_k}{f_k}\right|\right]^{-1} \tag{2.6}$$

再将（2.6）代入（2.5）即得：

$$x_i = \frac{1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=1}^{j} \left|\frac{g_k}{f_k}\right|}{1 + \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{k=1}^{j} \left|\frac{g_k}{f_k}\right|} \tag{2.7}$$

最后经过简单的代数运算可得：

$$1 - x_{m-1} = \left[1 + \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{k=j}^{m-1} \left|\frac{f_k}{g_k}\right|\right]^{-1} \tag{2.8}$$

$$\frac{x_1}{1 - x_{m-1}} = \prod_{k=1}^{m-1} \left|\frac{f_k}{g_k}\right| \tag{2.9}$$

若令$\rho_{AB}\,(= x_1)$表示群体从只有一个个体使用策略A演化到全部个体使用策略A的概率，而

$\rho_{BA}\left(=1-x_{m-1}\right)$表示群体从只有一个个体使用策略$B$演化到全部个体使用策略$B$的概率，则由（2.6），（2.8），（2.9）有：

$$\rho_{AB}=\left[1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\left|\frac{g_k}{f_k}\right|\right]^{-1} \tag{2.10}$$

$$\rho_{BA}=\left[1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\left|\frac{f_k}{g_k}\right|\right]^{-1} \tag{2.11}$$

$$\frac{\rho_{AB}}{\rho_{BA}}=\prod_{k=1}^{m-1}\left|\frac{f_k}{g_k}\right| \tag{2.12}$$

事实上，囚徒困境是一个较大的集类，可以通过多种方式去定义一个具体的囚徒困境博弈，特别地，与 Rand, Ohtsuki ＆Nowak(2009)一样，本文采用如下定义方式，本质性地看，“合作”策略表示合作者在给博弈对方带来收益b时，自己承担成本为c，其中假定$b>c>0$；“背叛”策略表示背叛者在获取收益d时，同时也给博弈对方带来成本e，其中$d>0,e>0$；而“利他惩罚”则表示策略主体在自己承担成本α同时，也令博弈对方承担成本β，其中$\alpha>0$且$\beta>0$。据此，可以定义如下 3×3 对称支付矩阵：

	合作	背叛	利他惩罚
合作	$b-c$，$b-c$	$-c-e$ ，$d+b$	$-c-\beta$，$-\alpha+b$
背叛	$d+b$，$-c-e$	$d-e$，$d-e$	$d-\beta$，$-\alpha-e$
利他惩罚	$-\alpha+b$，$-c-\beta$	$-\alpha-e$，$d-\beta$	$-\alpha-\beta$，$-\alpha-\beta$

矩阵 2.2

为了记号方便，特规定 1，2，3 分别代表策略“合作”，“背叛”及“利他惩罚”，与前文定义一致，令$\rho_{ij}\left(i\neq j;i,j=1,2,3\right)$表示一个单独使用策略$i$的个体侵入一群使用策略$j$的个体中，并最终演化为所有个体均使用策略$i$的概率，并且这样的定义仅适用于 2×2 对称博弈。类似 2×2 对称博弈，本文考虑这样的演化动态，其中“全部个体使用合作策略”，“全部个体使用背叛策略”，“全部个体使用利他惩罚策略”为该随机系统的三个吸收态（absorbing states）或同质态（homogeneous states），若将如上三个吸收态比作一个三角形的三个顶点，则在三角形内任意给定一个初始点，若该动态为无突变动态（no-mutation dynamics），则系统必将在有限时间内收敛到其中某个吸收态，即该随机过程将大多数时间停留在三角形的某

个顶点，而三角形的内点或非顶点的边界点均为逗留态，从这样的性质出发，若再引入一个较小的突变率作为三个吸收态之间的转移概率，则可以良好定义一条仅包含三个吸收态的嵌入马氏链（embedded Markov chain），显然这是一条遍历链（ergodic chain）,其极限平稳分布存在且唯一。根据 Fudenberg ＆ Imhof(2006,2008)可定义如下转移矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1-\mu(\rho_{21}+\rho_{31}) & \mu\rho_{21} & \mu\rho_{31} \\ \mu\rho_{12} & 1-\mu(\rho_{12}+\rho_{32}) & \mu\rho_{32} \\ \mu\rho_{13} & \mu\rho_{23} & 1-\mu(\rho_{13}+\rho_{23}) \end{pmatrix}$$

矩阵 2.3

其中 $\rho_{ij}\left(i\neq j;i,j=1,2,3\right)$ 定义如前，$0<\mu<1$。该矩阵不可约，其有唯一平稳分布为：

$$\bar{\nu}\triangleq\left(\nu_1(\mu,m),\nu_2(\mu,m),\nu_3(\mu,m)\right)=\left(\eta_1+\eta_2+\eta_3\right)^{-1}\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right) \quad (2.13)$$

其中，

$$\begin{aligned} \eta_1&=\rho_{12}\rho_{13}+\rho_{12}\rho_{23}+\rho_{13}\rho_{32} \\ \eta_2&=\rho_{13}\rho_{21}+\rho_{21}\rho_{23}+\rho_{23}\rho_{31} \\ \eta_3&=\rho_{12}\rho_{31}+\rho_{21}\rho_{32}+\rho_{31}\rho_{32} \end{aligned} \quad (2.14)$$

首先，我们需要回答的是：利他惩罚能否作为演化均衡出现？如果利他惩罚根本不被演化选择所偏好，则更无从谈利他惩罚能否促进合作演化的问题，事实上可以证明如下定理。

定理 2.1 存在 α,β,b,c,d,e 同时满足下列条件：

$$\begin{cases} \alpha>b+c+\beta,\beta+2c>b,b>c \\ \beta>d>e,\alpha+d+e>\beta,\beta+e>2d \\ d+c>2e,b>e,d>e,(b-c)(d-e)>(e+c)(b+d) \end{cases}$$

且此时有： $\lim\limits_{m\to\infty}\eta_1=\lim\limits_{m\to\infty}\eta_2=0,\lim\limits_{m\to\infty}\eta_3>0$，**即** $\lim\limits_{m\to\infty}\nu_3(\mu,m)=1$。

证明：见附录 A。

现在取 $\alpha=15,\beta=8,b=4,c=0.5,d=4,e=0.8$，由矩阵 2.2 可得：

	合作	背叛	利他惩罚
合作	3.5，3.5	-1.3 ，8	-8.5，-11
背叛	8，-1.3	3.2，3.2	-4，-15.8
利他惩罚	-11，-8.5	-15.8，-4	-23，-23

矩阵 2.4

很显然，在该矩阵中，“背叛”是唯一严格 Nash 均衡(ESS)。并且，在仅有合作与背叛的子

博弈中，背叛是唯一的严格 Nash 均衡(ESS)；在仅有合作与利他惩罚的子博弈中，合作是唯一的严格 Nash 均衡(ESS)；在仅有背叛与利他惩罚的子博弈中，背叛是唯一的严格 Nash 均衡(ESS)。然而，若利他惩罚者自己承担很高成本且给对方施加很高成本，合作成本较小且背叛给对方带来较小成本，则“利他惩罚”就可成为唯一演化均衡；同时，从矩阵 2.4 也可发现利他惩罚是帕累托低劣均衡，即此时群体总支付达到最低水平，这也就说明利他惩罚不是一个有效的演化均衡。定理 2.1 已经确定性回答了“利他惩罚能否成为演化均衡？”的问题，下面的问题便是：利他惩罚能够有效促进合作行为演化吗？事实上，我们可以得到如下定理。

定理 2.2 存在α,β,b,c,d,e同时满足下列条件：

$$\begin{cases} b > c > \alpha, 2\alpha + \beta > b \\ e > b + 2d \end{cases}$$

且此时有：$\lim_{m\to\infty}\eta_1 > 0, \lim_{m\to\infty}\eta_2 = \lim_{m\to\infty}\eta_3 = 0$，即$\lim_{m\to\infty}\nu_1(\mu,m) = 1$。

证明：见附录 B。

现在取$\alpha = 1, \beta = 2, b = 3, c = 2, d = 3, e = 10$，则由矩阵 2.2 可得：

	合作	背叛	利他惩罚
合作	1，1	-12 ，6	-4，2
背叛	6，-12	-7，-7	1，-11
利他惩罚	2，-4	-11，1	-3，-3

矩阵 2.5

其中“背叛”是唯一严格 Nash 均衡(ESS)。并且，在仅有合作与背叛的子博弈中，背叛是唯一的严格 Nash 均衡(ESS)；在仅有合作与利他惩罚的子博弈中，利他惩罚是唯一的严格 Nash 均衡(ESS)；在仅有背叛与利他惩罚的子博弈中，背叛是唯一的严格 Nash 均衡(ESS)。然而，若合作成本高于利他惩罚成本，背叛给对方带来成本要远大于背叛自身的收益，并且背叛给博弈对方带来成本远大于利他惩罚给对方施加成本，则“合作”可以成为唯一的突变-选择均衡，并且由矩阵 2.5 可知，这是一个全局帕累托最优均衡。故可认为，在较弱的条件下，利他惩罚的确有效促进了合作行为的演化。

三 结 论

本文在经典囚徒困境基础上，加入“利他惩罚”策略，建立起三策略间的演化博弈动态，

得到如下结论：首先，即使在 3×3 对称博弈中，仅有“背叛”为严格 Nash 均衡，在三个 2×2 子博弈（sub-games）中没有任何一个博弈使得“利他惩罚”成为严格 Nash 均衡(ESS)；然而在一定条件下当群体数量趋于无穷时，“利他惩罚”是唯一的突变-选择均衡；可是这样的均衡仅仅从支付矩阵看，却是帕累托低劣的。这也说明，利他惩罚并非演化目标(evolutionary target)而仅仅是促进合作演化的一种催化剂，其扮演着演化过程中“幕后英雄”的角色，给人类带来一个帕累托最优的演化均衡。

其次，即使在 3×3 对称博弈与其三个 2×2 子博弈（sub-games）中，“合作”均未曾以严格 Nash 均衡出现，可若合作成本高于利他惩罚成本，背叛给博弈对方带来成本远高于背叛所获收益，背叛给博弈对方带来成本远大于利他惩罚给对方所施加的成本，且利他惩罚自己所承担成本要小于施加给对方的成本，则当群体数量趋于无穷时，“合作”是唯一的演化动态均衡。这说明，当背叛者损人很多而利己并不太大，而利他惩罚“损人”不多，“损己”也不太多时，合作具有演化优势(evolutionary advantages)。这里，合作者是最慈悲的，自己承担成本却给对方带来收益；背叛者是最自私的，他给对方带来很大成本，自己收益也不太多；而利他惩罚者虽然没有合作者那么慈悲，也没有背叛者那么自私，可却是最公平、最勇敢的，因为他自己承担成本同时惩罚一阶搭便车者即背叛者和二阶搭便车者即合作者。

我们知道，局中人的支付是由博弈规则决定的，而博弈规则某种程度代表着现实制度环境及制度安排，那么上述结论对现实制度安排的启发是什么呢？制度必须给慈悲的合作者留下足够的生存空间，或者说制度本身必须具有激发人类慈悲情感的功能；制度当然是有漏洞的，但是制度必须不能让那些自私的背叛者占到太大便宜；最后，也是最重要的，制度必须鼓励和保护那些勇敢、正义、公平而又不偏激的利他惩罚者。

四 附 录

附录 A：定理 2.1 的证明

现在考虑如下子博弈矩阵：

列博弈方

		合作	利他惩罚
行博弈方	合作	$b-c$，$b-c$	$-c-\beta$，$-\alpha+b$
	利他惩罚	$-\alpha+b$，$-c-\beta$	$-\alpha-\beta$，$-\alpha-\beta$

矩阵 2.6

根据（2.1），合作者与利他惩罚者的适存度分别为：

$$\bar{f}_k=\frac{(b+\beta)k-(c+\beta)m+c-b}{m-1}$$
$$\bar{g}_k=\frac{(b+\beta)k+(\alpha+\beta)(1-m)}{m-1} \tag{2.15}$$

于是可得：

命题 2. 1 当$\alpha>b+c+\beta,b<\beta+2c$**时，** $\rho_{31}>0,\lim\limits_{m\to\infty}\rho_{31}>0,\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\rho_{13}}{\rho_{31}}=0$。

证明：由（2.15）可得：

$$\frac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}=\frac{(b+\beta)k-(\beta+c)m+c-b}{(b+\beta)k+(\beta+\alpha)(1-m)}$$

$$\Rightarrow\frac{d\left(\dfrac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}\right)}{dk}=\frac{(b+\beta)(c-\alpha)m+(\beta+b)(\alpha+\beta-c+b)}{\left[(b+\beta)k+(\beta+\alpha)(1-m)\right]^2}$$

易证当$\alpha>b+c+\beta$时，对任意固定的$m\geq 2$，恒有：

$$\frac{d\left(\dfrac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}\right)}{dk}<0$$

$$\Rightarrow\max_k\frac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}=\frac{(b+\beta)-(\beta+c)m+c-b}{(b+\beta)+(\beta+\alpha)(1-m)}$$

由

$$\frac{d\left(\max\limits_k\dfrac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}\right)}{dm}=\frac{-(b+\beta)(c+\beta)}{\left[(b+\beta)+(\beta+\alpha)(1-m)\right]^2}<0$$

$$\Rightarrow 0<\max_m\left(\max_k\frac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}\right)=\frac{c+\beta}{\alpha-b}<1$$

又由

$$\min_k\frac{\bar{f}_k}{\bar{g}_k}=\frac{(b-c)m+c-\beta-2b}{(b-\alpha)(m-1)}$$

$$\frac{d\left(\min\limits_{k}\frac{\overline{f}_k}{\overline{g}_k}\right)}{dm}=\frac{(b-\alpha)(b+\beta)}{\left[(b-\alpha)(m-1)\right]^2}<0$$

$$\Rightarrow \min_{m}\left(\min_{k}\frac{\overline{f}_k}{\overline{g}_k}\right)=\frac{b-c}{b-\alpha}<0$$

而当$b<\beta+2c$时，必有：

$$0<\left|\min_{m}\left(\min_{k}\frac{\overline{f}_k}{\overline{g}_k}\right)\right|<\max_{m}\left(\max_{k}\frac{\overline{f}_k}{\overline{g}_k}\right)<1$$

则由（2.11）可得：

$$\rho_{31}=\left[1+\sum\nolimits_{j=1}^{m-1}\prod\nolimits_{k=j}^{m-1}\left|\frac{\overline{f}_k}{\overline{g}_k}\right|\right]^{-1}\geq\frac{1-\dfrac{\beta+c}{\alpha-b}}{1-\left(\dfrac{\beta+c}{\alpha-b}\right)^m}$$

显然有$\rho_{31}>0,\lim\limits_{m\to\infty}\rho_{31}>0,$而由（2.12）可得：

$$0\leq\frac{\rho_{13}}{\rho_{31}}=\prod\nolimits_{k=1}^{m-1}\left|\frac{\overline{f}_k}{\overline{g}_k}\right|\leq\left(\frac{\beta+c}{\alpha-b}\right)^{m-1}$$

由夹逼定理有：

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\rho_{13}}{\rho_{31}}=0$$

证毕。

现在考虑如下子博弈矩阵：

		列博弈方	
		背叛	利他惩罚
行博弈方	背叛	$d-e$，$d-e$	$d-\beta$，$-\alpha-e$
	利他惩罚	$-\alpha-e$，$d-\beta$	$-\alpha-\beta$，$-\alpha-\beta$

矩阵 2.7

根据（2.1），背叛者与利他惩罚者的适存度分别为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_k &= \frac{(d-e)(k-1)+(m-k)(d-\beta)}{m-1} \\
\tilde{g}_k &= \frac{(-\alpha-e)k+(-\alpha-\beta)(m-k-1)}{m-1}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

于是可得：

命题 2. 2 当$\beta > d > e, \beta < \alpha + d + e$，$\beta + e > 2d$ 时，$\rho_{32} > 0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{32} > 0$,且

$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\rho_{23}}{\rho_{32}} = 0$。

证明：由（2.16）可得：

$$
\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k} = \frac{(d-\beta)m+(\beta-e)k+e-d}{(\beta-e)k+(\alpha+\beta)(1-m)}
$$

$$
\Rightarrow \frac{d\left(\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)}{dk} = \frac{(e-\beta)(\alpha+d)m+(e-\beta)(e-d-\alpha-\beta)}{\left[(\beta-e)k+(\alpha+\beta)(1-m)\right]^2}
$$

若$\beta > e$，则易证当$\beta < \alpha + d + e$时，对于任意固定的$m \geq 2$，恒有：

$$
\frac{d\left(\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)}{dk} < 0
$$

$$
\Rightarrow \max_k \frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k} = \frac{(d-\beta)(m-1)}{2\beta-e+\alpha-(\alpha+\beta)m}
$$

$$
\Rightarrow \frac{d\left(\max\limits_k \frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)}{dm} = \frac{(\beta-e)(d-\beta)}{\left[2\beta-e+\alpha-(\alpha+\beta)m\right]^2}
$$

显然当$\beta > d$ 时：

$$
0 < \max_m\left(\max_k \frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right) = \frac{\beta-d}{e+\alpha} < 1
$$

又由于

$$
\min_k \frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k} = \frac{(e-d)m+\beta+d-2e}{(e+\alpha)(m-1)}
$$

$$\frac{d\left(\min\limits_{k}\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)}{dm}=\frac{(e+\alpha)(e-\beta)}{\left[(e+\alpha)(m-1)\right]^2}<0$$

$$\Rightarrow \min_{m}\left(\min_{k}\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)=\frac{e-d}{e+\alpha}$$

故当$d>e$，$2d<e+\beta$时：

$$0<\left|\min_{m}\left(\min_{k}\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)\right|<\max_{m}\left(\max_{k}\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right)<1$$

则由（2.11）可得：

$$\rho_{32}=\left[1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\left|\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right|\right]^{-1}\geq\frac{1-\dfrac{\beta-d}{\alpha+e}}{1-\left(\dfrac{\beta-d}{\alpha+e}\right)^m}$$

显然有$\rho_{32}>0,\lim\limits_{m\to\infty}\rho_{32}>0,$又由（2.12）可得：

$$0\leq\frac{\rho_{23}}{\rho_{32}}=\prod_{k=1}^{m-1}\left|\frac{\tilde{f}_k}{\tilde{g}_k}\right|\leq\left(\frac{\beta-d}{\alpha+e}\right)^{m-1}$$

由夹逼定理可得：

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\rho_{23}}{\rho_{32}}=0$$

证毕。

现在考虑如下博弈矩阵：

		列博弈方	
		合作	背叛
行博弈方	合作	$b-c$，$b-c$	$-c-e$，$d+b$
	背叛	$d+b$，$-c-e$	$d-e$，$d-e$

矩阵 2.8

根据（2.1），合作者与背叛者的适存度分别为：

$$\hat{f}_k=\frac{(b-c)(k-1)+(m-k)(-c-e)}{m-1}$$
$$\hat{g}_k=\frac{(d+b)k+(d-e)(m-k-1)}{m-1} \tag{2.17}$$

则有：

命题 2.3 当 $d+c\geq 2e, b\geq e, d>e$ **，** $(c+e)(b+d)<(b-c)(d-e)$ **时，必有：**

$\rho_{21}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{21}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\frac{\rho_{12}}{\rho_{21}}=0$ 。

证明：由（2.17）可得：

$$\frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}=\frac{(e+b)k-(c+e)m+c-b}{(e+b)k+(d-e)(m-1)}$$
$$\Rightarrow\frac{d\left(\dfrac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)}{dk}=\frac{(e+b)\left[(d+c-2e)m+b+e-c-d\right]}{\left[(e+b)k+(d-e)(m-1)\right]^2}$$

当 $d+c\geq 2e, b\geq e, d>e$ 时，对于任意固定的 $m\geq 2$ ，恒有：

$$\frac{d\left(\dfrac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)}{dk}>0$$

$$\Rightarrow\max_k\frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}=\frac{(b-c)m+c-2b-e}{(d+b)(m-1)}$$

$$\Rightarrow\frac{d\left(\max\limits_k\dfrac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)}{dm}=\frac{(b+d)(b+e)}{\left[(b+d)(m-1)\right]^2}>0$$

$$\Rightarrow 0<\max_m\left(\max_k\frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)=\frac{b-c}{b+d}<1$$

又由于

$$\min_k\frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}=\frac{(c+e)(1-m)}{b+2e-d+(d-e)m}$$

$$\frac{d\left(\min\limits_k\dfrac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)}{dm}=\frac{-(c+e)(b+e)}{\left[b+2e-d+(d-e)m\right]^2}<0$$

$$\Rightarrow \min_m\left(\min_k \frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)=\frac{c+e}{e-d}<0$$

而当$(c+e)(b+d)<(b-c)(d-e)$时，必有：

$$0<\left|\min_m\left(\min_k \frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)\right|<\max_m\left(\max_k \frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right)=\frac{b-c}{b+d}<1$$

于是由（2.11）可得：

$$\rho_{21}=\left[1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\left|\frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right|\right]^{-1}\geq\frac{1-\dfrac{b-c}{b+d}}{1-\left(\dfrac{b-c}{b+d}\right)^m}$$

显然有$\rho_{21}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{21}>0,$又由（2.12）可得：

$$0\leq\frac{\rho_{12}}{\rho_{21}}=\prod_{k=1}^{m-1}\left|\frac{\hat{f}_k}{\hat{g}_k}\right|\leq\left(\frac{b-c}{b+d}\right)^{m-1}$$

由夹逼定理可得：

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\rho_{12}}{\rho_{21}}=0$$

证毕。

命题 2.4 存在α,β,b,c,d,e同时满足下列条件：

$$\begin{cases}\alpha>b+c+\beta,\beta+2c>b,b>c\\ \beta>d>e,\alpha+d+e>\beta,\beta+e>2d\\ d+c>2e,b>e,d>e,(b-c)(d-e)>(e+c)(b+d)\end{cases}$$

即

$\exists\alpha,\beta,b,c,d,e\quad s.t.\ \rho_{31}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{31}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\rho_{13}}{\rho_{31}}=0, \rho_{32}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{32}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\rho_{23}}{\rho_{32}}=0$，

$\rho_{21}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{21}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\rho_{12}}{\rho_{21}}=0$同时成立。

证明：取$\alpha=15,\beta=8,b=4,c=0.5,d=4,e=0.8$即可同时满足所有条件。

证毕。

现在，由（2.14）及命题 2.4 可得，当$m\to\infty$时：

$$\eta_1=\frac{\rho_{12}}{\rho_{21}}\rho_{21}\rho_{13}+\frac{\rho_{12}}{\rho_{21}}\rho_{21}\rho_{23}+\frac{\rho_{13}}{\rho_{31}}\rho_{31}\rho_{32}\to 0$$

$$\eta_2=\frac{\rho_{13}}{\rho_{31}}\rho_{31}\rho_{21}+\frac{\rho_{23}}{\rho_{32}}\rho_{21}\rho_{32}+\frac{\rho_{23}}{\rho_{32}}\rho_{32}\rho_{31}\to 0$$

$$\eta_3=\rho_{12}\rho_{31}+\rho_{21}\rho_{32}+\rho_{31}\rho_{32}>0$$

于是有：

$$\lim_{m\to\infty}\nu_3\left(\mu,m\right)=1 \tag{2.18}$$

故定理 2.1 得证。

附录 B：定理 2.2 的证明

该定理的证明须首先证明如下命题：

命题 2.5 （1）当$b>c>\alpha, 2\alpha+\beta>b$时，$\rho_{13}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{13}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\frac{\rho_{31}}{\rho_{13}}=0$；

（2）当$e>b+2d$时，$\rho_{12}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\rho_{12}>0, \lim\limits_{m\to\infty}\frac{\rho_{21}}{\rho_{12}}=0$。

证明：（1）由（2.15）可得：

$$\frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}=\frac{\left(b+\beta\right)k+\left(\alpha+\beta\right)\left(1-m\right)}{\left(b+\beta\right)k-\left(\beta+c\right)m+c-b}$$

$$\Rightarrow\frac{d\left(\dfrac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}\right)}{dm}=\frac{\left(b+\beta\right)\left[\left(c-\alpha\right)k+\alpha+\beta\right]}{\left[\left(b+\beta\right)k-\left(\beta+c\right)m+c-b\right]^2}$$

当$b>c>\alpha$时，对任意$1\le k\le m-1$，恒有：

$$\frac{d\left(\dfrac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}\right)}{dm}>0$$

$$\Rightarrow 0<\max_m\frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}=\frac{\alpha+\beta}{c+\beta}<1$$

$$\min_m\frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}=\frac{\alpha-b}{c+\beta}<0$$

而当$2\alpha+\beta>b$时，有：

$$0<\left|\min_m \frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}\right|<\max_m \frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}<1$$

由（2.10）可得：

$$\rho_{13}=\left[1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\left|\frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}\right|\right]^{-1}\geq\frac{1-\dfrac{\alpha+\beta}{c+\beta}}{1-\left(\dfrac{\alpha+\beta}{c+\beta}\right)^m}$$

显然$\rho_{13}>0,\lim\limits_{m\to\infty}\rho_{13}>0$，又由（2.12）可得：

$$0\leq\frac{\rho_{31}}{\rho_{13}}=\prod_{k=1}^{m-1}\left|\frac{\overline{g}_k}{\overline{f}_k}\right|\leq\left(\frac{\alpha+\beta}{c+\beta}\right)^{m-1}$$

由夹逼定理可得：

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\rho_{31}}{\rho_{13}}=0$$

（2）由（2.17）得：

$$\frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k}=\frac{(b+e)k+(d-e)(m-1)}{(b+e)k-(c+e)m+c-b}$$

$$\Rightarrow\frac{d\left(\dfrac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k}\right)}{dm}=\frac{(b+e)\left[(d+c)k+e-d\right]}{\left[(b+e)k-(c+e)m+c-b\right]^2}>0,\forall 1\leq k\leq m-1$$

$$\Rightarrow\max_m\frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k}=\frac{e-d}{e+c}$$

$$\min_m\frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k}=-\frac{b+d}{e+c}<0$$

当$e>b+2d$时，必有：

$$0<\left|\min_m\frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k}\right|<\max_m\frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k}<1$$

由（2.10）可得：

$$\rho_{12} = \left[1 + \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{k=1}^{j} \left| \frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k} \right| \right]^{-1} \geq \frac{1 - \dfrac{e-d}{e+c}}{1 - \left(\dfrac{e-d}{e+c}\right)^m}$$

显然 $\rho_{12} > 0, \lim_{m\to\infty} \rho_{12} > 0$，另外由（2.12）可得：

$$0 \leq \frac{\rho_{21}}{\rho_{12}} = \prod_{k=1}^{m-1} \left| \frac{\hat{g}_k}{\hat{f}_k} \right| \leq \left(\frac{e-d}{e+c}\right)^{m-1}$$

由夹逼定理可得：

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\rho_{21}}{\rho_{12}} = 0$$

证毕。

命题 2.6 存在 $\alpha, \beta, b, c, d, e$ 同时满足下列条件：

$$\begin{cases} b > c > \alpha, 2\alpha + \beta > b \\ e > b + 2d \end{cases}$$

即 $\exists \alpha, \beta, b, c, d, e \quad s.t. \rho_{12} > 0, \lim_{m\to\infty} \rho_{12} > 0, \lim_{m\to\infty} \frac{\rho_{21}}{\rho_{12}} = 0,\ \rho_{13} > 0, \lim_{m\to\infty} \rho_{13} > 0,\ \lim_{m\to\infty} \frac{\rho_{31}}{\rho_{13}} = 0$

同时成立。

证明：取 $\alpha = 1, \beta = 2, b = 3, c = 2, d = 3, e = 10$ 即可。证毕。

现在，由（2.14）及命题 2.6 可得当 $m \to \infty$ 时：

$$\eta_1 = \rho_{12}\rho_{13} + \rho_{12}\rho_{23} + \rho_{13}\rho_{32} > 0$$

$$\eta_2 = \frac{\rho_{21}}{\rho_{12}} \rho_{13}\rho_{12} + \frac{\rho_{21}}{\rho_{12}} \rho_{12}\rho_{23} + \frac{\rho_{31}}{\rho_{13}} \rho_{23}\rho_{13} \to 0$$

$$\eta_3 = \frac{\rho_{31}}{\rho_{13}} \rho_{12}\rho_{13} + \frac{\rho_{21}}{\rho_{12}} \rho_{12}\rho_{32} + \frac{\rho_{31}}{\rho_{13}} \rho_{13}\rho_{32} \to 0$$

于是有：

$$\lim_{m\to\infty} \nu_1(\mu, m) = 1 \tag{2.19}$$

故定理 2.2 得证。

参考文献：

［1］Bernhard,H.,Fehr,E. & Fischbacher,U.,2006,"Group Affiliation and Altruistic Norm Enforcement", *The American Economic Review*,Vol.96,pp.217-221.

［2］Bernhard,H.,Fischbacher,U. & Fehr,E.,2006,"Parochial altruism in humans",*Nature*,Vol. 442,pp.912-915.

［3］Bó,P.D.,2005,"Cooperation under the Shaow of the Future:Experimental Evidence from Infinitely Repeated Games",*The American Economic Review*,Vol.95,pp.1591-1604.

［4］Boyd,R.,Gintis,H.,Bowles,S. & Richerson,P.J.,2003, "The Eolution of Altruistic Punishment", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol.100,pp.3531-3535.

［5］Brandt,H.,Hauert,C. & Sigmund,K.,2003,"Punishment and Reputation in Spatial Public Goods Games",*Proc.R.Soc.Lond.B*,Vol.270,pp.1099-1104.

［6］Brandt,H. & Sigmund,K.,2005, "Indirect reciprocity, image scoring, and moral hazard", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*,Vol.102,pp.2666 -2670.

［7］Clutton-Brock,T.H. & Parker,G.A.,1995, "Punishment in Animal Societies",*Nature*,Vol. 373,pp.209-216.

［8］Dreber,A.,Rand,D.G.,Fudenberg,D. & Nowak,M.A.,2008, "Winners don't Punish",*Nature*, Vol.452,pp.348-351.

［9］Dawes,C.T.,Fowler,J.H.,Johnson,T.,McElreath,R. & Smirnov,O.,2007, "Egalitarian Motives in humans",*Nature*,Vol.446,pp.794-796.

［10］de Quervain,D.J.-F.*et al*,2004, "The Neural Basis of Altruistic Punishment",*Science*,Vol. 305,pp.1254-1258.

［11］Egas,M. & Riedl,A.,2008, "The Economics of Altruistic Punishment and the Maintenance of Cooperation",*Proc.R.Soc.B*,Vol.275,pp.871-878.

［12］Fehr,E.,Bernhard,H. & Rockenbach,B.,2008, "Egalitarianism in young children", *Nature*,Vol.454,pp.1079-1083.

［13］Fehr,E. & Fischbacher,U.,2004, "Third-party punishment and social norms", *Evolution and Human Behavior,*Vol.25,pp.63-87.

［14］Fehr,E. & Gächter,S.,2000, "Cooperation and Punishment in Public Goods Experiments", *The American Economic Review*,Vol.90,pp.980-994.

［15］Fehr,E.＆ Gächter,S.,2002, “Altruistic Punishment in Humans”,*Nature*,Vol.415,pp.137-140.

［16］Fehr,E.＆ Gächter,S.,2005, “Egalitarian motive and altruistic punishment”,*Nature,* Vol. 433,pp.E1-E2.

［17］Fehr,E.＆ Rockenbach,B.,2004, “Human Altruism:Economic,Neural,and Evolutionary Perspectives”,*Current Opinion in Neurobiology*,Vol.14,pp.784-790.

［18］Fehr,E. ＆ Rockenbach,B.,2003, “Detrimental Effects of Sanctions on Human Altruism”,*Nature*,Vol.422,pp.137-140.

［19］Fudenberg,D. ＆ Imhof,L.A.,2008, “Monotone Imitation Dynamics in Large Populations”,*Journal of Economic Theory,* Vol.140,pp.229-245.

［20］Fudenberg,D.＆Imhof,L.A.,2006, “Imitation Process with Small Mutations”,*Journal of Economic Theory*,Vol.131,pp.251-262.

［21］Fudenberg, D.＆ Maskin,E.,1986,“The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information”, *Econometrica*,Vol.54, pp.533-554.

［22］Fudenberg, D. ＆ Maskin,E.,1990,“Evolution and Cooperation in Noisy Repeated Games”, *The American Economic Review*,Vol.80,pp.274-279.

［23］Fowler,J.H.,2005,“Altruistic Punishment and the Origin of Cooperation”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*,Vol.102,pp.7047-7049.

［24］Fowler,J.H.,Johnson,T. ＆ Smirnov,O.,2005, “Egalitarian motive and altruistic punishment”,*Nature,* Vol.433,pp.E1-E2.

［25］Gardner,A.＆ West,S.A.,2004, “Cooperation and Punishment,Especially in Huamns”, *The American Naturalist*,Vol.164,pp.753-764.

［26］Gächter,S.,Renner,E.＆Sefton,M.,2008, “The Long-Run Benefits of Punishment”, *Science*,Vol.322,pp.1510.

［27］Gintis,H.,2003, “The Hitchhiker’s Guide to Altruism:Gene-Culture Coevolution,and the Internalization of Norms”, *Journal of Theoretical Biology*,Vol.220,pp.407-418.

［28］Gintis,H.,Bowles,S.,Boyd,R. ＆ Fehr,E.,2003, “Explaining altruistic behavior in humans”,*Evolution and Human Behavior,* Vol.24,pp.153-172.

［29］Guzmán,R.A.,Rodríguez-Sickert,C.＆Rowthorn,R., 2007,“When in Rome,do as Romans do:the coevolution of altruistic punishment,conformist learning,and cooperation”,*Evolution and*

*Human Behavior,*Vol.28,pp.112-117.

［30］Hardin,G.,1998, “Extensions of ‘The Tragedy of the Commons’”,*Science*,Vol.280,pp. 682-683.

［31］Hardin,G.,1968, “The Tragedy of the Commons”,*Science*,Vol.162,pp.1243-1248.

［32］Hauert,C.,Traulsen,A.,Brandt,H.,Nowak,M.A. & Sigmund,K.,2007, “Via freedom to coercion:the emergence of costly punishment”,*Science*,Vol.316,pp.1905-1907.

［33］Henrich,J.*et al*,2006, “Costly Punishment Across Human Societies”,*Science*,Vol.312,pp. 1767-1770.

［34］Henrich,J. & Boyd,R., 2001,“Why People Punish Defectors?Weak Conformist Transmission can Stabilize Costly Enforcement of Norms in Cooperative Dilemmas”, *Journal of Theoretical Biology* ,Vol.208,pp.79-89.

［35］Kosfeld,M.& Riedl,A,2004, “The Design of (De)centralized Punishment Institutions for Sustaining Cooperation”, Tinbergen Institute Discussion Paper.pp.1-21.

［36］Kurzban,R.,DeScioli,P. & O’Brien,E.,2007, “Audience effects on moralistic punishment”,*Evolution and Human Behavior,*Vol.28,pp.75-84.

［37］Imhof,L.A. & Nowak,M.A.,2006, “Evolutionary game dynamics in a Wright-Fisher process”,*Journal of Mathematical Biology*,Vol.52,pp.667-681.

［38］Lehmann,L.,Rousset,F.,Roze,D. & Keller,L.,2007, “Strong Reciprocity or Strong Ferocity?A Population Genetic View of the Evolution of Altruistic Punishment”, *The American Naturalist*,Vol.170,pp.000-000.

［39］Marlowe,F.W.*et al*,2008, “More ‘Altruistic’ Punishment in Larger Societies”,*Proc.R.. Soc.B*,Vol.275,pp.587-590.

［40］Milinski,M.& Rockenbach,B.,2007, “Spying on Others Evolves”,*Science*,Vol.317,pp. 464-465.

［41］Milinski,M.& Rockenbach,B.,2008, “Punisher Pays”,*Nature*,Vol.452,pp.297-298.

［42］Nowak,M.A.,Sasaki,A.,Taylor,C. & Fudenberg,D.,2004,“Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations”,*Nature*,Vol.428,pp.646-650.

［43］Nowak,M.A.&Sigmund,K.,2005, “Evolution of indirect reciprocity”,*Nature*,Vol.437,pp. 1291-1298.

［44］Ohtsuki,H.,Iwasa,Y. & Nowak,M.A.,2009, “Indirect reciprocity provides a narrow margin of efficiency for costly punishment”,*Nature,*Vol.457,pp.79-82.

[45] Ohtsuki,H.,Pacheco,J.M.&Nowak,M.A.,2007, “Evolutionary graph theory:breaking the symmetry between interaction and replacement”, *Journal of Theoretical Biology* ,Vol.246,pp.681 -694.

[46] Ohtsuki,H.&Nowak,M.A.,2006, “Evolutionary games on cycles”,*Proc.R.Soc.B*,Vol.273, pp.2249-2256.

[47] O’Gorman,R.,Wilson,D.S. &Miller,R.R.,2005, “Altruistic punishing and helping differ in sensitivty to relatedness,friendship,and future interactions”,*Evolution and Human Behavior*, Vol.26,pp.375-387.

[48] Price,M.E.,2005, “Punitive sentiment among the Shuar and in industrialized societies:cross-cultural similarities”,*Evolution and Human Behavior*,Vol.26,pp.279-287.

[49] Rand,D.G.,Ohtsuki,H.&Nowak,M.A.,2009, “Direct reciprocity with costly punishment: generous tit-for-tat prevails”, *Journal of Theoretical Biology* ,Vol.256,pp.45-57.

[50] Sally,D.,2001, “On sympathy and games”, *Journal of Economic Behavior & Organization,*Vol.44,pp.1-30.

[51] Sanfey,A.G.,*et al*,2007, “Social Decision-Making:Insights from Game Theory and Neuroscience”,*Science*,Vol.318,pp.598-602.

[52] Sanfey,A.G.,*et al*,2003, “The Neural Basis of Economic Decision-Making in the Ultimatum Game”,*Science*,Vol.300,pp.1755-1758.

[53] Singer,T.,*et al*,2004a,“Brain Responses to the Acquired Moral Status of Faces”,*Neuron*, Vol.41,pp.653-662.

[54] Singer,T.,*et al*,2004b,“Empathy for Pain Involves the Affective but not Sensory Components of Pain”,*Science*,Vol.303,pp.1157-1162.

[55] Singer,T.,*et al*,2006,“Empathic neural responses are modulated by the perceived fairness of others”,*Nature*,Vol.439,pp.466-469.

[56] Smirnov,O.,2007, “Altruistic Punishment in Politics and Life Sciences:Climbing the Same Mountain in Theory and Practice”,*Perspectives on Politics*,Vol.5,pp.489-501.

[57] Sripada,C.S.,2005, “Punishment and Strategic Structure of Moral Systems”,*Biology and Philosophy,*Vol.20,pp.767-789.

[58] Taylor,C.&Nowak,M.A.,2007, “Transforming the dilemma”,*Evolution*,Vol.61,pp.2281

-2292.

［59］Wu,Jia-Jia.*et al*,2009,“Costly Punishment does not Always Increase Cooperation”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*,Vol.106,pp. 17448-17451.

［60］Wong,M.Y.L.*et al*,2007, “The Threat of Punishment Enforces and Peaceful Cooperation and Stabilizes Queues in a Coral-Reef Fish”, *Proc.R.Soc.B*,Vol.274,pp.1093-1099.

［61］Xiao,E.＆ Houser,D.,2005,“Emotion Expression in Human Punishment Behavior”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*,Vol.102,7398 -7401.

［62］宾默尔：《自然正义》，中译本，上海：上海财经大学出版社，2010 年。