The Evolution of Cooperation in a Generalized Moran Process

Dai, Darong

School of Economics, Nanjing University

1 July 2010

一般化 Moran 过程中的合作演化

摘 要：本文以无限期重复囚徒困境博弈为基准，建立一个以新的博弈模型为支付矩阵的演化博弈动态，比较研究了行为模式TFT 和行为模式 $ALLD$ 的博弈表现，证明存在一个与折现因子紧密联系的正概率，使得一个单独使用TFT 的个体可以完全侵入到一群使用 $ALLD$ 的个体之中，即TFT 具有某种演化稳定性。

关键词： IPD；演化博弈动态； 均衡选择

The Evolution of Cooperation in a Generalized Moran Process

Darong Dai

(School of Economics, Nanjing University)

Abstract: In this paper, infinitely repeated prisoner's dilemma game as a benchmark being used to build a new model as the payoff matrix of an evolutionary game dynamics, with the comparative study of game performances between the behavior-pattern “tit for tat” and the behavior-pattern “always defection”, proving that there exists a strictly positive probability, which has a close link with the discount factor, that a single TFT individual can fully invade into a group of ALLD individuals; that is to say, TFT has some kind of evolutionary stability.

Key Words: IPD; Evolutionary Game Dynamics; Equilibrium Selection.

JEL Classification: C72; C73; Z13.

一般化 Moran 过程中的合作演化

戴大荣*

摘 要: 本文以无限期重复囚徒困境博弈为基准，建立一个以新的博弈模型为支付矩阵的演化博弈动态，比较研究了行为模式TFT和行为模式$ALLD$的博弈表现，证明存在一个与折现因子紧密联系的正概率，使得一个单独使用TFT的个体可以完全侵入到一群使用$ALLD$的个体之中，即TFT具有某种演化稳定性。

关键词: IPD；演化博弈动态； 均衡选择

一、引 言

Gintis(2003)认为恰恰当一个群体最最需要亲社会行为的时候，基于重复互动的合作会崩溃。然而，历史的逻辑似乎是：没有合作，社会才会崩溃；没有广泛而深入的合作，文明就必将倒退。因此合作是必然存在的。又比如，市场中卡特尔组织本身的结构特征和既有约束机制内生决定了成员企业之间往往采取“囚徒困境博弈”，虽然企业行为更严格地体现为一种“集体行动的逻辑”，不过集体归根结底还是由具体的一个个人构成，集体的理性虽然与单独一个人的理性存在区别，但是必须承认的一点是集体的理性来自个人的理性，集体的典章化了的制度实存也并非先验性存在，集体的选择必然受到集体中拥有话语权和决策权的那些有限个人的理性约束。于是我们可以这样问：在无限期IPD中，企业间的合作是否可能？又比如，如果把社会制度演化看成一个随机过程，那么我们可以这样问：给定备选制度，在这一随机过程的极限处，什么样的社会制度会被选择？什么样的社会制度会被淘汰？在一个充满变异和噪声的既定备选社会制度演化中，是合作性的社会制度具有更强的鲁棒性还是非合作性的社会制度？类似的例子很多，本文的研究则为如上市场中企业策略性行为的演化以及社会制度的演化变迁提供了一般化的方法论工具。

Axelrod(1980a), Axelrod(1980b), Axelrod and Hamilton(1981), Axelrod and Dion(1988),Wu and Axelrod(1995)研究表明在重复囚徒困境博弈中，行为模式一报还一报（TFT）在大量行为策略中平均成绩是最高的，并总结其成功的原因是它综合了善良性，清晰性，报复性以及宽容性。本文则仅仅考虑了TFT和$ALLD$两种行为模式在一个演化博弈动态中的表现，事实上的确存在一个正的概率使得TFT具有某种演化稳定的性质，即一个单独使用TFT的个

* 南京大学经济学院经济学系。E-mail:daidarong998@163.com。

体可以侵入一个全部使用 $ALLD$ 的社群之中，并最终有全部个体都会采用 TFT ；不过更加细致的分析表明，如果在演化动态中引入扰动，则 $ALLD$ 具有更强的演化稳定性。

本文的结构安排如下，第二部分是文献回顾，第三部分按照演进理性的逻辑建立了一个演化博弈动态，第四部分举了一个较为具体的例子，作为文中理论结果的某种应用和检验，第五部分是简短的结论及后继研究的一点展望，第六部分是附录，证明了文中的命题和定理。

二、文献回顾

博弈论作为现当代西方经济学的主流分析工具，已经被广泛研究和大量应用。尽管对博弈论存在各种批评(Binmore,1999)，有些是错误的，有些也是客观有力的, 比如 Mailth(1998)就指出恰当地运用博弈论需要理解其假设什么时候是有意义的，什么时候是没有意义的；但是作为策略研究，Camerer(1991)认为在提供策略思想和可以检测的启示方面，博弈论确是卓有成效的。根本性地，我们生活的世界无时无刻不是处在矛盾与冲突之中，身临其中，我们必须去正视这些矛盾和冲突，并且还要运用我们的策略思维和逻辑推理去解决矛盾，化干戈为玉帛，那么我们就不得不动用一系列概念（concepts)，其中有社会学的概念，有政治学的概念，当然也不乏生物学和经济学的概念，故而 Rubinstein (1991)认为博弈论正是对这些概念的某种独到的见解和剖析。很显然，博弈论是一门研究人类理性行为的学问，所以博弈论首先必须明晰地定义其“理性行为”（rational behavior）, 事实上，Harsanyi(1966)通过将贝叶斯决策理论直接一般化而定义了博弈论中的理性行为，他认为人类理性行为大致可以分为三类，第一类是融入了风险与不确定性的个人决策理论，第二类是伦理学，第三类便是博弈论，他进而明确指出博弈论没有伦理判断，博弈论处理的理性行为属于一个每个人都追求自我利益的世界，这些自我利益可以是自私的，也可以是无私的。

演化博弈论是建立在经典博弈论基石之上的，更是一种新的理性思想的形式化表达，Kandori, Mailath and Rob(1993)指出演化博弈路径有两个主要特性使其区别于传统内省式（introspective）路径: 首先，演化博弈论不需要假设局中人如此理性以至于他可以准确地预测对方的选择；其次，明晰的动态过程能够将局中人通过学习和理解对方的选择而调整自我决策的过程进行恰当地描述。Smith(1979),Nowak and Sigmund(1993); Bowles and Gintis(2004)，Taylor and Day(2004)，Fowler(2005)，Imhof, Fudenberg, and Nowak(2005)等一系列研究表明演化博弈论为生物学上的种群行为尤其是人类合作行为的研究提供了理论解释和形式化证明的有力工具；除此之外，演化博弈论的思想和分析模式也被广泛运用于国际关系研究(Stone,2001)，医学研究(Vincent and Gatenby,2005；Vincent,2006)，语言学研究

(Nowak,2000；Komarova and Nowak,2001)，社会学研究(Dietz, Burns and Buttel,1990)以及行为学研究(Tuomi, Agrell and Mappes,1997；Morrell and Kokko,2003)。然而，演化博弈论应用最广最深的领域还属经济学，其中 Friedman(1991)提供了一套易于驾驭的将演化博弈论纳入主流经济学分析进路的理论架构。的确，演化博弈论给予我们许多独特而深刻的洞识[①]，尤其是许多有趣的博弈往往存在多重均衡，演化博弈论作为一种十分重要的理论工具则可以帮助我们理解在不同的环境中哪些均衡才是最相关的(Mailath，1998)。

现有文献表明，对于演化博弈动态的研究，从世界观的角度看，主要是生物演化的观点，即达尔文进化论，其实近年来比较主流的关于社会选择的学习理论，即人类行为演化的过程其实是一个不断尝试，不断犯错并不断学习和适应的过程也是该演化观点的一种现代版本。而从方法论进路看，也不外乎两种：其一是无限或有限社群中的复制动态，可以是单社群中的复制动态，也可以是多社群的总体复制动态，早年的文献主要使用常微分方程（ODE）来建立动态模型，如 Taylor and Jonker(1978)，Benaim and weibull(2003)，新近的主流则是采用随机微分方程（SDE）建立随机复制动态模型，如 Cabrales(2000), Corradi and Sarin(2000), Beggs(2002)，Imhof(2005)，Hofbauer and Imhof(2009)；另外一种研究进路则主要集中于研究固定有限社群中的离散时间演化博弈动态，并通过取极限的方式来近似估计其离散动态的极限行为，文献如 Fudenberg, Imhof, Nowak and Taylor(2004)；Nowak, Sasaki, Taylor and Fudenberg (2004)；Taylor, Fudenberg, Sasaki and Nowak(2004)；Wild and Taylor (2004)，不过这种通过取极限来近似估计的方式尚存争议，Corradi and Sarin(2000)指出对离散随机模型取极限来研究其渐进性质, 会因为取极限的方式不同而产生不同的极限估计（approximation）, Beggs(2002)也指出对不同变量取极限的顺序不是没有关系的，往往产生不同的结果。

Binmore and Samuelson(1999)认为构建一个成功模型的标准就是它必须将重要的因素都考虑进去，而次要的，不重要的因素则要排除在模型之外。按此标准，在动态模型中充分考虑由于不可避免的噪声，变异而引起的扰动就是重要的，因为稳定性要求任何从稳定状态的微小偏离，动态系统都会得到自我修正，即演化轨道依旧保持；否则，该系统的稳定性就是不可靠的。事实上，Hines(1982)研究表明，加入变异和扰动会增加种群策略的多样性，同时倾向于减少种群之间的差异性；而且局中人的学习过程必然是充满噪声的，代表性个体也并非总是做出最优反应，Binmore and Samuelson(1997)指出当风险占优和支付占优出现矛盾的时候，其 muddling-model 通常会选择支付占优的均衡，因而传统的风险占优作为 Nash 均衡

[①] 威布尔在《演化博弈论》（中译本）一书中做了全面而又严密的纵览。

的一种精炼就是值得怀疑的。通过引入持续的变异而非一次性变异，Kandori, Mailath and Rob(1993)指出噪声的效应就是可以明显地将均衡策略集合减少到所谓的“长期均衡”集合。不仅如此，Foster and Young(1990),Young(1993)利用正则受扰动的马尔可夫过程的一般理论，发展了比演化稳定策略（ESS）[①]更可信赖的均衡概念，即随机稳定均衡，并通过找到由任一均衡到另一均衡的最小阻力路径，那个总体阻力最小的均衡便是所谓的演化稳定均衡。

三、演化博弈动态[②]：演进理性

现在考虑如下囚徒困境博弈：

列博弈方

		合作	背叛
行博弈方	合作	a，a	b，c
	背叛	c，b	d，d

矩阵 1

其中$c > a > d > b, a > \dfrac{c+b}{2}$。

IPD 表示重复囚徒困境博弈，TFT 表示一报还一报，$ALLD$ 表示总是惩罚，$ALLC$ 表示总是合作，$TFTT$ 表示三报还一报，PR 表示永久报复。其中 PR 指这样的行为模式，首先采取合作直到对方背叛，然后就一直以背叛来报复对方。下面以矩阵 1 为基础，进行以θ[③]为折现因子的无限期重复博弈，则下列计算是平凡的，又因为博弈是对称的，所以仅以行博弈方为例进行说明。现在假定行博弈方采用行为模式TFT，则当列博弈论也采用TFT时，他有支付$\dfrac{a}{1-\theta}$，若列博弈方采用行为模式$ALLD$，则行博弈方获得支付为：

$$b + d\theta + d\theta^2 + d\theta^3 + \cdots = \frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta}$$

其余可以类似得到计算，于是有下面的支付矩阵：

---

① Bendor and Swistak.(1995)详尽研究并比较了各种类型的演化稳定性。

② 目前演化博弈动态的研究主要被限制在有限策略空间， Oechssler and Riedel.(2001) 研究表明这样的限制是没有必要的，他们特别给出了一个简单的条件，在这个简单的条件之下，连续时间复制动态能被很好定义以适应无限策略空间的情形。

③ Baye and Jansen.(1996)则将随机性引入贴现因子中, 本文不作这样的假设。

	TFT	$ALLD$	$TFTT$	$ALLC$	PR
TFT	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta},\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$
$ALLD$	$\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta},\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta}$	$\frac{d}{1-\theta},\frac{d}{1-\theta}$	$\frac{c+(d-c)\theta^3}{1-\theta},\frac{b+(d-b)\theta^3}{1-\theta}$	$\frac{c}{1-\theta},\frac{b}{1-\theta}$	$\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta},\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta}$
$TFTT$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{b+(d-b)\theta^3}{1-\theta},\frac{c+(d-c)\theta^3}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$
$ALLC$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{b}{1-\theta},\frac{c}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$
PR	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta},\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$

矩阵 2

从矩阵 2 不难看出给定行为模式空间为$\{TFT, ALLD, ALLC, TFTT, PR\}$，折现因子为$\theta$，则在无限期$IPD$中，$PR$与$TFT$支付等价，$TFT$分别弱占优$ALLC$和$TFTT$。在此基础上，通过反复剔除弱占劣行为模式，于是得到如下简约的支付矩阵：

列博弈方

行博弈方		TFT	$ALLD$
	TFT	$\frac{a}{1-\theta},\frac{a}{1-\theta}$	$\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta},\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta}$
	$ALLD$	$\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta},\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta}$	$\frac{d}{1-\theta},\frac{d}{1-\theta}$

矩阵 3

给定矩阵 3，则当$0<\theta\leq\frac{c-a}{c-d}$时，$(ALLD, ALLD)$是唯一纯策略 Nash 均衡，此时不存在混合策略均衡；当$\frac{c-a}{c-d}<\theta<1$时，该博弈存在两个纯策略 Nash 均衡(TFT,TFT)与$(ALLD, ALLD)$[①]，以及一个混合策略均衡$\{(\gamma,1-\gamma),(\gamma,1-\gamma)\}$，其中：

$$\gamma=\frac{(d-b)(1-\theta)}{(a-b-c+d)-(2d-b-c)\theta}，\ 1-\gamma=\frac{(a-c)+(c-d)\theta}{(a-b-c+d)-(2d-b-c)\theta}$$

① 显然均衡(TFT,TFT)帕累托占优均衡$(ALLD, ALLD)$，且是严格占优；或者说从后者转变到前者是一个全局帕累托改进。

命题 3.1 当 $\dfrac{a-c-d+b}{b-c}\le\theta<1$ 时，(TFT,TFT) 是风险占优均衡当且仅当 (TFT,TFT) 是随机稳定均衡[①]。

证明：首先，仅当 $\dfrac{c-a}{c-d}<\theta<1$ 时，矩阵 3 存在两个纯策略 Nash 均衡，因为若 $\dfrac{c-a}{c-d}>\dfrac{a-c-d+b}{b-c}$，则导出 $(a-d)(b-d)>0$，这与囚徒困境博弈中 $c>a>d>b$ 矛盾，所以 $\dfrac{c-a}{c-d}\le\dfrac{a-c-d+b}{b-c}$。其次，$(TFT,TFT)$ 是（弱）风险占优均衡，当且仅当：

$$\frac{a}{1-\theta}-\frac{c+(d-c)\theta}{1-\theta}\ge\frac{d}{1-\theta}-\frac{b+(d-b)\theta}{1-\theta}$$

化简便得到 $\dfrac{a-c-d+b}{b-c}\le\theta<1$。下面假定行博弈方有一个统一的样本容量（信息量）$s$，列博弈方有一个统一的样本容量 s'，假设犯错误概率 ε 对双方相同，并且记忆 $m\ge 2s\vee 2s'$，则 (TFT,TFT) 是随机稳定的当且仅当 $[\gamma s]\wedge[\gamma s']\le[(1-\gamma)s]\wedge[(1-\gamma)s']$，这里 $[x]$ 表示对 x 取整，$x\wedge y$ 表示 x 与 y 中的较小者。易知此处不管是 $s>s'$ 还是 $s<s'$，(TFT,TFT) 是随机稳定的当且仅当 $\gamma\le 1-\gamma$，即 $\gamma\le\dfrac{1}{2}$，而这正是 (TFT,TFT) 为（弱）风险占优均衡的充分必要条件，所以当 $\dfrac{a-c-d+b}{b-c}\le\theta<1$ 时，(TFT,TFT) 是风险占优均衡当且仅当 (TFT,TFT) 是随机稳定均衡[②]。证毕。

下面在一个一般化 Moran 过程中建立一个演化博弈动态，首先假定这个单社群的个体数为 $m\in\mathbb{Z}^+(m\ge 2)$，为一固定常数，令 i 表示第 n 期使用策略 TFT 的人数，令 $\dfrac{a}{1-\theta}=\zeta_1,\dfrac{b+(d-b)\theta}{1-\theta}=\zeta_2,\dfrac{c+(d-c)\theta}{1-\theta}=\zeta_3,\dfrac{d}{1-\theta}=\zeta_4$，则对行博弈方可定义如下的支付函数：

$$\begin{aligned} r(i,TFT)&=\zeta_1\frac{i-1}{m-1}+\zeta_2\frac{m-i}{m-1}\\ r(i,ALLD)&=\zeta_3\frac{i}{m-1}+\zeta_4\frac{m-i-1}{m-1}\end{aligned}\qquad(3.1)$$

① Young(1993)指出了风险占优均衡概念和随机演化稳定均衡概念之间的区别，并且提出了一种算法来具体求解博弈的随机稳定均衡（stochastically stable equilibria）。

② 此处的计算方法由杨在《个人策略与社会结构：制度的演化理论》（中译本）中给出。

Imhof and Nowak(2006); Nowak, Sasaki, Taylor and Fudenberg(2004)采取的定义则是引入一个参数$\omega \in (0,1)$来测度博弈矩阵的支付对其 fitness 的贡献，不过其ω可以近似地看成此处的折现因子θ，因为ω增加使得博弈本身变得重要，而θ的增加也会带来相似的效果，直观上二者具有影响局中人行为的某种可比的等效性；不过二者也有明显的差异，θ是通过先验影响支付矩阵结构及博弈性质来影响局中人的策略思考和行为选择的，而ω则并不出现在博弈支付矩阵之中，是外在赋予博弈的权重，它直接作用在博弈的结果上，而不会影响，至少不会内在性地，直接性地影响博弈本身的结构与性质。进而可以定义出如下的转移概率：

$$\begin{cases} p_{i,i+1} = \dfrac{i(m-i)\left[\zeta_1(i-1)+\zeta_2(m-i)\right]}{im\left[\zeta_1(i-1)+\zeta_2(m-i)\right]+(m-i)m\left[\zeta_3 i+\zeta_4(m-i-1)\right]} \\ p_{i,i-1} = \dfrac{i(m-i)\left[\zeta_3 i+\zeta_4(m-i-1)\right]}{im\left[\zeta_1(i-1)+\zeta_2(m-i)\right]+(m-i)m\left[\zeta_3 i+\zeta_4(m-i-1)\right]} \\ p_{i,i} = 1-p_{i,i+1}-p_{i,i-1} \end{cases} \tag{3.2}$$

显然$p_{0,0}=p_{m,m}=1$，即状态“0”和“m”是两个吸收态，若用$r.v.X_n$表示状态，则集合$\{X_n, n\ge 0\}$定义了一个有限状态的带两个吸收壁的随机游动，显然这是一条马氏链。再定义初始分布为$\mu(0)=\left(\mu_0(0),\mu_1(0),\cdots,\mu_m(0)\right)=\left(\dfrac{1}{m+1},\dfrac{1}{m+1},\cdots,\dfrac{1}{m+1}\right)$，则$\{X_n, n\ge 0\}$是一条 well-defined 时齐马尔可夫链。该链转移方阵为：

$$\mathbb{P}=\begin{bmatrix} p_{0,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{m-1,0} & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{m,m} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

令$S \triangleq \{0,1,\cdots,m\}$表示状态集，$C$表示所有常返状态构成的集合，$d(i)$表示状态$i$的周期，约定当$d(i)=1$时状态$i$是非周期的。并作如下定义：

定义 3.1 $L_{i,j}^{(n)} \triangleq P\left\{X_n=j, X_k\ne j, 1\le k\le n-1 \mid X_0=i\right\}$表示从$i$出发经过$n$期（步）首次到达$j$的概率，则$L_{i,j} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} L_{i,j}^{(n)}$表示从$i$出发经过有限期（步）首次到达$j$的概

率。

定义 3.2　若根据定义 3.1 有 $L_{i,i}=1$，则 i 是常返状态，此时记 $\nu_i \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} nL_{i,i}^{(n)}$，表示从 i 出发再回到 i 的平均回返时间。

由于易知状态“0”和“m”是遍历态，且 $\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} \equiv 1, \forall i=0,m$。于是，有 $S=C\cup\{1,\cdots,m-1\}$，其中 $C=C_1\cup C_2$，$C_1=\{0\},C_2=\{m\}$。

定理 3.1　如上定义之马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的极限分布 $\lim_{n\to\infty}\mu(n)$ 存在。

证明：见附录 A。

定理 3.2　如上定义的概率转移矩阵 $\mathbb{P}$ 是可约矩阵。

证明：见附录 B。

令 $x_i\ (1\leq i\leq m-1)$ 表示从状态 i 出发，最后被状态 $m\ (m\geq 2)$ 吸收的概率，则有如下的递归方程：

$$x_i = p_{i,i+1}x_{i+1} + p_{i,i}x_i + p_{i,i-1}x_{i-1} \tag{3.3}$$

其边界条件为 $x_0=0, x_m=1$。

命题 3.2　递归方程（3.3）可解。

证明：见附录 C。

定理 3.3　⑴ $\dfrac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}\ (1\leq k\leq m-1)$ 关于折现因子 θ 严格递减；

⑵ $\dfrac{d(c-a)+b(a-d)}{d(c-a)+b(a-d)+a(c-d)} \leq x_1 \leq \dfrac{a-d}{a}$；

⑶ $x_1 + x_{m-1} \leq 1$

证明：见附录 D。

定理 3.3⑴表明当社群中有 $k\ (1\leq k\leq m-1)$ 个个体使用 TFT 时，折现因子 θ 增加，将导致采用 $ALLD$ 对采用 TFT 的相对支付严格减少，由于通过计算易得：

$$\frac{\partial r(k,TFT)}{\partial\theta} \geq \frac{\partial r(k,ALLD)}{\partial\theta} > 0$$

所以折现因子 θ 增加，使得 $r(k,TFT)$ 和 $r(k,ALLD)$ 均严格增加，但是 $r(k,TFT)$ 边际增

加量更大。本文考虑的是单社群，即行博弈方与列博弈方在折现因子上遵从同质性假设，则伴随社群中折现因子水平的不断提高，博弈支付内生着一种激励，促使局中人更加倾向于采用合作性质的行为模式TFT，而不是采用非合作性质的行为模式$ALLD$。当然，从更加微观的层面分析，该演化过程伴随着局中人观察、模仿、尝试乃至交流、学习和调整、适应的经验积累和深入社会化，这也是一个局中人行为决策选择从幼稚向成熟慢慢转变的过程。于是可以得到一个平凡的结论：折现因子θ的增加能够促进社群中间的合作。定理 3.3⑵说明存在一个严格正的概率使社群从最初只有一个个体采用TFT演化到最终所有的个体都采用TFT，并且可以精确地求出这个概率的上确界和下确界，可以发现，当$d=0$时，这个概率有上确界 1，下确界$\dfrac{b}{b+c}$，即当博弈双方均背叛的支付为 0 时，这个概率最多可以达到 100%，并且这样的结论并不依赖于折现因子θ，而仅仅取决于先验的囚徒困境博弈的支付结构。由⑶可得$\dfrac{x_1}{1-x_{m-1}}\le 1$，其中$x_1$表示社群从只有一个个体采用$TFT$演化到最终全部个体采用$TFT$的概率，而$1-x_{m-1}$表示社群从只有一个个体采用$ALLD$演化到最终全部个体采用$ALLD$的概率。$x_1\le 1-x_{m-1}$表明非合作性质的行为模式$ALLD$比合作性质的行为模式$TFT$更具侵略性和传染性，即单个的$ALLD$采用者更容易侵入一群采用$TFT$的个体之中，并且成功复制自己的行为模式。

由（3.1）可得：

$$
\begin{aligned}
h_i &\triangleq r(i,TFT)-r(i,ALLD)\\
&=\frac{\left\{(a-b+d-c)i+(b-d)m+(d-a)+\left[(d-b)m-(2d-b-c)i\right]\theta\right\}}{(m-1)(1-\theta)}
\end{aligned}
$$

表示当社群中有i个人使用TFT时，当前采用TFT和采用$ALLD$的支付之差。于是有：

定理 3.4 ⑴若$\exists\theta^* s.t.\ h_i\equiv 0$对$\forall i\in\{0,1,\cdots,m\}$，$\forall$固定$m(\ge 2)\in\mathbb{Z}^+$成立，则：$\theta^*\ge\dfrac{c-a}{c-d}$，即$\theta$取值保证博弈矩阵 3 存在两个纯策略 Nash 均衡；

⑵$h_1<0$，即$r(1,TFT)<r(1,ALLD)$，$\forall\theta\in(0,1),m(\ge 2)\in\mathbb{Z}^+$；

⑶$\forall\varepsilon>0,\forall\theta\in\left(\dfrac{c-a}{c-d}-\varepsilon,\dfrac{c-a}{c-d}+\varepsilon\right)$，恒有$h_{m-1}<0$当且仅当$m$只取有限值；

$\forall\varepsilon>0,\forall\theta\in\left(\frac{c-a}{c-d}-\varepsilon,\frac{c-a}{c-d}+\varepsilon\right)$，$h_{m-1}\equiv 0\Leftrightarrow m\to+\infty$；

⑷ $\forall\varepsilon>0,\forall\theta\in\left(\frac{a-c-d+b}{b-c}-\varepsilon,\frac{a-c-d+b}{b-c}+\varepsilon\right)$，$b-c\le h_{m-1}\le d-b$；

若 $d>\frac{b+c}{2}$，则 $\lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}>0\Leftrightarrow m\ge 4$；当 $\theta\to 1^-$ 时，$h_{m-1}\to+\infty$。

证明：见附录 E。

定理 3.4⑴表明给定社群数量可以趋向无穷，不管当下社群中有多少个体采用行为模式 TFT，要使得局中人当下采用 TFT 和采用 $ALLD$ 支付均等，必须对折现因子提出一定要求，即 θ 的赋值须得保证矩阵 3 中存在两个纯策略 Nash 均衡，或者说必须使得矩阵 3 具有 2×2 对称协调博弈的性质。⑵表明不管折现因子 θ 如何赋值（事实上，此时支付之差 h_1 与 θ 无关），当社群中只有一个个体采用 TFT 时，当下采用 TFT 的支付一定比采用 $ALLD$ 的支付要小。⑶表明当社群数量固定有限，且社群中仅有一个个体采用 $ALLD$ 时，如果折现因子取值于 $\frac{c-a}{c-d}$ 的 $\varepsilon-$ 邻域内时，恒有 $r\left(m-1,TFT\right)<r\left(m-1,ALLD\right)$，即当下采用 TFT 比采用 $ALLD$ 获得的支付要小。换言之，此时那唯一一个采用 $ALLD$ 的个体所获得的支付要比余下任何一个采用 TFT 的个体所获支付更大，而且，当且仅当社群数量趋向无穷大时，余下任何一个采用 TFT 的个体所获支付才与唯一那个采用 $ALLD$ 的个体所获支付持平。⑷表明当 θ 取值于 $\frac{a-c-d+b}{b-c}$ 的 $\varepsilon-$ 邻域内时，h_{m-1} 可正可负，即使 θ 的取值保证 TFT 是严格风险占优均衡，仍有可能是 $r\left(m-1,TFT\right)<r\left(m-1,ALLD\right)$，也即唯一那个采用 $ALLD$ 的个体获得的支付比余下任何一个采用 TFT 的个体都要更高。这说明在该演化博弈动态中，严格风险占优均衡作为 Nash 均衡的一种精炼是值得怀疑的，该模型至少从理论上提供了质疑这种精练的一个版本。进一步，当 θ 无限趋近于 1 时，$r\left(m-1,TFT\right)$ 会趋向于无穷大，这也从支付的角度再一次证实了前面一个平凡的结论：折现因子的增加会促进社群中间的合作。

定理 3.5　⑴当 $0<\theta<\frac{a-d}{d-b}$ 时，若 $\frac{c-a}{c-d}>\frac{a-d}{d-b}$，则 $h_{m-1}<0$，$\forall m(\ge 2)\in\mathbb{Z}^+$；

若 $\frac{c-a}{c-d}<\frac{a-d}{d-b}$，则 $\min_m h_{m-1}<0$。

⑵当 $d-b>a-d,\frac{a-d}{d-b}<\theta<1$ 时，$h_{m-1}<0$，$\forall m(\ge 2)\in\mathbb{Z}^+$。

证明：(1) $$\because \frac{\partial h_{m-1}}{\partial m}=\frac{a-b+\theta(b-d)}{(1-\theta)(m-1)^2}>0 \Leftrightarrow \frac{a-d}{d-b}>\theta>0$$

$$\therefore \max_m h_{m-1}=\frac{a-c+\theta(c-d)}{1-\theta}>0 \Leftrightarrow \theta>\frac{c-a}{c-d}$$

因此，若 $\frac{c-a}{c-d}>\frac{a-d}{d-b}$，则 $\max_m h_{m-1}\le 0$，即 $h_{m-1}<0$，$\forall m(\ge 2)\in \mathbb{Z}^+$；若 $\frac{c-a}{c-d}<\frac{a-d}{d-b}$，则 $\min_m h_{m-1}=b-c<0$。

(2) $$\because \frac{\partial h_{m-1}}{\partial m}=\frac{a-b+\theta(b-d)}{(1-\theta)(m-1)^2}<0 \Leftrightarrow \frac{a-d}{d-b}<\theta<1$$

又若 $d-b>a-d$，则 $\frac{\partial h_{m-1}}{\partial m}=\frac{a-b+\theta(b-d)}{(1-\theta)(m-1)^2}<0$ 并不矛盾，故：

$$\therefore \max_m h_{m-1}=h_{m-1}\,|_{m=2}=b-c<0$$

故 $h_{m-1}<0$，$\forall m(\ge 2)\in \mathbb{Z}^+$。证毕。

定理 3.5 进一步给出了 $r(m-1,TFT)<r(m-1,ALLD)$ 时，折现因子 θ 和博弈支付结构本身反映出来的一些比较精致的特点。当然，这与本文采用的基准博弈是囚徒困境博弈有紧密联系，如果换成协调博弈或者鹰-鸽博弈，那么此处的结论自然发生改变；不过，可以想见的是，结论定会一样的精致细微。不过，这样精致细微的结论一样可以应用到更加具体的经济学分析中去，作为一种工具，更是一种思想。

下面对（3.2）中定义的转移概率阵引入某种扰动，即该演化过程存在某种变异，一个采用行为模式 TFT 的代表性个体，取代他的后代可能变异为采用行为模式 $ALLD$；对称地，一个采用行为模式 $ALLD$ 的代表性个体，取代他的后代可能变异为采用行为模式 TFT。形式化地，即转移概率 $p_{0,1}$ 和 $p_{m,m-1}$ 均有一个正的取值，现令：

$$p_{0,1}=\gamma_2=1-p_{0,0},\, p_{m,m-1}=\gamma_1=1-p_{m,m}$$

即采用 TFT 的代表性个体，其后代以概率 $p_{m,m-1}=\gamma_1$ 变异为一个采用 $ALLD$ 的代表性个体；而采用 $ALLD$ 的代表性个体，其后代以概率 $p_{0,1}=\gamma_2$ 变异为采用 TFT 的代表性个体，显然有 $0<\gamma_1,\gamma_2<1$。令 $\gamma_2=\rho\gamma_1, 0<\rho<+\infty$，区别于（3.2）中的转移概率，新的转移概率定义如下：

$$\tilde{p}_{0,1}=\gamma_2,\tilde{p}_{0,0}=1-\gamma_2,\tilde{p}_{m,m-1}=\gamma_1,\tilde{p}_{m,m}=1-\gamma_1$$

当$1\le i\le m-1$（i同上定义一致，表示t时刻社群中采用TFT的个体数）时，有：

$$\begin{cases}\tilde{p}_{i,i+1}=\left(1-\dfrac{i}{m}\right)\left[\dfrac{if_i}{if_i+(m-i)g_i}(1-\gamma_1)+\dfrac{(m-i)g_i}{if_i+(m-i)g_i}\gamma_2\right]\\ \tilde{p}_{i,i-1}=\dfrac{i}{m}\left[\dfrac{if_i}{if_i+(m-i)g_i}\gamma_1+\dfrac{(m-i)g_i}{if_i+(m-i)g_i}(1-\gamma_2)\right]\\ \tilde{p}_{i,i}=1-\tilde{p}_{i,i+1}-\tilde{p}_{i,i-1}\end{cases}$$

其中：

$$f_i=\zeta_1(i-1)+\zeta_2(m-i)=(m-1)r(i,TFT)$$

$$g_i=\zeta_3 i+\zeta_4(m-i-1)=(m-1)r(i,ALD)$$

显然，这样定义的转移概率是平稳的，且有：

$$\lim_{\gamma_1\to 0}\tilde{p}_{i,j}=p_{i,j},|i-j|\le 1,i,j=0,1,\cdots,m$$

事实上，此时$\left\{X(t)=i,t\ge 0\right\}_{i=0}^{m}$定义了一个生灭过程，并有唯一不变的遍历分布记为$\vartheta(\gamma_1,\gamma_2,m)=\vartheta(\gamma_1,\rho\gamma_1,m)$，特别地记$\vartheta_{TFT}(\rho,m)=\lim\limits_{\gamma_1\to 0^+}\vartheta(\gamma_1,\rho\gamma_1,m)$，事实上，Kifer(1990)已经证明，当$\gamma_1\to 0^+$时，在不变概率测度$\vartheta$之下，“0”和“$m$”之外的状态是零测度，所以必有$\vartheta_{ALLD}(\rho,m)=1-\vartheta_{TFT}(\rho,m)$，即当$\gamma_1\to 0^+$时，受扰动的转移概率$\tilde{P}$和原来的$P$一样，有且仅有两个吸收态“0”和“$m$”，其中全部采用$TFT$的概率为$\vartheta_{TFT}(\rho,m)$，而全部采用$ALLD$的概率为$\vartheta_{ALLD}(\rho,m)$，进一步有如下命题：

命题 3.3　$\vartheta_{TFT}(\rho,m)=\dfrac{\rho x_1}{\rho x_1+(1-x_{m-1})}$，$\vartheta_{ALLD}(\rho,m)=\dfrac{1-x_{m-1}}{\rho x_1+(1-x_{m-1})}$

其中$x_1=\dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\dfrac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}$，$1-x_{m-1}=\dfrac{1}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\dfrac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}}$。

证明：参见 Fudenberg and Imhof(2004), 也可参见 Fudenberg, Imhof, Nowak and Taylor(2004) 引理 1。

命题 3.4　(1)$\vartheta_{TFT}(\rho,m)$关于折现因子θ严格递增，$\vartheta_{ALLD}(\rho,m)$关于折现因子θ严格

递减；

(2) $\vartheta_{TFT}(\rho,m)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\rho>1$。

证明：(1)由于：

$$\frac{x_1}{1-x_{m-1}}=\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}$$

$$\therefore\vartheta_{TFT}(\rho,m)=\frac{\rho\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}}{\rho\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}+1}$$

$$\vartheta_{ALLD}(\rho,m)=\frac{1}{\rho\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}+1}$$

$$\because\frac{\partial\left[\vartheta_{TFT}(\rho,m)\right]}{\partial\left[\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}\right]}=\frac{\rho}{\left[\rho\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}+1\right]^2}>0$$

且由定理 3.3 知$\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}$关于$\theta$严格递增，故有$\vartheta_{TFT}(\rho,m)$关于折现因子$\theta$严格递增，同理可证$\vartheta_{ALLD}(\rho,m)$关于折现因子$\theta$严格递减。

(2) $$\vartheta_{TFT}(\rho,m)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}>\frac{1}{\rho}$$

而由定理 3.3 知$\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}\le 1$，故$\vartheta_{TFT}(\rho,m)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\rho>1$。证毕。

命题 3.4 说明，当变异概率趋于 0 时，在该生灭过程的极限处，全部个体采用TFT的概率随折现因子θ的增加而严格增加，全部个体采用$ALLD$的概率随折现因子θ的增加而严格减少；并且在极限处，全部个体采用TFT的概率大于 50%，当且仅当$ALLD$的变异概率严格大于TFT的变异概率，即此时$ALLD$代表性个体的后代更容易变异为一个采用行为模式TFT的个体，而此时与折现因子θ的赋值无关。

定理 3.6 令$m\to+\infty,\gamma_1 m\to k_1,\gamma_2 m\to k_2$其中$0<k_1,k_2<+\infty$，则必定存在一个$\theta^*\ge\frac{c-a}{c-d},s.t.\ \left\{X(t)=i,t\ge 0\right\}_{i=0}^{m}$的极限平稳分布为关于参数$(k_1,k_2)$的$Beta$分布。

证明：见附录 F。

综上，可以得到结论：在 $ALLD$ 和 TFT 的一对一对抗中，非合作性质的 $ALLD$ 比合作性质的 TFT 具有更强的演化稳定性和更强的鲁棒性。

四、一个例子

以 $m=2$ 为例子，研究当概率转移阵受到某种扰动后的极限分布情况，首先令：

$$P^0 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表示没有受到扰动情形下的转移阵，易求得：

$$\lim_{n\to+\infty} \left(P^0\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\zeta_3}{\zeta_2+\zeta_3} & 0 & \dfrac{\zeta_2}{\zeta_2+\zeta_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

假定初始分布为离散均匀分布，则有：

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mu^0\right)^n = \left(\frac{1}{3}\frac{\zeta_2+2\zeta_3}{\zeta_2+\zeta_3}, 0, \frac{1}{3}\frac{2\zeta_2+\zeta_3}{\zeta_2+\zeta_3}\right) \tag{4.1}$$

给定如下形式的对称矩阵扰动：

$$P^\varepsilon \triangleq \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

这里显然有 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} P^\varepsilon = P^0$，其中 $\forall 1>\varepsilon>0$，通过矩阵对角化可得：

$$P^\varepsilon = E\Lambda E^{-1}$$

其中：

$$E = \begin{pmatrix} -\dfrac{p_{12}}{p_{10}} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{p_{10}+p_{12}}{\varepsilon} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \ \Lambda = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{11}-\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\left(P^{\varepsilon}\right)^n=\begin{pmatrix}\frac{p_{10}}{p_{10}+p_{12}} & 0 & \frac{p_{12}}{p_{10}+p_{12}}\\ \frac{p_{10}}{p_{10}+p_{12}} & 0 & \frac{p_{12}}{p_{10}+p_{12}}\\ \frac{p_{10}}{p_{10}+p_{12}} & 0 & \frac{p_{12}}{p_{10}+p_{12}}\end{pmatrix}$$

假定初始分布仍为离散均匀分布，则有[①]：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mu^{\varepsilon}\right)^n=\left(\frac{p_{10}}{p_{10}+p_{12}},0,\frac{p_{12}}{p_{10}+p_{12}}\right)=\left(\frac{\zeta_3}{\zeta_2+\zeta_3},0,\frac{\zeta_2}{\zeta_2+\zeta_3}\right)$$

再将ζ_2,ζ_3取值代入可得：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mu^{\varepsilon}\right)^n=\left(\frac{c+(d-c)\theta}{b+c+(2d-b-c)\theta},0,\frac{b+(d-b)\theta}{b+c+(2d-b-c)\theta}\right) \tag{4.2}$$

于是有如下结论：

结论 4.1：在有且仅有两个博弈方的单社群中，博弈演化的结果是在极限状态双方都采用TFT的概率要小于双方都采用$ALLD$的概率。

通过比较（4.1）和（4.2）就会发现：

结论 4.2：转移矩阵受到如上定义的扰动后，与没有受到扰动情形相比，在极限处，所有个体一致使用TFT的概率降低了，而所有个体一致使用$ALLD$的概率提高了。

注意到：

$$\frac{d\left[\frac{c+(d-c)\theta}{b+c+(2d-b-c)\theta}\right]}{d\theta}=\frac{(b-c)d}{\left[b+c+(2d-b-c)\theta\right]^2}<0$$

$$\frac{d\left[\frac{b+(d-b)\theta}{b+c+(2d-b-c)\theta}\right]}{d\theta}=\frac{(c-b)d}{\left[b+c+(2d-b-c)\theta\right]^2}>0$$

故有如下结论：

结论 4.3：受到如上扰动的情形下，折现因子θ增加将导致在极限处，处于状态“全部采用$ALLD$”的概率下降，而处于状态“全部采用TFT”的概率上升，而且由θ边际增加引致的“全部采用$ALLD$”的边际概率减少量刚好等于“全部采用TFT”的边际概率增加

[①] 事实上，此时的马氏链是不可约的遍历链，故其平稳极限分布必定存在且唯一。

量；进一步，有$\frac{1}{2} \le \mu_0 \le \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c} \le \mu_2 \le \frac{1}{2}$，其中$\mu_0$表示极限处全部采用$ALLD$的概率，$\mu_2$表示极限处全部采用$TFT$的概率。

在如上定义的P^0中，有两个吸收态“0”和“2”，通过计算可得状态“1”的平均吸收时间为：

$$t_1^0 = \frac{3\left[b+c+d+\left(2d-b-c\right)\theta\right]}{2b+c+d+\left(3d-2b-c\right)\theta}$$

因为有：

$$\frac{dt_1^0}{d\theta} = \frac{3d\left(2b-d-c\right)}{\left[2b+c+d+\left(3d-2b-c\right)\theta\right]^2} < 0$$

可以得到如下结论：

结论 4.4：折现值θ提高，则非常返状态“1”被吸收态“0”或吸收态“2”吸收的平均吸收时间会缩短，反之，平均吸收时间会增加；当$\theta = 0$时，状态“1”的平均吸收时间达到最大值$\frac{3\left(b+c+d\right)}{2b+c+d}(>1)$。

考虑如下对转移阵的非对称扰动：

$$\underset{\sim}{P}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

其中$\forall 0 < \varepsilon < 1$，此时仅有状态“0”是吸收态，而状态“1”和“2”都是非常返状态，计算得到如下的平均吸收时间向量：

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{t}_1^{\varepsilon} \\ \underset{\sim}{t}_2^{\varepsilon} \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon p_{10}} \begin{pmatrix} \varepsilon + p_{12} \\ 1+\varepsilon - p_{11} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

计算并比较可得

结论 4.5：当只有状态“0”即“全部个体使用$ALLD$”为吸收态时，状态“1”的平均吸收时间要比状态“2”的平均吸收时间短。

再考虑如下的扰动方式：

$$\tilde{P}^{\varepsilon}=\begin{pmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon & 0\\ p_{10} & p_{11} & p_{12}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中$\forall 0<\varepsilon<1$，显然此时只有状态“2”是吸收态，状态“0”和“1”的平均吸收时间向量为：

$$\begin{pmatrix}\tilde{t}_1^{\varepsilon}\\ \tilde{t}_2^{\varepsilon}\end{pmatrix}=\frac{1}{\varepsilon p_{12}}\begin{pmatrix}1+\varepsilon-p_{11}\\ \varepsilon+p_{10}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

计算并比较可得：

结论 4.6：当只有状态“2”即“全部个体使用TFT”为吸收态时，状态“1”的平均吸收时间要比状态“0”的平均吸收时间短。

结论 4.7：通过比较（4.3）与（4.4）发现，状态“2”是唯一吸收态时，状态“0”被状态“2”吸收的平均吸收时间要长于状态“0”是唯一吸收态时状态“2”被状态“0”吸收的平均吸收时间。

五、结 论

本文在一个一般化的 Moran 过程中建立起演化博弈动态，以经典囚徒困境博弈派生出来的超博弈为支付矩阵，对比研究了行为模式TFT与$ALLD$的长期表现，结果证明存在一个与折现因子紧密相关的严格正概率使得一个单独使用TFT的代表性个体可以成功侵入到一群使用$ALLD$的个体之中，并最终全部个体都将采用TFT，即在一个仅有如上两种行为模式的单社群中，合作是可能的；但是，比较而言，一个单独使用$ALLD$的个体更容易侵入一群使用TFT的个体之中，并且成功复制自己的行为模式，以至于最后所有的个体都将采用$ALLD$。本文也证明了：在演化博弈动态中，风险占优均衡和帕累托严格占优均衡并非一定会被选择。

其次，当演化博弈动态中出现因某种变异导致的持续性扰动时，在生灭过程的极限处，仅仅当$ALLD$型个体变异概率严格大于TFT型个体的变异概率时，社群最终处于状态“全部采用TFT”的概率才会超过 50%，即$ALLD$更加具有演化稳定性。

事实上，如果把TFT做小小的变形，就可以做得与$ALLD$一样好，即如果可以准确地识别对方的类型，那么只要第一步采用背叛，以后都按照TFT来行动，就至少可以得到与$ALLD$一样的支付水平；不过，这里存在至少两个问题，第一，在博弈过程中如何正确地辨识对方的类型，这似乎需要在建模中引入更加具体的微观基础，第二，囚徒困境博弈派生出来的行为模式集合至少是一个可数集，那么如果可以根据博弈表现在该集合上引入恰当的

序关系，或偏序或全序，那么在满足一定条件下就可以利用 Zorn 引理或其他超限归纳法，找到某个最优行为模式集，并从中抽象出最优行为模式所具有的一些特性；然而传递性又似乎很难得到满足，这些都是有待进一步思考的。

六、附 录

附录 A：定理 3.1 的证明

$\because \mu_j(n)=\sum_{i\in S}\mu_i(0)p_{i,j}^{(n)},\forall j\in S$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\mu(n)$ 的存在性取决于 $\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}$ 的存在性，下面证明 $\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}$ 存在即可。事实上，由于“0”和“m”是遍历态，故有 $\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=\dfrac{L_{i,j}}{\nu_j},\forall i\in S,j\in C$，也即 $\lim_{n\to\infty}p_{i,0}^{(n)}=L_{i,0},\lim_{n\to\infty}p_{i,m}^{(n)}=L_{i,m},\forall i\in S$。$\therefore$由 $\mathbb{P}$ 的定义有：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ L_{1,0} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & L_{1,m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ L_{i,0} & \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} & \cdots & L_{i,m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

其中$\alpha_{ij}=\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)},\forall i,j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，$\because$“$0$”和“$m$”是两个吸收态，且“$0$”和“$m$”不能到达$i(1\le i\le m-1)$ $\therefore L_{i,0}+L_{i,m}\equiv 1(1\le i\le m-1)$ $\therefore \alpha_{ij}=\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=0$，$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，即有：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ L_{1,0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & L_{1,m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\ L_{i,0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & L_{i,m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

显然，$L_{i,0},L_{i,m}\le 1<\infty(1\le i\le m-1)$且二者至少有一个不为 0，$\therefore \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^n$存在，也即$\lim_{n\to\infty}\mu(n)$存在。证毕。

附录 B：定理 3.2 的证明

令 λ 表示特征值，$\rho(\mathbb{P}) \triangleq \max\limits_i |\lambda_i|$ 表示 $\mathbb{P}$ 的谱半径，$\|\mathbb{P}\|_\infty \triangleq \max\limits_i \sum\limits_{j=0}^{m} |p_{ij}|$（$|p_{ij}|$ 表示 $\mathbb{P}$ 的第 i 行 j 列元素的模）表示 $\mathbb{P}$ 的行范数，显然 $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ 是一个随机矩阵 $\therefore \rho(\mathbb{P}) = \|\mathbb{P}\|_\infty = 1$。假设 $\mathbb{P}$ 是不可约矩阵，则由矩阵论中 Perron Frobenius 定理知 $\rho(\mathbb{P}) = 1$ 是 $\mathbb{P}$ 的单特征值，且易得其对应的特征向量是 $\vec{x} = (1,1,\cdots,1)^T$（$T$ 表示转置）；在此前提下，进一步假设 $\mathbb{P}$ 有且只有一个特征值的模等于 $\rho(\mathbb{P}) = 1$，即 $\mathbb{P}$ 为素矩阵，则 $\forall \lambda_j \neq 1$，有 $|\lambda_j| < 1$，下面导出矛盾。首先，$\mathbb{P}$ 要么是亏损矩阵，要么是非亏损矩阵。

⑴ 若 $\mathbb{P}$ 是非亏损矩阵，即 $\mathbb{P}$ 可对角化，则 $\exists$ 可逆矩阵 D $s.t.$ $D^{-1}\mathbb{P}D = \Lambda = diag(\lambda_{0,} \cdots \lambda_m)$（$\lambda_{0,} \cdots \lambda_m$ 中可能存在相同的）$\therefore \mathbb{P}^n = (D\Lambda D^{-1})(D\Lambda D^{-1})\cdots(D\Lambda D^{-1}) = D\Lambda^n D^{-1}$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = D\Lambda^\infty D^{-1}$，若令 $\lambda_0 = 1$，则

$$\Lambda^\infty = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

这时不妨设

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_{01} & \cdots & d_{0m} \\ 1 & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{m1} & \cdots & d_{mm} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

且

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d'_{00} & d'_{01} & \cdots & d'_{0m} \\ d'_{10} & d'_{11} & \cdots & d'_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d'_{m0} & d'_{m1} & \cdots & d'_{mm} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

故有，

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = D\Lambda^\infty D^{-1} = \begin{bmatrix} d'_{00} & d'_{01} & \cdots & d'_{0m} \\ d'_{00} & d'_{01} & \cdots & d'_{0m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d'_{0m} & d'_{01} & \cdots & d'_{0m} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

这与定理 3.1 矛盾。

⑵若 $\mathbb{P}$ 是亏损矩阵，则可求其 Jordan 标准形，即∃可逆矩阵 $T\ s.t.\ T^{-1}\mathbb{P}T = J$ ∴有 $\mathbb{P}^n = TJ^nT^{-1}$，令 $\operatorname{rank}\left(\lambda \mathrm{I} - \mathbb{P}\right) = r < m+1$（I 表示单位阵），故有：

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

其中 $J_{n_i\times n_i}$ 为 Jordan 块，$\lambda_i\left(i=1,\cdots,r\right)$ 可能相同，初等因子的指数为 $n_i\ \left(i=1,\cdots,r\right)$ 也可能相同，且 $\sum_{i=1}^{r} n_i = m+1$。∵求 $\lim_{n\to\infty} J^n$ 等价于求 $\lim_{n\to\infty} J_i^n\ \left(i=1,\cdots,r\right)$ ∴当 $k \ge n_i - 1$ 时，有：

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & 1 & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{n_i-1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \lambda_i^k & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_i^k & \vdots \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

其中 $C_k^1 = k, C_k^2 = \dfrac{k\left(k-1\right)}{2!},\cdots$ ∵有单特征值 $\lambda_i = \rho\left(\mathbb{P}\right) = 1$ 且 $\left|\lambda_j\right| < 1, \forall j \ne i$，不妨取 $\lambda_1 = \rho\left(\mathbb{P}\right) = 1$，则 $J_1^\infty = 1, J_i^\infty = 0_j$， $j = 2,\cdots,r$（0_j 表示元素全为零的矩阵）故而：

$$J^\infty = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0_r \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

令

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t_{01} & \cdots & t_{0m} \\ 1 & t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{m1} & \cdots & t_{mm} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

与

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t'_{00} & t'_{01} & \cdots & t'_{0m} \\ t'_{10} & t'_{11} & \cdots & t'_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t'_{m0} & t'_{m1} & \cdots & t'_{mm} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = TJ^{\infty}T^{-1} = \begin{bmatrix} t'_{00} & t'_{01} & \cdots & t'_{0m} \\ t'_{00} & t'_{01} & \cdots & t'_{0m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t'_{00} & t'_{01} & \cdots & t'_{0m} \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

依旧与定理 3.1 矛盾。$\therefore \mathbb{P}$ 不是素矩阵，而是循环矩阵，$\therefore \mathbb{P}$ 有 2 个及 2 个以上的特征值的模等于 $\rho(\mathbb{P})=1$，所以如果假设 $\mathbb{P}$ 是不可约矩阵导出 $\mathbb{P}$ 一定是循环矩阵，根据矩阵论知识，若 $\mathbb{P}$ 是不可约的循环的随机矩阵，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$ 一定不存在，这显然与定理 3.1 矛盾，故 $\mathbb{P}$ 必定是可约矩阵。证毕。

附录 C：命题 3.2 的证明

将 $r(k,ALLD), r(k,TFT)$ 取值代入（3.3）并化简得到：

$$x_{i+1}-x_i = \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}(x_i - x_{i-1})$$

进一步递推并利用 $x_0=0$ 得：

$$x_i = \left[1+\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}\right]x_1$$

利用 $x_m=1$ 得：

$$x_1 = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}$$

再将 x_1 代入 x_i 等式中即得

$$x_i = \frac{1+\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}$$

证毕。

附录 D：定理 3.3 的证明

⑴根据（3.1）定义有：

$$\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}=\frac{\zeta_3 k+\zeta_4(m-k-1)}{\zeta_1(k-1)+\zeta_2(m-k)}$$

由于

$$\frac{d\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{d\theta}=\frac{\partial\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta}+\frac{\partial\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial\zeta_2}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\theta}$$
$$+\frac{\partial\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial\zeta_3}\frac{\partial\zeta_3}{\partial\theta}+\frac{\partial\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial\zeta_4}\frac{\partial\zeta_4}{\partial\theta}$$

将各个偏导数代入易知$\frac{d\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{d\theta}$与下式同号：

$$\tilde{\Xi}=d(m-1)(k-1)\zeta_1+d(m-1)(m-k)\zeta_2-[(m-k)d+(k-1)a]k\zeta_3$$
$$-[(m-k)d+(k-1)a](m-k-1)\zeta_4$$

再代入$\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$并化简得：

$$\tilde{\Xi}=(2d^2-db-dc)km+(d^2-db)m+(ac+db-d^2-ad)k$$
$$+(db-d^2)m^2+(dc-ac-d^2+ad)k^2$$

又$\because c>a>d>b$，故：

$$\frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial m}=(2d^2-db-dc)k+(d^2-db)+2(db-d^2)m$$
$$=d(d-b)(k+1-2m)+d(d-c)k<0$$

$\because m\geq 2,k\geq 1$，$\tilde{\Xi}$取到最大值当且仅当$m=2$，而此时必有$k=1$，故：

$$\max_m\tilde{\Xi}=\tilde{\Xi}\big|_{m=2,k=1}=d(b-c)<0$$

$$\therefore\frac{d\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{d\theta}<0$$

(2) 由(1)的结论有：$\min_\theta\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}=\lim_{\theta\to 1^-}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}=\frac{d(m-1)}{a(k-1)+d(m-k)}$

$$\because\frac{\partial\min_\theta\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial k}=\frac{(d-a)d(m-1)}{[a(k-1)+d(m-k)]}<0$$

$$\therefore \min_k \min_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} = \frac{d(m-1)}{a((m-1)-1)+d(m-(m-1))} = \frac{dm-d}{am-2a+d}$$

$$又 \because \frac{\partial \min_k \min_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial m} = \frac{d(d-a)}{(am-2a+d)^2} < 0$$

$$\therefore \min_m \min_k \min_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{dm-d}{am-2a+d} = \frac{d}{a}$$

由于仅当$\frac{c-a}{c-d} < \theta < 1$时，矩阵 3 存在两个纯策略 Nash 均衡，故此令$\frac{c-a}{c-d} < \theta < 1$

$$\therefore \max_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} = \lim_{\theta\to\left(\frac{c-a}{c-d}\right)^+} \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}$$

$$= \frac{a(c-d)k + d(c-d)(m-k-1)}{a(c-d)(k-1)+(dc-ad-bd+ab)(m-k)}$$

$$\because \frac{\partial \max_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial k} = \frac{(a-d)^2(c-d)(b-c)+a(c-d)(a-d)(b-d)(m-1)}{\left[a(c-d)(k-1)+(dc-ad-bd+ab)(m-k)\right]^2} < 0$$

$$\therefore \max_k \max_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} = \frac{a(c-d)+d(c-d)(m-2)}{(dc-ad-bd+ab)(m-1)}$$

$$\because \frac{\partial \max_k \max_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}{\partial m} = \frac{\left[d(c-a)+b(a-d)\right](c-d)(d-a)}{\left[(dc-ad-bd+ab)(m-1)\right]^2} < 0$$

$$\therefore \max_m \max_k \max_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} = \frac{a(c-d)}{d(c-a)+b(a-d)}$$

又由命题 3.2 可以解出：

$$x_1 = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}}$$

故由

$$\min_m \min_k \min_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} + \left[\min_m \min_k \min_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}\right]^2 + \cdots$$
$$\le \sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)} \le \max_m \max_k \max_\theta \frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}$$

必导出：

$$\frac{d(c-a)+b(a-d)}{d(c-a)+b(a-d)+a(c-d)} \le x_1 \le \frac{a-d}{a}$$

⑶ 由命题 3.2 可解出

$$1-x_{m-1}=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}}$$

$$\therefore \frac{x_1}{1-x_{m-1}}=\prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}$$

$$\because \prod_{k=1}^{m-1}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)} \le \prod_{k=1}^{m-1}\max_{\theta}\frac{r(k,TFT)}{r(k,ALLD)}=\prod_{k=1}^{m-1}\min_{\theta}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}$$

$$\le \prod_{k=1}^{m-1}\max_{k}\min_{\theta}\frac{r(k,ALLD)}{r(k,TFT)}=1$$

$\therefore \frac{x_1}{1-x_{m-1}} \le 1$ 也即 $x_1+x_{m-1} \le 1$。证毕。

附录 E：定理 3. 4 的证明

⑴令 $h_i=0$ 则有：

$$\theta^*=\frac{(c+b-a-d)i+(d-b)m+(a-d)}{(d-b)m-(2d-b-c)i}$$

$$\because \frac{\partial\theta^*}{\partial i}=\frac{(a-d)\left[d-c-(d-b)(m-1)\right]}{\left[(d-b)m-(2d-b-c)i\right]^2}<0$$

$$\therefore \min_{m}\min_{i}\theta^*=\lim_{m\to+\infty}\lim_{i\to m^-}\theta^*=\frac{c-a}{c-d}$$

显然，此时必有 $\forall\theta^*$，$\theta^* \ge \frac{c-a}{c-d}$。

⑵ $$\because h_1=\frac{2d-b-c-(d-b)m}{m-1} \text{ 且 } \frac{\partial h_1}{\partial m}=\frac{c-d}{(m-1)^2}>0$$

$$\therefore \max_{m} h_1=\lim_{m\to+\infty} h_1=b-d<0$$

$$\therefore h_1<0\text{，}\ \forall\theta\in(0,1), m(\ge 2)\in\mathbb{Z}^+$$

(3) $$\because h_{m-1}=\frac{(a-c)m-2a+c+b+\left[(c-d)m+2d-b-c\right]\theta}{(m-1)(1-\theta)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{c-a}{c-d}} h_{m-1}=\frac{b-c}{m-1}<0\Leftrightarrow m<+\infty$$

(4) $$\because \lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}=\frac{3b-c-2d+(d-b)m}{m-1}$$

$$\frac{\partial\left(\lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}\right)}{\partial m}=\frac{c+d-2b}{(m-1)^2}>0$$

$$\therefore \min_m \lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}=b-c<0$$

$$\max_m \lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}=d-b>0$$

又$\because \lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}=\frac{3b-c-2d+(d-b)m}{m-1}\geq 0\Leftrightarrow m\geq\frac{c-b}{d-b}+2>3$

且若$d>\frac{b+c}{2}$，则取$m=4$有$\lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}>0$，由于：

$$\frac{\partial\left(\lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}\right)}{\partial m}=\frac{c+d-2b}{(m-1)^2}>0$$

故$\lim_{\theta\to\frac{a-c-d+b}{b-c}} h_{m-1}>0\Leftrightarrow m\geq 4$。证毕。

附录 F：定理 3.6 的证明

此处的部分证明参考 Karlin and Taylor 著《随机过程初级教程》中译本 128—129 页。

由定理 3.4 知，$\exists\theta^*\geq\frac{c-a}{c-d},s.t.h_i\equiv 0$，即$r(i,TFT)=r(i,ALLD)$

$$\therefore f_i\equiv g_{i,}\forall i\in\{0,\cdots,m\}$$

所以新定义的转移概率变为：

$$\begin{cases} \tilde{p}_{i,i+1} = \left(1-\frac{i}{m}\right)\left[\frac{i}{m}(1-\gamma_1)+\left(1-\frac{i}{m}\right)\gamma_2\right] \\ \tilde{p}_{i,i-1} = \frac{i}{m}\left[\frac{i}{m}\gamma_1+\left(1-\frac{i}{m}\right)(1-\gamma_2)\right] \\ \tilde{p}_{i,i} = 1-\tilde{p}_{i,i+1}-\tilde{p}_{i,i-1} \end{cases}$$

由于$\left\{X(t)=i, t\geq 0\right\}_{i=0}^{m}$赋予适当的初始分布就定义了一个有限状态的生灭过程，且对应于状态$i(0\leq i\leq m)$的无穷小生和灭的比率分别为：

$$\lambda_i = \lambda\left(1-\frac{i}{m}\right)\left[\frac{i}{m}(1-\gamma_1)+\left(1-\frac{i}{m}\right)\gamma_2\right]$$

$$\mu_i = \lambda\frac{i}{m}\left[\frac{i}{m}\gamma_1+\left(1-\frac{i}{m}\right)(1-\gamma_2)\right]$$

令$x=\frac{i}{m}$，则$0\leq x\leq 1$，经重新整理有：

$$\lambda_i = \frac{\lambda(m-i)}{m^2}(1-\gamma_1-\gamma_2)i\left(1+\frac{\alpha}{i}\right)$$

$$\mu_i = \frac{\lambda(m-i)}{m^2}(1-\gamma_1-\gamma_2)i\left(1+\frac{\beta}{m-i}\right)$$

其中$\alpha=\frac{m\gamma_2}{1-\gamma_1-\gamma_2}, \beta=\frac{m\gamma_1}{1-\gamma_1-\gamma_2}$

再令$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}$，而$\vartheta_k=\frac{\pi_k}{\sum_{i=0}^{m}\pi_i}$表示$\left\{X(t)=i, t\geq 0\right\}_{i=0}^{m}$的极限分布，则：

$$\ln\pi_k = \sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1+\frac{\alpha}{i}\right)-\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1+\frac{\beta}{m-i}\right) + \ln m\alpha - \ln\left[(m-k)k\left(1+\frac{\beta}{m-k}\right)\right]$$

利用 Taylor 展式，当$k\to+\infty$时有：

$$\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1+\frac{\alpha}{i}\right)\sim\ln k^{\alpha}+\varepsilon_k$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1+\frac{\beta}{m-i}\right)\sim\ln\frac{m^{\beta}}{(m-k)^{\beta}}+\delta_k$$

其中$\lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon_k<+\infty, \lim\limits_{k\to+\infty}\delta_k<+\infty$

$$\ln \pi_k \sim \ln\left[\eta_k \frac{k^{\alpha}\left(m-k\right)^{\beta} m\alpha}{m^{\alpha}\left(m-k\right)k}\right], k \to +\infty \tag{3.4}$$

令 $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln \eta_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\varepsilon_k + \delta_k\right) = \eta$，又因为当 $m \to +\infty$ 时，$\alpha \to k_2, \beta \to k_1$

$$\pi_k \sim \eta k_2 m^{k_2-1} x^{k_2-1}\left(1-x\right)^{k_1-1}, m \to +\infty$$

又由（3.4）可得：

$$\frac{1}{m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m-1}\pi_k \sim \frac{\alpha}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\eta_k\left(\frac{k}{m}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{\beta-1}$$

显然上式右边部分可作为如下积分

$$k_2\eta\int_0^1 x^{k_2-1}\left(1-x\right)^{k_1-1}dx$$

的黎曼和

$$\therefore \sum_{k=0}^{m}\pi_k \sim m^{k_2}k_2\eta\int_0^1 x^{k_2-1}\left(1-x\right)^{k_1-1}dx$$

则有密度函数：

$$\vartheta_k = \frac{\pi_k}{\sum_{i=0}^{m}\pi_i} \sim \frac{1}{m}\frac{x^{k_2-1}\left(1-x\right)^{k_1-1}}{\int_0^1 x^{k_2-1}\left(1-x\right)^{k_1-1}dx}$$

证毕。

参考文献

[1]Ariel Rubinstein.，1991，“Comments on the Interpretation of Game Theory”，*Econometrica*, Vol.59, No.4, pp.909-924.

[2]Beggs, Alan.，2002，“Stochastic Evolution with Slowing Learning”，*Economic Theory*, 19, 379-405.

[3]Binmore, K., and L. Samuelson.，1997，“Muddling Theory: Noisy Equilibrium Selection”，*Journal of Economic Theory*, 74, 235-265.

[4]Binmore, K., and L. Samuelson.，1999，“Evolutionary Drift and Equilibrium Selection”，

Review of Economic Studies, 66, 363-393.

[5]Bowles, S., Gintis, H.，2004，“The Evolution of Strong Reciprocity: Cooperation in Heterogeneous Population”，*Theoretical Population Biology*, 65, 1:17-28.

[6]Cabrales, A.，2000，“Stochastic Replicator Dynamics”，*International Economic Review*, 41, 451-481.

[7]C. Taylor, D. Fudenberg, A. Sasaki and Nowak, M.，2004，“Evolutionary game dynamics in finite populations”，*Bulletin of Mathematical Biology* 66,1621-1644.

[8]Colin F. Camerer.，1991，“Does Strategy Research Need Game Theory?”， *Strategic Management Journal*, Vol. 12, Special Issue: Fundamental Research Issues in Strategy and Economics, pp. 137-152.

[9]Corradi, V and Sarin, R.，2000，“Continuous Approximations of Stochastic Evolutionary Game Dynamics” *Journal of Economic Theory,* 94, pp.163-191.

[10]Daniel Friedman.，1991，“Evolutionary Games in Economics”，*Econometrica*, Vol.59, No.3, pp. 637-666.

[11]Foster, D., and P. Young，1990，“Stochastic Evolutionary Game Dynamics”，*Theoretical Population Biology*,38,219-232.

[12]Fudenberg, D., Imhof, L., Nowak, M. A. and Taylor, C.，2004，“Stochastic Evolution as a Generalized Moran Process”，mimeo.

[13]Fudenberg, D., Imhof, L., 2006，“Imitation Processes with Small Mutations”，*Journal of Economic Theory*, 131, pp.251-262.

[14]George, J. Mailath，1998，“Do People Play Nash Equilibrium? Lessons from Evolutionary Game Theory”，*Journal of Economic Literature*, 36, 1347-1374.

[15]Gintis, H., 2003, “Solvoing the Puzzle of Prosociality”，*Rationality and Society*,15, 2: 155-187.

[16]Harsanyi, J. C，1966，“A General Theory of Rational Behavior in Game Situations”，*Econometrica*,34,613-634.

[17]Hines, W. G. S.，1982，“Mutations, Perturbations and Evolutionary Stable Strategies”，*Journal of Applied Probability*.19, 204-209.

[18]Hofbauer, J. and Imhof, L. A.，2009，“Time Averages, Recurrence and Transience in the Stochastic Replicator Dynamics”，*The Annals of Applied Probability*, 19, pp1347-1368.

[19]Imhof, L. A., Nowak, M. A.，2006，“Evolutionary game dynamics in a Wright-Fisher process”，*Journal of Mathematical Biology*, 52, 667-681.

[20]Imhof, Lorens. A.，2005，“The Long-Run Behavior of the Stochastic Replicator Dynamics”，*The Annals of Applied Probability*,15,1019-1045.

[21]James H. Fowler，2005，“Altruistic Punishment and the Origin of Cooperation”，*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,* Vol.102, No.19, pp.7047-7049.

[22]Jianzhong Wu and R. Axelrod，1995，“How to Cope with Noise in the Iterated Prisoner’s Dilemma”，*The Journal of Conflict Resolution*,39,183-189.

[23]Jonathan Bendor and Piotr Swistak，1995，“Types of Evolutionary Stability and the Problem of Cooperation”，*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*,Vol.92, No.8 pp.3596-3600.

[24]Jörg Oechssler and Frank Riedel，2001，“Evolutionary Dynamics on Infinite Strategy Spaces”，*Economic Theory*,Vol.17, No.1, pp.141-162.

[25]Juha Tuomi, Jep Agrell, Tapio Mappes，1997，“On the Evolutionary Stability of Female Infanticide”，*Behavioral Ecology and Sociobiology*, Vol.40, No.4, pp. 227-233.

[26]Kifer, Y. A.，1990，“Discrete-Time Version of the Wentzell-Friedlin Theory”，*The Annals of Probability*, vol.18,pp.1676-1692.

[27]Ken Binmore，1999，“ Game Theory and Business Ethics”，*Business Ethics Quarterly,* Vol. 9, No. 1, pp. 31-35.

[28]Lesley J. Morrell and Hanna Kokko，2003，“Adaptive Strategies of Territory Formation”，*Behavioral Ecology and Sociobiology,* Vol.54, No.4, pp. 385-395.

[29]Lorens A. Imhof, Drew Fudenberg, Martin A. Nowak, and R. M. May，2005，“Evolutionary Cycles of Cooperation and Defection”，*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 102, No. 31, pp. 10797-10800.

[30]Martin A. Nowak，2000，“Evolutionary Biology of Language”，*Philosophical Transactions: Biological Sciences,* Vol. 355, No. 1403, Fifty Years of Evolution: Essays in Honor of John Maynard Smith, pp. 1615-1622.

[31]Martin A. Nowak, Akira Sasaki, Christine Taylor，Drew Fudenberg，2004，“Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations”，*Nature* 428, 646-650.

[32]Martin Nowak and Karl Sigmund，1993，“Chaos and the Evolution of Cooperation”，*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 90, No. 11, pp. 5091-5094.

[33]Michel, B. and J. W. Weibull，2003，“Dterministic Approximation of Stochastic Evolution in Games”，*Econometrica*, 71, 873-903.

[34]Michihiro. K., G. J. Mailath, and R. Rob，1993，“Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Games”，*Econometrica*, 61,29-56.

[35]Michael R. Baye and Dennis W. Jansen，1996，“Repeated Games with Stochastic Discounting”，*Economica*, New Series,Vol.63, No.252 pp. 531-541.

[36]Natalia L. Komarova and Martin A. Nowak，2001，“Natural Selection of the Critical Period for Language Acquisition”， *Proceedings: Biological Sciences*, Vol. 268, No. 1472 , pp. 1189-1196.

[37]Peter D. Taylor and Troy Day，2004，“Stability in Negotiation Games and the Emergence of Cooperation”，*Proceedings: Biological Sciences*, Vol.271, No.1540, pp. 669-674.

[38]Randall W. Stone，2001，“The Use and Abuse of Game Theory in International Relations: The Theory of Moves”，*The Journal of Conflict Resolution*, Vol. 45, No.2, pp. 216-244.

[39]Robert Axelrod，1980a，“Effective Choice in the Prisoner’s Dilemma”，*The Journal of Conflict Resolution*, 24, 3-25.

[40]Robert Axelrod，1980b，“More Effective Choice in the Prisoner’s Dilemma”，*The Journal of Conflict Resolution*, 24, 379-403.

[41]Robert Axelrod and W.D. Hamilton，1981，“The Evolution of Cooperation”，*Science*, 211, 1390-1396.

[42]Robert Axelrod and D. Dion，1988，“The Further Evolution of Cooperation”，*Science*,242,1385-1390.

[43]Smith, J. Maynard，1979，“Game Theory and the Evolution of Behaviour”，*Biological Sciences*, 205, 475-488.

[44]Taylor, P. and L. Jonker，1978，“Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics”，*Mathematical Biosciences*, 40, 145-156.

[45]T. L. Vincent & R. A. Gatenby，2005，“Modeling Cancer as an Evolutionary Game”，*International Game Theory Review,* Vol.7, No.3, 331–346.

[46]T. L. Vincent，2006，“Carcinogenesis as an Evolutionary Game”，*Advances in Complex Systems*, Vol.9, No.4, 369–382.

[47]Young, H. Peyton，1993，“The Evolution of Conventions”，*Econometrica*, 61, 57-84.

［48］H.培顿・杨：《个人策略与社会结构：制度的演化理论》，上海：格致出版社：上海人民出版社，2008 年。

［49］卡林，泰勒：《随机过程初级教程》(第 2 版)中译本，北京：人民邮电出版社，2007 年。

［50］乔根•W. 威布尔：《演化博弈论》，上海：上海人民出版社，2006 年。