Consumer theory: preferences and utility

Eloy Ávalos

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Instituto de Estudios Sociales del Rímac

4. November 2010

CIEC

Centro de Investigaciones Económicas

Documento de Trabajo Nº 5

La Teoría del Consumidor: Preferencias y Utilidad

por

Eloy Ávalos

Noviembre 04, 2010

Instituto de Estudios Sociales del Rímac
Lima, Perú

La Teoría del Consumidor: Preferencias y Utilidad

Eloy Ávalos[1]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos e IESR

Primera versión: Noviembre 2010

Resumen

La teoría del consumidor es un caso particular de la teoría de la elección. En este documento se explorarán las proposiciones fundamentales que explican el comportamiento de un agente consumidor y luego se expresarán en términos de la función de utilidad. Así, el concepto de utilidad está divorciado de alguna carga filosófica y ética, siendo simplemente una función matemática que satisface ciertas propiedades, tal que los valores obtenidos con ella son un índice que representa muy bien el orden de las preferencias del consumidor.

Número de Clasificación JEL: D01, D11.
Palabras Claves: Relación de preferencia débil, indiferencia, preferencia fuerte, función de utilidad.

Abstract

The consumer's theory is a particular case of the theory of choice. This paper will explore the fundamental propositions that explain the behavior of a consumer agent and then be expressed in terms of the function of utility. Thus, the concept of utility is divorced of any philosophical and ethical burden, being simply a mathematical function that satisfies certain properties, such that the values obtained with it are a index that represents very well the order of preference.

Clasification Number JEL: D01, D11.
Key Words: Weak preference relation, indifference, strong preference, function of utility.

---

[1] Contacto: Departamento de Economía, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima 01, Teléfono 619-7000 Anexo 2210; y Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac, Pueblo Libre. Email: eavalosa@unmsm.edu.pe.

1. INTRODUCCIÓN

El consumidor es aquel agente que posee un plan o una canasta deseada de consumo y que para hacerlo efectivo debe superar dos tipos de restricciones; restricciones *a priori*, como las de tipo fisiológico,[2] y además la restricción dada por los precios y la riqueza individual. Entonces, un consumidor es aquel agente que elige una colección de cantidades de *bienes*, tal que esta canasta es estrictamente preferida o equivalente a alguna otra canasta posible (alcanzable)[3].

2. EL CONTEXTO DE ELECCIÓN

Trabajaremos sobre un espacio de consumo, X, n − dimensional (ortante no negativo).[4] Supondremos que el consumidor puede elegir todos los bienes que forman parte de su espacio de consumo, ya que suponer que sólo puede elegir entre un número de bienes k, menor a n, deja sin explicación justamente lo que la teoría desea explicar, el por qué el consumidor elige tal o cual canasta de consumo de bienes y no otras.[5] Esto lo planteamos mediante el axioma siguiente,

Axioma 1

$X = \mathbb{R}^n_+$

Las implicancias de este axioma se desprenden de las propiedades que tiene $\mathbb{R}^n_+$. Así, este axioma nos dice que el conjunto de consumo es un espacio con divisibilidad continua.[6] Así, cada n − apla de $\mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se identifica con un plan de

---

2 Quizás no a todos nos cae bien un plato "siete colores".

3 La noción de "ser alcanzable" constituye un "primitivo" de la teoría general de la elección. En la teoría del consumidor, simplemente gana especificidad. Ver ÁVALOS (2010: pp. 5 y 12).

4 Trataremos de esclarecer algunas propiedades en el plano bidimensional, $\mathbb{R}^2_+$.

5 Así, algunos autores, como Walsh sostienen que el conjunto de consumo es un subespacio de $\mathbb{R}^n_+$. Se anuncia como axioma para el conjunto de consumo que este $X_\ell \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Ver WALSH (1974: p. 161).

6 Dada la cardinalidad de las cantidades de los n bienes, el tratamiento de $\mathbb{R}^n_+$ es el de un espacio euclídeo. Es decir, para el consumidor, la diferencia entre las cantidades de los mismos bienes que conforman una canasta es de interés. Esto supone que debemos trabajar el espacio de consumo donde exista una métrica que mida la distancia entre una n − apla y otra.

consumo. Por otro lado, también nos dice que el conjunto de consumo, es un conjunto conexo.[7]

3. PREFERENCIAS DEL CONSUMIDOR

Entonces, el espacio de consumo que enfrenta el consumidor i – ésimo es $\mathbb{R}_{+}^{n}$, y sobre él, el consumidor define su relación de preferencia $\succsim_i$, que se lee: "*. . . es al menos tan preferido como . . .* ". Esta relación de preferencia se denomina relación de preferencia débil.

La relación de preferencia débil presenta ciertas propiedades que determinan el carácter que asumimos sobre la conducta económica del consumidor. Estas serán planteadas por los siguientes axiomas:

Axioma 2 (Comparabilidad)

$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_{+}^{n}, \mathbf{x} \succsim_i \bar{\mathbf{x}} \vee \bar{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x}$

Esta propiedad nos dice que el i – ésimo consumidor, tomando las alternativas de consumo de par en par, considerará que una de ellas es al menos tan preferida como la segunda, o que la segunda será al menos tan buena como la primera o que considera ambos casos a la vez. Es decir, el i – ésimo consumidor es capaz de ordenar todo su espacio de consumo. No existe alguna canasta en el espacio de consumo que el i – ésimo no sepa ordenarlo.[8]

Axioma 3 (Transitividad)

$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_{+}^{n}, \left(\mathbf{x} \succsim_i \bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{x}} \succsim_i \hat{\mathbf{x}}\right) \Rightarrow \mathbf{x} \succsim_i \hat{\mathbf{x}}$

Esta propiedad señala que el i – ésimo consumidor es consistente en sus preferencias, tal es así, que si considera que una primera alternativa es al menos tan preferida como una segunda y esta segunda alternativa es al menos tan preferida como una tercera; entonces la primera alternativa será al menos tan preferida como la tercera. Esto quiere

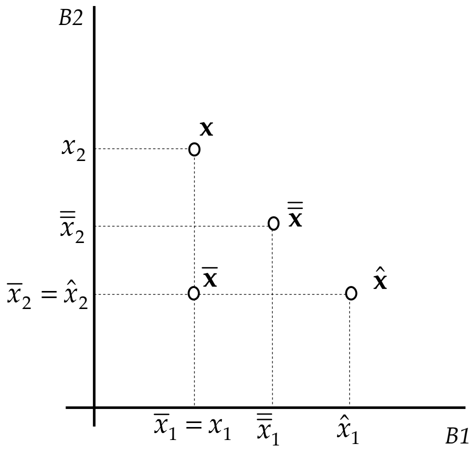
---

[7] Se dice que un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico, es conexo si no existen dos conjuntos abiertos no vacíos A_1 y A_2 tales que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ y $A_1 \cup A_2 = A$.

[8] Este axioma niega la posibilidad lógica de que ocurra $\neg \mathbf{x} \succsim_i \bar{\mathbf{x}} \wedge \neg \bar{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x}$.

decir que el i – ésimo consumidor no presente incoherencias en la ordenación de los planes de consumo. Este axioma implica la existencia de aciclicidad.[9]

Las propiedades de completitud y transitividad de las preferencias del i – ésimo consumidor establecen sobre el espacio de consumo $\mathbb{R}_+^n$ un pre – orden completo débil.[10] Una representación gráfica, para $\mathbb{R}_+^2$, donde se representan las siguientes ordenaciones $\overline{\mathbf{x}} \succsim_i \overline{\overline{\mathbf{x}}}$ y $\hat{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x}$ entre otras que existen (que son infinitas), sería tal como sigue:



Ahora, en base a estos dos axiomas de la preferencia débil vamos a definir las relaciones de *indiferencia* y de *preferencia estricta*.

3.1 Indiferencia

$$\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{x} \sim_i \overline{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \left(\mathbf{x} \succsim_i \overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x} \right)$$

---

9 Sin embargo no es válido afirmar que la aciclicidad implica transitividad. Las preferencias débiles son acíclicas si $\forall \underset{....}{\mathbf{x}}, \underset{...}{\mathbf{x}}, \underset{..}{\mathbf{x}}, \ldots, \overset{....}{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n$ verifican, $\underset{....}{\mathbf{x}} \succsim_i \underset{...}{\mathbf{x}} \succsim_i \underset{..}{\mathbf{x}} \succsim_i \ldots \succsim_i \overset{....}{\mathbf{x}} \Rightarrow \neg \overset{....}{\mathbf{x}} \succsim_i \underset{....}{\mathbf{x}}$.
Por otro lado, con el axioma de transitividad descartamos situaciones donde el agente consumidor presenta umbrales en su percepción y que podría conducir a situaciones donde se viole la transitividad. Así, en nuestra teoría, el agente consumidor es todopoderoso, todo lo ve, todo lo percibe.

10 No se puede tener una ordenación completa del espacio de consumo dado que la relación de preferencia débil $\succsim_i$ no es anti – simétrica. Es decir, esta relación no verifica la propiedad, $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \left(\mathbf{x} \succsim_i \overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x} \right) \Rightarrow \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$.

Es decir, el i – ésimo consumidor considerará que dos alternativas le son indiferentes si considera que la primera alternativa es al menos tan preferida como la segunda y la segunda es la menos tan preferida como la primera alternativa. La relación de indiferencia $\left(\sim_i\right)$ es reflexiva, transitiva y simétrica; por tanto es una relación de equivalencia.[11]

Por tanto, dado que la relación de indiferencia es una relación de equivalencia, esta relación particiona el espacio de consumo $\mathbb{R}_+^n$ en *clases de equivalencia*, I_i, de tal manera que $I_i \subseteq \mathbb{R}_+^n$.[12] Así tenemos que se cumple:

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, I_i(\mathbf{x}) \neq \varnothing$. Esto quiere decir que no puede existir alguna clase de equivalencia que no contenga canasta alguna.[13] De otra forma, toda canasta del espacio de consumo pertenece a alguna clase de equivalencia.
- $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} I_i(\mathbf{x}) = \mathbb{R}_+^n$. Dado el axioma de comparabilidad, y dado que toda canasta del espacio de consumo pertenece a alguna clase de equivalencia; entonces, la unión de éstas da el espacio de consumo.
- $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \neg \mathbf{x} \sim_i \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow I_i(\mathbf{x}) \cap I_i(\overline{\mathbf{x}}) = \varnothing$. Es decir, no puede existir en el espacio de consumo alguna canasta que pertenezca a la vez a dos clases de equivalencia diferentes. Caso contrario, contradeciría la premisa de que las canastas $\mathbf{x}$ y $\overline{\mathbf{x}}$ no son equivalentes entre sí, violando la propiedad de transitividad de la relación de indiferencia.
- $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n \wedge \mathbf{x} \neq \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \sim_i \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow I_i(\mathbf{x}) \equiv I_i(\overline{\mathbf{x}})$. Si para el i – ésimo consumidor dos canastas diferentes son indiferentes entre sí, entonces las clases de equivalencias asociadas a cada una son el mismo conjunto.

---

11 Ver ÁVALOS (*Ob. Cit.*: p. 8).

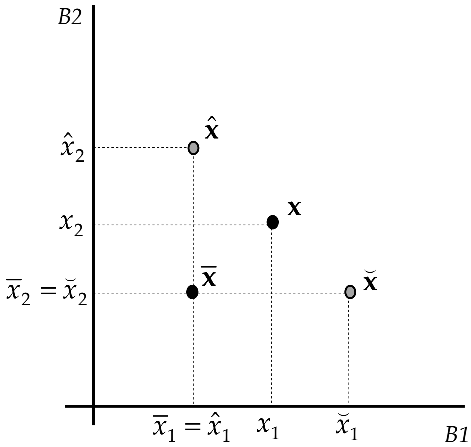
12 Una clase de equivalencia se define como, $I_i(\overline{\mathbf{x}}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{x} \sim_i \overline{\mathbf{x}}\right\}$. Un caso extremo, que descartamos, sería el que todas las colecciones del espacio de consumo son parte de una misma clase de equivalencia. En ese sentido, una clase de equivalencia es un subconjunto propio del espacio de consumo.

13 Recuérdese que la relación de indiferencia cumple la propiedad de reflexividad, por lo que una canasta cualquiera del espacio de consumo es indiferente a sí misma.

3.2 Preferencia estricta

$$\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{x} \succ_i \overline{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \left(\mathbf{x} \succsim_i \overline{\mathbf{x}} \wedge \neg \overline{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x}\right)$$

En este caso, cuando el consumidor considera que una canasta es al menos tan preferida como otra pero esta última no indiferente a la primera canasta; entonces afirmamos que el consumidor considera a la primera canasta estrictamente preferida a la segunda canasta. Una representación gráfica en $\mathbb{R}^2_+$, donde $\overline{\mathbf{x}} \sim_i \mathbf{x}$ y $\hat{\mathbf{x}} \sim_i \breve{\mathbf{x}}$, se tiene:



Donde $I_i(\overline{\mathbf{x}}) = \{\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\}$ y $I_i(\hat{\mathbf{x}}) = \{\hat{\mathbf{x}}, \breve{\mathbf{x}}\}$.

Por otro lado, definida la relación de preferencia estricta, se establece sobre el espacio de consumo particionado por la relación de indiferencia $\left(\mathbb{R}^n_+ / \sim_i\right)$ una ordenación completa y fuerte de las alternativas de consumo.[14] Así tenemos que $\forall I_i^1, I_i^2 \subseteq \mathbb{R}^n_+, I_i^1 \neq I_i^2 \Rightarrow \left(I_i^1 \succ_i I_i^2 \not\Leftrightarrow I_i^2 \succ_i I_i^1\right)$. Por tanto, del gráfico anterior sería posible obtener $I_i(\overline{\mathbf{x}}) \succ_i I_i(\breve{\mathbf{x}})$.

En la teoría del consumidor, debemos especificar (restringir) la manera como el agente ordena las opciones (canastas) de su espacio de elección. Para ello, debemos agregar otros axiomas adicionales. Además, notaremos que estos axiomas están condicionados a que nuestro espacio de consumo sea $\mathbb{R}^n_+$.

---

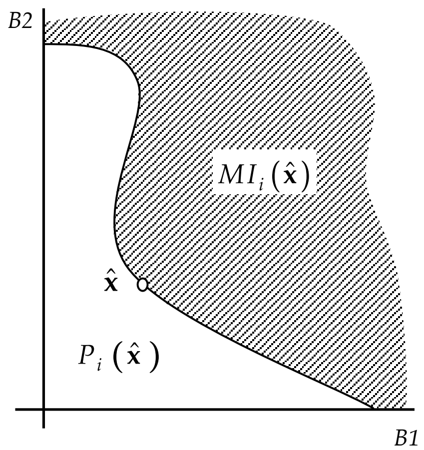
14 Ya que ahora si se verifica la anti – simetría.

Axioma 4 (Continuidad)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $MI_i(\mathbf{x})$ y $PI_i(\mathbf{x})$ son conjuntos cerrados, donde cada conjunto se define como $MI_i(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{x} \succsim_i \hat{\mathbf{x}}\}$ y $PI_i(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \hat{\mathbf{x}} \succsim_i \mathbf{x}\}$.

Este axioma de continuidad nos dice que si dos canastas cualesquiera del espacio de consumo, $\mathbf{x}$ y $\overline{\mathbf{x}}$, tienen para el i – ésimo consumidor, la siguiente relación $\mathbf{x} \succ_i \overline{\mathbf{x}}$; entonces, toda canasta que pertenece a la vecindad de $\mathbf{x}$, como $\breve{\mathbf{x}}$, verificará la relación $\breve{\mathbf{x}} \succ_i \overline{\mathbf{x}}$. Asimismo, toda canasta que pertenezca a la vecindad de $\overline{\mathbf{x}}$, como $\hat{\mathbf{x}}$, verificará la relación $\mathbf{x} \succ_i \hat{\mathbf{x}}$.[15] Es decir, la relación de preferencia estricta entre dos canastas no se ve alterada si varía para cualquiera de las canastas, las cantidades de los bienes, en una magnitud pequeña.

El cumplimiento de este axioma y del axioma 1, nos permite representar gráficamente una posible partición del espacio de elección en los conjuntos $MI_i(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{x} \succsim_i \hat{\mathbf{x}}\}$ y $P_i(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \hat{\mathbf{x}} \succ_i \mathbf{x}\}$. Representando la partición del espacio de consumo en $\mathbb{R}^2_+$:



15 Esto presupone que exista una vecindad para cada canasta. Una vecindad de $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ se define como, el conjunto V que contiene una bola cerrada de centro $\overline{\mathbf{x}}$ y radio $\rho \in \mathbb{R}_{++}$. Luego, una bola abierta denotada $B_\rho(\overline{\mathbf{x}})$, se define como el conjunto $B_\rho(\overline{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) < \rho\}$, para $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \wedge \rho \in \mathbb{R}_{++}$, donde $d(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})$ es la función de valor real denominada métrica. Esta puede ser la distancia euclídea, $d(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Ver HORVÁTH (1969: p. 51).

Luego, generalizando se deducen las implicancias siguientes:

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, MI_i(\mathbf{x}) \cap PI_i(\mathbf{x}) = I_i(\mathbf{x})$.
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, MI_i(\mathbf{x}) \cup PI_i(\mathbf{x}) = \mathbb{R}_+^n$.
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, I_i(\mathbf{x})$ es un conjunto cerrado y conexo.[16]

Nótese en la representación, que la gráfica de $I_i(\hat{\mathbf{x}})$ es aquella curva conformada por los puntos frontera de $P_i(\hat{\mathbf{x}})$ y de $M_i(\hat{\mathbf{x}})$ y constituye lo que llamamos como curva de indiferencia.[17] Así, la curva de indiferencia es la representación gráfica de un conjunto de indiferencia (clase de equivalencia) en $\mathbb{R}_+^2$, estando constituido por canastas o alternativas que para el i – ésimo consumidor son indiferentes o equivalentes entre sí en la ordenación de sus preferencias.[18]

Axioma 5 (Convexidad estricta)

$\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{x} \neq \overline{\mathbf{x}} \wedge \forall \lambda \in (0,1), \mathbf{x} \succsim_i \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow \left[\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}\right] \succ_i \overline{\mathbf{x}}$ [19]

Esto quiere decir que el i – ésimo consumidor prefiere canastas o alternativas que tengan más cantidades de los n bienes a canastas que tengan más de un bien y casi nada del resto de bienes. Es decir, las "canastas más combinadas" son estrictamente preferidas a las "canastas especializadas".

---

16 Un conjunto $I \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, si, y sólo si $I = \overline{I}$. Donde $\overline{I}$ es la cerradura (adherencia) de *I*, siendo la cerradura el conjunto de aquellos puntos adherentes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ al conjunto *I*, que a cada vecindad de $\mathbf{x}$ contiene por lo menos un punto de *I*. Así, los puntos adherentes a un conjunto son los puntos interiores y los puntos frontera del conjunto referido. Ver HORVÁTH (*Ob. Cit.*: p. 53).

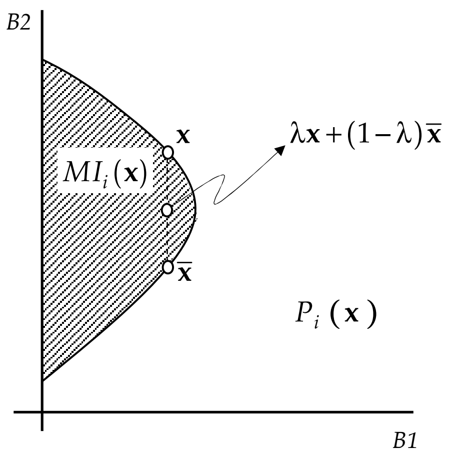
17 Sea $MI \subseteq \mathbb{R}^n \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists V(\mathbf{x}) : V \subset MI$, un punto $\mathbf{x}$ es un punto frontera de MI si toda vecindad de $\mathbf{x}$ contiene puntos que pertenecen a MI y puntos que no pertenecen a MI. Ver HORVÁTH (*Ob. Cit.*: p. 52).

18 Por lo construido hasta el momento, no podemos afirmar que las curvas de indiferencia son "[aquellas curvas] *que unen todos aquellos puntos que corresponden a la misma altura en la tercera dimensión, es decir, a la misma utilidad total*." Luego se añade, "*Ahora bien, esto no significa que, si alguien tiene algún fundamento para suponer que existe alguna medida cuantitativa adecuada de la utilidad, o la satisfacción, o deseabilidad, en el argumento expuesto haya nada que se oponga a ella. Si se es utilitarista en filosofía hay perfecto derecho a serlo en economía. Pero si no se es (y hoy son pocos los utilitaristas) también se tiene derecho a una economía libre de supuestos utilitaristas*." Ver HICKS (1945: pp. 6 y 11).

19 Otra forma equivalente de enunciar este axioma sería,
$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \forall \overline{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in MI(\mathbf{x}) \wedge \forall \lambda \in (0,1), \left[\lambda \overline{\mathbf{x}} + (\mathbf{1}-\lambda)\hat{\mathbf{x}}\right] \in \text{Int}MI(\mathbf{x})$.

Este axioma de las preferencias es mucho más estricto que suponer que las preferencias son convexas débilmente. Sin embargo, como veremos más adelante, el axioma 5, es una condición necesaria para transformar el problema de elección del consumidor a uno que simplemente consista en optimizar (encontrar un máximo).

Una representación gráfica en $\mathbb{R}^2_+$ de este axioma, donde $\mathbf{x} \succsim_i \overline{\mathbf{x}}$, sería:



Como se observa en la gráfica, aún la curva de indiferencia no toma la forma conocida como fue mostrado por la teoría de la utilidad ordinal desarrollada por John Hicks y R. G. D. Allen.[20] Necesitamos para ello de otro axioma.

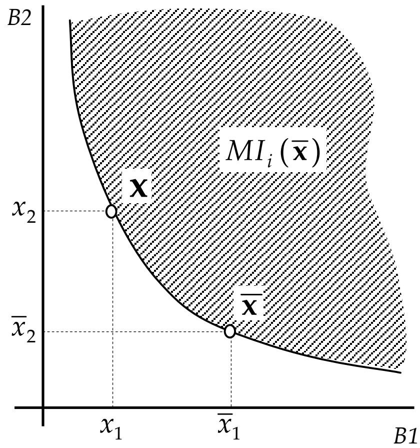
Axioma 6 (Monotonocidad)

$\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{x} \gg \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{x} \succ_i \overline{\mathbf{x}}$, donde $\mathbf{x} \gg \overline{\mathbf{x}} \Leftrightarrow x_k > \overline{x}_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$

Esta propiedad nos dice que para el i – ésimo consumidor, cuanto más mejor. Es decir, para él las alternativas o canastas que contengan una mayor cantidad de todos los n bienes será estrictamente preferidas a las canastas que contengan una menor cantidad de cada uno de los n bienes. Así, relajando este axioma, también podemos afirmar que aquellas canastas que contengan una mayor cantidad de al menos uno de los n bienes y la misma cantidad para el resto de bienes respecto a otras canastas, esta canasta también será estrictamente preferida.

Representando este axioma en $\mathbb{R}^2_+$, se tiene:

20 Ver HICKS y ALLEN (1934: pp. 52 – 76).



Axioma 7

La inclinación de $I_i(\mathbf{x})$ es única en cada canasta.

Con este axioma se asegura que la curva de indiferencia sea representada por una función que sea diferenciable (o sea, C^1) en cada punto a lo largo de ella.

3.3 Implicaciones

La convexidad estricta implica que los conjuntos M_i y MI_i son conjuntos convexos.[21] Asimismo, las curvas de indiferencia no pueden ser gruesas. Es decir, debe verificarse que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \text{Int}I_i(\mathbf{x}) = \varnothing$.[22] Además, no pueden presentar tramos lineales, por lo que se tiene $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n_+ \wedge \forall \lambda \in (0,1), \mathbf{x} \sim_i \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow \left[\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}\right] \notin I_i(\mathbf{x})$.

Por otro lado, de la monotonocidad se deduce que el consumidor posee preferencias no saciables.[23] Es decir, en el espacio de consumo, siempre existirá una canasta que es más preferida sobre otra. Las curvas de indiferencia no pueden tener la forma de herradura ni cerrarse sobre sí mismas.

---

21 Por otro lado, un conjunto $MI \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo sí, y sólo si, $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in MI \wedge \forall \lambda \in [0,1]$, se verifica $\left[\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}\right] \in MI$. Ver MADDEN (1987: p. 25). Definición que también puede utilizarse para establecer el axioma 5, tal como lo hemos enunciado en la nota número 18.

22 Implicancia que también se desprende del axioma de monotonía (axioma 6).

23 Algunos autores, establecen como axioma de las preferencias del consumidor, no la monotonocidad sino la insaciabilidad. Sin embargo, debemos mencionar que este último es una condición necesaria para la monotonocidad más no suficiente.

La propiedad de insaciabilidad, es aquella que se puede definir de dos formas,

No – saciabilidad (global)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \exists \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n : \bar{\mathbf{x}} \succ_i \mathbf{x}$.

Luego, la convexidad estricta y la no – saciabilidad global implican la no – saciabilidad local, que se define a continuación como,

No – saciabilidad (local)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \wedge \forall \rho \in \mathbb{R}_{++}, \exists \bar{\mathbf{x}} \in B_\rho(\mathbf{x}) : \bar{\mathbf{x}} \succ_i \mathbf{x}$

La no – saciabilidad local implica la no – saciabilidad global.[24]

La continuidad, la convexidad estricta y la monotonocidad implican que todos los bienes son deseables. Así, sean los vectores unitarios $\mathbf{e}^1 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}^2 = (0,1,\ldots,0)$, …, $\mathbf{e}^k = (0,\ldots,1,\ldots,0)$. Luego, el bien k será un bien deseable para el consumidor i – ésimo, siempre que:

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \wedge \gamma \in \mathbb{R}_{++}, \left(\mathbf{x} + \gamma \mathbf{e}^k\right) \succ_i \mathbf{x}$.

Podemos tener casos donde existe monotonocidad pero los bienes involucrados no son deseables. Como en el caso de preferencias ante bienes perfectamente complementarios, bajo las condiciones anteriores, donde $\left(\mathbf{x} + \gamma \mathbf{e}^k\right) \sim_i \mathbf{x}$.

Si la relación de preferencia débil $\left(\succsim_i\right)$ es completa, transitiva, continua y monótona; entonces se verifican:

Monotonocidad débil

$\forall \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{x} > \hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{x} \succsim_i \hat{\mathbf{x}}$

Donde $\mathbf{x} > \hat{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \left(x_k \geq \hat{x}_k \wedge \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}\right) \forall k = 1,2,\ldots,n$. Es decir, son canastas que tienen cantidades mayores e iguales de los bienes, descartándose las canastas que tengan las mismas cantidades en todos los bienes. En otras palabras, monotonocidad presupone que todos los bienes son deseables.

24 La no – saciabilidad no implica que el consumidor pueda no saciarse de un bien en $\mathbb{R}_+^n$, lo que nos está diciendo es que no puede saciarse en todos los bienes.

Por otro lado, si la relación de preferencia débil $\left(\succsim_i\right)$ es completa, transitiva, continua, estrictamente convexa y monótona; entonces son preferencias regulares. Las curvas de indiferencia de este tipo de preferencias presentan las siguientes características:

- Tienen pendiente negativa. Esto deriva del axioma de monotonocidad de las preferencias y el axioma 7.[25] Para $\mathbb{R}_+^2$:

$$-\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = TMgS_{21}$$

La interpretación que tiene la pendiente de la curva de indiferencia (tasa marginal de sustitución) es la siguiente: expresa la cantidad máxima de B_2 que el i – ésimo consumidor estaría dispuesto a sacrificar o ceder para poder obtener una unidad de B_1 a cambio. Justamente el signo negativo de la tasa de cambio indica la disyuntiva que enfrenta el consumidor en su elección, entre renunciar una cantidad de un bien y obtener más de otro bien, dada la relación de preferencias que posee.[26]

Nótese que el i – ésimo consumidor está en la capacidad de determinar cuántas unidades de B_2 está dispuesto a renunciar para obtener una unidad de B_1, en cada nivel de B_1. Esto implica que la curva de indiferencia es diferenciable, lo que es posible gracias al axioma 7.[27]

---

25 Algunos autores eliminan la imposibilidad de obtener la pendiente de la curva de indiferencia suponiendo el axioma 7. Ver SEGURA (1986: p. 40).

26 Evidentemente no podemos dar una definición de la tasa marginal de sustitución apelando a la utilidad marginal, dado que este concepto aún no ha sido contemplado en nuestro análisis. Al respecto, se señala: "*Lo importante es que las* razones *de las utilidades marginales, y no las utilidades marginales mismas, son las que determinan las curvas de indiferencia y el comportamiento*." Y luego se añade: "*Es por esto que la utilidad marginal decreciente del ingreso o de las mercancías no se puede inferir de las selecciones del consumidor*." Ver BECKER (1977: p. 76).

27 Sin el axioma 7, podríamos tener una curva de indiferencia continua pero no necesariamente diferenciable. Lo que presupone que el consumidor, para un nivel dado de B_1, no puede determinar su "tasa marginal de sustitución", $TMgS_{21}$. El argumento es igualmente válido para la $TMgS_{12}$.

- Son convexas al origen. Esta característica también se deriva del axioma de convexidad estricta y de monotonocidad de las preferencias.[28] Esto equivale a enunciar que la pendiente para cada canasta de una curva de indiferencia cambia y que conforme el i – ésimo consumidor posea más cantidad de un bien, la valoración que hace de este bien en términos de otros, es cada vez menor. Es decir, la tasa marginal de sustitución es decreciente. Así tenemos,

$$\frac{dTMgS_{21}}{dx_1} < 0$$

Es decir, en la medida que el consumidor dispone de una mayor cantidad de B_1, la valoración según sus preferencias que hace de cada unidad, medida en unidades de B_2, será cada vez menor. En términos algebraicos, esta va creciendo, ya que toma valores negativos cada vez menores.

4. EL CONJUNTO PRESUPUESTARIO

La restricción que tiene el i – ésimo consumidor está determinada por su ingreso o valor monetario de su riqueza $(m_i > 0)$. Por otro lado, se tienen los precios de los n bienes que el consumidor i – ésimo toma como dadas del mercado, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, donde $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ $(\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++})$. Entonces la canasta que adquiere el consumidor estará sujeta a la restricción:

$$\mathbf{px}' = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \leq m_i$$

Así, las canastas que cumplen el requisito anterior definen el conjunto presupuestario $\phi(\mathbf{p}, m_i)$, que se define como:

---

[28] Muchas veces se confunde esta característica con la propiedad que poseen las preferencias señalado por el axioma 5. Así, las preferencias pueden ser estrictamente convexas y sólo esta condición no implica que las curvas de indiferencias sean necesariamente convexas hacia el origen. Asimismo, esta propiedad nada en absoluto tiene que ver con el viejo principio neoclásica de la utilidad marginal decreciente.

$$\phi(\mathbf{p}, m_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{px}' \leq m_i \wedge \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Se entiende este conjunto como el conjunto de canastas o alternativas que pertenecen al espacio de consumo, tal que su costo monetario es menor al valor monetario de la riqueza del i – ésimo consumidor y que son estrictamente positivas. El conjunto presupuestario se puede definir a través de la una relación de correspondencia, la cual tiene ciertas propiedades importantes. Se plantea la relación de correspondencia presupuestaria:

$$\phi(\mathbf{p}, m_i) : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_+^n$$

Que presenta las siguientes propiedades:

- Es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, m_i)$,

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{++}, \phi(\lambda \mathbf{p}, \lambda m_i) = \phi(\mathbf{p}, m_i)$

- $\phi(\mathbf{p}, m_i)$ es un conjunto no vacío y convexo.
- $\phi(\mathbf{p}, m_i)$ es un conjunto cerrado y acotado.

Estas propiedades las planteamos en el siguiente axioma,[29]

Axioma 8

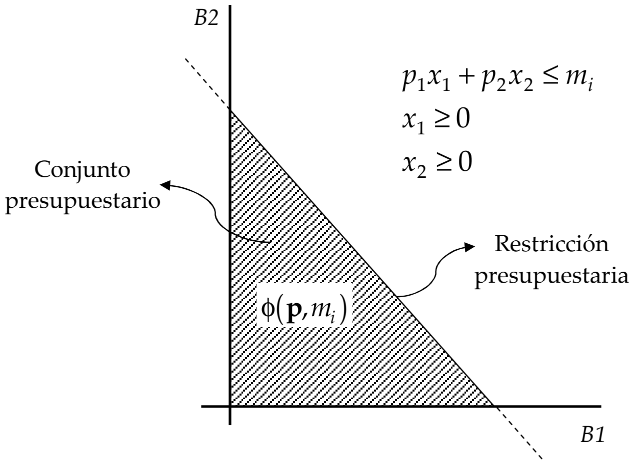
$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{px}' \leq m_i \wedge \forall \hat{\mathbf{x}} \left[\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}' \leq m_i \Rightarrow (\mathbf{x} \succ_i \hat{\mathbf{x}} \not\Leftrightarrow \mathbf{x} \sim_i \hat{\mathbf{x}})\right]$

Así, con este axioma evitamos conjuntos alcanzables donde el agente consumidor no pueda determinar su o sus mejores canastas. En términos formales, este axioma es una condición necesaria más no suficiente para trasladar el problema de elección del consumidor al campo de la optimización (en este caso, la búsqueda de un máximo). Además de estas propiedades la relación de preferencias debe satisfacer ciertas propiedades formales.

En $\mathbb{R}_+^2$, gráficamente:

---

[29] Esto no viene a ser más que una modificación del axioma 7 de la teoría general de la elección. Véase ÁVALOS (*Ob. Cit.*: p. 13).



Hagamos un análisis en $\mathbb{R}^2_+$ de la implicancia de esta propiedad. Sea $\phi(p_1, p_2, m_i)$, si $\lambda = \dfrac{1}{p_2}$ se tiene que:

$$\phi\left(\frac{p_1}{p_2}, 1, \frac{m_i}{p_2}\right) = \Phi(\theta_{12}, r_2)$$

Donde θ_{12} es el costo relativo (precio relativo) de B1 en términos de unidades de B2 y r_2 es el ingreso real medido en términos de unidades de B2. Ambas variables definen el conjunto alcanzable, la capacidad de compra del valor monetario de la riqueza. Es decir, el conjunto presupuestario no está definido por variables nominales, sino por variables reales.

Así, una modificación del costo relativo, *ceteris paribus*; ya sea por la modificación de sólo uno de los precios o de todos pero de forma inequiproporcional, conllevará a un cambio del conjunto de posibilidades de consumo. Esto gráficamente sería un giro o un traslado no paralelo de la recta presupuestaria.

Por otro lado, un cambio en el ingreso real, *ceteris paribus*, debido a una variación del ingreso monetario del consumidor, tendrá un efecto directo sobre las posibilidades de consumo. Este cambio se representa con un traslado paralelo de la recta presupuestaria, al mismo costo relativo de los bienes.

5. DE LA ELECCIÓN DEL CONSUMIDOR

Dado el espacio de consumo, las preferencias del i – ésimo consumidor están formuladas a partir del primitivo "*. . . es al menos tan preferido como . . .* ", denotado como $\succsim_i$. Pero, del axioma 1 al axioma 8, no existe ninguna proposición que haga referencia a la elección del i – ésimo consumidor. Por esta razón introduciremos, siendo coherentes con la teoría general de la elección, donde se hace uso de otro primitivo importante, "*ser elegido*".[30]

Así, debemos diferenciar la situación en la que el i – ésimo consumidor prefiere la canasta $\mathbf{x}^*$ de aquella donde él elige $\mathbf{x}^*$.

Axioma 9

$$\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \left[\left(E_i\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{px}' \leq m_i \right) \wedge \neg \left(\mathbf{x} \succ_i \overline{\mathbf{x}} \wedge E_i\overline{\mathbf{x}} \right) \right] \vee \neg \left(\mathbf{px}' > m_i \Rightarrow E_i\mathbf{x} \right)$$

Este axioma nos dice que el i – ésimo consumidor elige aquellas canastas cuyo costo sea igual o menor a su ingreso monetario y que no sean preteridas por otra, o no es cierto que el i – ésimo consumidor elige canastas cuyo costo es mayor a su ingreso monetario.

6. DE LAS PREFERENCIAS A LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Trabajando sobre un espacio de consumo definido por $\mathbb{R}_+^n$, en el que se ha definido la relación de preferencia débil $(\succsim_i)$ y luego la relación de indiferencia $(\sim_i)$ ha permitido particionar dicho espacio en clases de equivalencia (conjuntos de indiferencia).

Luego, con la relación de preferencia fuerte $(\succ_i)$ se pueden ordenar las clases de equivalencia $I_i, \forall I_i \subset \mathbb{R}_+^n$. En otras palabras, las clases de equivalencia serán jerarquizadas u ordenadas según las preferencias del consumidor.

Así finalmente, podemos establecer una relación de orden donde a cada clase de equivalencia se le hace corresponder un número real.[31]

---

30 Ver ÁVALOS (*Ob. Cit.*: p. 12).

31 Recuérdese que cada canasta corresponde a una y sólo a una clase de equivalencia.

6.1 Función de utilidad

Sea $u_i : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función matemática que representa la relación de preferencia débil $(\succsim_i)$, que es completa, transitiva, continua y monótona; tal que $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, u_i(\mathbf{x}) \geq u_i(\overline{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succsim_i \overline{\mathbf{x}}$.

Lo que interesa no es el valor en sí de $u_i(\cdot)$, sino que se verifique que $\forall \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{x} \succ_i \overline{\mathbf{x}} \Rightarrow \left[u_i(\mathbf{x}) - u_i(\overline{\mathbf{x}})\right] \in \mathbb{R}_{++}$. Es decir, la función de utilidad es una representación ordinal de las preferencias del consumidor, por tanto, aquí no tiene una dimensión cardinal.[32] Acerca de $u_i(\cdot)$ se puede afirmar tres cosas:

- $u_i(\mathbf{x}) > u_i(\hat{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ_i \hat{\mathbf{x}} \quad \wedge \quad u_i(\mathbf{x}) = u_i(\hat{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim_i \hat{\mathbf{x}}$. Esta propiedad está relacionada a los axiomas 1, 2 y 3.
- $u_i(\cdot)$ debe ser una función continua y diferenciable, al menos C^1 y C^2. Esta propiedad se relaciona a los axiomas 4, 5, 6 y 7. Facilita la introducción de técnicas matemáticas para poder "optimizar".[33]
- Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, entonces se puede tener una función compuesta tal que $F\left[u_i(\mathbf{x})\right] > F\left[u_i(\overline{\mathbf{x}})\right] \Leftrightarrow u_i(\mathbf{x}) > u_i(\overline{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ_i \overline{\mathbf{x}}$. Es decir, la función de utilidad es monótonamente creciente. Esta propiedad deviene del axioma 6.[34]

---

32 Así, desprovista la utilidad de la cardinalidad, el concepto de utilidad marginal carece de sentido, tal como lo formulaban economistas neoclásicos del siglo XIX, como Alfred Marshall. Al respecto se señala: "*La utilidad se considera como correlativa del deseo o necesidad.*" Además se añade: "La utilidad total *de una cosa para una persona (es decir, el placer total u otro beneficio que le produce) crece con cada aumento de las existencias que de dicha cosa posee la persona aludida, pero no con la misma rapidez. Si su* stock *aumenta en una proporción uniforme, el beneficio derivado aumenta en una proporción decreciente.*" Ver MARSHALL (1957: pp. 81 – 82).

33 Así podemos obtener de la función de utilidad, $u_i^k(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_k}$ y $u_i^{kl}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l}$ para los bienes $k, l = 1, 2, \ldots, n$. La primera ecuación es conocida como "la utilidad marginal".

34 El valor real que se obtenga para cualquier canasta del espacio de consumo, ya sea con $u_i(\cdot)$ o $F(\cdot)$ es irrelevante. Lo que interesa es que los valores reales que den, sean coherentes con la

- Es estrictamente cuasi – cóncava. Esta propiedad de la función de utilidad se deriva del axioma 5. Así, se tiene que para las funciones estrictamente cuasi – cóncavas el conjunto $\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_{+}^{n} : u_i(\mathbf{x})\geq\overline{u}, \overline{u}\in\mathbb{R}\right\}$ es convexo.[35]

Por tanto, debemos precisar que la presente teoría la función de utilidad $u_i(\cdot)$ genera valores que son simplemente índices numéricos, sus valores por sí mismos carecen de interpretación (no tienen unidades); interesando sólo que los valores que genera para cada canasta de consumo traduzcan la relación de preferencia.[36] Por tanto en este enfoque, la noción de utilidad, mucho menos implica algún contenido psicológico del consumidor.

Ahora, precisado el papel de la función de utilidad; entonces para una curva de indiferencia cualquiera del espacio de consumo, como $I_i^1(\hat{\mathbf{x}})$, le corresponderá una tasa marginal de sustitución cada vez menor en medida que dispone más de B_1. Así, si $TMgS_{21}=\frac{u_i^1}{u_i^2}$, luego se tiene:

$$\frac{dTMgS_{21}}{dx_1}=\frac{u_i^{11}}{u_i^2}+\frac{u_i^{12}}{u_i^2}\frac{dx_2}{dx_1}-\frac{u_i^1}{\left(u_i^2\right)^2}u_i^{21}-\frac{u_i^1}{\left(u_i^2\right)^2}u_i^{22}\frac{dx_2}{dx_1}<0$$

---

ordenación de las preferencias. Así, si $F=F(u_i)$, donde $F'\equiv\frac{dF}{du_u}>0$; entonces derivaremos que, $\frac{F^1}{F^2}=\frac{F'u_i^1}{F'u_i^2}=\frac{u_i^1}{u_i^2}=TMgS_{21}$. Por tanto, las curvas de indiferencia son las mismas, así se expresen mediante la función de utilidad original $u_i(\cdot)$ o su transformación monótona creciente $F(\cdot)$.

35 Así, una curva de indiferencia no es más que la representación gráfica del conjunto contorno superior, para un valor de la función de utilidad. Luego podemos derivar la pendiente de la curva de indiferencia, tomando el par de bienes B_1 y B_2 para un valor real dado de la función de utilidad $\overline{u}=u_i(x_1,x_2)$, se tiene: $0=u_i^1dx_1+u_i^2dx_2\rightarrow-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{u_i^1}{u_i^2}$. Así, la tasa marginal de sustitución equivale a una "*utilidad marginal relativa*", $TMgS_{21}=\frac{u_i^1}{u_i^2}$.

36 Al respecto: "*If total utility is not quantitatively definable, neither is marginal utility. But the theory of value does not need any precise definition of marginal utility. What it does need is only this; that when an individual's system of wants is given, and he possesses any given set of goods, X, Y, Z, . . . we should know his marginal rate of substitution between any two godos.*" Ver HICKS y ALLEN (*Ob. Cit.*: p. 55).

Y como se sabe que $-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{u_i^1}{u_i^2}$; entonces,

$$\frac{dTMgS_{21}}{dx_1}=\frac{u_i^{11}}{u_i^2}-\frac{u_i^{12}}{u_i^2}\frac{u_i^1}{u_i^2}-\frac{u_i^1}{\left(u_i^2\right)^2}u_i^{21}+\frac{u_i^1}{\left(u_i^2\right)^2}u_i^{22}\frac{u_i^1}{u_i^2}<0$$

Simplificando,

$$\frac{dTMgS_{21}}{dx_1}=\frac{u_i^{11}}{u_i^2}-\frac{u_i^{12}u_i^1}{\left(u_i^2\right)^2}-\frac{u_i^{21}u_i^1}{\left(u_i^2\right)^2}+\frac{u_i^{22}\left(u_i^1\right)^2}{\left(u_i^2\right)^3}<0$$

Quedando,

$$\frac{dTMgS_{21}}{dx_1}=\frac{1}{\left(u_i^2\right)^3}\left[u_i^{11}\left(u_i^2\right)^2-u_i^{12}u_i^1u_i^2-u_i^{21}u_i^1u_i^2+u_i^{22}\left(u_i^1\right)^2\right]<0$$

Por el teorema de Young, $u_i^{12}=u_i^{21}$, entonces,

$$\frac{dTMgS_{21}}{dx_1}=\frac{1}{\left(u_i^2\right)^3}\left[u_i^{11}\left(u_i^2\right)^2-2u_i^{12}u_i^1u_i^2+u_i^{22}\left(u_i^1\right)^2\right]<0$$

Luego, dado la propiedad de monotonocidad, entonces se sabe que $u_i^2>0$. Por tanto, que la tasa marginal de sustitución sea decreciente implica que,

$$\left[u_i^{11}\left(u_i^2\right)^2-2u_i^{12}u_i^1u_i^2+u_i^{22}\left(u_i^1\right)^2\right]<0$$

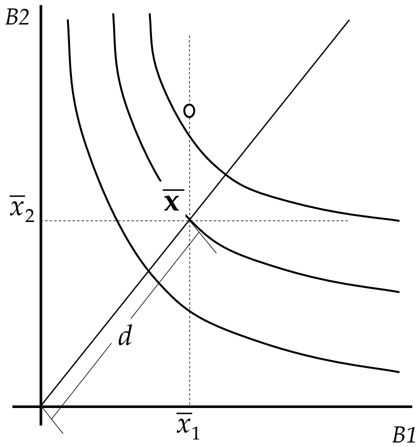
Y tal como observamos esto es independiente de los valores u_i^{11} y u_i^{22}. Así, de la conducta del consumidor no se infiere absolutamente nada acerca de la utilidad marginal decreciente, tal como sostenían los neoclásicos de fines del siglo XIX; Marshall, Walras, Jevons, Menger, etc.

Por otro lado, esta condición implica que la función de utilidad que representa las preferencias regulares no puede ser cualquier función para cuando se utilicen las técnicas de optimización. Esta función debe ser estrictamente cuasi – cóncava, como mencionamos anteriormente, por lo que se exige que el hessiano de dicha función corresponda a una matriz definida negativa.[37]

Teorema 1 (Existencia de una función de utilidad)

Si la relación de preferencia "*. . . al menos tan preferido como . . .*" $\left(\succsim_i\right)$ es completa, transitiva, continua y monótona, definida sobre $\mathbb{R}_+^n$; entonces existe una función matemática continua que la representa.

En $\mathbb{R}_+^2$ tenemos la posibilidad de una función de utilidad dada por el valor de una función que arroja un valor idéntico a la distancia desde el origen (la peor canasta del espacio de consumo, $\mathbf{0}=(0,0)$) y la posición de la canasta referencial, $\overline{\mathbf{x}}$. Es decir, $d=\left(\overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2\right)^{1/2}=u_i\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2\right)$ ubicada sobre un rayo determinado.[38] Gráficamente, notamos que, dadas los axiomas de las preferencias, el rayo corta una sola vez a cada curva de indiferencia, por lo que a cada una de ellas le hace corresponder un valor, este justamente es d.[39]



[37] Trataremos este punto con mayor detalle cuando nos ocupemos del equilibrio del consumidor y sus implicancias para la estática comparativa.

[38] Como mencionamos en la nota número 5, esto es posible dado que el espacio de consumo es un espacio euclideano.

[39] Por ejemplo, si las preferencias no fuesen fuertemente monótonas; entonces sería posible tener curvas de indiferencia tipo "herradura", por lo que sería posible que el rayo corte cada curva de indiferencia dos veces, otorgándole así, a cada clase de indiferencia dos valores diferentes.

6.2 Propiedades de la función de utilidad

Función de utilidad monótonamente creciente

$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, u_i : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, se verifica $\mathbf{x} \gg \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow u_i(\mathbf{x}) > u_i(\bar{\mathbf{x}})$.

Esta es una expresión directa de la propiedad de monotonocidad de las preferencias del consumidor.

Función de utilidad estrictamente cuasi cóncava

$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n, u_u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, se verifica $u_i\left[\theta \mathbf{x} + (1-\theta)\bar{\mathbf{x}}\right] > \min\left[u_i(\mathbf{x}), u_i(\bar{\mathbf{x}})\right],\ \forall \theta \in (0,1)$.

Esto es una consecuencia de suponer que las preferencias del consumidor son estrictamente convexas.

Función de utilidad homogénea

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \wedge \forall \theta \in \mathbb{R}_{++}$ se tiene que $\theta^r u_i(\mathbf{x}) = u_i(\theta \mathbf{x})$.

Una función de utilidad homogénea representa un tipo de preferencias, llamadas preferencias homotéticas. La relación de preferencia débil $\left(\succsim_i\right)$ es homotética si y sólo si,

$\forall \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n \wedge \alpha \in \mathbb{R}_{++}, \mathbf{x} \sim_i \hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \sim_i \alpha \hat{\mathbf{x}}$.

Luego, para $\mathbb{R}_+^n$ se tienen diferentes clases de funciones de utilidad, como,

$$u_i(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{-\rho}\right)^{1/\rho} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

Esta función de utilidad se le conoce como la función de utilidad CES;[40] de donde se tiene que los siguientes casos extremos:

- $\rho \to \infty$, $u_i(\mathbf{x}) = \min\{\alpha_k x_k\}_{k=1}^{n}$, conocida como función de utilidad de Leontief.
- $\rho \to 0$, $u_i(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, conocida como función de utilidad Cobb – Douglas.

También tenemos las funciones de utilidad:

[40] Función de utilidad con elasticidad de sustitución constante. Su nombre proviene de su traducción al inglés, constant elasticity sustitution, C. E. S.

- $u_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, llamada función de utilidad lineal (cuando el consumidor considera que los bienes son perfectos sustitutos).
- $u_i(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + v_i(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, conocida como función de utilidad cuasilineal.
- $u_i(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_k)^{\alpha_k}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \wedge \overline{x}_k = \text{cte. } \forall k = 1, 2, \ldots, n.$ Llamada función de utilidad Stone – Geary.

En cuanto a las preferencias homotéticas, en $\mathbb{R}_+^2$ se observa que estas preferencias tendrán la particularidad de poseer canastas que mantienen la misma proporción de los bienes, tal que le corresponde a cada canasta la misma tasa marginal de sustitución (*TMgS*).

7. CONCLUSIONES

En conclusión, con una función de utilidad $u_i(\cdot)$ continua, monótona y estrictamente cuasi – cóncava, se tiene:

- El problema de decisión del consumidor, pasa de elección del elemento maximal a un problema de optimización (maximización). Así, el problema de optimización queda planteado como:

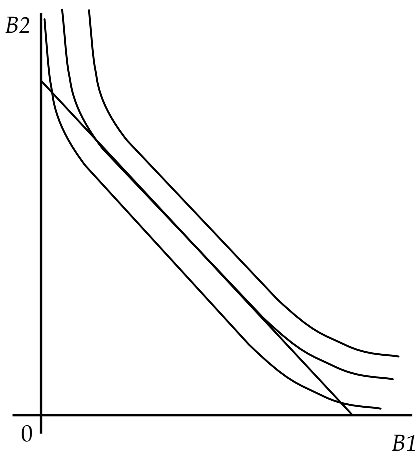
$$\left.\begin{array}{l} \max u_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad \phi(\mathbf{p}, m_i) \end{array}\right\} [P]$$

- El programa de optimización primal requiere para que posea solución, que el conjunto presupuestario sea un conjunto no vacío y compacto (cerrado y acotado), que la función de utilidad sea continua y estrictamente cuasi – cóncava. Y para que la solución no sea múltiple sino sea una solución única, se requiere que el conjunto presupuestario sea un conjunto convexo.

Las implicancias que tienen estas condiciones sobre el conjunto de posibilidades de consumo y la relación de preferencia del consumidor, son de un alcance importante. Por ejemplo, nos permitirá utilizar dos teoremas, el de Weierstrass y el Local – Global.[41]

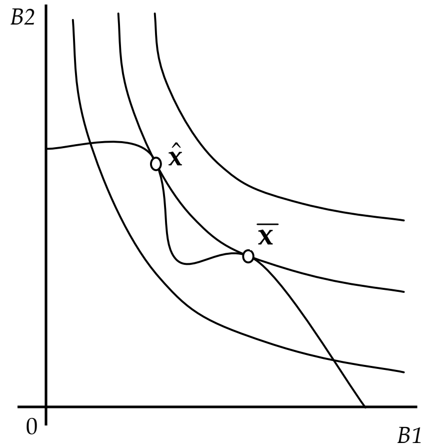
Veamos, casos simples donde no se cumplen las condiciones señaladas líneas arriba, para un espacio de consumo $\mathbb{R}_{+}^{2}$:

- Un segundo caso, es cuando el conjunto presupuestario es un conjunto no vacío, compacto y convexo. Asimismo, la función de utilidad representa preferencias que no son estrictamente convexas, sino convexas ya que poseen un tramo que es lineal. Aquí entonces, en este caso existen infinitas soluciones.



- El un primer caso tenemos preferencias estrictamente convexas y un conjunto presupuestario no convexo. En este caso, dadas las propiedades del conjunto presupuestario tenemos dos soluciones. Inclusive, es posible tener una situación con dos soluciones pero donde una de ellas no es óptima.

[41] Teorema de Weierstrass. Si $\phi(\mathbf{p}, m_i)$ es un conjunto compacto no vacío, y $u_i(\mathbf{x})$ es una función continua definida sobre el conjunto $\phi(\mathbf{p}, m_i)$, entonces $u_i(\mathbf{x})$ tiene, al menos, un máximo (mínimo) ya sea en el interior de $\phi(\mathbf{p}, m_i)$ o en la frontera de $\phi(\mathbf{p}, m_i)$.
Teorema Local – Global. Sea una función continua y estrictamente cuasi – cóncava $u_i : \mathbb{R}_{+}^{n} \to \mathbb{R}$, entonces todo máximo de u_i sobre $\mathbb{R}_{+}^{n}$ es un máximo global.



En conclusión, se requiere que el conjunto presupuestario sea no vacío, compacto y convexo. La función de utilidad debe ser una función continua, monótona y estrictamente cuasi cóncava. Luego, el teorema del máximo global garantiza que todo punto máximo es un máximo global.

REFERENCIAS

[1] ÁVALOS, Eloy. (2010), *La teoría general de la elección*. Documento de Trabajo Nº 4. Lima: Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac.

[2] BECKER, Gary. (1977), *Teoría económica*. México: Fondo de Cultura Económica.

[3] HICKS, John. (1945), *Valor y capital. Investigación sobre algunos principios fundamentales de teoría económica*. México: Fondo de Cultura Económica.

[4] HICKS, John y Roy ALLEN. (1934), *A reconsideration of the theory of value. Part I*. En Economica, New Series, Vol. 1, No. 1, pp. 52 – 76. London: The London School of Economics and Political Science.

[5] HORVÁTH, Juan. (1969), *Introducción a la topología general*. Serie de Matemática Nº 9. Washington: Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana.

[6] MADDEN, Paul. (1987), *Concavidad y optimización en microeconomía*. Madrid: Alianza Editorial.

[7] MARSHALL, Alfred. (1957), *Principios de economía. Un tratado de introducción*. Madrid: Aguilar S. A. de Ediciones.

[8] WALSH, Vivian. (1974), *Introducción a la microeconomía moderna*. Barcelona: Editorial Vicens – Vives.

[9] SEGURA, Julio. (1986), *Análisis microeconómico*. Madrid: Alianza Editorial.