Uncertainty: approach media - variance, stochastic dominance, risk management and risk unsupportable.

Eloy Ávalos

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Instituto de Estudios Sociales del Rímac

15. June 2011

CIEC

Centro de Investigaciones Económicas

Documento de Trabajo Nº 21

Incertidumbre: Enfoque Media – Varianza, Dominancia Estocástica, Manejo de Riesgos y Riesgo no Soportable

por

Eloy Ávalos

Junio 15, 2011

Instituto de Estudios Sociales del Rímac
Lima, Perú

INCERTIDUMBRE: ENFOQUE MEDIA – VARIANZA, DOMINANCIA ESTOCÁSTICA, MANEJO DE RIESGOS Y RIESGO NO SOPORTABLE

Eloy ÁVALOS[1]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos e IESR

Primera versión: Junio 2011

Resumen

En el presente documento desarrollaremos el enfoque media varianza, identificando las funciones de utilidad esperada que puedan expresarse en función del valor esperado y la desviación estándar. Abordaremos la dominancia estocástica para determinar las condiciones necesarias que exige el ordenamiento de las loterías cuando éstas constituyen funciones de distribución de probabilidades. Luego, veremos la elección de bienes y de activos contingentes. Por último, analizaremos el modelo de Hicks y de ordenamiento lexicográfico para riesgos medibles pero no soportables.

Número de Clasificación JEL: D80, D81.
Palabras Claves: Probabilidades, dominancia estocástica, media, varianza, activos contingentes, riesgo no soportable.

Abstract

This paper will develop the half variance approach, identifying the expected utility functions that can be expressed in terms of the expected value and standard deviation. We study the stochastic dominance to determine the conditions required by the ordering of lotteries when they are probability distribution functions. Then we will see the choice of goods and contingent assets. Finally, we discuss the model of Hicks and lexicographic ordering for measurable risks but supportable.

Classification Number JEL: D80, D81.
Keys Words: Probability, stochastic dominance, mean, variance, contingent assets, risk not supportable.

---

[1] Contacto: Departamento de Economía, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima 01, Teléfono 619-7000 Anexo 2207; y Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac, Pueblo Libre. Email: eavalosa@unmsm.edu.pe.

1. INTRODUCCIÓN

A continuación desarrollaremos un conjunto de modelos de elección individual bajo un contexto de incertidumbre. El enfoque media varianza, permite identificar funciones de utilidad que puedan expresarse en función del valor esperado y la desviación estándar. Por otro lado, ciertas loterías son simplemente, para resultados conocidos y fijos, una distribuciones de probabilidad, por lo que cuando el individuo expresa su relación de preferencia, debe de hacerlo entonces sobre las funciones de distribución de probabilidades. En este caso la dominancia estocástica permite determinar el orden de preferencias. Asimismo, abordaremos la elección de bienes contingentes y de activos contingentes en el marco de manejo de riesgos, estableciendo los teoremas fundamentales de manejo de riesgos. Por último, veremos el modelo de Hicks y de ordenamiento lexicográfico para analizar el porqué los individuos no aceptan todas las loterías.

2. EL ENFOQUE MEDIA - VARIANZA

Bajo este enfoque, lo que se desea es expresar una lotería en términos de su valor esperado, $\mu_{\mathfrak{L}}$, y la varianza, $\sigma^2_{\mathfrak{L}}$; mediante la función de utilidad esperada. Es decir, deseamos encontrar una función matemática, donde,

$$U(\mathfrak{L}) = F\left(\mu_{\mathfrak{L}}, \sigma^2_{\mathfrak{L}}\right)$$

Tal que la función, por monotonocidad y por aversión al riesgo (en el caso que el individuo lo fuese), tendríamos,

$$F'_{\mu_{\mathfrak{L}}} > 0 \text{ y } F''_{\sigma^2_{\mathfrak{L}}} > 0$$

Pero, ¿es posible obtener esta función $F(\bullet)$? Bueno, esto es factible en dos casos relevantes.

2.1 Función de Bernoulli cuadrática

Primero, tenemos el caso donde se tiene una función de utilidad de Bernoulli cuadrática como,

$$u\left(m^s\right)=am^s+b\left(m^s\right)^2+c$$

Por otro lado, el valor esperado y la varianza de los resultados posibles vienen dados por $\mu_{\mathfrak{L}}=\sum_{s=1}^{S}\pi^s m^s$ y $\sigma_{\mathfrak{L}}^2=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(m^s-\mu_{\mathfrak{L}}\right)^2$.

Luego, desarrollando la varianza se obtiene,

$$\sigma_{\mathfrak{L}}^2=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left[\left(m^s\right)^2-2m^s\mu_{\mathfrak{L}}+\mu_{\mathfrak{L}}^2\right]$$

Y

$$\sigma_{\mathfrak{L}}^2=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(m^s\right)^2-2\mu_{\mathfrak{L}}\sum_{s=1}^{S}\pi^s m^s+\mu_{\mathfrak{L}}^2\sum_{s=1}^{S}\pi^s$$

$$\sigma_{\mathfrak{L}}^2=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(m^s\right)^2-2\mu_{\mathfrak{L}}^2+\mu_{\mathfrak{L}}^2$$

Quedando,

$$\sigma_{\mathfrak{L}}^2=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(m^s\right)^2-\mu_{\mathfrak{L}}^2$$

Luego, obtenemos la siguiente relación

$$\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(m^s\right)^2=\sigma_{\mathfrak{L}}^2+\mu_{\mathfrak{L}}^2$$

Por otro lado, desarrollando la función de utilidad de von Neumann – Morgenstern, obtenemos,

$$U(\mathfrak{L})=\sum_{s=1}^{S}\pi^s u\left(m^s\right)=\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left[am^s+b\left(m^s\right)^2+c\right]$$

Así,

$$U(\mathfrak{L})=a\sum_{s=1}^{S}\pi^s m^s+b\sum_{s=1}^{S}\pi^s\left(m^s\right)^2+c\sum_{s=1}^{S}\pi^s$$

Luego, introduciendo la relación deducida anteriormente, se deriva la utilidad esperada en términos del valor esperado y de la varianza

$$U(\mathfrak{L})=a\mu_{\mathfrak{L}}+b\left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2+\mu_{\mathfrak{L}}\right)+c$$

De donde

$a>0$	$b>0$	La $U(\mathfrak{L})$ es convexa; por tanto el agente es amante al riesgo.
	$b=0$	La $U(\mathfrak{L})$ es lineal; por tanto el agente es neutral al riesgo.
	$b<0$	La $U(\mathfrak{L})$ es cóncava; por tanto el agente es averso al riesgo.

Un segundo caso relevante, se da cuando se tiene una distribución continua de probabilidades, tal como una distribución normal,

$$\mathfrak{L} \sim N\left(\mu_{\mathfrak{L}}, \sigma_{\mathfrak{L}}^2\right)$$

Y sea una función de utilidad de Bernoulli,

$$u\left(m^s\right) = -e^{-\theta m^s}$$

Así podemos expresar la función de utilidad de von Neumann – Morgenstern como,

$$U(\mathfrak{L}) = \int_{\underline{m}}^{\overline{m}} u\left(m^s\right) f\left(m^s\right) dm^s \ , \quad \forall m^s \in [\underline{m}, \overline{m}]$$

En consecuencia,

$$U(\mathfrak{L}) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\theta m^s} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m^s-\mu_{\mathfrak{L}}}{\sigma_{\mathfrak{L}}}\right)^2}}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} dm^s$$

Resolviendo, se tiene

$$U(\mathfrak{L}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2}\left[2\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta m^s + \left(m^s\right)^2 - 2m^s\mu_{\mathfrak{L}} + \mu_{\mathfrak{L}}^2\right]} dm^s = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2}\left[\left(m^s\right)^2 + 2m^s\left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta - \mu_{\mathfrak{L}}\right) + \mu_{\mathfrak{L}}^2\right]} dm^s$$

Desarrollando

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2}\left[\left(m^s\right)^2 + 2m^s\left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta - \mu_{\mathfrak{L}}\right) + \left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta - \mu_{\mathfrak{L}}\right)^2 - \sigma_{\mathfrak{L}}^4\theta^2 + 2\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta\mu_{\mathfrak{L}} - \mu_{\mathfrak{L}}^2 + \mu_{\mathfrak{L}}^2\right]} dm^s = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2}\left\{\left[m^s + \left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta - \mu_{\mathfrak{L}}\right)\right]^2 - \sigma_{\mathfrak{L}}^4\theta^2 + 2\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta\mu_{\mathfrak{L}}\right\}} dm^s$$

Simplificando

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\left\{\frac{\left[m^s + \left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta - \mu_{\mathfrak{L}}\right)\right]^2}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2} - \frac{\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta^2}{2} + \theta\mu_{\mathfrak{L}}\right\}} dm^s = -e^{\theta\left(\frac{\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta}{2} - \mu_{\mathfrak{L}}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[m^s + \left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta - \mu_{\mathfrak{L}}\right)\right]^2}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2}} dm^s$$

Donde $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{\mathfrak{L}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[m^s+\left(\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta-\mu_{\mathfrak{L}}\right)\right]^2}{2\sigma_{\mathfrak{L}}^2}} dm^s = 1$ ya que es una distribución normal. Por lo tanto,

$$U(\mathfrak{L}) = -e^{\theta\left(\frac{\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta}{2} - \mu_{\mathfrak{L}}\right)}$$

Que se reduce, finalmente a una función de utilidad que depende del valor esperado y de la varianza,

$$U(\mathfrak{L}) = \mu_{\mathfrak{L}} - \frac{\sigma_{\mathfrak{L}}^2\theta}{2}$$

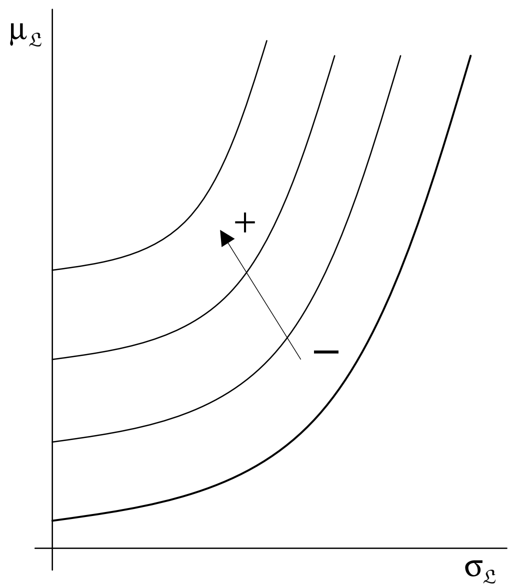
Así, para una curva de indiferencia, se sabe que el nivel de utilidad a lo largo de ella es constante. Entonces, si $U(\mathfrak{L}) = U^0$, podemos derivar la pendiente de esta curva. Veamos:

$$0 = d\mu_{\mathfrak{L}} - \theta\sigma_{\mathfrak{L}} d\sigma_{\mathfrak{L}}$$

De donde,

$$\frac{d\mu_{\mathfrak{L}}}{d\sigma_{\mathfrak{L}}} = \theta\sigma_{\mathfrak{L}} = TMgS$$

Gráficamente:



Sobre este mapa de curvas de indiferencia se puede añadir una restricción que tiene que ver con las posibilidades de asignación de activos que tiene el individuo. Por ejemplo si el individuo tiene frente a sí dos activos, A_1 y A_2, donde el primero posee una tasa de retorno fija y certera r_1; mientras que el segundo activo tiene una tasa de retorno esperado r_2^e y una desviación estándar σ_2. Es decir, sólo el rendimiento del activo 2 es afectado por los estados del mundo. Si la cantidad de riqueza que posee el individuo está dada; entonces tendremos que la asignación que debe efectuar el individuo tal que cumple $\overline{w} = a_1 + a_2$.

Luego, el retorno esperado de la cartera estará dado por,

$$\mu_{\pounds} = \pi^1 \left(r_1 a_1 + r_2^1 a_2 \right) + \pi^2 \left(r_1 a_1 + r_2^2 a_2 \right)$$

De donde,

$$\mu_{\pounds} = r_1 a_1 + r_2^e a_2$$

Por otro lado la varianza de la cartera viene dada por,

$$\sigma_{\pounds}^2 = \pi^1 \left(r_1 a_1 + r_2^1 a_2 - \mu_{\pounds} \right)^2 + \pi^2 \left(r_1 a_1 + r_2^2 a_2 - \mu_{\pounds} \right)^2$$

Quedando,

$$\sigma_{\pounds}^2 = \pi^1 \left(r_1 a_1 + r_2^1 a_2 - r_1 a_1 - r_2^e a_2 \right)^2 + \pi^2 \left(r_1 a_1 + r_2^2 a_2 - r_1 a_1 - r_2^e a_2 \right)^2$$

Es decir,

$$\sigma_{\pounds}^2 = \left[\pi^1 \left(r_2^1 - r_2^e \right)^2 + \pi^2 \left(r_2^2 - r_2^e \right)^2 \right] a_2^2$$

Quedando,

$$\sigma_{\pounds}^2 = \sigma_2^2 a_2^2$$

Luego, retomando el retorno esperado de la cartera y utilizando la ecuación de la asignación de activos, tenemos,

$$\mu_{\pounds} = r_1 \left(\overline{w} - a_2 \right) + r_2^e a_2 = r_1 \overline{w} + \left(r_2^e - r_1 \right) a_2$$

A continuación sustituimos la cantidad del activo A_2 utilizando la ecuación de la varianza de la cartera,

$$\mu_{\pounds} = r_1 \overline{w} + \left(r_2^e - r_1 \right) \frac{\sigma_{\pounds}}{\sigma_2}$$

Siendo esta ecuación la representación formal de la restricción que tiene el individuo cuando enfrenta una decisión de cartera entre un activo de rentabilidad fija y otra de rentabilidad incierta.[2]

La pendiente de la restricción viene dada por,

$$\frac{d\mu_{\pounds}}{d\sigma_{\pounds}} = \frac{\left(r_2^e - r_1\right)}{\sigma_2}$$

Siendo esta tasa, el precio del riesgo, ya indica la cantidad de rendimiento que uno debe de sacrificar si uno opta por una asignación tal que incrementa el riesgo en una unidad (en este caso medida por la desviación estándar).

En consecuencia, el equilibrio que alcanza el consumidor tiene como condición necesaria la igualación de la tasa marginal de sustitución de rendimiento esperado por riesgo y el precio del riesgo. Así,

$$\frac{\left(r_2^e - r_1\right)}{\sigma_2} = \theta\sigma_{\pounds}$$

De esta igualdad hallamos la cartera solución, obteniendo previamente el valor esperado y la desviación estándar óptimos.

3. DOMINANCIA ESTOCÁSTICA

El concepto de dominancia estocástica es útil en la medida que facilita una medición generalizada del riesgo.[3] Para nuestro análisis supondremos que el ingreso del individuo está distribuido de manera continua y acotado entre un ingreso máximo y un ingreso mínimo.

Entonces, consideraremos la variable *x*, tal que $x = \frac{m - \underline{m}}{\overline{m} - \underline{m}}$; así, cuando en ingreso del individuo toma el valor máximo $m = \overline{m}$, la variable x tomará un valor igual a $x = 1$.

---

2 Para el caso de una cartera de n activos, siendo $n-1$ activos inciertos y uno de ellos de rentabilidad fija, véase VARIAN (1992: p. 219).

3 En este caso, un cambio en la dispersión con un valor esperado constante.

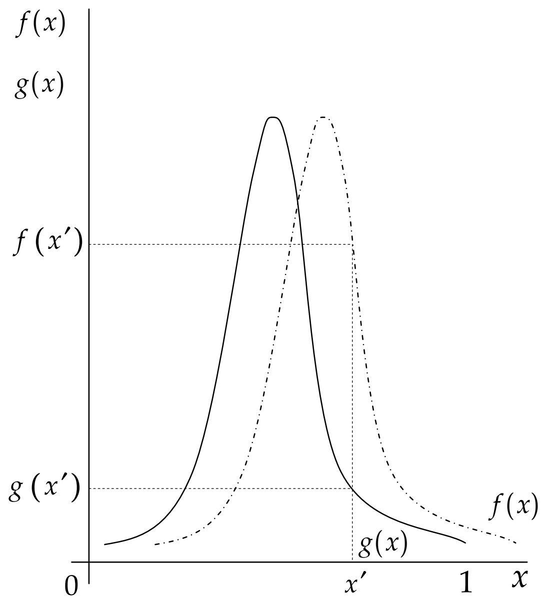
Luego, si el ingreso toma el valor mínimo $m = \underline{m}$, la variable x tomará el valor $x=0$. Es decir, la variable x estará acotada entre 0 y 1.

En este caso, tendremos loterías cuyos resultados son variables aleatorias continuas, tal que las probabilidades que están asociadas a cada resultado posible, se enuncian mediante una función de distribución de probabilidades, $f(m)$, y una función de densidad $F(m)$.

Por tanto, la utilidad esperada viene dada por

$$U(\mathfrak{L}) = \int_{\underline{m}}^{\overline{m}} u(m) f(m) dm \quad , \quad \forall m \in [\underline{m}, \overline{m}]$$

Luego, para dos loterías cualesquiera $\mathfrak{L}_g, \mathfrak{L}_f \in \mathbb{L}$; y utilizando nuestro artificio que derivó en la variable $x \in [0,1]$, podemos formular la función de utilidad esperada, para cada lotería respectivamente, como $U\left(\mathfrak{L}_f\right) = \int_0^1 u(x) f(x) dx$ y $U\left(\mathfrak{L}_g\right) = \int_0^1 u(x) g(x) dx$. Sea el caso, donde las funciones de distribución de probabilidad están representadas de la forma,



Nos cuestionamos, ¿cuál de las dos loterías es más preferida, o ambas son equivalentes para el individuo? Dadas, la continuidad de la distribución de probabilidades, ¿es posible responder nuestra pregunta?

3.1 Dominancia estocástica de primer orden

Dado que $f(x)$ otorga mayores probabilidades a obtener mayores ingresos monetarios que la función $g(x)$; entonces afirmamos que el individuo tiene un orden de preferencia tal que, $\mathfrak{L}_f \succsim_i \mathfrak{L}_g$.

¿Pero qué significa esto en términos de la funciones de densidad? Veamos. Sea para ambas loterías, respectivamente

$$G'(x) = g(x) \text{ y } F'(x) = f(x)$$

Por lo tanto, si tenemos que

$$U(\mathfrak{L}_f) \geq U(\mathfrak{L}_g)$$

De acuerdo al teorema de la utilidad esperada, se tendrá lo siguiente

$$\int_0^1 u(x)F'(x)dx \geq \int_0^1 u(x)G'(x)dx$$

Por otro lado, utilizando las propiedades de integrales, se tiene:

$$duv = u'v + v'u$$

Luego, se sabe que

$u' = u'(x) \rightarrow u = u(x)$

$v' = F'(x) \rightarrow v = F(x)$

Entonces, si $uv\big|_0^1 = \int_0^1 u'vdx + \int_0^1 v'udx$, luego deducimos,

$$\int_0^1 v'udx = uv\big|_0^1 - \int_0^1 u'vdx$$

Utilizando este resultado, para reemplazar sobre la desigualdad de la utilidad esperada, tenemos

$$u(x)F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)F(x)dx \geq u(x)F(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)G(x)dx$$

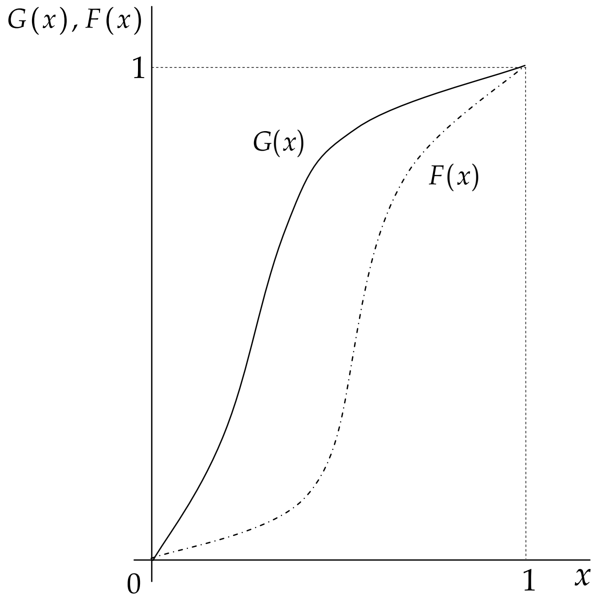
Simplificando, dado que $u(x)F(x)\Big|_0^1 = u(x)F(x)\Big|_0^1$, obtenemos,

$$\int_0^1 u'(x)G(x)dx \geq \int_0^1 u'(x)F(x)dx$$

Reordenando,

$$\int_0^1 u'(x)\left[G(x)-F(x)\right]dx \geq 0$$

Cuyo resultado gráfico, en términos de funciones de densidad se muestra en el siguiente gráfico,



Es decir, el área debajo de la función de densidad probabilística $G(x)$ es mayor al área debajo de la función de densidad de probabilidad $F(x)$, para $x \in [0,1]$.

Por tanto, el orden de preferencia del individuo de la función de distribución de probabilidad $f(x)$ sobre $g(x)$, implica que la función de densidad $F(x)$ domina estocásticamente a $G(x)$. Enunciemos,

Definición 1. Dominancia estocástica de primer orden

La función de densidad $F(x)$ presenta dominancia estocástica de primer orden sobre la función de distribución $G(x)$ sí y sólo si

$G(x) \leq F(x), \forall x \in [0,1]$ con $G(x) < F(x)$, para algún $x \in [0,1]$.

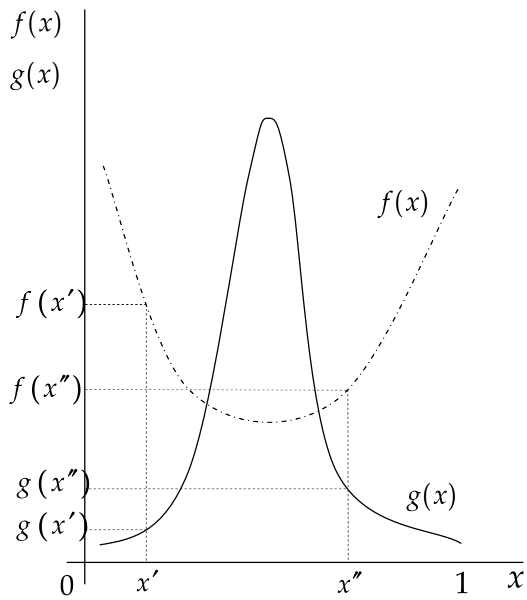
La verificación de esta definición se denota como $F(x) >_{DEP} G(x)$.

Teorema DEP.

$\left[F(x) >_{DEP} G(x) \ \wedge \ u'(m) > 0\right] \Rightarrow \mu_{\mathfrak{L}_f} > \mu_{\mathfrak{L}_g}$

3.2 Dominancia estocástica de segundo orden

Pero, por otro lado, la dominancia estocástica de primer orden por sí sola no asegura que la función de distribución que domina sea la menos tan buena como la otra función de distribución, para aquellos individuos que desean tener más ingresos a menos.[4] Por ejemplo, podemos tener casos donde la dominancia estocástica de una función de distribución de probabilidades sobre otras no es evidente. Veamos,



[4] Dado que el teorema de DEP es aplicable, además de los aversos al riesgo, tanto a individuos que son neutrales al riesgo como a los que son amantes al riesgo.

Se observa que la función de distribución $f(x)$ otorga mayores probabilidades de obtener un ingreso menor que la función $g(x)$; pero a la vez otorga mayores probabilidades de obtener ingresos mayores que la función $g(x)$. Por tanto, en este caso, ¿cómo determinamos qué lotería es más preferida que la otra?

Para resolver estos casos, recurrimos al criterio de dominancia estocástica de segundo grado, que definimos a continuación. Previamente, definimos lo siguiente

$$A_f(x) \equiv \int_0^{\bar{x}} F(x)dx$$

Esto no es más que el área debajo de la función de densidad entre 0 y un nivel de $\bar{x}$ que representa cierto nivel de ingreso.

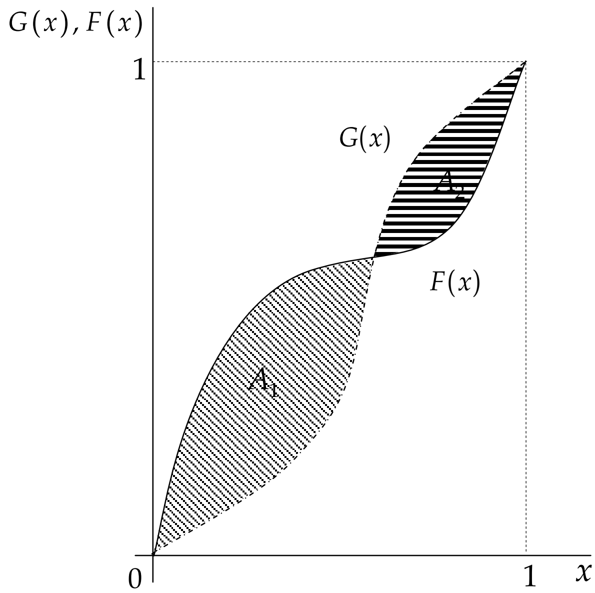
Definición 2. Dominancia estocástica de segundo orden.

Una distribución $G(x)$ presenta dominancia estocástica de segundo orden sobre la distribución $F(x)$ si y sólo si

$A_f \geq A_g \quad \forall x \in [0,1]$, con $A_f > A_g$ para algún valor de x.

La verificación de esta definición se denota como $G(x) >_{DES} F(x)$.

Así, para el caso anterior, que también puede representarse de la siguiente manera,



Se tiene que la dominancia estocástica de segundo grado de implica que $A_1 \geq A_2$. Es decir, $\int_0^{\bar{x}} F(x)dx \geq \int_0^{\bar{x}} G(x)dx$, $\forall \bar{x} \in [0,1]$. Entonces, si $\int_0^1 [F(x) - G(x)]dx \geq 0$, se tiene,

$$\mathfrak{L}_g \succsim_i \mathfrak{L}_f \, .$$

Teorema DES

$$\left[A_g >_{DES} A_f \wedge u'(x) \wedge u''(x) < 0\right] \Rightarrow \mu_{\mathfrak{L}_g} > \mu_{\mathfrak{L}_f}$$

4. MANEJO DE RIESGOS

4.1 Extensión de la medición de riesgo

Previamente, antes de abordar modelos de manejo de riesgos, presentaremos la función de utilidad esperada mediante curvas de indiferencias. Para ello, asumiremos que sólo existen dos estados del mundo posible. Así, la función de utilidad de von Neumann – Morgenstern, queda como

$$U(\mathfrak{L}) = \pi^1 u\left(m^1\right) + \pi^2 u\left(m^2\right)$$ [5]

Luego, para un nivel dado de utilidad, $U(\mathfrak{L}) = U^0$, que se representa mediante una curva de indiferencia, la pendiente de esta curva viene dada por,

$$-\frac{dm^2}{dm^1} = \frac{\pi^1 u'\left(m^1\right)}{\pi^2 u'\left(m^2\right)}$$

Nótese que la lotería $\mathfrak{L}$ se ubica en la curva de indiferencia U^0. Así, a lo largo de ella tenemos combinaciones de ingresos contingentes correspondientes a cada estado del mundo, tal que brindan el mismo nivel de utilidad esperada.

Si el individuo tuviera un ingreso independiente de cada estado del mundo, $m^1 = m^2$, esto significa que tendría un ingreso seguro, con certeza total. Esta situación posible se

[5] Si el individuo es averso al riesgo, entonces la función de utilidad de Bernoulli, como bien sabemos, será una función estrictamente cóncava y la función de utilidad de von Neumann – Morgenstern será una función estrictamente cóncava en el plano $\left(m^1, m^2\right)$, y por tanto también una función de utilidad estrictamente cuasi – cóncava.

representa por una línea recta de 45º, llamada línea de certeza. A lo largo de ella, se tiene $u'(m^1) = u'(m^2)$. Entonces, la pendiente de la curva de indiferencia en el punto donde cruza la recta de 45º, será,

$$-\frac{dm^2}{dm^1} = \frac{\pi^1}{\pi^2}$$

De igual forma, podemos tener una representación del equivalente cierto, $c_{\mathfrak{L}}$, y de la prima de riesgo $P_R(\mathfrak{L})$. Como bien sabemos, el equivalente cierto es aquel nivel de ingreso seguro que el individuo considerará como equivalente a la lotería $\mathfrak{L}$, $c_{\mathfrak{L}} \sim_i \mathfrak{L}$. Este ingreso, se ubicará sobre la recta de 45º, dado que es in ingreso con certeza, pero a la misma vez deberá estar en la misma curva de indiferencia ya que para el individuo es equivalente a $\mathfrak{L}$.[6]

Por otro lado, el ingreso esperado, $\mu_{\mathfrak{L}}$, viene dado por,

$$\mu_{\mathfrak{L}} = \pi^1 m^1 + \pi^2 m^2$$

Para representar gráficamente un nivel de ingreso esperado determinado, suponemos un valor constante para el ingreso esperado, igual a $\mu_{\mathfrak{L}}^0$. Luego, la pendiente de esta curva viene dada por,

$$-\frac{dm^2}{dm^1} = \frac{\pi^1}{\pi^2}$$

Esta tasa es negativa y constante, por lo que la curva de *isoingreso* esperado es una línea recta y paralela a la pendiente de la curva de indiferencia en el punto del equivalente cierto, pasando por el punto que representa a la lotería $\mathfrak{L}$.[7] Luego, el ingreso esperado específico para la lotería $\mathfrak{L}$, estará representado a partir del punto de intersección de la recta de isoingreso y la línea de certeza.[8]

En cuanto a la prima de riesgo de la lotería, $P_R(\mathfrak{L})$, que es la diferencia entre el ingreso esperado y el equivalente cierto, $P_R(\mathfrak{L}) = \mu_{\mathfrak{L}} - c_{\mathfrak{L}}$, dado que ambas variables están

---

6 Este ingreso equivalente es independiente del estado del mundo.

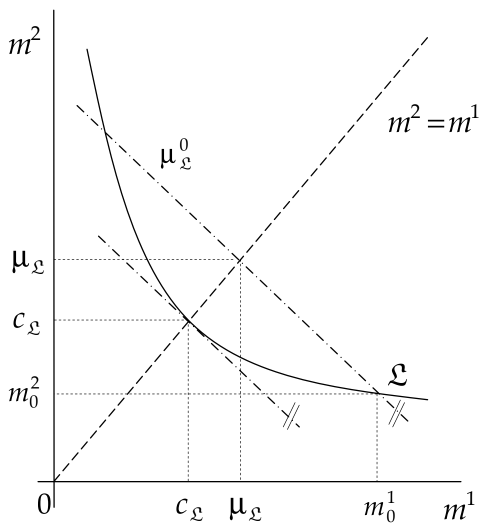
7 También le llamamos isoclinas. Ver ÁVALOS (2011: p. 22).

8 En este punto el ingreso los ingresos correspondientes a cada estado del mundo son iguales al ingreso esperado.

en la línea de certeza, entonces la prima de riesgo se puede representar como la distancia horizontal o vertical entre un punto y el otro que representan al valor esperado y al equivalente cierto.

Finalmente, dado que hemos supuesto un individuo averso al riesgo, se evidencia en la elección del individuo la diversificación.[9]

Gráficamente,



* * *

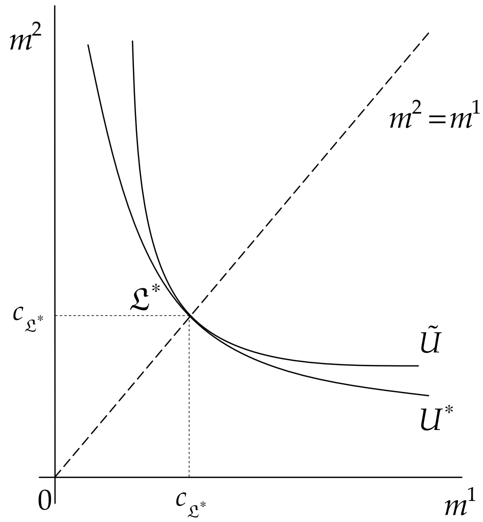
Al igual que en la teoría de la elección bajo certidumbre, aquí también existe, para la lotería cierta $\mathfrak{L}^*$, existe un conjunto de loterías que son para el individuo al menos tan buenas como $\mathfrak{L}^*$. Este conjunto queda definido, haciendo uso del teorema de la utilidad esperada, como,

$$M\left(\mathfrak{L}^*\right)=\left\{\mathfrak{L}\in\mathbb{L}:U(\mathfrak{L})\geq U\left(\mathfrak{L}^*\right)\right\}$$

Luego, un aumento de la aversión al riesgo, se entiende como una reducción de la disposición a aceptar riesgos, lo que implica una reducción del conjunto $M\left(\mathfrak{L}^*\right)$. Esto

9 Esto se corresponde con la propiedad de estricta cuasi – concavidad de la función de utilidad de von Neumann – Morgenstern.

significaría que el individuo ha experimentado un cambio en sus preferencias. Tal cambio, se representaría con curvas de indiferencias más cerradas hacia la línea de certeza. Veamos,



Este cambio debe reflejarse en un aumento del coeficiente de Arrow – Pratt. Por tanto, debe existir alguna relación entre el aumento del coeficiente absoluto de aversión al riesgo y el cierre de la curvatura de las curvas de indiferencia (mayor inclinación próxima a la línea de certeza).

Sea la curva de indiferencia, $U^0 = U\left(m^1, m^2\right)$. De donde obtenemos,

$$m^2 = \Phi\left(m^1, U^0\right)$$

De donde, $dm^2 = \Phi'\left(m^1\right)dm^1$, $\Phi'\left(m^1\right) < 0$. Luego, la pendiente de la curva de indiferencia viene dada por,

$$\Phi'\left(m^1\right) = \frac{d\Phi\left(m^1\right)}{dm^1} = -\frac{\pi^1 u'\left(m^1\right)}{\pi^2 u'\left[\Phi\left(m^1\right)\right]}$$

Y el cambio de la pendiente (es decir, de la tasa marginal de sustitución),, se obtiene diferenciado con respecto a m^1,[10]

$$\frac{d\Phi'\left(m^1\right)}{dm^1}=\frac{d^2\Phi\left(m^1\right)}{\left(dm^1\right)^2}=-\frac{\pi^1 u''\left(m^1\right)}{\pi^2 u'\left(m^2\right)}+\frac{\pi^1 u'\left(m^1\right)u''\left(m^2\right)}{\pi^2\left[u'\left(m^2\right)\right]^2}\frac{dm^2}{dm^1}$$

Y dado que en la recta de 45º se tiene $m^1=m^2=m$, $u'\left(m^1\right)=u'\left(m^2\right)$, $u''\left(m^1\right)=u''\left(m^2\right)$ y $\frac{dm^2}{dm^1}=-\frac{\pi^1}{\pi^2}$; entonces quedaría finalmente,

$$\frac{d\Phi'\left(m^1\right)}{dm^1}=\frac{d^2\Phi\left(m^1\right)}{\left(dm^1\right)^2}=-\frac{u''\left(m^1\right)}{u'\left(m^2\right)}\left[1+\frac{\pi^1}{\pi^2}\right]\frac{\pi^1}{\pi^2}$$

Y como bien sabemos que el coeficiente absoluto de aversión al riesgo es $A(m)=-\frac{u''(m)}{u'(m)}$, queda

$$\frac{d\Phi'\left(m^1\right)}{dm^1}=A(m)\left[1+\frac{\pi^1}{\pi^2}\right]\frac{\pi^1}{\pi^2}$$

Ahora, en $\mathfrak{L}^*$ ambas curvas de indiferencias, la $\tilde{U}$ y U^*, tienen la misma pendiente y es igual a $\frac{\pi^1}{\pi^2}$. Pero a lo largo de cada una, incluido en el punto de corte en la recta de 45º, se verifica que,

$$\left.\frac{d\Phi'\left(m^1\right)}{dm^1}\right|_{\tilde{U}}>\left.\frac{d\Phi'\left(m^1\right)}{dm^1}\right|_{U^*}$$

Es decir, la pendiente de la curva de indiferencia $\tilde{U}$ decrece más rápido que la pendiente de U^*,[11] cuando aumenta m^1. Por lo tanto, se tiene finalmente

$$A^*(m)<\tilde{A}(m)$$

---

10 El análisis también podría efectuarse diferenciado respecto a m^2. Lógicamente, para ello la función de la curva de indiferencia deberá expresarse en términos de m^1 en términos de m^2.

11 En términos absolutos, pues en términos algebraicos, al curva de indiferencia $\tilde{U}$ está creciendo mucho más rápido que la curva U^*.

Lo que quiere decir que un aumento del coeficiente Arrow – Pratt, equivale a que las curvas de indiferencia se cierran en relación a la recta de certeza (línea de 45º).

* * *

Supóngase que el individuo experimenta un aumento de su dotación de riqueza. Sin entrar en detalles que abordaremos en la siguiente sección, acerca de la elección, en este punto queremos saber, dado el incremento de la riqueza, si el individuo es más o menos averso al riesgo. Veamos.

Sea la función de utilidad esperada, $U(\mathfrak{L})=\pi^1 u\left(m^1\right)+\pi^2 u\left(m^2\right)$. La tasa marginal de sustitución viene dada por,

$$-\frac{dm^2}{dm^1}=TMgS=\frac{\pi^1 u'\left(m^1\right)}{\pi^2 u'\left(m^2\right)}$$

De donde, un cambio de la tasa marginal de sustitución puede expresarse como

$$\log TMgS=\log\pi^1+\log u'\left(m^1\right)-\log\pi^2-\log u'\left(m^2\right)$$

Así,

$$\frac{dTMgS}{TMgS}=\frac{u''\left(m^1\right)}{u'\left(m^1\right)}dm^1-\frac{u''\left(m^2\right)}{u'\left(m^2\right)}dm^2$$

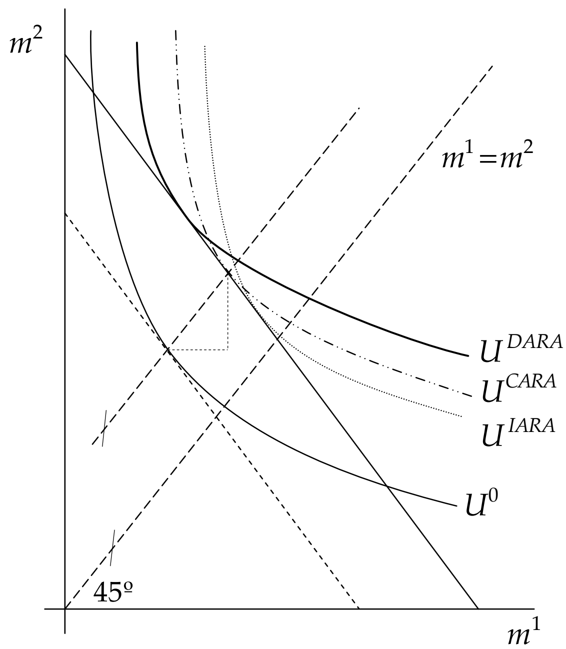
$$\frac{dTMgS}{TMgS}=A\left(m^2\right)dm^2-A\left(m^1\right)dm^1$$

Ahora, tenemos tres casos posibles en relación a una la línea de expansión paralela a la línea de certeza,

- Si $dm^1=dm^2$ y $\frac{dTMgS}{TMgS}=0$; entonces el coeficiente absoluto de aversión al riesgo permanece sin cambio. Lo que quiere decir que, el individuo ante un aumento de su riqueza, elige una nueva lotería sin aproximarse ni alejarse de la línea de certeza, manteniendo constante la *TMgS*. El individuo tiene preferencias con aversión absoluta al riesgo constante (CARA). Entonces, a lo largo de la trayectoria, la *TMgS* permanece constante.

- Si $dm^1 > dm^2$ y $\frac{dTMgS}{TMgS} = 0$; entonces el coeficiente absoluto de aversión al riesgo debe aumentar. Lo que quiere decir que, el individuo ante un aumento de su riqueza, elige una nueva lotería aproximándose a la línea de certeza, manteniendo constante la *TMgS*. El individuo tiene preferencias con aversión absoluta al riesgo creciente (IARA). Entonces, a lo largo de la trayectoria, la *TMgS* se incrementa.
- Si $dm^1 < dm^2$ y $\frac{dTMgS}{TMgS} = 0$; entonces el coeficiente absoluto de aversión al riesgo debe disminuir. Lo que quiere decir que, el individuo ante un aumento de su riqueza, elige una nueva lotería alejándose de la línea de certeza, manteniendo constante la *TMgS*. El individuo entonces tiene preferencias con aversión absoluta al riesgo decreciente (DARA). Entonces, a lo largo de la trayectoria, la *TMgS* se reduce.

Gráficamente,



Sabemos que el coeficiente absoluto de aversión al riesgo depende de las unidades con que se mide el ingreso. Por ello, también tenemos otra medida del riesgo, el coeficiente relativo de aversión al riesgo. Para representarlo gráficamente, se tratará una línea de expansión que pasa por el origen y por la elección óptima. Esto implica a lo largo de esta línea de expansión existe una relación fija entre los resultados monetarios, tal que,

$$\frac{m^2}{m^1}=\kappa$$

Luego, si tenemos que $dm^2=\kappa dm^1$; entonces

$$dm^2=\frac{m^2}{m^1}dm^1$$

Retomando la ecuación de la variación de la tasa marginal de sustitución, se tiene

$$\frac{dTMgS}{TMgS}=\frac{u''\left(m^1\right)}{u'\left(m^1\right)}dm^1-\frac{u''\left(m^2\right)}{u'\left(m^2\right)}dm^2$$

Reemplazando la relación fija dada por κ, obtenemos

$$\frac{dTMgS}{TMgS}=\frac{u''\left(m^1\right)}{u'\left(m^1\right)}\frac{m^1}{m^1}dm^1-\frac{u''\left(m^2\right)}{u'\left(m^2\right)}\frac{m^2}{m^1}dm^1$$

Reordenando,

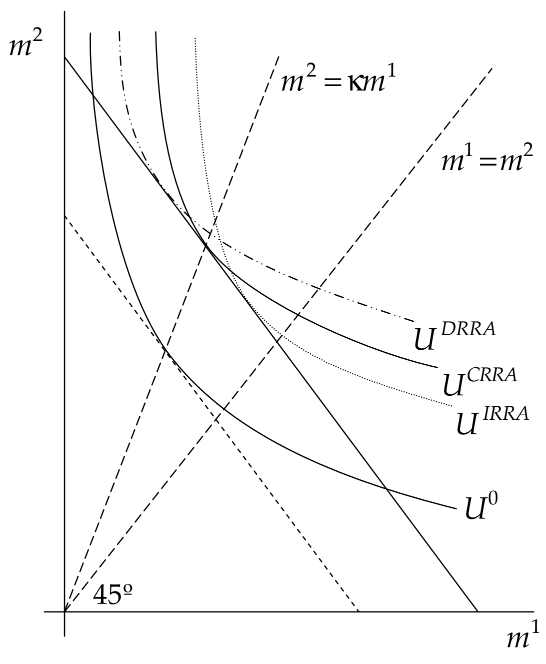
$$\frac{dTMgS}{TMgS}=\left[A^r\left(m^2\right)-A^r\left(m^1\right)\right]\frac{dm^1}{m^1}$$

Gráficamente y a continuación expliquemos los casos posibles.

Así, ante un aumento de la riqueza del individuo, en relación a la senda de expansión se tienen tres casos posibles, dada la nueva lotería elegida,

- Si $\frac{m^2}{m^1}>\kappa$ y $\frac{dTMgS}{TMgS}=0$; entonces la aversión al riesgo disminuye. Esto quiere decir que el individuo ante un aumento de su riqueza, elige una nueva lotería alejándose de la línea de certeza, manteniendo constante la *TMgS*. Se dice que el individuo tiene preferencias con aversión relativa al riesgo decreciente (DRRA). Entonces, a lo largo de la senda de expansión, la *TMgS* se reduce.

- Si $\frac{m^2}{m^1}=\kappa$ y $\frac{dTMgS}{TMgS}=0$; entonces la aversión al riesgo no aumento ni disminuye. Esto quiere decir que el individuo ante un aumento de su riqueza, elige una nueva lotería manteniéndose sobre la misma senda de expansión, con una *TMgS* constante. Se dice que el individuo tiene preferencias con aversión relativa al riesgo constante (CRRA). Entonces, a lo largo de la senda de expansión, la *TMgS* es la misma.
- Si $\frac{m^2}{m^1}<\kappa$ y $\frac{dTMgS}{TMgS}=0$; entonces la aversión al riesgo aumenta. Esto quiere decir que el individuo ante un aumento de su riqueza, elige una nueva lotería acercándose a la línea de certeza, manteniendo constante la *TMgS*. Se dice que el individuo tiene preferencias con aversión relativa al riesgo creciente (IRRA). Entonces, a lo largo de la senda de expansión, la *TMgS* se incrementa.



4.2 Mercado de bienes contingentes

Desarrollaremos sobre la base del modelo anteriormente planteado, la forma cómo el individuo elige su canasta de consumo contingente bajo un contexto de incertidumbre.

a. Supuestos

i. El individuo enfrenta un contexto de incertidumbre de elección de consumo, cuyas decisiones están temporalizadas en dos periodos, el presente, 1, y el futuro 2.

ii. Sea un individuo con una dotación de riqueza dada, $\overline{w}$, y con un plan de consumo *ex – ante*, $\left(c_*^1, c_*^2\right)$.

iii. El individuo es precio aceptante, p_1^0 y p_2^0. Asumimos que los precios no varían entre un periodo y otro, es decir son independientes de los estados del mundo.

iv. El individuo enfrenta dos estados del mundo, e_1 y e_2, con probabilidades respectivas, π^1 y π^2; y que son conocidas.

v. El individuo elige una canasta óptima $\left(c_*^1, c_*^2\right)$, como si buscara maximizar la utilidad esperada, U.

b. Teorema fundamental de manejo de riesgo de bienes contingentes

De acuerdo a los supuestos establecidos, el problema de elección de un consumo contingente se enuncia como un programa de optimización,

$$\begin{array}{ll} \max & U = \pi^1 u\left(c^1\right) + \pi^2 u\left(c^2\right) \\ \text{s. a.} & p_1^0 \overline{c}^1 + p_2^0 \overline{c}^2 - p_1^0 c^1 - p_2^0 c^2 \geq 0 \end{array}$$

Desarrollando la ecuación de Lagrange, para establecer las condiciones de primer orden, se tiene

$$L = \pi^1 u\left(c^1\right) + \pi^2 u\left(c^2\right) + \lambda\left(\overline{w} - p_1^0 c^1 - p_2^0 c^2\right)$$

Diferenciando,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial c^1} = \pi^1 u'\left(c^1\right) - \lambda p_1^0 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c^2} = \pi^2 u'\left(c^2\right) - \lambda p_2^0 = 0 \end{array}\right\} \quad \lambda = \frac{\pi^1 u'\left(c^1\right)}{p_1^0} = \frac{\pi^2 u'\left(c^2\right)}{p_2^0} \quad \ldots \quad [1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial c^1} = \overline{w} - p_1^0 c^1 - p_2^0 c^2 = 0 \quad \ldots \quad [2]$$

Luego, de (1) y (2), se halla la solución óptima, $\left(c_*^1, c_*^2\right)$.

La condición de primer orden de la optimización se conoce como el *teorema fundamental de manejo de riesgo de bienes contingentes*. Generalizando, para S estados del mundo, se tiene

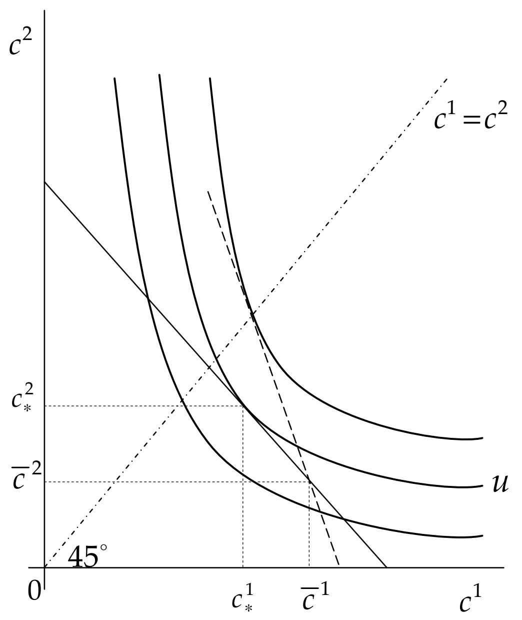
$$\frac{\pi^1 u'(c^1)}{p_1^0} = \frac{\pi^2 u'(c^2)}{p_2^0} = \ldots = \frac{\pi^s u'(c^s)}{p_s^0} = \ldots = \frac{\pi^S u'(c^S)}{p_S^0}$$

Donde $\sum_{s=1}^{S} \pi^s = 1$.

En al siguiente representación gráfica presentamos el equilibrio, asimismo representamos la idea de un precio relativo justo. Este precio relativo justo, sería aquel donde la lotería elegida sería aquella que se obtendría con total certeza. Es decir, el equilibrio alcanzado se ubicaría en el punto de intersección de la línea con certeza y la línea de la restricción. Recuérdese que aquí la pendiente de la curva de indiferencia estaría dada por

$$-\frac{dm^2}{dm^1} = \frac{\pi^1}{\pi^2}$$

Ya que en este punto se verifica la igualdad $u'(c^1) = u'(c^2)$.



4.3 Mercado de activos contingentes

Desarrollaremos sobre la base de un modelo simple, cuyos supuestos son los siguientes,

a. Supuestos

i. El individuo enfrenta un contexto de incertidumbre de elección de consumo, cuyas decisiones están temporalizadas en dos periodos, el presente, 1, y el futuro 2.

ii. Sea un individuo con una dotación de riqueza dada, $\overline{w}$, en dos tipos de activos rentables, A_1 y A_2.

iii. Los precios de los activos son independientes de los estados del mundo e independientes de las decisiones del individuo, p_1^0 y p_2^0.

iv. El individuo enfrenta dos estados del mundo, e_1 y e_2, con probabilidades respectivas, π^1 y π^2; y que son conocidas.

v. Cada activo tiene un rendimiento dado, según el estado del mundo que impere,

Rendimientos del activo 1, $\left(z_1^1, z_1^2\right)$.

Rendimientos del activo 2, $\left(z_2^1, z_2^2\right)$.

v. El individuo asigna sus activos tal que elige una canasta óptima $\left(c_*^1, c_*^2\right)$, como si buscara maximizar la utilidad esperada, U.

b. Teorema fundamental de manejo de riesgo de activos contingentes

De acuerdo a los supuestos establecidos, el problema de elección del individuo bajo este contexto de incertidumbre se enuncia como un programa de optimización,

$$\begin{array}{ll} \max & U = \pi^1 u\left(c^1\right) + \pi^2 u\left(c^2\right) \\ \text{s. a.} & p_1^0 \overline{a}^1 + p_2^0 \overline{a}^2 - p_1^0 a^1 - p_2^0 a^2 \geq 0 \\ & c^1 = a^1 z_1^1 + a^2 z_2^1 \\ & c^2 = a^1 z_1^2 + a^2 z_2^2 \end{array}$$

Desarrollando la ecuación de Lagrange, para establecer las condiciones de primer orden, se tiene

$$L = \pi^1 u\left(c^1\right) + \pi^2 u\left(c^2\right) + \lambda\left(\overline{w} - p_1^0 a^1 - p_2^0 a^2\right)$$

Diferenciando,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial a^1} = \pi^1 u'\left(c^1\right) z_1^1 + \pi^2 u'\left(c^2\right) z_1^2 - \lambda p_1^0 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial ac^2} = \pi^1 u'\left(c^1\right) z_2^1 + \pi^2 u'\left(c^2\right) z_2^2 - \lambda p_2^0 = 0 \end{array}\right\} \lambda = \frac{\sum_{s=1}^{2} \pi^s u'\left(c^s\right) z_1^s}{p_1^0} = \frac{\sum_{s=1}^{2} \pi^s u'\left(c^s\right) z_2^s}{p_2^0} \quad \ldots \quad [1]$$

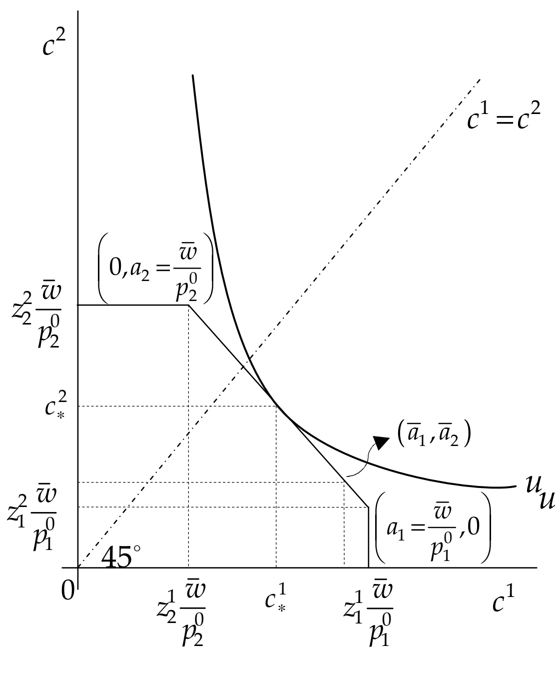
$$\frac{\partial L}{\partial c^1} = \overline{w} - p_1^0 a^1 - p_2^0 a^2 = 0 \quad \ldots \quad [2]$$

Luego, de (2) y de las restricciones de rendimiento de los activos para el consumo, se expresa (2) en términos de consumo. Posteriormente, utilizando 1 y el último resultado se obtiene la elección de consumo óptimo, derivando luego la asignación óptima de activos, dados los rendimientos.

Generalizando, para S estados del mundo y para n activos, el *teorema fundamental de manejo de riesgo de activos* viene dado por,

$$\frac{\sum_{s=1}^{S} \pi^s u'\left(c^s\right) z_1^s}{p_1^0} = \ldots = \frac{\sum_{s=1}^{S} \pi^s u'\left(c^s\right) z_k^s}{p_k^0} = \ldots = \frac{\sum_{s=1}^{S} \pi^s u'\left(c^s\right) z_n^s}{p_n^0}$$

Gráficamente,



5. Riesgo no soportables

Anteriormente, habíamos establecido una clasificación de riesgos, que a su vez determinaba diferentes contextos de incertidumbres. Esta clasificación se sintetiza en la siguiente tabla,[12]

Riesgos y contextos de incertidumbre

		Pérdidas	
		Simples	Desastrosas
Distribución de probabilidad	Conocido	Riesgo medible y soportable	Riesgo medible y no soportable
	Desconocido	Riesgo no medible y soportable	Riesgo no medible y no soportable

A continuación desarrollaremos la teoría de la incertidumbre donde los riesgos son medibles y no soportables (área sombreada).[13]

5.1 El punto de desastre de Hicks

En la realidad se observa que los individuos no aceptan todas las loterías o alternativas contingentes. La teoría hasta ahora estudiada, explicaría esta situación como si fuese un caso de aversión al riesgo. Pero dado que esto se refiere a la forma de la función de utilidad, entonces finalmente la explicación consistiría en un problema de preferencias.[14]

Por otro lado, hasta el momento se ha supuesto para el caso de los individuos que aceptan loterías riesgosas, que todas las pérdidas que podría un individuo obtener son no significativas. Es decir, el individuo tiene la capacidad económica suficiente para afrontar

[12] Ver Ávalos (*Ob. Cit.*: p. 2).
[13] Basado en la tabla formulada en Figueroa (1993: p. 41).
[14] En esta sección seguimos el planteamiento desarrollado en Figueroa (2003).

tales pérdidas. Por tanto, nuevamente, cualquier rechazo a una lotería no justa, obedecería simplemente a sus preferencias, a una aversión por el riesgo.

En este enfoque de Hicks, se establecen límites a las pérdidas que el individuo estaría en capacidad de soportar. Así, si éstas son muy elevadas, significaría que pueden conducir al individuo a una situación de "desastre económico".[15] En esta teoría se supone que el individuo tiene un umbral de tolerancia a sufrir pérdidas, m^*, tal que cualquier lotería riesgosa que pueda implicar pérdidas que conduzcan a una situación de desastre será evitada por el individuo.

El comportamiento del individuo queda expresado como si buscara maximizar la utilidad esperada. Veamos,

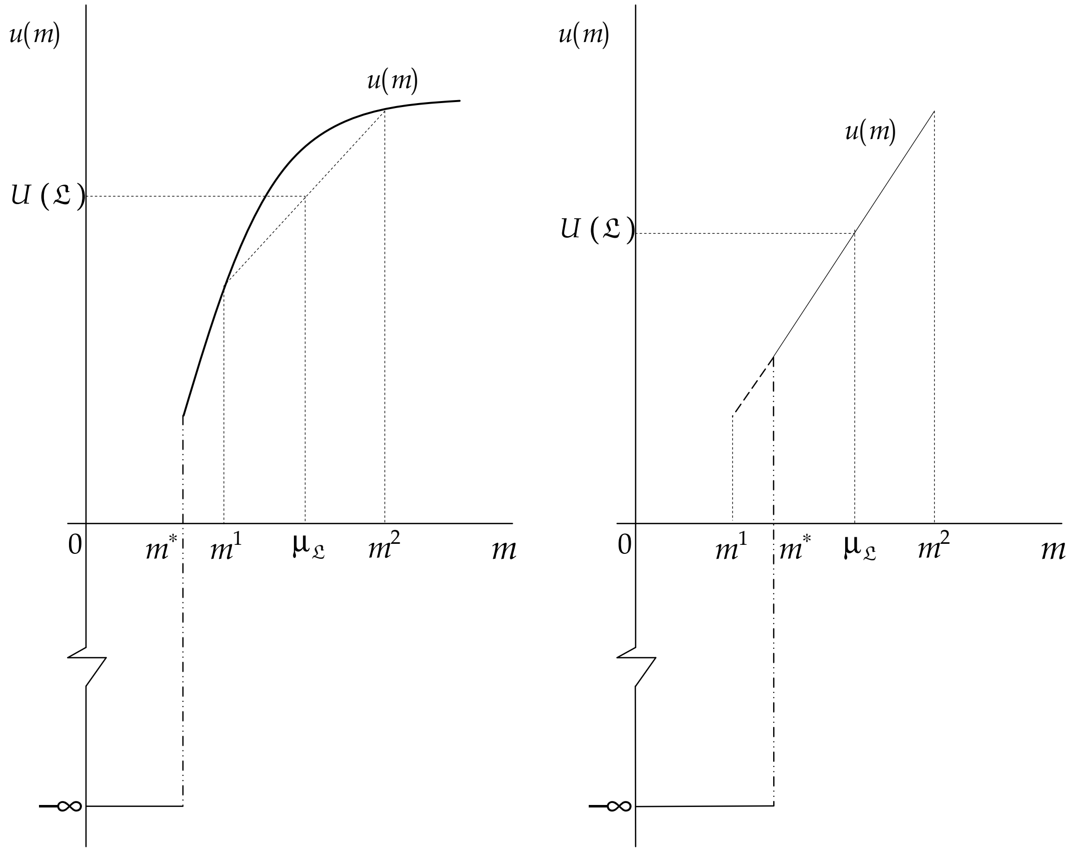
$$\begin{aligned} &\max \quad U = \pi^1 u\left(m^1\right) + \pi^2 u\left(m^2\right) \quad , \quad m^1 < m^2 \\ &\text{s. a.} \quad U > 0 \Leftrightarrow m^1 > m^* \\ &\qquad\quad U = -\infty \Leftrightarrow m^1 \leq m^* \end{aligned}$$

Así, si el individuo enfrenta loterías cuyas pérdidas conducen a un nivel de ingreso igual o menor a su umbral de tolerancia, el individuo evitará la lotería ya que le podría significar el desastre económico. Esto se hace evidente con un salto de la función de utilidad a menos infinito. Por tanto, este tipo de juegos no serán aceptados por el individuo, pues implican riesgos no soportables. Así, su rechazo al riesgo no estaría determinada por la aversión, es decir por la forma de la función de utilidad, sino por el umbral de tolerancia. Sólo serán aceptadas aquellas loterías que no impliquen un desastre económico.

En la siguiente representación gráfica mostramos una lotería con riesgo soportable y otra con riesgo no soportable.

---

15 Una situación de desastre económico sería aquella donde las pérdidas son tales que superarían la riqueza o ingreso del que dispone el individuo o lo dejarían con un nivel de ingreso o riqueza muy por debajo de lo que se requeriría para subsistir.



En el gráfico de la izquierda se tiene una lotería con riesgo soportable, pues en el caso de que las pérdidas se hagan efectivas, éstas conducirán al individuo a un nivel de ingreso m^1, el cual es mayor a su nivel de tolerancia. En cambio, en el gráfico de la derecha, se tiene una lotería con riesgo no soportable, ya que $m^1 < m^*$. En este último caso, el individuo no estaría dispuesto a aceptar esta lotería. Nótese, que este rechazo, puede darse aún el individuo es neutral frente al riesgo (función de utilidad lineal).[16]

5.2 Orden lexicográfico frente al riesgo

En este caso se supone que el individuo requiere un monto mínimo de ingreso para afrontar la lotería, siendo este nivel exógeno. Sea m^* este nivel de ingreso. Así, si el

[16] Este al parecer es el caso representado por Figueroa. Ver FIGUEROA (*Ob. Cit.*: p. 343).

individuo después de arriesgar termina con un nivel de ingreso menor a m^*, consideraría el riesgo como no soportable.

Suponemos que el individuo dispone inicialmente de un monto mayor de ingreso, $m^2 > m^*$. Entonces, si la pérdida máxima posible que podría acarrear una lotería es d, y ésta sería soportable sí y sólo si $d \leq (m^2 - m^*)$. Por tanto, podemos formular el modelo, como si el individuo buscara maximizar la utilidad esperada, como un problema de optimización,

$$\begin{array}{ll} \max & U = \pi^1 u(m^1) + \pi^2 u(m^2) \quad , \quad m^1 < m^2 \\ \text{s. a.} & \hat{d} \geq d \end{array}$$

Es decir, el individuo podría soportar riesgos que impliquen pérdidas menores. El nivel máximo de pérdida tolerado sería $\hat{d} = m^2 - m^*$. Luego, si

- $d \leq \hat{d} \Rightarrow$ el individuo acepta la lotería riesgosa.
- $d > \hat{d} \Rightarrow$ el individuo rechaza la lotería riesgosa

Nuevamente, se tiene que el individuo puede rechazar una lotería independientemente de sus preferencias frente al riesgo. Es decir, podríamos tener que aún siendo neutral o amante al riesgo, el individuo rechaza la apuesta porque considera que puede acarrear pérdidas desastrosas.

Por otro lado, tenemos que en la medida que mayor sea el ingreso que dispone el individuo, mayor será el nivel de pérdidas que él puede tolerar. Así,

$$d = f(m^2) \;,\; f'(m^2) > 0$$

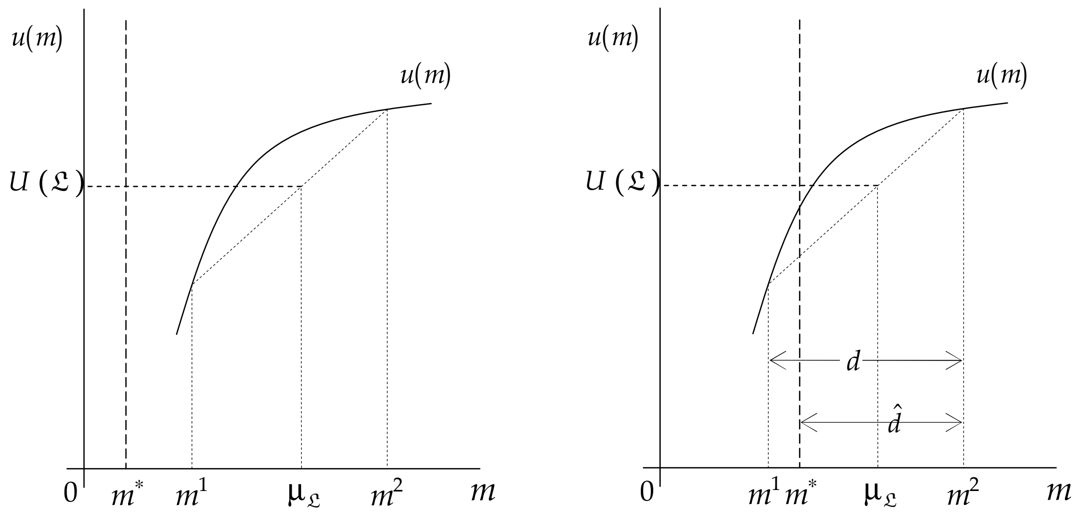
Luego, el comportamiento del individuo es lexicográfico. Así,

1º Se ordenan las loterías, entre aquellas con riesgos soportables y no soportables. Eligiendo aquellas loterías con riesgos soportables y descartando aquellas loterías no soportables, pues éstas implican pérdidas desastrosas. Aquí el individuo actúa como si buscara evitar el desastre económico.

2º Luego, entre las loterías con riesgos soportables, el individuo elige una asignación contingente. Aquí el individuo actúa como si buscará maximizar su utilidad esperada.

Entonces si el individuo enfrenta estas dos loterías, acepta la primera y descarta la segunda. En el segundo caso se tiene que el nivel de pérdidas es mayor al nivel tolerado, $d > \hat{d}$; siendo esta lotería rechazada por el individuo.[17] Luego, una vez elegida la primera lotería procede a elegir sus opciones contingentes.

A continuación representamos gráficamente dos situaciones, la primera donde el individuo acepta la lotería dado que puede absorber las pérdidas; y una segunda situación, donde el individuo rechaza la lotería dado que las pérdidas que acarrean las loterías son no soportables. Veamos,



Obsérvese en el segundo caso, que la única forma de que el individuo enfrente esta lotería, es que aumente el valor de su ingreso inicial, de m^2 a $\bar{m}^2$. Esto le permitiría soportar la pérdida posible igual a d. Aunque en este caso, tendríamos que $d \le \hat{d}$.[18]

---

17 Inclusive es rechazada aún esta lotería ofrezca mayores beneficios que la primera.

18 Para una aplicación de esta teoría al enfoque media – varianza véase FIGUEROA (*Ob. Cit.*: p. 346).

REFERENCIAS

[1] ÁVALOS, E. (2011), *Incertidumbre: loterías y riesgo*. Documento de Trabajo Nº 18. Lima: Centro de Investigaciones Económicas del Instituto de Estudios Sociales del Rímac.

[2] FIGUEROA A. (1993), *Crisis distributiva en el Perú.* Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

[3] FIGUEROA A. (2003), *La Sociedad Sigma: una teoría del desarrollo económico.* Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

[4] HIRSHLEIFER, J. y J. RILEY (1992), *The analytics of uncertainty and information*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] VARIAN, H. (1992), *Análisis microeconómico*. 3ra. Edición. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

[6] VILLAR, A. (1996), *Curso de microeconomía avanzada. Un enfoque de equilibrio general*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.