Quota Variations in an Industrial Fixed Price System

Polterovich, Victor and Spivak, Vladimir

CEMI RAS

1987

УДК 62-505:658.8

ВАРИАЦИИ КВОТ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ С ФИКСИРОВАННЫМИ ЦЕНАМИ

ПОЛТЕРОВИЧ В. М., СПИВАК В. А.

(Москва)

В рамках абстрактной производственной модели получены условия, гарантирующие возможность увеличения чистых выпусков системы. Их использование приводит к существенному упрощению доказательства и некоторому обобщению ряда известных результатов, касающихся модели Э. М. Бравермана с неравновесными ценами. Демонстрируется, что имеющуюся возможность увеличения поставок иногда нельзя обнаружить никакими малыми вариациями квот. Указаны условия, исключающие подобную ситуацию при варьировании квот на выпуски элементов системы.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается вопрос о том, как обнаружить возможность увеличения внешних поставок (чистых выпусков) для производственной системы, управляемой с помощью квот на блага, приобретаемые и продаваемые каждым производственным элементом. Исследование этой проблемы в рамках модели с фиксированными ценами, предложенной в [1], является центральным в работах [2, 3] (см. также [4]). В этих работах введено понятие ненасыщенного элемента, т. е. такого, который способен при определенных вариациях квот окупить дополнительно приобретаемые ресурсы только за счет прироста производимого им товара. Было показано, что для системы ненасыщенных элементов существуют согласованные локальные вариации квот, обеспечивающие увеличение внешних поставок.

Ниже демонстрируется, что этот результат остается справедливым для существенно более общей ситуации. Доказываемая здесь теорема 1 позволяет предложить более общие критерии неэффективности состояний для модели Э. М. Бравермана [1]. В частности, показано, что цены, используемые для обнаружения улучшающих вариаций квот, не обязаны совпадать с ценами, формирующими критерии оптимальности производственных элементов. Полученные в [1—4] важные и довольно сложно доказываемые результаты о существовании квазиравновесия и о возможности увеличения чистых выпусков недефицитных продуктов являются простыми следствиями теоремы 1.

Представляет интерес вопрос о том, в какой мере локальность вариаций ограничивает возможность обнаружить факт неэффективности состояния системы. В статье приведен пример ситуации, когда увеличение внешних поставок осуществимо лишь за счет «больших» вариаций квот. Использование теоремы 1 в сочетании с методами валовой заменимости позволяет показать, что при вариации квот на выпуски и выполнении принятых в [1—4] предположений подобные явления не возникают.

Хотя в настоящей работе исследуются лишь вариации квот, теорема 1 в принципе применима и при исследовании других параметров конкретных моделей, например цен или технологических коэффициентов. Абстрактная модель, для которой доказана теорема 1, допускает, что участники используют нелинейные критерии оптимальности или более сложные правила выбора режима функционирования.

2. Абстрактная производственная модель

Рассмотрим систему, включающую n товаров (ресурсов) и n производственных элементов, каждый из которых характеризуется множеством реализуемых состояний $G_k \subseteq R^n$, $k \in N = \{1, \ldots, n\}$.

Можно считать, что положительным значениям координат z_{ki} вектора $z_k \in G_k$ соответствуют выпуски продукта i элементом k при $k=i$ и затраты – при $k \neq i$. Тогда вектор с компонентами

$$z_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} z_{ki}, \qquad i \in N$$

является вектором чистых выпусков или внешних поставок. Вопрос состоит в том, как обнаружить возможность перехода из начального состояния в другое, близкое к нему, но соответствующее большим значениям поставок всех продуктов. При рассмотрении этого вопроса решающую роль играет предлагаемое ниже обобщение понятия ненасыщенного элемента, введенного в более частной форме в [2, 3].

Фиксируем произвольным образом множество $J \subseteq N$, неотрицательный вектор $p = (p_i) \in R^n$, номер $k \in N$ и состояние $z_k^0 \in G_k$.

Определение 1. Элемент k назовем ненасыщенным в состоянии z_k^0 относительно множества ресурсов J и цен p, если найдутся отрезок $[0, \varepsilon_k]$ и заданное на нем отображение F_k с образами из G_k, удовлетворяющее трем условиям:

a) F_k замкнуто и выпуклозначно;

b) если $v_k = (v_{ki}) \in F_k(0) - z_k^0$, то $v_{ki} \leqslant 0$ $\forall i \neq k$, $i \in J$;

c) если $v_k = (v_{ki}) \in F_k(\alpha_k) - z_k^0$ и $\alpha_k > 0$, то

$$(1) \qquad p_k v_{kk} - \sum_{i \in J \setminus k} p_i \max\{0, v_{ki}\} > 0,$$

где $J \setminus k = \{j | j \in J, j \neq k\}$. В противном случае говорим, что элемент k насыщен.

Здесь через v_{ki} обозначена i-я координата n-мерного вектора v_k.

Проинтерпретируем введенное понятие. Будем считать, что элемент k осуществляет выбор состояния из множества $F_k(\alpha_k) \subset G_k$, которое при $\alpha_k = 0$ задает исходные ограничения на выбор, а при $\alpha_k > 0$ – их вариацию. Исходные ограничения не позволяют затратить продуктов больше, чем расходуется в состоянии z_k^0: согласно условию b) допустимые вариации затрат v_{ki}, $i \neq k$ неположительны. Но вариация, согласно c), дает возможность использовать дополнительные количества ресурсов из множества $J \setminus k$ и окупить их при ценах p только за счет приращения выпуска v_{kk}; экономия затрат при этом не учитывается. Будем называть левую часть (1) модифицированным приращением прибыли. Требование её положительности для рассматриваемого класса вариаций играет особенно важную роль.

Теорема 1. Пусть каждый элемент $k \in J \subseteq N$ ненасыщен в состоянии z_k^0 относительно множества ресурсов J и некоторых цен $p \geqslant 0$ (не зависящих от k), и пусть F_k — отображения, фигурирующие в определении 1. Если G_k ограничены при $k \in J$, то найдутся векторы $v_k^* = (v_{ki}^*) \in R^n$ и числа $\alpha_k^* \in [0, \varepsilon_k]$, $k \in J$, удовлетворяющие условиям

$$z_k^0 + v_k^* \in F_k(\alpha_k^*), \tag{2}$$

$$v_{ii}^* - \sum_{k \in J \setminus i} v_{ki}^* > 0 \quad \forall i \in J.$$

Соотношения (2) означают, что подсистема J может увеличить внешние поставки (чистые выпуски) всех производимых ею продуктов.

Для однозначных отображений F_k сформулированное утверждение нетрудно обосновать, используя теорему 3 из [5] (названную в [6] теоремой о согласованных усилиях). В приложении дано простое доказательство теоремы 1, по идее близкое к приведенному в [5].

Замечание. Если элемент k ненасыщен, то всегда можно считать, что отображение F_k задано на отрезке $[0, \varepsilon_k]$ при сколь угодно малом положительном ε_k. Таким образом, в рамках приведенной выше интерпретации теорема 1 указывает условия, обеспечивающие положительное приращение чистых выпусков

$$\Delta s_i = v_{ii} - \sum_{k \in J \setminus i} v_{ki}, \quad i \in J$$

за счет локальных вариаций параметров. Если $F_k(0) = \{z_k^0\}$ $\forall_k \in J$, то в силу условия а) вариация состояния v^* мала вместе с ε_k.

3. Увеличение чистых выпусков в модели Э. М. Бравермана

Покажем, что некоторые основные результаты из [1—4], доказанные ранее путем весьма длинных рассуждений, носивших независимый друг от друга характер, получаются по единой схеме как простые следствия теоремы 1 и притом в несколько обобщенном виде.

В модели [1] каждый участник k максимизирует прибыль

$$\gamma_k z_{kk} - \sum_{i \in N \setminus k} \gamma_i z_{ki} \to \max \tag{3}$$

при ограничениях

$$z_k = (z_{ki}) \in Z_k, \quad z_k \leqslant w_k, \tag{4}$$

где Z_k — технологическое множество, $\gamma = (\gamma_i)$ — положительный вектор цен, $w_k = (w_{ki})$ — вектор квот, $w_{ki} \in [0, +\infty]$. Пусть $D_k(w_k)$ — совокупность решений задачи (3) — (4). Через R_+^n обозначаем множество неотрицательных n-мерных векторов. В [1—4] введены предположения:

I. Z_k — выпуклый компакт; $Z_k \subseteq R_+^n$, $0 \in Z_k$.

II. Отображение D_k однозначно.

III. Функция $D_k(W_k)$ не убывает по квоте w_{kk} на выпуск продукта k.

IV. Если $w_k > 0$, то $0 \notin D_k(w_k)$.

По мере необходимости эти допущения используются ниже.

При выполнении предположения 1 из системы ограничений (4) можно, не изменяя решения, удалить неравенство $z_{ki} \leqslant w_{ki}$, если компонента w_{ki} достаточно велика. Условимся в этом случае писать: $w_{ki} = +\infty$.

Легко проверить, что из 1 следует выпуклозначность и замкнутость D_k (см., например, лемму 4 в [7]).

Общая схема применения теоремы 1 при рассмотрении вариаций квот состоит в следующем. Пусть w_k^0 — начальное значение квот, множество

$$G_k = \bigcup_{w_k \geqslant 0} D_k(w_k)$$

является совокупностью реализуемых состояний элемента k (в [4] они названы экономически реализуемыми). Рассмотрим отображения $F_k(\alpha_k) = = D_k(W_k(\alpha_k))$, где W_k: $[0, \varepsilon_k] \to 2^{R+n}$, $w_k^0 \in W_k(0)$. Отображение W_k задает вариацию квот, а F_k — соответствующую реакцию элемента k. Будем считать, что $z_k^0 \in D_k(w_k^0)$. Если F_k удовлетворяют условиям а) — с) определения 1, то теорема 1 применима.

Очевидно, условие а) следует из I, если W_k однозначно и непрерывно. Выполнение а) обеспечено, если $W_k(0) = \{w_k^0\}$ и имеет место II или $w_{ki}^0 = = z_{ki}^0$ $\forall i \neq k$. Действительная трудность состоит в обеспечении условия с).

Естественно использовать отображения вида

$$F_k(\alpha_k) = D_k(w_k^0 + \alpha_k h_k), \quad \alpha_k \in [0, \varepsilon_k], \quad \varepsilon_k > 0, \tag{5}$$

где h_k — какой-либо неотрицательный вектор.

В [3] предложен другой способ вариации задач участников. Именно, пусть $K \subseteq N$ и $z_k^0 \in D_k(w_k^0)$, причем

$$w_{ki}^0 = z_{ki}^0, \quad \text{если } i \in K, \quad i \neq k;$$

$$w_{ki}^0 = \infty \text{ при } i \notin K \text{ и при } i = k.$$

Фиксируем $T_k \subseteq K$, где $k \notin T_k$ и рассмотрим задачу максимизации функции (3) при $z_k \in Z_k$ и ограничениях

$$z_{ki} \leqslant w_{ki}^0, \ i \in K \setminus T_k, \tag{6}$$

$$\sum_{i \in T_k} \gamma_i \max\{0, z_{ki} - z_{ki}^0\} \leqslant \alpha_k, \tag{7}$$

где $\alpha_k \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Пусть $H_k(\alpha_k)$ — множество ее решений. Ясно, что $H_k(\alpha_k) \subseteq G_k = Z_k$. Предполагается, что существует непрерывная на $[0, \varepsilon]$ функция $\psi_k(\alpha_k)$, положительная при $\alpha_k > 0$ и удовлетворяющая соотношению

$$F_k(\alpha_k) = H_k(\alpha_k) \cap \{z_k = (z_{ki}) \mid \gamma_k(z_{kk} - z_{kk}^0) \geqslant \alpha_k + \psi_k(\alpha_k)\} \neq \varnothing \tag{8}$$

для любого $\alpha_k \in [0, \varepsilon]$. Пусть множество $J \subseteq K$ содержит T_k для всех $k \in J$. В силу (6) — (8) и предположения I для любого элемента из J выполнены требования а) — с). Отметим, что в (7), (8) вместо $\gamma = (\gamma_i)$ можно использовать любой положительный вектор цен.

Укажем некоторые следствия теоремы 1.

А. Существование квазиравновесия.

Рассмотрим F_k вида (5), и пусть $z_k^0 = 0$; $w_{kk}^0 = 0$, $w_{ki}^0 = +\infty$ $\forall i \neq k$; $h_{ki} = 0$ $\forall k \neq i$, $0 < h_{kk} < \infty$.

Из предположений I, IV легко следуют свойства а) — с) для F_k при $J = N$, $p = \gamma$. По теореме 1 существует состояние с положительными чистыми выпусками, которое поддерживается только квотами на выпуск. Это состояние по терминологии [1—4] является квазиравновесием. Существование квазиравновесия было доказано в [1] с использованием предположений I—IV; в [8] предположения II, III были отброшены, но доказательство основывалось на другой идее.

B. При выполнении условий I—III поставки недефицитных продуктов всегда можно увеличить без уменьшения поставок остальных ресурсов. Этот результат получен в [3], его полное доказательство, приведенное в [4], довольно громоздко. Покажем, что он легко выводится из теоремы 1.

Для этого сформулируем лемму 1, которая является прямым следствием теоремы 1. Нам будет удобно воспользоваться этой леммой и в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть в производственной системе элементы, составляющие множество J, удовлетворяют условиям I—III, и максимальное значение прибыли в каждой из задач (3) — (4) при $k \in J$ может быть увеличено за счет какого-либо приращения квоты на выпуск. Тогда для этих элементов найдутся положительные приращения квот на выпуски, меньшие любого наперед заданного числа, обеспечивающие прирост внешних поставок всех продуктов из J. (При этом все остальные квоты не изменяются).

Рассмотрим отображения F_k, $k \in J$ вида (5), положив $h_{ki}=0$ при $i \neq k$; $0 < h_{kk} < \infty$. Чтобы убедиться в справедливости леммы, достаточно заметить относительно отображений F_k следующее. Условие I обеспечивает выполнение свойства а) определения 1 и вогнутость максимальной прибыли как функции квот. Поэтому из условия леммы следует, что с увеличением квот на выпуск приращение прибыли элемента будет положительным, а в силу III оно не больше модифицированного приращения (1) при $p=\gamma$ и любом J, т. е. свойство с) имеет место. Условие однозначности II влечет за собой b). Значит, применима теорема 1, из которой следует утверждение леммы.

Напомним, что продукт i называется недефицитным в состоянии $z^0 = \{z_k^0\}_{k=1}^n$, $z_k^0 \in D_k(w_k^0)$, если ограничения на его потребление отсутствуют (т. е. $w_{ki}^0 = \infty$ $\forall k \neq i$), а квота w_{ii}^0 равна z_{ii}^0 и сдерживает рост прибыли производителя i. При этом если J — множество недефицитных благ, то $w_{ki}^0 = z_{ki}^0$ для $i \notin J$, $k \neq i$.

Увеличение поставок недефицитных продуктов в силу леммы 1 возможно за счет вариаций лишь квот на выпуски этих продуктов. Учитывая ограничения на потребление благ из множества $N \backslash J$, убеждаемся, что их чистые выпуски не уменьшатся.

C. Пусть выполнены условия I—III, все продукты из J дефицитны и в состоянии $z^0 = \{z_k^0\}_1^n$ все элементы из J ненасыщены относительно множества ресурсов J и одних и тех же цен. Пусть при этом $F_k(0) = \{z_k^0\}$ $\forall k \in J$. Тогда существует состояние z^*, в котором все чистые выпуски не меньше, чем в z^0, а для продуктов из J и для недефицитных благ — больше, чем в z^0.

Этот результат получен в [2, 3] для частных случаев ненасыщенности: в [2] рассматривались F_k типа (5), а в [3] — типа (8). Ее доказательство проводится по следующему плану. Сначала, используя B, увеличим поставки недефицитных благ за счет вариаций квот на их выпуски так, чтобы при этом чистые выпуски дефицитных благ не уменьшились. Затем, используя теорему 1, осуществим увеличение вовне поставок продуктов $k \in J$ за счет достаточно малых вариаций параметров α_k, $k \in J$. При этом чистые выпуски недефицитных продуктов могут уменьшиться незначительно, так что результатом двух этапов будет их увеличение (см. замечание к теореме 1).

Примеры показывают, что по увеличению прибыли элементов, вообще говоря, нельзя судить о возможности наращивания чистых выпусков; не случайно в условии с) определения 1 фигурирует модифицированный прирост прибыли, не учитывающий экономию ресурсов. Цены p, в которых исчисляется модифицированный прирост, не обязаны совпадать с заданными ценами γ. Это обстоятельство существенно расширяет сферу приложения теоремы 1.

Следует, однако, иметь в виду, что теорема 1 дает лишь достаточные условия возможности увеличения внешних поставок. Если она применима, то всегда можно ограничиться сколь угодно малыми вариациями квот. Между тем, существуют примеры, в которых имеющуюся возможность увеличения чистого выпуска какого-либо продукта нельзя обнаружить путем локальных вариаций.

Пусть задача первого участника имеет вид:

$$z_{11}-z_{12}-z_{13}\rightarrow\max,$$

$$z_{11}\leqslant x'+x'',\quad z_{12}\geqslant z_{12}'+z_{12}'',\quad z_{13}\geqslant z_{13}'+z_{13}'',$$

$$x'\leqslant 6z_{12}'+2z_{13}',\quad x'\leqslant 12,\quad x''\leqslant 3\min\{z_{12}'',z_{13}''\},$$

$$z_{12}\leqslant w_{12},\quad z_{13}\leqslant w_{13}$$

(все переменные предполагаются неотрицательными), а подсистема из двух других участников не использует продукцию первого вовсе, но может значительно наращивать чистые выпуски второго и третьего ресурсов. Пусть начальные значения квот таковы: $w_{12}^0=1$, $w_{13}^0=3$. Тогда оптимум имеет место при $z_{11}=x'=12$, $z_{12}=z_{12}'=1$, $z_{13}=z_{13}'=3$, $x''=z_{12}''=z_{13}''=0$.

Описанный производственный элемент имеет два технологических процесса: первый выпускает продукт 1 в количестве x', а второй процесс — в количестве x''. При квотах w_1^0 задействован лишь первый процесс. Можно показать, что при любых малых вариациях квот увеличение выпуска не происходит. В частности, увеличение одной квоты на третий ресурс в данном случае бесполезно. Если увеличивается квота на второй ресурс или обе, то происходит замещение третьего ресурса на второй в первом технологическом процессе. При этом величина выпуска первого продукта остается равной 12. И лишь при $w_{12}>2$ оказывается выгодным «включить» второй процесс, после чего и начинается рост выпуска.

Малые вариации квот оказываются бесполезными, хотя при $w_{12}=2+$ $+w_{13}$, $w_{13}>0$ первый продукт выпускается в большем количестве, чем в начальном состоянии, и, значит, наращивание чистых выпусков системы возможно.

Иногда с помощью локальных вариаций квот нельзя увеличить чистый выпуск ни одного из продуктов без уменьшения внешних поставок какого-либо другого, хотя подходящие «большие» изменения квот обеспечивают прирост чистых выпусков сразу всех продуктов. Можно проверить, что такая ситуация возникает, если в системе задача первого участника совпадает с описанной выше, второй участник производит три единицы второго ресурса из каждой единицы первого, третий участник выпускает три единицы третьего ресурса из единицы второго, а квота каждого из двух последних участников на используемый им ресурс равна единице.

Эти примеры выявляют трудности, лежащие на пути более полного исследования проблемы.

4. Локальные вариации квот на выпуск и валовая заменимость

Фиксируем квоты на ресурсы на произвольных значениях w_{ki}, $i\neq k$, и будем варьировать лишь квоты $w_{kk}=y_k$ на выпуски, $y_k\in R_+{}^1$.

Пусть выполнены предположения I—III, указанные в предыдущем разделе. Тогда решение $D_k(y_k)$ задачи (3)—(4) является непрерывной неубывающей вектор-функцией.

Будем говорить, что состояние системы, определяемое вектором $y=(y_k)$, улучшаемо за счет вариаций квот на выпуски, если найдется набор квот $y'=(y_k')$, такой, при котором чистые выпуски системы для всех продуктов не меньше и хотя бы для одного больше, чем при y. Ниже будет показано, что если состояние улучшаемо в указанном смысле, то оно улучшаемо также за счет сколь угодно малых вариаций квот на выпуски, и, таким образом, ситуации, подобные той, которая продемонстрирована приведенным выше примером, в данном случае невозможны. Доказательство основано на использовании теоремы 1 в сочетании с методами теории валовой заменимости [9].

Введем отображение $C:R_+{}^n\to R^n$, сопоставляющее каждому вектору квот $y=(y_k)\in R_+{}^n$ вектор $C(y)=(c_k(y))\in R^n$ чистых выпусков системы, взятых с обратным знаком:

$$c_k(y)=-z_{kk}(y_k)+\sum_{j\in N\setminus k} z_{jk}(y_j).$$

Поскольку каждая вектор-функция $D_k(y_k)=(z_{ki}(y_k))$ не убывает по y_k, то однозначное отображение C обладает свойством валовой заменимости [9], т. е.

(9) $\qquad c_k(y)$ не убывает по y_j для любых k, j, $k\neq j$.

Кроме того, отображение C непрерывно и удовлетворяет следующему условию:

(10) $\qquad$ для любых векторов y, y', таких, что $y\leqslant y'$,

$C(y\leqslant C(y')$, выполняется равенство $C(y)=C(y')$.

Утверждение (10) следует из того, что для $y\leqslant y'$

$$\sum_{k\in N}\gamma_k(c_k(y)-c_k(y'))\geqslant 0$$

как приращение суммарной прибыли системы при увеличении квот y до уровня y'.

Свойства (9), (10) позволяют использовать методы, применяемые при анализе систем с валовой заменимостью.

Если состояние системы, определяемое вектором квот y, может при сделанных предположениях быть улучшено, то существуют квоты y', такие, что

$$C(y')\leqslant C(y),\quad C(y')\neq C(y).$$

Если $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in R^n$, то через $\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$ обозначим n-мерные векторы, i-е координаты которых равны $\max\{x_i, y_i\}$, $\min\{x_i, y_i\}$ соответственно.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения I—III и $C(y')\leqslant C(y)$. Тогда $y_k'>y_k$ при $c_k(y')<c_k(y)$, а $C(y')=C(\bar{y})$, $C(y)=C(\underline{y})$, где $\bar{y}=\max\{y, y'\}$, $\underline{y}=\min\{y, y'\}$.

Для положительных векторов y, y' это утверждение непосредственно следует из теоремы 4.2 работы [9], если ее применить к отображениям $\bar{C}(y)=C(y)-C(y')$ и $\bar{\bar{C}}(y')=C(y')-C(y)$. В приложении приведено доказательство, приемлемое для любых неотрицательных векторов y, y'.

Согласно лемме 2 при улучшении состояния системы достижение более высокого уровня внешних поставок некоторого продукта k возможно лишь при увеличении квоты на выпуск этого продукта. При этом улучшение состояния может быть произведено без уменьшения какой-либо квоты.

Лемма 2 позволяет воспользоваться следствием теоремы 1 (леммой 1) для доказательства следующего утверждения.

Теорема 2. Если при выполнении условий I—III некоторое состояние системы улучшаемо за счет вариаций квот на выпуски, то оно улучшаемо и за счет сколь угодно малых вариаций этих квот.

Доказательство теоремы 2 дано в приложении.

В заключение отметим еще один важный факт, который довольно просто выводится из леммы 2 и теоремы 1 (см. доказательство в приложении).

Теорема 3. Пусть выполнены предположения I—III и $C(y)\geqslant C(y')$, $0\leqslant\leqslant y\leqslant y'$. Тогда для любого вектора b, такого, что

$$C(y)\geqslant b\geqslant C(y'),$$

найдется вектор y^*, для которого выполняются соотношения

$$C(y^*)=b, \quad y\leqslant y^*\leqslant y'.$$

Теорема 7.5 из [4] весьма близка по содержанию к теореме 3 и легко получается из нее в качестве следствия при $y=0$, если учесть замечание 2.2 в [4, с. 70] и то, что $C(0)=0$. Они указывают на возможность «подстройки» производственной системы к экзогенному спросу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть B_k — замыкание выпуклой оболочки множества G_k,

$$V=\prod_{k\in J}(B_k-z_k^0).$$

Для любого набора $v=\{v_k\}_{k\in J}$ из V рассмотрим задачу

$$\text{(П.1)} \qquad \sum_{k\in J}\alpha_k\varphi_k(v_k)\to\min,$$

$$\text{(П.2)} \qquad \sum_{k\in J}\alpha_k=\mathrm{e}, \quad \alpha_k\geqslant 0, \quad k\in J,$$

где $\quad \varphi_i(v_i)=v_{ii}-\sum_{k\in J\setminus i}\max\{0,v_{ki}\}, \quad v_k=(v_{ki}).$

Пусть $\Lambda(v)$ — совокупность ее решений и S — множество наборов $\alpha=\{\alpha_k\}_{k\in J}$, удовлетворяющих (П.2). Отображение

$$\Lambda(v)\times\prod_{k\in J}(F_k(\alpha_k)-z_k^0),$$

заданное на множестве $S\times V$, удовлетворяет в силу условий а)—с) определения 1 теореме Какутани [10] и, следовательно, имеет неподвижную точку $(\alpha^*=\{\alpha_k^*\}_{k\in J}$, $v^*=\{v_k^*\}_{k\in J})$.

Тогда, очевидно, $z_k^*=z_k^0+v_k^*\in F_k(\alpha_k^*)$, а набор чисел α^* является решением задачи (П.1)—(П.2) при $v=v^*$.

Введем обозначения: $A=\{k|k\in J,\ \alpha_k^*>0\}$. Суммируя неравенства (1) и учитывая условие b), получим после группировки членов

$$0<\sum_{k\in A} p_k v_{kk}^* - \sum_{k\in A}\sum_{i\in J\setminus k} p_i \max\{0, v_{ki}^*\} = \sum_{i\in A} p_i v_{ii}^* -$$

$$-\sum_{i\in J}\sum_{k\in A\setminus i} p_i \max\{0, v_{ki}^*\} \leqslant \sum_{i\in A} p_i \varphi_i(v_i^*).$$

Следовательно, найдется номер r, такой, что $\alpha_r^*>0$, $\varphi_r(v_r^*)>0$. Но это возможно лишь в том случае, когда $\varphi_i(v_i^*)>0$ $\forall i\in J$, так как иначе набор α^* не был бы решением задачи (П.1) – (П.2). Значит, и подавно выполнены требуемые неравенства (2).

Доказательство леммы 2. Из свойства (9) следует, что

(П.3) $$c_k(\bar{y})\geqslant c_k(y)\geqslant c_k(y')\geqslant c_k(\bar{\bar{y}}),\quad k\in I=\{i|y_i\geqslant y_i'\},$$

(П.4) $$c_k(\bar{y})\geqslant c_k(y'),\quad c_k(y)\geqslant c_k(\bar{\bar{y}}),\quad k\notin I.$$

Поэтому $C(\bar{y})\geqslant C(y')$, $C(y)\geqslant C(\bar{\bar{y}})$. Так как при этом $\bar{y}\geqslant y'$, $y\geqslant\bar{\bar{y}}$, то в силу свойства (10) $C(\bar{y})=C(y')$, $C(y)=C(y)$. С учетом неравенств (П.3) это означает, что $k\notin I$ при $c_k(y')<c_k(y)$, т. е. в этом случае $y_k<y_k'$. Лемма 2 доказана.

При доказательстве теорем 2 и 3 удобно использовать прямое следствие леммы 2. Чтобы сформулировать его, обозначим через $\pi_k(y_k)$ максимальное значение прибыли в задаче (3) – (4) при квоте на выпуск $w_{kk}=y_k$ и остальных квотах, фиксированных на выбранных значениях.

Следствие 1. В предположениях I–III при $C(y')\leqslant C(y)$ из неравенств $c_k(y')<<c_k(y)$ следует, что $\pi_k(y_k')>\pi_k(y_k)$.

Действительно, в соответствии с леммой 2 $y_k'>y_k$ и, следовательно, $\pi_k(y_k')\geqslant\geqslant\pi_k(y_k)$. Если бы выполнялось равенство $\pi_k(y_k')=\pi_k(y_k)$, то в силу условия однозначности II можно было бы, не изменяя значения отображения C, заменить в векторе y' координату y_k' на y_k. Это противоречило бы лемме 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть улучшаемое состояние определяется квотами $y=(y_k)$. Тогда существует вектор $y'=(y_k')$, такой, что $C(y)\geqslant C(y')$, $C(y)\neq C(y')$. В силу леммы 2 можно считать, что $y'\geqslant y$. В соответствии со следствием 1

$$J=\{k|\pi_k(y_k')>\pi_k(y_k)\}\neq\phi.$$

Очевидно, что $y_k'\neq y_k$ для $k\in J$. Применяя лемму 1 к множеству J, находим, что в любой окрестности вектора y существует вектор квот y^*, такой, что

$$y\leqslant y^*\leqslant y',\ c_k(y^*)<c_k(y),\ k\in J.$$

Так как $\pi_k(y_k')\geqslant\pi_k(y_k)$ для любого k, то $\pi_k(y_k')=\pi_k(y_k)$ при $k\notin J$. Ввиду условия однозначности II можно без ограничения общности считать, что вектор y' выбран так, что $y_k'=y_k$ при $\pi_k(y_k')=\pi_k(y_k)$, и, значит, $y_k^*=y_k'$ для $k\notin J$. Поэтому из свойства валовой заменимости (9) следует

$$c_k(y^*)\leqslant c_k(y')\leqslant c_k(y),\ k\notin J.$$

Таким образом, $C(y^*)\leqslant C(y)$, $C(y^*)\neq C(y)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Существует вектор y^*, принадлежащий компакту

$$Q=\{r|y\leqslant r\leqslant y',\ C(r)\geqslant b\},$$

такой, что

(П.5) $$\gamma C(y^*)\leqslant\gamma C(r),\ r\in Q,$$

где γ – вектор цен в задачах (3) – (4). Очевидно, что $C(y^*)\geqslant b\geqslant C(y')$.

Предположим, что $C(y^*)\neq b$. Тогда множество

$$J=\{k|c_k(y^*)>b_k\geqslant c_k(y')\}$$

не пусто и в соответствии с леммой 2 $y_k^*<y_k'$ для $k\in J$. Ввиду следствия 1 к J применима лемма 1, из которой с учетом непрерывности отображения C заключаем, что существует вектор $\tilde{y}$, такой, что

$$y^*\leqslant\tilde{y}\leqslant y',\ \tilde{y}_k=y_k^*,\ k\notin J;\ c_k(y^*)>c_k(\tilde{y})>b_k,\ k\in J.$$

При этом в силу валовой заменимости (9) $c_k(\tilde{y}) \geqslant c_k(y^*) = b_k$ при $k \neq J$. Таким образом, $\tilde{y} \in Q$.

Так как $y^* \leqslant \tilde{y}$, а значит, и $\pi_k(y_k^*) \leqslant \pi_k(\tilde{y}_k)$ для всех k, то

$$\gamma C(\tilde{y}) = -\sum_{k \in N} \pi_k(\tilde{y}_k) \leqslant -\sum_{k \in N} \pi_k(y_k^*) = \gamma C(y^*).$$

Это неравенство с учетом (П.5) может выполняться лишь как равенство. Поэтому $\pi_k(y_k^*) = \pi_k(\tilde{y}_k)$ для всех k. Поскольку $y^* \leqslant y$, то в силу условия однозначности II $C(y^*) = C(\tilde{y})$. Но $C(y^*) \neq C(\tilde{y})$. Противоречие доказывает, что $C(y^*) = b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Браверман Э. М.* Модель производства с неравновесными ценами // Экономика и мат. методы. 1972. Т. VIII. Вып. 2. С. 175–190.
2. *Браверман Э. М., Левин М. И.* Эффективные состояния сети производственных элементов // Экономика и мат. методы. 1974. Т. X. Вып. 4. Т. 757–765.
3. *Браверман Э. М., Левин М. И.* Идентификация эффективных состояний сетей производственных элементов. I // АиТ. 1978. № 6. С. 67–82.
4. *Браверман Э. М., Левин М. И.* Неравновесные модели экономических систем. М.: Наука, 1981.
5. *Karamardian S.* Existence of solution of certein systems of non-linear inequalities // Numerische Math. 1968. Bd. 12. № 4. P. 327–335.
6. *Малишевский А. В.* Натуральные системы // АиТ. 1973. № 11. С. 42–57.
7. *Полтерович В. М.* Экономическое равновесие при гибкой схеме рационирования // Кибернетика. 1986. № 1. С. 109–115.
8. *Полтерович В. М.* Рационирование ресурсов и вторичное равновесие // Экономика и мат. методы. 1982. Т. XVIII. Вып. 4. С. 684–698.
9. *Полтерович В. М., Спивак В. А.* Отображения с валовой заменимостью в теории экономического равновесия // Современные проблемы математики. Т. 19 (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ, 1981. С. 111–154.
10. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
24.IV.1986

QUOTA VARIATIONS IN AN INDUSTRIAL FIXED PRICE SUSTEM

POLTEROVICH V. M., SPIVAK V. A.

An abstract model of an industrial process provides conditions which make it possible to increase the net outputs and lead to a significant simplification of the proof and an extension of numerous results which follow from Braverman's model with nonequilibrated prices. The actual possibility to increase the deliveries cannot be detected by quota variations no matter how small. Conditions are provided under which this situation is eliminated in varying the quotas on system element outputs.