Uncertainty: lotteries and risk

Eloy Ávalos

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Instituto de Estudios Sociales del Rímac

29. May 2011

CIEC

Centro de Investigaciones Económicas

Documento de Trabajo Nº 18

Incertidumbre: Loterías y Riesgo

por

Eloy Ávalos

Mayo 29, 2011

Instituto de Estudios Sociales del Rímac
Lima, Perú

INCERTIDUMBRE: LOTERÍAS Y RIESGO

Eloy ÁVALOS[1]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos e IESR

Primera versión: Mayo 2011

Resumen

En este documento desarrollamos la teoría de la incertidumbre bajo un contexto donde los riesgos que corre el individuo son medibles y soportables. Utilizaremos fundamentalmente la idea de loterías para formular los axiomas de las preferencias del consumidor, y su representación a través de la función de utilidad von Neumann – Morgenstern. Estudiaremos el teorema de la utilidad esperada y sus propiedades, las paradojas de elección bajo incertidumbre y finalmente las medidas de aversión al riesgo a la luz de las loterías monetarias.

Número de Clasificación JEL: D80, D81.
Palabras claves: Incertidumbre, riesgo, lotería simple, lotería compuesta, utilidad esperada, paradoja de San Petersburgo, paradoja de Allais, paradoja de Ellsberg, prima de riesgo, aversión al riesgo.

Abstract

In this paper we develop the theory of uncertainty in a context where the risks assumed by the individual are measurable and manageable. We primarily use the definition of lottery to formulate the axioms of the individual's preferences, and its representation through the utility function von Neumann - Morgenstern. We study the expected utility theorem and its properties, the paradoxes of choice under uncertainty and finally the measures of risk aversion with monetary lotteries.

Classification Number JEL: D80, D81.
Keys Words: Uncertainty, risk, single lottery, compound lottery, expected utility, St. Petersburg paradox, Allais paradox, Ellsberg paradox, risk premium, risk aversion.

[1] Contacto: Departamento de Economía, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima 01, Teléfono 619-7000, Anexo 2210; y Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac, Pueblo Libre. Email: eavalosa@unmsm.edu.pe.

1. DEFINICIONES: INCERTIDUMBRE Y RIESGO

La definición de incertidumbre, en el campo de la ciencia económica, ha llamado la atención de muchos economistas. Así, Frank Knight[2] sostiene que incertidumbre es aquella situación donde el individuo o agente enfrenta sucesos de los que él desconoce su distribución de probabilidades de ocurrencia. Por otro lado, Nicholas Georgescu – Roegen,[3] precisa, y sostiene que una situación de incertidumbre es aquella donde el "mecanismo" de generación de sucesos o eventualidades es desconocido por parte del agente.

Ambas definiciones no son correctas, aquí seguiremos el planteamiento de Kenneth Arrow.[4] Entenderemos por incertidumbre a aquella situación donde el individuo tiene frente a sí, resultados futuros estocásticos como consecuencia de una acción (elección) realizada en el presente. Es decir, bajo un contexto de incertidumbre, el individuo carece de información acerca de cuál será el resultado futuro efectivo de su elección.[5]

Asimismo, el contexto de incertidumbre puede presentar diferentes grados de incertidumbre, según el "nivel" de información que dispone el individuo acerca de los resultados futuros probables. A continuación exponemos algunos ejemplos sencillos de incertidumbre,

- El consumidor enfrenta un contexto de incertidumbre cuando compra un artefacto eléctrico, ya que desconoce el tiempo de vida o la calidad del artefacto, por lo que en un futuro determinado podría tener el artefacto aún en buenas condiciones, con desperfectos o totalmente inoperativo.
- El individuo enfrenta un contexto de incertidumbre cuando toma la decisión de contraer matrimonio, ya que como consecuencia de esa decisión, el individuo en el futuro puede seguir estando casado, separado, divorciado o viudo.

---

2 Ver KNIGHT (1921).
3 Ver GEORGESCU – ROEGEN (1967).
4 Ver ARROW (1984).
5 Al respecto: "*Incertidumbre es un contexto donde la información que tiene el individuo sobre las consecuencias futuras de una acción tomada hoy es inexistente o incompleta*". Ver FIGUEROA (1993: p. 28).

En cuanto al riesgo, éste existe si el individuo opera bajo un contexto de incertidumbre, ya que bajo esta situación, el individuo es propenso a sufrir pérdidas. Al respecto:

> "*Riesgo económico es el peligro de una pérdida económica que pueda sufrir el individuo como consecuencia de tomar decisiones bajo un contexto de incertidumbre.*"[6]

Así, cuando un inversionista tiene que decidir entre invertir en el proyecto A o en el proyecto B, dado que desconoce cuáles podrían ser los retornos futuros, corre el "riesgo" de perder parte o todo el monto de su inversión.

Entonces, una situación de riesgo puede conllevar a pérdidas para el individuo. Pero estas pérdidas pueden ser soportables como no soportables. En el primer caso, el individuo puede tener cierto nivel de riqueza tal que le permita absorber las pérdidas obtenidas; y en el segundo caso, las pérdidas pueden ser de tal magnitud que el individuo sufriría un "desastre" económico. Su nivel de riqueza no le permitiría absorber estas pérdidas. Por tanto, tendríamos un riesgo soportable y un riesgo no soportable. Un ejemplo del primer caso es cuando alguien juega una lotería de "resultado futbolístico", y del segundo cuando buena parte de la riqueza está expuesta a daños irreparables, como una vivienda expuesta a un incendio.

Por otro lado, una situación de riesgo implica que el individuo decisor debe evaluar los sucesos posibles. Podemos tener que el individuo conoce el mecanismo generador de los sucesos posibles, por lo que tiene *a priori* un conocimiento de la distribución de probabilidades. En ese caso, el riesgo puede ser medible. Luego, si el individuo está expuesto a una situación de incertidumbre, donde él desconoce el mecanismo generador de los sucesos posibles, entonces no puede conocer la distribución de probabilidades, por lo que el riesgo es no medible. Un ejemplo de riesgo medible, sería apostar un juego donde las pérdidas están condicionadas por los resultados posibles del lanzamiento de una moneda o de un dado al aire. Un riesgo no medible, sería el riesgo que corren las

---

6 FIGUEROA (*Ob. Cit.*: p. 38).

inversiones de un agricultor frente a un clima cambiante o desastres naturales, como las inundaciones.[7]

Esta clasificación de riesgos, determina diferentes contextos de incertidumbres, y puede sintetizarse en la siguiente tabla, aquí que sigue la expuesta por Figueroa,[8]

Riesgos y contextos de incertidumbre

		Pérdidas	
		Simples	Desastrosas
Distribución de probabilidad	Conocido	Riesgo medible y soportable	Riesgo medible y no soportable
	Desconocido	Riesgo no medible y soportable	Riesgo no medible y no soportable

A continuación desarrollaremos la teoría de la incertidumbre donde los riesgos son medibles y soportables (área sombreada).

2. LA TEORÍA DE LA INCERTIDUMBRE CON RIESGO MEDIBLE Y SOPORTABLE

Como hemos definido, la incertidumbre implica un contexto donde el individuo debe decidir o realizar alguna acción en el presente pero cuyas consecuencias posibles son futuras y el desconoce cuál de ellas se hará efectiva. Es decir, el estudio de la incertidumbre implica, analíticamente, la existencia de dos periodos, uno en el que se decide elegir o realizar una acción y otro donde se hará efectivo uno de los resultados posibles. Así, bajo incertidumbre existe una variable aleatoria que determina la obtención de un resultado u otro.

Por otro lado, la incertidumbre implica la falta de información acerca de las consecuencias o resultados, más no sobre la distribución de probabilidades de los sucesos

7 El desconocimiento del mecanismo generador de eventos no es la única razón por la que el individuo puede desconocer la distribución de probabilidad de los sucesos posibles, también puede deberse a que él está imposibilitado de calcular la distribución de probabilidades a pesar de tener cierta información pasada de los sucesos. Ver FIGUEROA (*Ídem*.: p. 40).

8 Ver FIGUEROA (*Ídem*.: p. 41).

posibles. Es decir, aquí supondremos que el individuo conoce la distribución de probabilidades. [9]

2.1 Estados del mundo

Ahora, en todo contexto de incertidumbre existen "estados del mundo, que son independientes de la voluntad del individuo.[10] Así, se tiene el conjunto de estados del mundo,

$$\mathbb{S} = \{e_1, e_2, \ldots, e_s, \ldots, e_S\}$$

Los resultados contingentes de una determinada decisión (o acción) están condicionados por el conjunto $\mathbb{S}$. Además, dado que cada estado del mundo es posible de realizarse, significa que el conjunto $\mathbb{S}$ tiene un carácter estocástico. Así, se tiene un vector de probabilidades $\mathbf{r} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s, \ldots, \rho_S)$; donde $1 \geq \rho_s \geq 0$.

Axioma de los estados del mundo

i. $\mathbb{S}$ es un conjunto bien definido, exhaustivo y mutuamente excluyente.[11]

ii. El individuo atribuye una distribución de probabilidad al conjunto $\mathbb{S}$, la cual está determinada por el por el azar (la naturaleza).

iii. El individuo diferencia los S estados del mundo y sabe finalmente cuál de ellos se hace efectivo.

Así, de acuerdo a este axioma, los estados del mundo cumplen las propiedades básicas de la teoría de la probabilidades; por lo que,

---

9 Al respecto: "*The approach here does not allow for the psychological sensations of vagueness or confusion that people often suffer in facing situations with uncertain (risky) outcomes. In our model neither vague nor confused. While recognizing that his knowledge is imperfect, so that he cannot be sure which state of the world will occur, he nevertheless can assign exact numerical probabilities representing his degree of belief as to the likelihood of each posible state.*" Ver HIRSHLEIFER y RILEY (1992: p. 7 – 8).

10 Estos estados del mundo, también se les llamará indistintamente, como ocurrencias, escenarios o sucesos posibles.

11 Exhaustivo por que el conjunto $\mathbb{S}$ contiene todos los estados del mundo que podrían darse para el futuro, dada la acción realizada por el individuo. Y es mutuamente excluyente, porque en el futuro no podrían hacerse efectivo dos o más estados del mundo a la vez.

- $p[e_s \cup e_t] = \rho_s + \rho_t$, $\forall s,t = 1,\dots,S$; $s \neq t$.
- $p[e_s \cap e_t] = 0$, $\forall s,t = 1,\dots,S$; $s \neq t$.
- $\sum_{s=1}^{S} \rho_s = 1$

Entonces, dado el conjunto $\mathbb{S}$, se tiene una función de resultados posibles $f: X \times \Psi \rightarrow Z$; donde X es el conjunto de alternativas o acciones que el individuo puede emprender el momento $t=0$,[12] Ψ es el conjunto de variables aleatorias y Z es el conjunto de resultados posibles que se obtendría en el momento futuro $t=q$. [13]

Luego, podemos definir el conjunto de resultados posibles, dado el conjunto X bajo incertidumbre, como el conjunto Z, tal que,

$$Z = \bigcup_{s \in \mathbb{S}} \mathbf{z}^s = \bigcup_{k \in X} \mathbf{z}_k$$

2.2 La tabla de contingencia

A continuación representamos esta situación de incertidumbre, con riesgo medible y soportable, en una tabla de doble entrada, llamada tabla de contingencia.

		Estados del mundo					
		e_1 (ρ_1)	e_2 (ρ_2)	$\dots$ $\dots$	e_s (ρ_s)	$\dots$	e_S (ρ_S)
Alternativas	x_1	z_1^1	z_1^2	$\dots$	z_1^s	$\dots$	z_1^S
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	x_k	z_k^1	z_k^2	$\dots$	z_k^s	$\dots$	z_k^S
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	x_n	z_n^1	z_n^2	$\dots$	z_n^s	$\dots$	z_n^S

12 Llamado momento presente.

13 Siendo este momento llamado momento futuro respecto al momento en que el individuo realiza la acción o toma la decisión de elegir cierta alternativa. Por tanto, la dimensión temporal bajo análisis estará denotada por el intervalo $[0,q]$.

De donde, los conjunto definidos líneas arriba, quedan respectivamente definidos por extensión como,

- El conjunto de estados del mundo o de eventualidades,

  $\mathbb{S}=\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_S\}$

- El conjunto de alternativas o acciones disponibles,[14]

  $X=\{x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n\}$

- El vector de la distribución de probabilidades

  $\mathbf{r}=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_s,\ldots,\rho_S)$

- Los conjuntos de resultados posibles, según cada estado del mundo o según cada alternativa elegida,

  $\mathbf{z}^s=\left(z_1^s,z_2^s,\ldots,z_k^s,\ldots,z_n^s\right)$ y $\mathbf{z}_k=\left(z_k^1,z_k^2,\ldots,z_k^s,\ldots,z_k^S\right)$, $\forall k=1,\ldots,n \wedge \forall s=1,\ldots,S$.

- El conjunto de todos los resultados posibles, dado $\mathbb{S}$ y dado X,

  $Z=\left\{z_1^1,\ldots,z_1^s,\ldots,z_1^S,z_2^1,\ldots,z_2^s,\ldots,z_2^S,\ldots,z_k^1,\ldots,z_k^s,\ldots,z_k^S,\ldots,z_n^1,\ldots,z_n^s,\ldots,z_n^S\right\}$

Por ejemplo, la decisión de contraer matrimonio implica un contexto de incertidumbre, ya que el resultado posible de esta decisión dependerá de qué estado del mundo se tenga en el futuro.[15] Así, tenemos,

$$\mathbb{S}=\{\text{casado, separado, divorciado, viudo}\}$$

Entonces, la tabla de contingencia que corresponde a esta situación de incertidumbre estará dada por,

[14] A este nivel de análisis este conjunto puede identificarse con el espacio n – dimensional, si los resultados son canastas de bienes, o simplemente con el conjunto de número reales, en el caso de que se tratasen de resultados monetarios por ejemplo.

[15] La distribución de probabilidades, por ejemplo, podríamos asumir que es conocida por el individuo a través de la información existente de cuántos matrimonios se encuentran en una u otra situación del total de la población.

		Estados del mundo		
		Casado $\left(\rho_1 = \frac{7}{10}\right)$	Separado $\left(\rho_2 = \frac{1}{5}\right)$	Divorciado $\left(\rho_3 = \frac{1}{10}\right)$
Alternativas	Katherine	$W_i + W_K$	$W_i - m_K$	$\frac{W_i}{2}$
	Silvia	W_i	$W_i - m_S$	W_i

De la tabla se derivan las "alternativas" siguientes,[16]

- $x_K = \left(W_i + W_K, \frac{7}{10}; W_i - m_K, \frac{1}{5}; \frac{W_i}{2}, \frac{1}{10} \right)$; donde

  $\mathbf{z}_K = \left(W_i + W_K, W_i - m_K, \frac{W_i}{2} \right)$ y $\mathbf{r}(\mathbf{z}_K) = \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \right)$.

- $x_S = \left(W_i, \frac{4}{5}; W_i - m_S, \frac{1}{5} \right)$; donde

  $\mathbf{z}_S = (W_i, W_i - m_S)$ y $\mathbf{r}(\mathbf{z}_S) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right)$.

Luego, se tienen los conjuntos, de alternativas y de resultados posibles, que delimitan el problema,

- $X = \{x_K, x_S\}$
- $Z = \left\{ W_i + W_K, W_i - m_K, \frac{W_i}{2}, W_i, W_i - m_S \right\}$

3. LOTERÍAS

[16] W_i denota la riqueza que posee el i – ésimo individuo en el momento presente, W_K es la riqueza de Katherine, m_K es la mesada que tendría que pagar el i – ésimo individuo a Katherine y m_S es la mesada que tendría que pagar a Silvia si fuese el caso.

A continuación trataremos el contexto de incertidumbre bajo análisis, limitando nuestro conjunto X a un conjunto cuyos elementos son loterías. Es decir, las alternativas sobre las que el individuo debe elegir son loterías. Pero, ¿qué es una lotería?, ¿qué propiedades posee? Y ¿qué relación posee respecto a las preferencias del individuo elector?

3.1 Loterías simples y loterías compuestas

a. Lotería simple

Una lotería es un vector de resultados posibles $\mathbf{z}_k$ con su vector de distribución de probabilidades asociado $\mathbf{r}$; denotándose como $\mathfrak{L}=[\mathbf{z},\mathbf{r}(\mathbf{z})]$, donde $\mathbf{z}\subseteq Z$ y $\mathbf{r}(\mathbf{z})\in\mathbb{R}^S_+$.[17] Por ejemplo, si lanzamos una moneda, tal que si resulta "cara" se gana 10 u. m. y si sale "sello" se paga 5 u. m., entonces la lotería se denotaría como,[18]

$$\mathfrak{L}=\left(10,\frac{1}{2};-5,\frac{1}{2}\right)$$

Siendo $\mathbf{z}=\{10,-5\}$ y $\mathbf{r}(\mathbf{z})$ una distribución uniforme. Generalizando,

$$\mathfrak{L}_k=\left[\mathbf{z}_k,\mathbf{r}(\mathbf{z}_k)\right] \quad , \quad k=1,\ldots,n.$$

Donde:

$$\mathbf{z}_k=\left(z_k^1,z_k^2,\ldots,z_k^s,\ldots,x_k^S\right) \text{ y } \rho_s\geq 0,\ \forall s=1,2,\ldots,S; \text{ con } \sum_{s=1}^{S}\rho_s=1.$$

Luego, dados los S estados del mundo, es decir, dado el conjunto $\mathbb{S}$, es posible que algunos resultados se repitan para dos o más estados del mundo; por tanto algunos resultados tendrán una probabilidad dada por $(\rho_s+\rho_t)>0$, mientras tanto también es posible que para algunos estados del mundo no exista probabilidad de hacerse efectiva, $\rho_s=0$.

17 Ver GOLLIER (1999: p. 13 – 14) y LAFFONT (1989: p. 7).

18 Cuando la alternativa de elección es una lotería, la denotaremos como $\mathfrak{L}$.

Por comodidad notacional, supondremos que no se repite algún resultado para diferentes estados del mundo; por tanto $\forall s,t=1,\ldots,S$; $\rho_s \neq \rho_t$. Así, a cada estado del mundo le corresponde un resultado diferente, pudiendo ser este igual a cero. Entonces, para los conjuntos $\mathbb{S}$ y $\mathbf{z}^k \subseteq Z$ dados, las loterías se pueden interpretar como una distribución de probabilidades. Así, el conjunto de loterías vendría dado por,

$$\mathbb{L}=\left\{\mathfrak{L}\left(\pi^1,\ldots\pi^s,\ldots,\pi^T\right),1\geq\pi^s\geq 0 \wedge \sum_{s=1}^{T}\pi^s=1\right\}$$

Entonces, si $\mathfrak{L}=\left(\pi^1,\ldots,\pi^s,\ldots,\pi^T\right)$, siendo $T\leq S$; la lotería se puede enunciar como,

$$\mathfrak{L}\left(\pi^1,\ldots,\pi^s,\ldots,\pi^S\right)$$

Donde, $\pi^{T+1}=\ldots=\pi^S=0$.[19]

Así, dado el $\mathbf{z}^k \subseteq Z$, sea $S=3$, las loterías se pueden representar gráficamente en $\mathbb{R}^2_+$, mediante el triángulo de Machina. Sea una lotería cualquiera,

$$\mathfrak{L}\left(\pi^1,\pi^2,\pi^3\right)$$

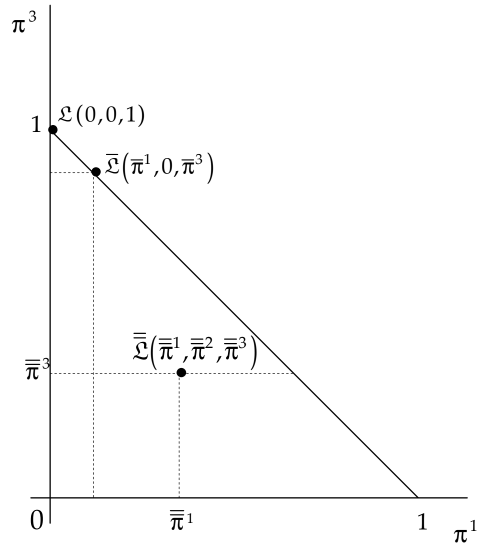
Esta lotería se podría representar en el simplex *3* – dimensional. Sin embargo, realizando un artificio, tenemos una representación en $\mathbb{R}^2_+$. Tendremos así, varias loterías que conforman el conjunto dado por

$$\Delta=\left\{\left(\pi^1,\pi^3\right)\in\mathbb{R}^2_+:1-\pi^1-\pi^3\leq\pi^2\right\}$$

Gráficamente se observa la representación de la lotería $\mathfrak{L}\left(\overline{\pi}^1,0,\overline{\pi}^3\right)$, que es el caso donde la probabilidad de ocurrencia de que el estado del mundo e_2 se haga efectivo es cero. Por otro lado, la lotería $\mathfrak{L}(0,0,1)$ indica que el resultado correspondiente al estado

[19] Entonces, bajo la simplificación que hemos realizado se tiene que $\rho_s=\pi^s, \forall s=1,\ldots,S$. Más adelante, esto no tiene porqué seguir cumpliéndose.

del mundo e_3 ocurrirá con certeza. A esta última lotería se le conoce como lotería degenerada.[20]



b. Lotería compuesta

Es aquella que tiene como resultados posibles otras loterías. Así, la lotería $\mathfrak{L}^*$ es aquella lotería compuesta que genera la lotería $\bar{\mathfrak{L}}$ con probabilidad α y la lotería $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ con probabilidad $(1-\alpha)$.[21] Para enunciar formalmente la lotería compuesta, haremos el uso del operador interno de composición, $\otimes$. Así tenemos,

$$\mathfrak{L}^* = \alpha\bar{\mathfrak{L}} \otimes (1\text{-}\alpha)\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$$ [22]

Luego podemos formular,

$\forall \bar{\mathfrak{L}}, \bar{\bar{\mathfrak{L}}} \in \mathbb{L} \wedge \alpha \in [0,1],\ \mathfrak{L}^* = \alpha\bar{\mathfrak{L}} \otimes (1-\alpha)\bar{\bar{\mathfrak{L}}};\ \ \mathfrak{L}^* \in \mathbb{L}$.[23]

---

20 Al respecto: "*If the lottery is on a edge of the triangle, one of the probabilities is zero. Id it at a corner, the lottery is degenerated, i. e., it takes one of the values* x_1, x_2, x_3 *with probability 1.*" Ver GOLLIER (*Ob. Cit.*: p. 14).

21 Por el momento la naturaleza de la probabilidad denotada con α es diferente a la probabilidad denotada con π.

22 "*A componound lottery is a convex combination of simples lotteries.*" GOLLIER (*Ídem.*: p. 15).

Entonces, si identificamos cada una de las alternativas o acciones que el individuo puede emprender en el presente con loterías, $X=\mathbb{L}$; entonces luego podemos denotar las loterías simples como,

$$\mathfrak{L}_k=\left(\pi_k^1,\pi_k^2,\ldots,\pi_k^s,\ldots,\pi_k^S\right)\quad,\quad\forall k=1,\ldots,n\,.$$

Así, podemos componer estas loterías, según la distribución de probabilidades que determinan las α_k, y obtener las siguientes loterías compuestas,

$$\mathfrak{L}^*=(\mathfrak{L}_1,\alpha_1;\mathfrak{L}_2,\alpha_2;\ldots;\mathfrak{L}_n,\alpha_n)$$

Es decir,

$$\mathfrak{L}^*=\alpha_1\mathfrak{L}_1\otimes\alpha_2\mathfrak{L}_2\otimes\ldots\otimes\alpha_n\mathfrak{L}_n$$

Así,

$$\mathfrak{L}^*=(\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\ldots,\mathfrak{M}_s,\ldots,\mathfrak{M}_S)$$

Donde,

$$\mathfrak{M}_s=\left(\alpha_1\pi_1^s+\alpha_2\pi_2^s+\ldots+\alpha_k\pi_k^s+\cdots+\alpha_n\pi_n^s\right)\quad,\quad\forall s=1,\ldots,S\,.$$

Veamos el ejemplo siguiente, donde tenemos las dos loterías siguientes, $\bar{\mathfrak{L}}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ y $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}=(0,1,0)$. Luego, la lotería compuesta $\mathfrak{L}^*$ viene dada por $\mathfrak{L}^*=\frac{1}{4}\bar{\mathfrak{L}}\otimes\frac{3}{4}\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$, quedando determinada como,

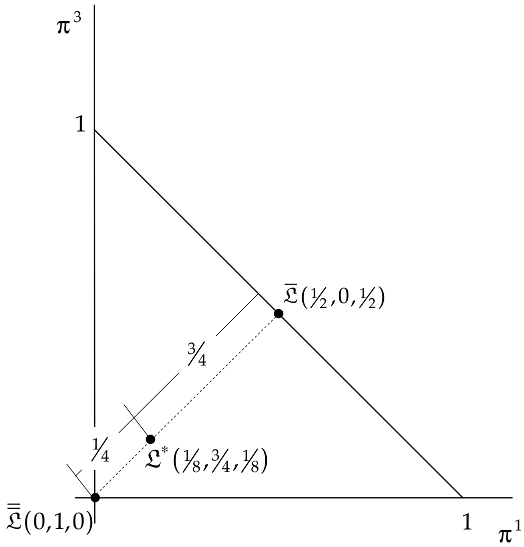
$$\mathfrak{L}^*=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}(0,1,0)=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{4},\frac{1}{8}\right)$$ [24]

Gráficamente,

---

[23] Nótese que la operación de combinación de loterías está definida sobre un tipo específico del conjunto X. Es decir, sobre $X=\mathbb{L}$, que es el conjunto de loterías.

[24] Nótese que $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=1$.



3.2 Composición de loterías

El operador de composición de loterías es una operación definida sobre el conjunto $X = \mathbb{L}$. Así, $\forall \mathfrak{L}, \bar{\mathfrak{L}}, \bar{\bar{\mathfrak{L}}} \in \mathbb{L} \wedge \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ se verifica que,

i. La composición de loterías es independiente del orden en que las loterías se componen. (Propiedad de conmutatividad).

   $\alpha_1 \mathfrak{L} \otimes (1-\alpha_1) \bar{\mathfrak{L}} = (1-\alpha_1) \bar{\mathfrak{L}} \otimes \alpha_1 \mathfrak{L}$

ii. Una lotería cualquiera es una composición de sí misma con un nivel de certeza total, con cualquier otra lotería que no tiene probabilidad de hacerse efectiva. Formalmente,

   $\mathfrak{L} = 1\mathfrak{L} \otimes 0\bar{\mathfrak{L}}$

iii. Una lotería simple es una composición de sí misma.

   $\alpha_1 \mathfrak{L} \otimes (1-\alpha_1) \mathfrak{L} = \mathfrak{L}$

iv. La composición de una lotería compuesta y una lotería simple puede expresarse como la composición de todas las loterías simples involucradas. (Propiedad de la distribución).

$$\alpha_1\left[\alpha_2\mathfrak{L}\otimes(1\text{-}\alpha_2)\bar{\mathfrak{L}}\right]\otimes(1-\alpha_1)\bar{\bar{\mathfrak{L}}}=\alpha_1\alpha_2\mathfrak{L}\otimes\alpha_1(1\text{-}\alpha_2)\bar{\mathfrak{L}}\otimes(1\text{-}\alpha_1)\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$$

v. La composición de dos loterías puede expresar como una composición de una de ellas y otra compuesta a partir de las dos loterías originales, simplemente manipulando las probabilidades adecuadamente. (Propiedad de asociación)

$$(\alpha_1+\alpha_2)\mathfrak{L}\otimes(1\text{-}\alpha_1\text{-}\alpha_2)\bar{\mathfrak{L}}=\alpha_1\mathfrak{L}\otimes\left[\alpha_2\mathfrak{L}\otimes(1\text{-}\alpha_1\text{-}\alpha_2)\bar{\mathfrak{L}}\right]$$

3.3 Espacio de loterías

Dado Z, se tiene $\mathbb{L}$ y un operador de composición de loterías $\otimes$. El par $(\mathbb{L},\otimes)$ se denomina espacio de loterías, sobre el cual el individuo debe elegir. Para ello, debe ordenar este espacio de acuerdo a sus preferencias. Por tanto, asumiremos que el individuo establece sobre este espacio, tomando las loterías de par en par, una relación de preferencia débil, $\succsim_i$, la que se lee como: "*… es al menos tan buena como . . .*".[25]

A continuación establecemos definiciones y axiomas necesarios para estudiar la conducta de un individuo bajo incertidumbre medible y soportable.

3.4 Axiomas de las preferencias sobre $(\mathbb{L},\otimes)$.

Previamente, dada la relación primitiva de preferencia débil, es posible definir una relación de indiferencia y otra de preferencia fuerte entre loterías que conforman el espacio $(\mathbb{L},\otimes)$. Así tenemos,

Definición 1. (Indiferencia)

$$\forall\mathfrak{L},\bar{\mathfrak{L}}\in\mathbb{L},\ \mathfrak{L}\sim_i\bar{\mathfrak{L}}\Leftrightarrow\left(\mathfrak{L}\succsim_i\bar{\mathfrak{L}}\wedge\bar{\mathfrak{L}}\succsim_i\mathfrak{L}\right)$$

Definición 2. (Preferencia fuerte)

---

[25] Esta relación de preferencia débil, como ya hemos estudiado en la teoría de la elección bajo un contexto de certidumbre total, es el primitivo de la teoría y posee las propiedades de reflexividad, completitud y transitividad. Ver ÁVALOS (2010: p. 7).

$$\forall \mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}}\in \mathbb{L},\ \mathfrak{L}\succ_i \overline{\mathfrak{L}} \Leftrightarrow \left(\mathfrak{L}\succsim_i \overline{\mathfrak{L}} \wedge \neg \overline{\mathfrak{L}}\succsim_i \mathfrak{L}\right)$$

Luego, las preferencias del individuo, $\succsim_i$, cumplen los siguientes axiomas de racionalidad y de análisis,

Axioma 1. Completitud

$$\forall \mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}}\in \mathbb{L};\ \mathfrak{L}\succsim_i \overline{\mathfrak{L}} \vee \overline{\mathfrak{L}}\succsim_i \mathfrak{L}$$

Axioma 2. Transitividad

$$\forall \mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}},\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\in \mathbb{L},\ \left(\mathfrak{L}\succsim_i \overline{\mathfrak{L}} \wedge \overline{\mathfrak{L}}\succsim_i \overline{\overline{\mathfrak{L}}}\right)\Rightarrow \mathfrak{L}\succsim_i \overline{\overline{\mathfrak{L}}}$$

Continuidad

$$\forall \mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}},\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\in \mathbb{L},\ \mathfrak{L}\succsim_i \overline{\mathfrak{L}}\succsim_i \overline{\overline{\mathfrak{L}}}, \exists!\alpha\in[0,1]:\ \overline{\mathfrak{L}}\sim_i \alpha\mathfrak{L}\otimes(1-\alpha)\overline{\overline{\mathfrak{L}}}$$ [26]

Independencia

$$\forall \mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}},\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\in \mathbb{L}\wedge\alpha\in[0,1],\ \mathfrak{L}\succsim_i \overline{\mathfrak{L}} \Leftrightarrow \alpha\mathfrak{L}\otimes(1-\alpha)\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\succsim_i \alpha\overline{\mathfrak{L}}\otimes(1-\alpha)\overline{\overline{\mathfrak{L}}}$$ [27]

4. La Utilidad Esperada

4.1 Definiciones y propiedades

Luego, dados estos axiomas, fundamentalmente el de independencia, podemos representar las preferencias del individuo mediante una función matemática que tiene una forma de utilidad esperada.

Definición 3. (Función de utilidad von Neumann – Morgenstern)[28]

---

26 Ver LAFFONT (*Ob. Cit.*: p. 10). Varian plantea este axioma de continuidad de la siguiente manera, $\forall \mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}},\tilde{\mathfrak{L}}\in\mathbb{L}$, $\left\{\alpha\in[0,1]:\alpha\mathfrak{L}\otimes(1-\alpha)\overline{\mathfrak{L}}\succsim_i \tilde{\mathfrak{L}}\right\}$ y $\left\{\alpha\in[0,1]:\tilde{\mathfrak{L}}\succsim_i \alpha\mathfrak{L}\otimes(1-\alpha)\overline{\mathfrak{L}}\right\}$ son conjuntos cerrados. Ver VARIAN (1998: p. 205).

27 Este axioma es considerado como fundamental para esta teoría. Al respecto: "*The Independence axiom is at the heart of the classical theory of uncertainty.*" Ver: GOLLIER (*Ob. Cit.*: p. 16).

28 Ver MAS COLELL *et al*. (1995: p. 173).

La función de utilidad $U:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ tiene una forma de utilidad esperada si existe una asignación de números $(u_1,u_2,\ldots,u_s,\ldots,u_S)$ para los s resultados tal que para cada lotería simple $\mathfrak{L}=(\pi^1,\pi^2,\ldots,\pi^s,\ldots,\pi^S)\in\mathbb{L}$ se tiene

$$U(\mathfrak{L})=\sum_{s=1}^{S}\pi^s u_s$$

Una función $U:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ con la forma de utilidad esperada es llamada como una función de utilidad esperada von Neumann – Morgenstern.

Luego, si tenemos una lotería $\mathfrak{L}_k$, a la que llamaremos lotería degenerada, podemos obtener $U(\mathfrak{L}_k)=u_s$.[29] Así formulamos,

Proposición 1.

Una función $U:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ tiene una forma de utilidad esperada si y sólo si esta es lineal, esto es, si y sólo si satisface la propiedad

$$U\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathfrak{L}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k U(\mathfrak{L}_k)$$

$\forall\mathfrak{L}_k\in\mathbb{L},\quad k=1,\ldots,n\quad\wedge\quad(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\geq 0,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$.[30]

Por otro lado, la propiedad de utilidad esperada es una propiedad cardinal de la función de utilidad definida en el espacio de loterías. Por tanto,

Proposición 2

Considerando que $U:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada von Neumann – Morgenstern para la relación de preferencia $\succsim_i$ definida sobre $\mathbb{L}$. Luego, $\tilde{U}:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ es

---

29 Pudiendo en este caso tener que para algún k y s, $u_s=u_k$ como notación.

30 Sea $U(\bullet)$ una función tipo von Neumann – Morgenstern. Considérese la lotería compuesta $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}_1,\alpha_1;\ldots;\mathfrak{L}_k,\alpha_k;\ldots;\mathfrak{L}_n,\alpha_n)$, donde $\mathfrak{L}_k=(\pi_k^1,\ldots,\pi_k^s,\ldots,\pi_k^S)$. Así, de forma reducida, la lotería compuesta es $\mathfrak{L}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathfrak{L}_k$. En consecuencia,

$$U\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathfrak{L}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathfrak{L}_k=\sum_{s=1}^{S}u_s\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\pi_k^s\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\sum_{s=1}^{S}\pi_k^s u_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k U(\mathfrak{L}_k).$$

otra función de utilidad von Neumann – Morgenstern para $\succsim_i$ sí y sólo si existen escalares $a>0$ y b tal que $\forall \mathfrak{L} \in \mathbb{L}$, $\tilde{U}(\mathfrak{L}) = aU(\mathfrak{L}) + b$.[31]

4.2 Teorema de la utilidad esperada

A continuación, formulamos el siguiente teorema,

Teorema de la utilidad esperada[32]

Sean las preferencias $\succsim_i$ definidas sobre $\mathbb{L}$, racionales, continuas e independientes. Luego, éstas pueden ser representadas mediante la función matemática $U:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ de la forma de utilidad esperada. Así, se puede asignar números u_s a cada resultado $s=1,\ldots,S$ de tal manera que para cada par de loterías, $\mathfrak{L}=\left(\pi^1,\ldots,\pi^s,\ldots,\pi^S\right)$ y $\mathfrak{L}'=\left(\pi'^1,\ldots,\pi'^s,\ldots,\pi'^S\right)$, se tiene

$$\mathfrak{L} \succsim_i \mathfrak{L}' \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{S} \pi^s u_s \geq \sum_{s=1}^{S} \pi'^s u'_s$$

* * *

Si $S=3$, donde $\mathfrak{L}=\alpha_1\overline{\mathfrak{L}}\otimes\alpha\mathfrak{L}^*\otimes(1-\alpha_1-\alpha)\underline{\mathfrak{L}}$, entonces se tiene,

$$U(\mathfrak{L})=\alpha_1 U\left(\overline{\mathfrak{L}}\right)+\alpha U\left(\mathfrak{L}^*\right)+(1-\alpha_1-\alpha)U(\underline{\mathfrak{L}})$$

---

31 Sea $\tilde{U}(\mathfrak{L})=aU(\mathfrak{L})+b$; $a>0$. Y dado que $U(\mathfrak{L})=\sum_{s=1}^{S}\pi^s u_s$; entonces se tiene,

$$\tilde{U}(\mathfrak{L})=a\sum_{s=1}^{S}\pi^s u_s+b$$

Y dado que $\sum_{s=1}^{S}\pi^s=1$, obtenemos

$$\tilde{U}(\mathfrak{L})=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(au_s+b\right)$$

Quedando,

$$\tilde{U}(\mathfrak{L})=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\tilde{u}_s\,,\quad \tilde{u}=\left(au_s+b\right).$$

32 MAS COLELL *et al*. (*Ob. Cit*.: p. 176).

4.3 La función de utilidad de Bernoulli y el equivalente cierto de la lotería

Luego, si se tiene que los resultados de una lotería se pueden expresar como resultado certeros (loterías degeneradas), tal que estos resultados son de índole monetaria, $\mathfrak{L}(m,1)$. Entonces, nos preguntamos, ¿$U(m,1)=u(m)$? Si esto es correcto, por tanto, podemos escribir,

$$U(\mathfrak{L})=\sum_{s=1}^{S}\pi^{s}u\left(m^{s}\right)$$

Donde $u(m)$ es la función de Bernoulli, para cual se verifica que $u'(m)>0$ y $u''(m)<0$.[33] En consecuencia, $\forall\mathfrak{L},\overline{\mathfrak{L}}\in\mathbb{L}$, se verificará, siguiendo el teorema de la utilidad esperada,

$$\mathfrak{L}\succsim_{i}\overline{\mathfrak{L}}\Leftrightarrow\sum_{s=1}^{S}\pi^{s}u\left(m^{s}\right)\geq\sum_{s=1}^{S}\overline{\pi}^{s}u\left(\overline{m}^{s}\right)$$

Si se cumple el axioma de continuidad e independencia, dadas $\underline{\mathfrak{L}},\overline{\mathfrak{L}}\in\mathbb{L}$ respectivamente como la peor y la mejor lotería, se tiene un único $\alpha\in[0,1]$, tal que $\forall\mathfrak{L}\in\mathbb{L}$ [34]

$$U(\mathfrak{L})=\alpha\Leftrightarrow\mathfrak{L}\sim_{i}\alpha\underline{\mathfrak{L}}\otimes(1\text{-}\alpha)\overline{\mathfrak{L}}$$

Sea $S=3$, se tiene para $\mathfrak{L}=\left(m^{1},\pi^{1};m^{2},\pi^{2};m^{3},\pi^{3}\right)$ con resultados monetarios dados según $m^{1}<m^{2}<m^{3}$. Entonces, se tiene la utilidad esperada de la lotería $\mathfrak{L}$,

$$U(\mathfrak{L})=\pi^{1}u\left(m^{1}\right)+\pi^{2}u\left(m^{2}\right)+\pi^{3}u\left(m^{3}\right)$$

A continuación introducimos el equivalente cierto de la lotería, m^{c}, que se define como aquella cantidad de dinero que el individuo tendría con certeza, de tal manera que se mostraría indiferente entre tener esta cantidad de dinero o aceptar la lotería. Es decir,

---

33 Al respecto: "*Daniel Bernoulli's explanation of this paradox is that agents have decreasing marginañl utility for Money, and so they evaluate any lottery by the expected utility of its different consequences. For a utility function over the consequences, Bernoulli proposes the logarithmic function . . .*". Ver LAFFONT (*Ob. Cit.*: p. 8).

34 En este caso la función de Bernoulli estará acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0.

$$m^c \sim_i \mathfrak{L}$$

O también,

$$u\left(m^c\right)=U\left(\mathfrak{L}\right)$$

Así,

$$u\left(m^c\right)=\pi^1 u\left(m^1\right)+\pi^2 u\left(m^2\right)+\pi^3 u\left(m^3\right)$$

4.4 Preferencias respecto al riesgo

Se tiene $U\left(\mathfrak{L}\right)=\alpha^0$, luego derivamos,

$$0=u\left(m^1\right)d\pi^1-u\left(m^2\right)d\pi^1-u\left(m^2\right)d\pi^3+u\left(m^3\right)d\pi^3$$

De donde,

$$\left[u\left(m^2\right)-u\left(m^3\right)\right]d\pi^3=\left[u\left(m^1\right)-u\left(m^2\right)\right]d\pi^1$$

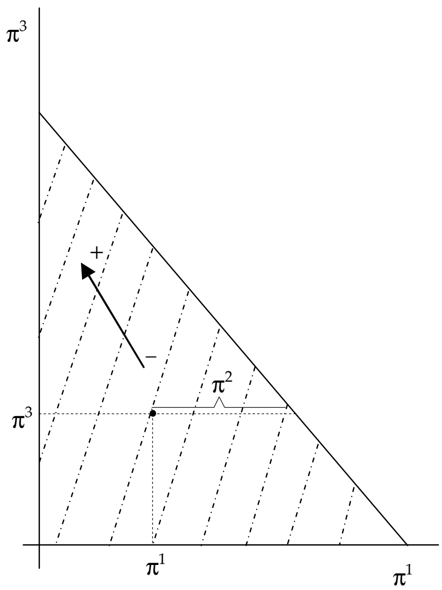
Despejando obtenemos, para un nivel de utilidad esperada dada, la pendiente de la curva de indiferencia,

$$\frac{d\pi^3}{d\pi^1}=\frac{u\left(m^1\right)-u\left(m^2\right)}{u\left(m^2\right)-u\left(m^3\right)}>0$$

Gráficamente, las curvas de indiferencias trazadas en el espacio $\mathbb{L}$,[35] serán curvas lineales paralelas, y en la medida que la lotería elegida nos dé un resultado m^3 con una probabilidad cada vez mayor; entonces el individuo está en mejor posición.

---

35 Recuérdese que el triángulo de Machina es un conjunto de loterías para las cuales el conjunto de resultados está dado, ya que se tratarían de sucesos ciertos (loterías degeneradas); y partir de las cuáles derivar un número infinito de loterías compuestas según las propiedades del operador interno de composición de loterías. Entonces, en estricto deberíamos definir las preferencias sobre un subconjunto $\mathbb{C}\subseteq\mathbb{L}$. Véase VILLAR (1996: p. 213).



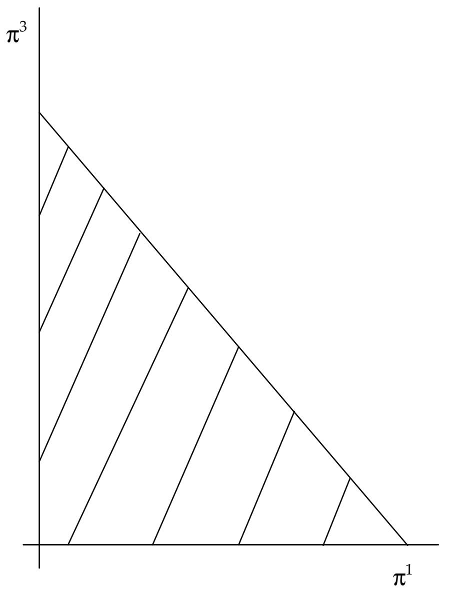
Cada punto del triángulo de Machina es una combinación de probabilidades para un conjunto de resultados dado de la lotería. Por otro lado, sea el ingreso esperado de una lotería definido como,

$$m^e = \pi^1 m^1 + \pi^2 m^2 + \pi^3 m^3$$

Dado el nivel de ingreso esperado, diferenciando se obtiene la pendiente de la isoclina, que es igual a,

$$\frac{d\pi^3}{d\pi^1} = \frac{m^1 - m^2}{m^2 - m^3} > 0$$

Gráficamente, las isoclinas serán líneas rectas y paralelas, donde cada una de ellas representa un nivel de ingreso esperado para diferentes combinaciones de probabilidades para los resultados posibles dados,



Ahora asumamos que el individuo se encuentra en una situación donde el equivalente cierto es menor al ingreso esperado. Esto es,

$$m^c < m^e$$

En consecuencia,

$$U(\mathfrak{L}) < u\left(m^e\right)$$

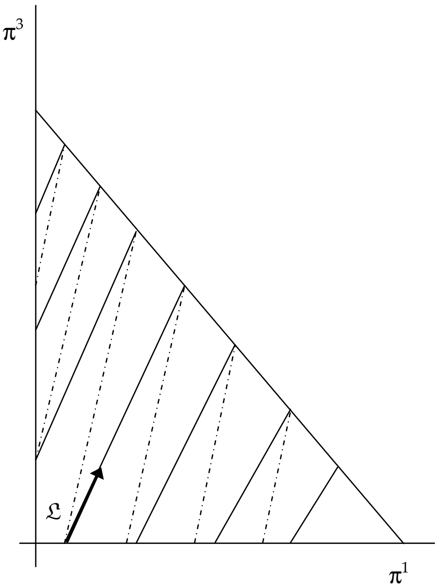
Lo que quiere decir que el individuo valora la lotería por debajo de su ingreso esperado. Esto significa que el individuo es averso al riesgo. Por tanto, la ordenación de preferencias sobre las loterías no estaría basada en los ingresos esperados de los resultados dados, ya que sobreestiman la valoración de las loterías.[36]

En consecuencia, la representación gráfica de este caso, mostraría que las curvas de indiferencia tienen una pendiente mayor en relación a las isoclinas. Es decir, frente a diferentes loterías, tal que no se modifica el ingreso esperado (a lo largo de una isoclina), el individuo prefiere no aceptar dichas loterías y tomar el equivalente cierto, ya que

$$u\left(m^c\right) < u\left(m^e\right)$$

[36] Podemos adelantar los casos, donde $m^c > m^e$ y $m^c = m^e$, serían casos donde el individuo es amante y neutral al riesgo respectivamente.

Así, un movimiento a los largo de la isoclina, a partir de $\mathfrak{L}$, afecta negativamente la posición del individuo en su escala de preferencias, ya que disminuye su nivel de utilidad.[37] Gráficamente,



5. PARADOJAS

5.1 Paradoja de San Petersburgo

Sea el juego donde se recibe un premio monetario de 2^n, cuando al lanzar la moneda sale *cara* en el n – ésimo lanzamiento.

$$m^e = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2^2}\times 2^2 + \ldots$$
$$m^e = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{4}\times 4 + \ldots$$
$$m^e = 1 + 1 + \ldots$$
$$m^e = \infty$$

[37] Cuando se tiene una lotería que no modifica el ingreso esperado, se dice que estamos frente a una apuesta justa. Por tanto, decir que un individuo es averso al riesgo, equivale a decir que rechaza una apuesta justa.

Sin embargo, nadie está dispuesto a pagar por el juego. Daniel Bernoulli, como ya hemos enunciado, propone una función de utilidad,

$$u = u(m) \quad , \quad u' > 0, \; u'' < 0$$

Específicamente,

$$u = \ln m$$

Luego, se tiene que en la medida que el lanzamiento de la moneda tiende al infinito se obtiene,

$$u = \lim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln 2^n = \ln 4$$

Siendo esta la cantidad que estaría dispuesta a pagar el individuo para entrar al juego.[38]

5.2 Paradoja de Ellsberg

El agente tiene "terror" a lo desconocido. Sea el juego:

- Dos jugadores, *A* y *B*.
- Dos urnas, de 100 bolas cada una,

Luego,

- *A* juega primero y decide el color al que apuesta.
- *B* no puede apostar por el mismo color, sólo le queda elegir la urna.

Así, iniciado el juego, tenemos dos situaciones posibles. La primera,

---

38 Ver LAFFONT (*Ob. Cit.*: p. 8).

A elige rojo, *B* evalúa dónde es mayor la probabilidad de elegir verde. Elige urna 1.

Sin embargo, en la segunda,

Si *A* elige verde, *B* evalúa dónde es mayor la probabilidad de elegir rojo. Elige nuevamente la urna 1. Contradiciéndose, ya que a esta en el primer escenario le daba una mayor probabilidad de obtener la bola ver en la urna 1. Esto se debe a que no considera la urna 2, dado que desconoce la distribución de probabilidades.

5.3 Paradoja de Allais

Sea una situación en la que existen cuatro loterías, cuyos resultados monetarios contingentes están dados en la siguiente tabla de contingencia.[39]

	Estados del mundo		
	0	1 - 10	11 - 99
$\mathfrak{L}$	50	50	50
$\bar{\mathfrak{L}}$	0	250	50
$\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$	50	50	0
$\bar{\bar{\bar{\mathfrak{L}}}}$	0	250	0

Que representa una urna de 100 bolas enumeradas, de 0 a 99. Luego, el individuo evalúa entre $\mathfrak{L}$ y $\bar{\mathfrak{L}}$,

$$\mathfrak{L}=(50,1)\succ_i \bar{\mathfrak{L}}=\left(0,\frac{1}{100};50,\frac{89}{100};250,\frac{1}{10}\right)$$

Luego, debe evaluar entre $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ y $\bar{\bar{\bar{\mathfrak{L}}}}$,

$$\bar{\bar{\bar{\mathfrak{L}}}}=\left(0,\frac{9}{10};50,0;250,\frac{1}{10}\right)\succ_i \bar{\bar{\mathfrak{L}}}=\left(0,\frac{89}{100};50,\frac{11}{100};250,0\right)$$

Entonces, si $\mathfrak{L}\succ_i \bar{\mathfrak{L}}$; se tendrá que,

[39] GOLLIER (*Ob. Cit.*: p. 20).

$$0\times u(0)+1\times u(50)+0\times u(250)>\frac{1}{100}\times u(0)+\frac{89}{100}\times u(50)+\frac{1}{10}\times u(250)$$

De donde,

$$1\times u(50)+\frac{89}{100}\times u(0)-\frac{89}{100}\times u(50)>\frac{1}{100}\times u(0)+\frac{89}{100}\times u(50)+\frac{1}{10}\times u(250)+\frac{89}{100}\times u(0)-\frac{89}{100}\times u(50)$$

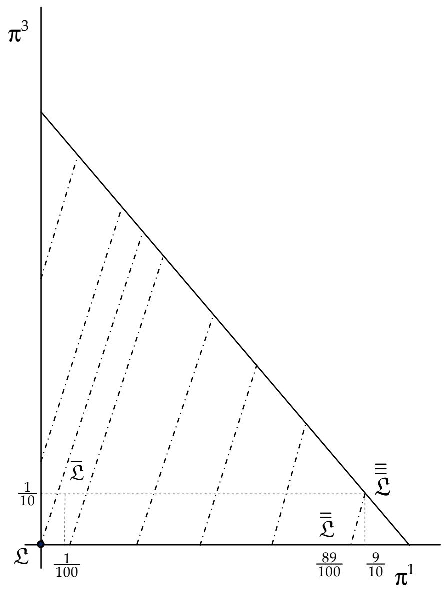
Quedando,

$$\frac{89}{100}\times u(0)-\frac{11}{100}\times u(50)>\frac{9}{10}\times u(0)+0\times u(50)+\frac{1}{10}\times u(250)$$

Por tanto,

$$\bar{\bar{\mathfrak{L}}}\succ_i \bar{\bar{\bar{\mathfrak{L}}}}$$

Evidenciando una contradicción respecto a la evaluación que había realizado el individuo entre ambas loterías.



6. LOTERÍAS MONETARIAS Y AVERSIÓN AL RIESGO

Evaluaremos loterías donde,

$$\mathfrak{L}=\left(m^1,\pi^1;m^2,\pi^2,\ldots;m^S,\pi^S\right)$$

Donde m es una cantidad monetaria. Así $X = \mathbb{R}$. Además consideramos la función de utilidad de Bernoulli,

$$u = u\left(m^s\right) \quad , \quad \forall s = 1,2,\ldots,S.$$

Donde $u'\left(m^s\right) > 0$.

Luego, la función de utilidad Von Neumann – Morgenstern, de acuerdo a lo desarrollado anteriormente, viene dada por,

$$U(\mathfrak{L}) = \sum_{s=1}^{S} \pi^S u\left(m^s\right) \quad , \quad \pi^s \geq 0 \ \wedge \ \sum_{s=1}^{S} \pi^s = 1.$$

6.1 Aversión al riesgo

Sea $S = 2$; entonces,

$$U(\mathfrak{L}) = \pi^1 u\left(m^1\right) + \pi^2 u\left(m^2\right)$$

Donde,

$\mu_{\mathfrak{L}} = \pi^1 m^1 + \pi^2 m^2$ y $\sigma^2_{\mathfrak{L}} = \pi^1 \left(m^1 - \mu_{\mathfrak{L}}\right)^2 + \pi^2 \left(m^2 - \mu_{\mathfrak{L}}\right)^2$.

¿Cuál es la conducta económica del individuo frente al riesgo? Ésta dependerá de la relación entre la utilidad del valor esperado $u(\mu_{\mathfrak{L}})$, y la utilidad esperada de la lotería, $U(\mathfrak{L})$. Así, si

- $u(\mu_{\mathfrak{L}}) > U(\mathfrak{L}) \rightarrow$ el agente es averso al riesgo.
- $u(\mu_{\mathfrak{L}}) = U(\mathfrak{L}) \rightarrow$ el agente es neutral al riesgo.
- $u(\mu_{\mathfrak{L}}) < U(\mathfrak{L}) \rightarrow$ el agente es amante al riesgo.

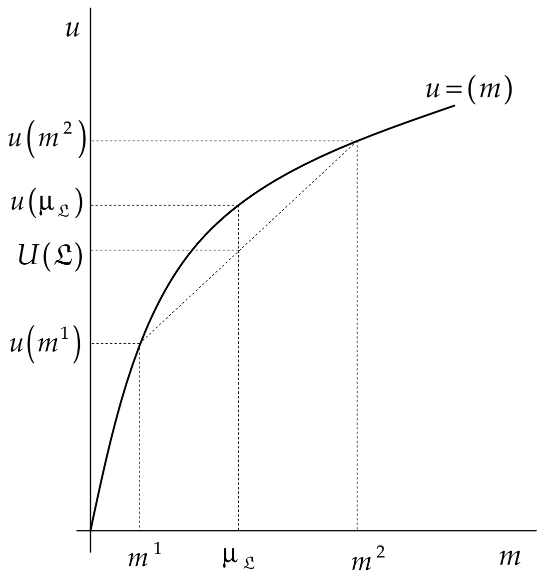
En el primer caso, generalizando, se tiene,

$$U\left(\sum_{s=1}^{S} \pi^s m^s\right) > \sum_{s=1}^{S} \pi^s u\left(m^s\right)$$

Para nuestro ejemplo,

$$U\left(\pi^1 m^1+\pi^2 m^2\right)>\pi^1 u\left(m^1\right)+\pi^2 u\left(m^2\right)$$

Gráficamente, para el caso en el que el individuo es averso al riesgo,



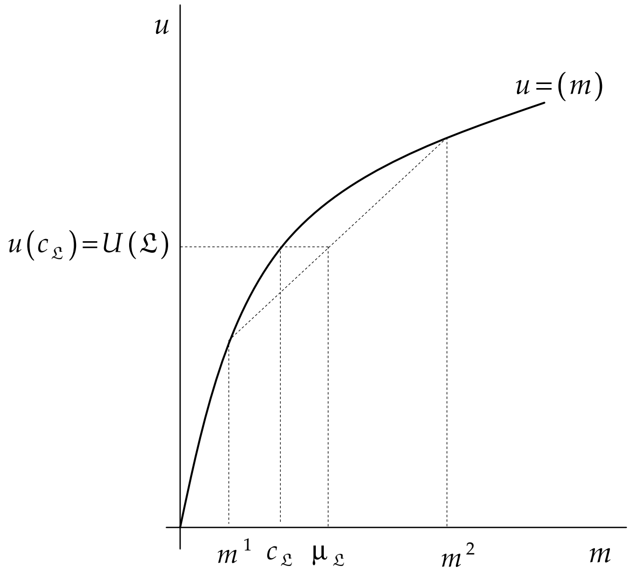
Obsérvese que la representación gráfica presupone que la función de utilidad tiene las siguientes características: $u'(m)>0$ y $u''(m)<0$.

Si se le propone al individuo jugar la lotería o recibir una cantidad de dinero $c_{\mathfrak{L}}$ con certeza,[40] tal que:

$$U(\mathfrak{L})=U(c_{\mathfrak{L}},1)=u(c_{\mathfrak{L}})$$

Gráficamente

[40] $c_{\mathfrak{L}}$ es la cantidad de dinero que equivale a una lotería que si se juega, se obtendría con certeza esta cantidad de dinero.



Luego, la prima de riesgo, denotada como $P_R(\mathfrak{L})$, será,

$$P_R(\mathfrak{L})=\mu_{\mathfrak{L}}-c_{\mathfrak{L}}$$

La prima de riesgo es aquella cantidad de dinero que el individuo estaría dispuesto a pagar como máximo para evitar los riesgos que implicarían si es que aceptase la lotería. Ahora, nótese que cuando el individuo es averso al riesgo, se tiene $u(\mu_{\mathfrak{L}})>U(\mathfrak{L})$. Por tanto, si el individuo es averso al riesgo, se tendrá,

$$P_R(\mathfrak{L})>0$$

6.2 Teorema de la aversión al riesgo

Dado lo enunciado anteriormente, podemos formular el siguiente teorema.

Teorema de la aversión al riesgo

Son definiciones equivalentes de aversión al riesgo para un individuo,

i. $u(\mu_{\mathfrak{L}})>U(\mathfrak{L})$

ii. $u''(m)<0$

iii. $P_R(\mathfrak{L})>0$

iv. Rechaza apuestas justas

6.3 Medidas de aversión al riesgo

Tipificaremos las medidas de aversión del riesgo mediante su relación con la prima de riesgo. Recordemos, que la prima de riesgo determinada por,

$$P_R(\mathfrak{L}) = \mu_{\mathfrak{L}} - c_{\mathfrak{L}}$$

Y dada la utilidad esperada, que es igual a la valoración del equivalente cierto,

$$u(c_{\mathfrak{L}}) = U(\mathfrak{L}) = \sum_{s=1}^{S} \pi^s u(m^s)$$

Luego, combinando ambos conceptos,

$$u[\mu_{\mathfrak{L}} - P_R(\mathfrak{L})] = \sum_{s=1}^{S} \pi^s u\left[\mu_{\mathfrak{L}} + (m^s - \mu_{\mathfrak{L}})\right]$$

Aplicando convenientemente la expansión de Taylor,[41] a cada miembro de la ecuación anterior se obtiene, primero

$$u[\mu_{\mathfrak{L}} - P_R(\mathfrak{L})] = u(\mu_{\mathfrak{L}}) - u'(\mu_{\mathfrak{L}}) P_R(\mathfrak{L})$$

Luego, al segundo miembro,

$$\sum_{s=1}^{S} \pi^s u\left[\mu_{\mathfrak{L}} + (m^s - \mu_{\mathfrak{L}})\right] = \sum_{s=1}^{S} \pi^s u(\mu_{\mathfrak{L}}) + \sum_{s=1}^{S} \pi^s u'(\mu_{\mathfrak{L}})(m^s - \mu_{\mathfrak{L}}) + \frac{\sum_{s=1}^{S} \pi^s u''(\mu_{\mathfrak{L}})}{2!}(m^s - \mu_{\mathfrak{L}})^2$$

Y como, sabemos que $\sum_{s=1}^{S} \pi^s = 1$, $\sum_{s=1}^{S} \pi^s (m^s - \mu_{\mathfrak{L}}) = 0$, $\sum_{s=1}^{S} \pi^s (m^s - \mu_{\mathfrak{L}}) = \sigma_{\mathfrak{L}}^2$; además $u(\mu_{\mathfrak{L}})$, $u'(\mu_{\mathfrak{L}})$ y $u''(\mu_{\mathfrak{L}})$ son constantes. Entonces derivamos,

---

41 Teorema de Taylor. Si f tiene derivadas continuas hasta de orden $n+1$ inclusive sobre el intervalo $\mathfrak{J}$, entonces, para cualquier $x \in \mathfrak{J}$, si $x_0 \in \mathfrak{J}$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Donde $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$.

Véase: HAASER et al. (1977: p. 704).

$$\sum_{s=1}^{S}\pi^s u\left[\mu_{\mathfrak{L}}+\left(m^s-\mu_{\mathfrak{L}}\right)\right]=u(\mu_{\mathfrak{L}})+\frac{u''(\mu_{\mathfrak{L}})\sigma_{\mathfrak{L}}^2}{2}$$

Luego, retomando la expansión del primer miembro, se tiene:

$$u(\mu_{\mathfrak{L}})-u'(\mu_{\mathfrak{L}})P_R(\mathfrak{L})=u(\mu_{\mathfrak{L}})+\frac{u''(\mu_{\mathfrak{L}})\sigma_{\mathfrak{L}}^2}{2}$$

De donde obtenemos una aproximación de la prima de riesgo,

$$P_R(\mathfrak{L})=-\frac{u''(\mu_{\mathfrak{L}})\sigma_{\mathfrak{L}}^2}{2u'(\mu_{\mathfrak{L}})}$$

Luego definimos como el coeficiente absoluto de aversión al riesgo, $\theta_{\mathfrak{L}}$, a aquel coeficiente dado por la relación entre el cambio de la utilidad marginal y la utilidad marginal de la función de Bernoulli, evaluada cada cual en el valor esperado de la lotería. Así,

$$\theta_{\mathfrak{L}}=-\frac{u''(\mu_{\mathfrak{L}})}{u'(\mu_{\mathfrak{L}})}$$

A este coeficiente absoluto de aversión al riesgo, también se le llama como índice de Arrow – Pratt. [42] Sin embargo, dado que este índice depende de las unidades en que se midan los resultados, alternativamente para medir la aversión al riesgo se tiene el coeficiente relativo, $\theta_{\mathfrak{L}}^r$, que está dado por,

$$\theta_{\mathfrak{L}}^r=-\frac{u''(\mu_{\mathfrak{L}})}{u'(\mu_{\mathfrak{L}})}\mu_{\mathfrak{L}}$$

Lo que es igual a,

---

42 Esta medida del riesgo no es adecuada ya que dependerá de las unidades con que se mida el ingreso. Por ejemplo, si asumimos la función especificada de Bernoulli, se tiene que $u\left(m^s\right)=\ln m^s$; de donde $u'\left(m^s\right)=\frac{1}{m^s}$ y $u''\left(m^s\right)=-\frac{1}{\left(m^s\right)^2}$. Entonces, el coeficiente absoluto de aversión al riesgo será $\theta_{\mathfrak{L}}=\frac{1}{m^s}$. Por tanto, mientras m^s se mida en unidades mayores, menor será el coeficiente absoluto de aversión al riesgo.

$$\theta^r_{\mathfrak{L}} = \theta_{\mathfrak{L}}\mu_{\mathfrak{L}}$$[43]

Entonces, la prima de riesgo, también puede expresarse, según que coeficiente de medición al riesgo se utilice. Así tenemos, utilizando el coeficiente absoluto,

$$P_R(\mathfrak{L}) = \frac{\theta_{\mathfrak{L}}\sigma^2_{\mathfrak{L}}}{2}$$

Luego, utilizando el coeficiente relativo,

$$P_R(\mathfrak{L}) = \frac{\theta^r_{\mathfrak{L}}\sigma^2_{\mathfrak{L}}}{2\mu_{\mathfrak{L}}}$$

Y como ya hemos mencionado, si la prima de riesgo es positiva, es porque el individuo es averso al riesgo.

Pero, además tenemos la prima relativa de riesgo, $P^r_R(\mathfrak{L})$, dada por,

$$P^r_R(\mathfrak{L}) = \frac{P_R(\mathfrak{L})}{\mu_{\mathfrak{L}}}$$

Así,

$$P^r_R(\mathfrak{L}) = \frac{\theta^r_{\mathfrak{L}}\sigma^2_{\mathfrak{L}}}{2\mu^2_{\mathfrak{L}}}$$

6.4 Seguros

La aversión al riesgo permite explicar la existencia de un mercado de seguros. Así, si un individuo es averso al riesgo y enfrenta una lotería, donde el valor de su riqueza sí que ocurre una desgracia será de 0 y de W_i si no ocurre nada,

---

43 Este coeficiente se puede entender como una medida de sensibilidad, es decir, de elasticidad de la utilidad marginal del ingreso respecto al ingreso esperado,

$$\theta^r_{\mathfrak{L}} = -\frac{\partial u'(\mu_{\mathfrak{L}})}{\partial \mu_{\mathfrak{L}}}\frac{\mu_{\mathfrak{L}}}{u'(\mu_{\mathfrak{L}})}$$

Por tanto, mientras mayor sea la sensibilidad de la utilidad marginal respecto a un cambio del ingreso esperado, entonces mayor será la aversión al riesgo; ya que el individuo estará dispuesto a pagar una prima mayor de riesgo.

$$\mathfrak{L}=[0,\alpha;W_i,(1-\alpha)]$$

Luego, como el individuo es averso al riesgo, estará dispuesto a pagar una prima de riesgo para evitar las pérdidas.

Si existe una empresa de seguros que ofrece una cobertura que garantiza el valor de su riqueza, W_i, a cambio de una prima P. Entonces la decisión de aceptar o no el contrato de seguro equivale a decidir entre un valor cierto $W_i - P$ o enfrentar la lotería $\mathfrak{L}$. Así, el individuo aceptará el seguro siempre que $u(W_i - P) > U(\mathfrak{L})$.[44]

Por otro lado, la empresa de seguro, ofrecerá la póliza sí y sólo si, el costo de compensación que pagará si ocurriese la pérdida, es menor que el valor esperado de la lotería, $W_i - P < \mu_{\mathfrak{L}}$.

Por tanto, existirá contrato de seguro, en tanto y en cuanto,

$$\mu_{\mathfrak{L}} > W_i - P > c_{\mathfrak{L}}$$

REFERENCIAS

[1] ARROW, K (1984), *The Economics of information*. Cambridge: Harvard University Press.

[2] ÁVALOS, E. (2010), *La teoría del consumidor: preferencias y utilidad*. Documento de Trabajo Nº 7. Lima: Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac.

[3] FIGUEROA A. (1993), *Crisis distributiva en el Perú.* Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

[4] GEORGESCU – ROEGEN, N. (1967), *Analytical economics.* Cambridge: Harvard University Press.

[5] GOLLIER, C. (1999), *The economics of risk and time*. Cambridge: The MIT Press.

[6] HAASER, N.; LASALLE, J. y J. SULLIVAN (1977), *Análisis matemático 1*. México: Editorial Trillas.

[7] HIRSHLEIFER, J. y J. RILEY (1992), *The analytics of uncertainty and information*. Cambridge: Cambridge University Press.

[44] O también, $W_i - P > c_{\mathfrak{L}}$.

[8] KNIGHT, F. (1921), *Risk, uncertainty and profits*. New York: Houghton Mifflin.

[9] LAFFONT, J. – J. (1989), *The economics of uncertainty and information.* Cambridge: The MIT Press.

[10] MAS – COLELL, A.; WHISTON, M. y J. GREEN (1995), *Microeconomic theory*. Oxford: Oxford University Press.

[11] VARIAN, H. (1992), *Análisis microeconómico*. 3ra. Edición. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

[12] VILLAR, A. (1996), *Curso de microeconomía avanzada*. *Un enfoque de equilibrio general*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.