Balanced States in Vector Optimization Problems

Polterovich, Victor

CEMI RAS

1984

УДК 62-505

УРАВНОВЕШЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ПОЛТЕРОВИЧ В. М.

(Москва)

Рассматривается задача отыскания точки Парето, удовлетворяющей дополнительным условиям типа равенств. Доказывается теорема о существовании решения. Приводятся примеры.

Цель данной статьи — предложить естественную постановку задачи векторной оптимизации, которая, несмотря на обилие литературы по этому вопросу [1, 2], до сих пор не рассматривалась в общем виде. Она возникла из стремления унифицировать доказательства ряда теорем о существовании оптимального распределения ресурсов при неравновесных ценах [3–5]. Однако имеются и другие примеры применения описываемого ниже подхода, один из них содержится в последнем разделе статьи.

1. Уравновешенные состояния

Пусть на множестве состояний $X \subset R^l$ заданы m отображений $U_k : X \to 2^X$, $k \in M = \{1, \ldots, m\}$. Каждое из них описывает некоторое предпочтение (обобщенный критерий оптимальности), если интерпретировать множество $U_k(x)$ как совокупность состояний, строго лучших, чем x. Всюду в дальнейшем считаем выполненными следующие условия.

1. Множество X — непустой выпуклый компакт.

2. Для любого $k=1, \ldots, m$ отображение U_k иррефлексивно (т. е. $x \notin U_k(x)$ $\forall x$) и его график открыт в $X \times X$; множества $U_k(x)$ либо пусты, либо выпуклы.

Отметим, что после работы [6] такой способ описания предпочтений стал стандартным; полнота или транзитивность здесь не предполагаются.

Состояние $x \in X$ называют Парето-оптимальным, если

$$(1) \qquad \bigcap_{k \in M} \overline{U}_k(x) \cap U_r(x) = \varnothing \quad \forall r \in M,$$

где $\overline{U}_k(x)$ — замыкание множества $U_k(x)$.

При постановке задач многокритериального выбора возникает трудный методологический вопрос: как определить понятие решения, чтобы соответствующее множество содержало «не слишком много» элементов? Требование Парето-оптимальности решения часто оказывается естественным, но далеко не всегда ясно, какую из точек Парето следует предпочесть. Чтобы преодолеть указанную трудность, для некоторых специальных ситуаций разработаны системы аксиом, определяющие функции выбора [7]. Во многих работах с этой же целью предлагается использовать экспертов [2, 8].

В ряде случаев необходимая дополнительная информация о желательном выборе может быть задана условиями следующего вида:

$$(2) \qquad g_k(x) = g_r(x) \quad \forall k, r \in M,$$

где g_k — числовая функция, определенная на X.

Будем интерпретировать соотношения

$$g_j(x) = \min_{k \in M} g_k(x) < g_r(x) = \max_{k \in M} g_k(x)$$

как указание эксперта на то, что выбор состояния x означал бы недостаточный учет предпочтения j по сравнению с предпочтением r. Тем самым для каждого x выделяются критерии, «увеличение» которых наиболее и наименее важно. Компромисс между предпочтениями достигается в тех точках, где выполнены равенства (2).

Итак, пусть фиксированы множество X, отображения U_k и функции g_k, $k\in M$.

Определение 1. Состояние $x\in X$ назовем уравновешенным, если оно Парето-оптимально и удовлетворяет условиям (2).

Подчеркнем, что Парето-оптимальность состояния на множестве

$$X_0=\{x\in X\,|\,g_k(x)=g_r(x)\quad\forall k,\ r\in M\} \tag{3}$$

относительно отображений $U_k(x)\cap X_0$ необходима, но отнюдь не достаточна для уравновешенности.

Иногда выполнение условий типа (2) обеспечивается самим механизмом функционирования исследуемой системы. При этом их можно интерпретировать либо как информацию о целесообразном выборе оптимума Парето на множестве X, либо как ограничения на совокупность состояний. В последнем случае приходим к проблеме векторной оптимизации на множестве (3), и снова возникает вопрос о критериях отбора Парето-оптимальных точек. Различие между двумя этими возможностями становится особенно ясным из следующих эвристических соображений. Если размерность X больше, чем $2m-2$, то «в общей ситуации» следует ожидать, что размерность Парето-границы для множеств X и X_0 одинакова и равна $m-1$ (см., например, [9]), в то время как совокупность уравновешенных состояний «скорей всего» имеет нулевую размерность.

Пусть $J\subset M=\{1, 2, \ldots, m\}$. Состояние $x\in X$ назовем J-уравновешенным, если условия (1) и (2) выполняются при замене M на J.

Если J содержит только один элемент r, то J-уравновешенными являются векторы, «максимизирующие» предпочтение U_r на X.

Введем еще два предположения.

3. Функции g_k непрерывны.

4. Для любого $J\subset M$ всякое J-уравновешенное, но не уравновешенное состояние z удовлетворяет условию

$$g_r(z)>\min_{k\in M} g_k(z)\qquad\forall r\in J.$$

Последнее, наиболее ограничительное допущение характеризует ситуацию как «антагонистическую». Оно означает, что достижение уравновешенности для любого собственного подмножества критериев неизбежно связано с «ущемлением» некоторых других предпочтений.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. Если выполнены предположения 1—4, то уравновешенное состояние существует.

Доказательство дано в приложении 1.

Отметим, что обоснование теоремы 1 существенно упрощается, если предпочтения заданы непрерывными вогнутыми функциями $u_k: X\to R^1$; в этом случае отображения U_k имеют вид

$$U_k(x)=\{v\,|\,u_k(v)>u_k(x),\ v\in X\}$$

и удовлетворяют предположению 2. Рассмотрим игру двух лиц:

$$\sum_1^m \gamma_k u_k(x)\to\max\quad\text{по}\quad x,\quad x\in X, \tag{4}$$

$$-\sum_1^m \gamma_k g_k(x)\to\max\quad\text{по}\quad \gamma=(\gamma_k),\quad \sum_1^m \gamma_k=1,\quad \gamma_k\geqslant 0\quad\forall k. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что при выполнении предположения 4 состояние является уравновешенным тогда и только тогда, когда для некоторого $\gamma^*=$

$=(\gamma_k^*)\in R^m$ пара (x^*, γ^*) равновесна по Нэшу в игре (4), (5). Отсюда легко следует теорема существования.

По-видимому, уравновешенное состояние, «как правило», единственно. Но пока эта гипотеза доказана лишь в двух очень частных случаях [3, 4].

Для вычисления уравновешенного состояния естественно использовать процесс

$$\frac{d\gamma_k}{dt}=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} g_r(\xi(\gamma))-g_k(\xi(\gamma)),\quad k\in M, \tag{6}$$

где $\xi(\gamma)$ — решение задачи (4) при $\gamma=(\gamma_k)$. Пока этот процесс (допускающий, как легко понять, многочисленные модификации) обоснован лишь для очень простой модели (см. [4]).

Если $g_k(x)\equiv u_k(x)$, то при оговоренных условиях предлагаемая постановка задачи векторной оптимизации эквивалентна хорошо известной (см., например, [7]): максимизировать функцию $\min\limits_k u_k(x)$ при $x\in X$. Ниже рассматриваются другие, более содержательные примеры уравновешенных состояний.

2. Распределение ресурсов при фиксированных ценах

Пусть n видов ресурсов распределяются между m участниками и допустимое множество имеет вид

$$X=\left\{x=\{c_k\}_1^m \,\middle|\, \sum_1^m c_k\in Y,\ c_k\in R_+^n\right\}, \tag{7}$$

где $c_k=(c_{ki})$ — вектор, потребляемый агентом k; Y — множество допустимых векторов чистого выпуска, $Y\subset R_+^n$. Символом $\{c_k\}_1^m$ обозначена последовательность $(c_{11},\ldots,c_{1n},\ldots,c_{m1},\ldots,c_{mn})$, так что $X\subset R_+^{nm}$.

Предпочтения участников описываются, как и выше, отображениями U_k, определенными на X. Вектор цен на ресурсы фиксирован и равен $p=(p_i)\in R_+^n$. Правило распределения доходов между участниками задается системой скалярных функций $\varphi_k(\beta)$, $k\in M$, $\beta\in R_+^1$, где β — суммарная величина дохода.

Нижеследующее определение обобщает близкие понятия $BCPE$-распределения и p-оптимума, введенные соответственно в [3, 4].

Определение 2. Распределение ресурсов $x^*=\{c_k^*\}_1^m$ назовем p-оптимальным, если оно Парето-оптимально для системы отображений U_k, $k\in M$ на множестве (7) и, сверх того, удовлетворяет бюджетным ограничениям

$$pc_k^*=\varphi_k\left(p\sum_{r=1}^m c_r^*\right),\quad k\in M.$$

Введем следующие предположения.

5. $x'\in U_r(x)$ при любых $x=\{c_k\}_1^m$, $x'=\{c_k'\}_1^m$ из X, таких, что $c_r'\geqslant c_r$, $c_r'\neq c_r$.
6. Множество Y — выпуклый компакт в R_+^n.
7. Функции φ_k непрерывны, неотрицательны и удовлетворяют тождеству

$$\sum_1^m \varphi_k(\beta)\equiv\beta,\quad \beta\in R_+^1.$$

Условие 5 вместе с предположением 2 (см. раздел 1) фактически означает, что предпочтение участника k определяется лишь количествами имеющихся у него ресурсов.

Теорема 2. Пусть $p>0$ и выполнены допущения 2, 5—7. Тогда p-оптимальное распределение существует.

Доказательство. Для произвольного $x \in X$ положим

$$g_k(x) = pc_k - \varphi_k\left(p\sum_1^m c_k\right), \quad k \in M.$$

Из предположения 5 следует, что уравновешенное состояние в этой ситуации является p-оптимальным. Поэтому достаточно проверить применимость теоремы 1.

Выполнение условий 1–3 очевидно. Убедимся в справедливости предположения 4. Если состояние $x = \{c_k\}_1^m$ J-уравновешено, $J \neq M$, то в силу допущений 2, 5

$$c_k = 0, \quad k \in M \setminus J.$$

Если $\varphi_k\left(p\sum_1^m c_k\right) = 0 \ \forall k \notin J$, то состояние x уравновешено. В противном случае найдется $r \notin J$, для которого $g_r(x) < 0$, что и требовалось доказать.

Для случая, когда Y содержит единственный вектор и φ_k линейны, существование p-оптимальных распределений было доказано в [3–5]. В [3] предпочтения описывались гладкими возрастающими квазивогнутыми функциями полезности; в [4] гладкость не предполагалась. В [5] предпочтения были подчинены условиям 2 и 5. Модель с производством рассматривалась в [4] (см. также [10]), но в несколько ином варианте.

Независимо от упомянутых работ в [11, 12] исследовалась очень близкая проблема. Связь двух задач была замечена в [5]. По существу, речь идет о рассмотрении описанной выше ситуации с учетом случайных факторов.

В этой постановке Y и p — функции, отображающие пространство состояний Ω соответственно в $2^{R_+^n}$ и в $R_+{}^n$. Ищется функция $x = \{c_k\}_1^m$, где $c_k : \Omega \to R_+{}^n$, которая удовлетворяла бы условию Парето-оптимальности относительно отображений $U_k : X \to 2^X$ и, сверх того, равенствам

$$Epc_k = \varphi_k\left(E\sum_{r=1}^m pc_r\right), \quad k \in M.$$

Здесь E — символ математического ожидания, а

$$pc_k = \sum_{i=1}^n p_i(\omega) c_{ki}(\omega).$$

В формуле (7) включения должны выполняться при всех $\omega \in \Omega$.

В [11, 12] эта задача изучалась для частной ситуации: распределялся единственный ресурс, функции φ_k считались линейными, предпочтения задавались вогнутыми функциями полезности, а отображение $Y(\omega)$ предполагалось однозначным. Полученные в [11, 12] результаты не следуют из теоремы 1, если Ω содержит бесконечное число элементов. Для конечного числа состояний описанная обобщенная модель сводится к детерминированной и, согласно теореме 1, ее решение существует. Однако, в отличие от постановки, рассмотренной в [11, 12] (см. также теорему 2 в [4]), условия, обеспечивающие единственность решения, не исследовались.

3. Косвенное задание эффективных траекторий экономического роста

При формализации проблем оптимального планирования в качестве максимизируемого критерия часто принимают сумму дисконтированных целевых функций, зависящих от текущего потребления. Однако даже в тех случаях, когда целевые функции известны, обоснованное задание дисконта обычно вызывает существенные трудности. Ниже будет показано, что при определенных условиях вместо дисконтирующих коэффициентов можно для каждого момента времени задавать величину $\varkappa_t$ отношения стоимости потребленных за год благ ко всем имеющимся ресурсам (сумме основных и оборотных фондов на начало года и национального дохода). Без сомнения, имеются и другие параметры, косвенным образом определяющие эффективный план; естественным претендентом на эту роль является норма потребления (ср. [13, с. 394]). Выбор первичных параметров зависит от простоты их исчисления и стабильности или «регулярности» изменения во времени. Проведенные подсчеты показали, что в этом смысле нормы потребления не имеют особых преимуществ перед величинами $\varkappa_t$. Так, за период 1976—1980 гг. максимальное относительное отклонение $\varkappa_t$ от среднего значения составляло 2,5%, а для норм потребления — 2,8%.

Приступаем к описанию модели. Пусть t — дискретное время, $t=0,\ldots,T$; T — горизонт планирования. Траектории экономического роста будем обозначать символом $\{c_t, v_t, w_t\}_0^T$, где c_t, v_t, w_t — соответственно потребление, затраты и выпуск в момент t. Допустимыми считаем такие и только такие траектории, которые удовлетворяют условиям

$$(v_{t-1}, w_t)\in Z_t \quad (t=1,\ldots,T),$$
$$c_t=w_t-v_t \quad (t=0,\ldots,T), \quad w_0=y_0,$$

где Z_t — технологическое множество в момент t; вектор начальных ресурсов y_0 фиксирован. Множество допустимых траекторий обозначаем через X. Известны целевые функции $u_t(c_t)$, зависящие от потребления, и функция $f(v_t)$, характеризующая ценность вектора ресурсов, предназначенных для использования в заплановом периоде. Пусть, кроме того, заданы последовательность чисел $\varkappa_t$, $0<\varkappa_t<1$ $(t=0,\ldots,T)$ и вектор цен $p\in R_+^n$. Спрашивается, существует ли в X траектория, Парето-оптимальная относительно функций f и u_t $(t=0,\ldots,T)$, для которой

$$pc_t/pw_t=\varkappa_t \quad \forall t. \tag{8}$$

Этот вопрос сводится к проблеме существования уравновешенного состояния, если для любого $x=\{c_t, v_t, w_t\}_0^T\in X$ положить

$$U_t(x)=\{x'=\{c_\tau', v_\tau', w_\tau'\}_0^T\in X|u_t(c_t')>u_t(c_t)\}, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$U_{T+1}(x)=\{x'=\{c_\tau', v_\tau', w_\tau'\}_0^T\in X|f(v_T')>f(v_T)\},$$
$$g_t(x)=pc_t-\varkappa_t pw_t, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$g_{T+1}(x)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}(\varkappa_t pw_t-pc_t).$$

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции u_t, f определены на R_+^n, непрерывны, вогнуты и возрастают по всем своим аргументам;

2) множества Z_t содержатся в R_+^{2n}, замкнуты и выпуклы;

3) для любого $v\in R_+^n$ и произвольного t найдется вектор w_t, такой, что $(v, w_t)\in Z_t$;

4) если $(0, y)\in Z_t$, то $y=0$;

5) если $v'\geqslant v$, $(v, w)\in Z_t$, $v'\neq v$, то найдется вектор $w'\geqslant w$, $w'\neq w$, такой, что $(v', w')\in Z_t$;

6) $y_0\geqslant 0$, $y_0\neq 0$; $p>0$.

Тогда для любой последовательности чисел $\varkappa_t$, $0<\varkappa_t<1$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ существует Парето-оптимальная траектория $x=\{c_t, v_t, w_t\}_0^T$, удовлетворяющая равенствам (8).

Доказательство дано в приложении 2.

Известно, что Парето-оптимальная траектория максимизирует функцию

$$\sum_0^T \gamma_t u_t(c_t)+\gamma_{T+1}f(v_T)$$

при некоторых неотрицательных γ_t. Эти величины играют роль дисконтирующих коэффициентов. Таким образом, задание параметров $\varkappa_t$ косвенным образом определяет динамику дисконта.

Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности, можем считать, что внутренность множества X не пуста. Введем отображения

$$T_k(x)=\{q\in R^l \mid \|q\|=1,\ qz\geqslant qx\ \ \forall z\in \overline{U}_k(x)\};$$

$$Q_k(x)=\begin{cases} \operatorname{conv} T_k(x), & \text{если} \quad U_k(x)\neq \phi, \\ S^k=\{q \mid \|q\|\leqslant 1\}, & \text{если} \quad U_k(x)=\phi, \end{cases}$$

где $\operatorname{conv} T_k(x)$ – выпуклая оболочка $T_k(x)$.

Лемма 1. График отображения Q_k замкнут. Если $U_k(x)\neq\phi$, то $0\notin Q_k(x)$.

Доказательство. Покажем вначале, что отображение $\overline{U}_k(x)$ полунепрерывно снизу. Пусть $x^t\to x^0$, $z\in\overline{U}_k(x^0)$. Тогда $U_k(x^0)\neq\phi$. Найдем последовательность $a^\nu\in U_k(x^0)$, сходящуюся к z. В силу открытости графика найдутся числа $\tau(\nu)$, такие, что $a^\nu\in U_k(x^t)$ при $t\geqslant\tau(\nu)$. Считая последовательность $\tau(\nu)$ возрастающей, положим $z^t=a^\nu$, $\tau(\nu)\leqslant t<\tau(\nu+1)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$. Тогда $z^t\to z$, $z^t\in U_k(x^t)$, что и требовалось показать.

Пусть теперь $x^t\to x^0$, $q^t\to q^0$, $q^t\in Q_k(x^t)$. Если $U_k(x^0)=\phi$, то $q^0\in Q_k(x^0)$. Пусть $U_k(x^0)\neq\phi$. Тогда найдутся векторы $q^{ts}\in T_k(x^t)$, удовлетворяющие соотношениям

$$q^t=\sum_{s=1}^{l+1}\alpha^{ts}q^{ts},\qquad \alpha^{ts}\geqslant 0,\qquad \sum_{s=1}^{l+1}\alpha^{ts}=1,$$

$$q^{ts}z\geqslant q^{ts}x^t\quad \forall z\in\overline{U}_k(x^t).$$

Без ограничения общности считаем, что $\alpha^{ts}\to\alpha^s$, $q^{ts}\to q^s$ при $t\to\infty$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{l+1}\alpha^{ts}q^{ts}\to q^0=\sum_{s=1}^{l+1}\alpha^s q^s.$$

Пусть $z^0\in\overline{U}_k(x^0)$. По доказанному, найдется последовательность $z^t\to z^0$, $z^t\in\overline{U}_k(x^t)$. Тогда $q^{ts}z^t\geqslant q^{ts}x^t$ $\forall t, s$. В пределе имеем

$$q^sz^0\geqslant q^sx^0,$$

следовательно, $q^s\in T_k(x^0)$, значит, $q^0\in Q_k(x^0)$. Замкнутость доказана.

Осталось показать, что $0\notin\operatorname{conv} T_k(x)$. Если это не так, то рассмотрим векторы q^s, $s=1,\ldots, l+1$, для которых

$$\|q^s\|=1,\qquad q^sz\geqslant q^sx\qquad \forall\, z\in U_k(x),\qquad \sum_{s=1}^{l+1}\alpha^sq^s=0,\qquad \sum_{s=1}^{l+1}\alpha^s=1,\qquad \alpha^s\geqslant 0.$$

Предположим для определенности, что

$$\alpha^1q^1=-\sum_{s=2}^{l+1}\alpha^sq^s\neq 0.$$

В этом случае, как легко понять,

$$q^1z=q^1x\quad \forall z\in U_k(x).$$

Последнее равенство невозможно, ибо $U_k(x)$ открыто. Лемма 1 доказана.

Обозначим через S произведение m шаров размерности l каждый: $S=\prod\limits_k S^k$, а через L – m-мерный симплекс

$$L=\left\{\gamma=(\gamma_k)\mid \sum_1^m\gamma_k=1,\ \gamma_k\geqslant 0\right\}.$$

Пусть $D(\gamma, q_1,\ldots, q_m)$ – множество решений задачи

$$\left(\sum_{k=1}^m\gamma_kq_k\right)x\to\max\quad \text{по}\quad x,\quad x\in X,$$

где $q_k\in R^l$. Через $\Gamma(x)$ обозначим совокупность оптимальных векторов в задаче

$$\sum_{k=1}^m\gamma_kg_k(x)\to\min\quad \text{по}\quad \gamma,\quad \gamma=(\gamma_k)\in L.$$

Пусть, кроме того, $Q(x)=\prod_{k=1}^{m} Q_k(x)$. На множестве $X\times L\times S$ определено отображение $D\times\Gamma\times Q$. Используя лемму 1, легко проверить, что оно удовлетворяет условиям теоремы Какутани и, следовательно, имеет неподвижную точку $(x^*, \gamma^*, q_1^*, \ldots, q_m^*)$. Покажем, что x^* – уравновешенное состояние.

Предположим противное. Рассмотрим множество $J=\{k|\gamma_k^*>0\}$ и допустим, что верно одно из двух утверждений: а) $J=M$, состояние x^* не является Парето-оптимальным; б) $J\neq M$. В первом случае найдется номер $r\in J$, для которого

$$B_r=\bigcap_{k\in J} \overline{U}_k(x^*)\bigcap U_r(x^*)\neq\phi.$$

Во втором случае

$$J\subset\{k|g_k(x^*)=\min_{\tau\in M} g_\tau(x^*)\},$$

поскольку $\gamma^*\in\Gamma(x^*)$. В силу предположения 4 опять-таки $B_r\neq\phi$ для некоторого $r\in J$. Пусть $x\in B_r$. Так как $q_k^*\in Q_k(x^*)$, то

$$q_k^*x\geqslant q_kx^* \quad \forall k\in J,$$

причем для $k=r$ имеет место строгое неравенство. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^*q_k^*(x-x^*)>0,$$

что невозможно, ибо $x^*\in D(\gamma^*, q_1^*, \ldots, q_m^*)$. Итак, оба предположения неверны. Значит, x – Парето-оптимум. Кроме того, $J=M$, а так как $\gamma^*\in\Gamma(x^*)$, то, как легко проверить, величина $g_k(x^*)$ не зависит от k. Теорема 1 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 3

Лемма 2. Пусть состояние $x=\{x_t\}_0^T$, $x_t=(c_t, v_t, w_t)$ Парето-оптимально для подмножества $J\neq M=\{0, \ldots, T+1\}$. Тогда $c_t=0$ $\forall t\notin J$, $t\leqslant T$; если же $T+1\notin J$, то найдется номер $j\in J$, такой, что

$$c_j=w_j\neq0,\ v_j=0,\ x_t=0 \quad \forall t>j,\ t\leqslant T.$$

Доказательство. Рассуждая «от противного», строим траекторию $\{x_t'\}_0^T$, $x_t'=(c_t', v_t', w_t')$, лучшую, чем исходная, для некоторых $t\in J$ и не худшую – для остальных $t\in J$.

Второе утверждение немедленно следует из рассмотрения траектории

$$x_t'=x_t,\ t<j;\ x_j'=(w_j, 0, w_j);\ x_t'=0,\ t>j,$$

где j – последний номер в J, для которого $w_j\neq0$ (существующий в силу условий 5), 6)).

Проверим первое утверждение. Пусть $c_r\neq0$, $r\in J$. Согласно только что доказанному достаточно рассмотреть ситуацию: $r<j$ для некоторого $j\in J$, причем $t\notin J$ в промежутке $r<t<j$. Положим

$$x_t'=x_t,\ t<r;\ x_r'=(0, w_r, w_r);$$
$$x_t'=(0, w_t', w_t'),\ r<t<j;$$
$$x_j'=(c_j', v_j, w_j');\ x_t'=x_t,\ t>j,$$

где векторы w_t' при $r<t\leqslant j$ и вектор c_j' строится так. Поскольку $w_r\geqslant v_r$, $w_r\neq v_r$, то согласно пятому условию теоремы найдется пара $(w_r, w_{r+1}')\in Z_{r+1}$, для которой

$$w_{r+1}'\geqslant w_{r+1}\geqslant v_{r+1}, \qquad w_{r+1}'=v_{r+1}'\neq v_{r+1}.$$

Действуя подобным образом, обеспечим неравенство

$$w_j'\geqslant w_j,\ w_j'\neq w_j,$$

тогда $c_j'=w_j'-v_j\geqslant c_j$, $c_j'\neq c_j$, и построенная траектория «лучше» исходной. Лемма доказана.

Убедимся в применимости теоремы 1. Заметим, что предположение 1 выполняется в силу условий 2), 4) теоремы 3, а предположение 2 – в силу условий 1), 2). Справедливость предположения 3 очевидна. Проверим предположение 4.

Допустим, что

$$J\subset K(x)=\{k|g_k(x)=\min_{r\in M} g_r(x)\}, \qquad J\neq M,$$

но состояние $x=\{c_t, v_t, w_t\}_0^T$ Парето-оптимально для множества J «участников».

Рассмотрим два случая.

а) $T+1\notin J$. Согласно лемме 2 найдем номер $j\in J$, такой, что $c_j=w_j\neq0$. Тогда $g_j(x)>0$, ибо $\varkappa_j<1$. Но $J\subset K(x)$, следовательно, $g_t(x)>0$ для всех $t=1, \ldots, T+1$, что невозможно в силу определения функций g_t.

б) $T+1 \in J$. Если $v_T=0$, то, очевидно, состояние x Парето-оптимально для множества $J \setminus \{T+1\}$, и приходим к уже рассмотренному случаю. Пусть $v_T \neq 0$. Тогда в силу четвертого условия теоремы 3 $w_t \neq 0$ $\forall t \leqslant T$. По лемме 2 $c_t=0$ для всех $t \notin J$, следовательно, $g_t(x)<0$ при $t \in J$. Но тогда g_t отрицательны для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T+1$, что невозможно. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achilles A., Elster K. H., Nehse R.* Bibliographie zur Vector-optimierung (Theorie und Anwendungen).— Math. Operationsforsch. Statist., ser. Optimization, 1979, v. 10, № 2, p. 277–321.
2. *Hwang G.-L., Masud A. S. M.* Multiple Objective Desision Making.— Methods and Applications. A state-of-the Survey. Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1979.
3. *Balasko Y.* Budget Constrained Pareto-Efficient Allocations.— J. Economic Theory, 1979, v. 21, № 3, p. 359–379.
4. *Полтерович В. М.* Оптимальное распределение благ при неравновесных ценах.— Экономика и мат. методы, 1980, т. XVI, вып. 4, с. 746–759.
5. *Keiding H.* Esistence of Budget Constrained Pareto-Efficient Allocations.— J. Economic Theory, 1981, v. 24, № 3, p. 393–397.
6. *Gale D., Mas-Colell A.* An Equilibrium Existence Theorem for a General Model Without Ordered Preferences.— J. Math. Economics, 1975, v. 2, № 1, p. 9–15.
7. *Roth A. E.* Axiomatic Models of Bargaining. Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1979.
8. *Ларичев О. И., Поляков О. А.* Человеко-машинные процедуры решения многокритериальных задач математического программирования.— Экономика и мат. методы, 1980, т. XVI, вып. 1, с. 129–145.
9. *Smale S.* Global Analysis and Economics: Geometric Analysis of Pareto-Optima and Price Equilibria under Classical Hypotheses.— J. Math. Economics, 1976, v. 3, № 1, p. 1–14.
10. *Полтерович В. М.* Оптимальное распределение благ при фиксированных ценах.— В кн.: Советско-польский научный семинар по математическим методам в планировании и управлении экономикой (10–15 декабря 1979 г.). Краткие тезисы. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1979, с. 36.
11. *Sobel J.* Porportional Distribution Schemes.— J. Math. Economics, 1981, v. 8, № . p. 147–159.
12. *Gale D., Sobel J.* On Optimal Distribution Output from a Jointly Owned Resource.— J. Math. Economics, 1982, v. 9, № 1/2, p. 51–61.
13. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974.

Поступила в редакцию
26.X.1982

BALANCED STATES IN VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

POLTEROVICH V. M.

The problem of finding a Pareto point which would satisfy additional conditions in the form of equalities is stated. A theorem on existence of a solution is proved. Examples are given.