Abc-model of a Ponzi system

Parodi, Bernhard R.

15 March 2013

Abc-Modell eines Ponzi-Systems

Bernhard R. Parodi[1]

Zusammenfassung. Ein analytisches Modell mit acht Parametern zur Beschreibung idealisierter Ponzi-Systeme mit asymmetrisch und progressiv wachsenden Kapitalzu- und -abflüssen wird präsentiert. Investoren bleiben optional zeitlich begrenzt oder dauerhaft investiert. Diverse Systemvarianten inklusive deren Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingungen ergeben sich durch Modifikation der Auszahlungsfunktion. Das zugrunde liegende deterministische abc-Modell rekursiver Zeitreihen nutzt einen etablierten Ansatz zur Beschreibung einfacher wirtschaftsmathematischer Standardprozesse.

1 Einleitung

Ponzi-Systeme oder -Pyramiden sind Investitionssysteme, die (z.B. periodisch) überhöhte Auszahlungen an Anleger vorwiegend aus (z.B. einmaligen) Einzahlungen einer wachsenden Zahl von Neuanlegern bestreiten. Sobald die steigenden Ausgaben nicht mehr durch entsprechende Einnahmen kompensierbar sind, wird das System defizitär. Bleiben die Systemparameter und das wirtschaftliche Umfeld unverändert, und greift keine Aufsichtsbehörde ein, so ereignet sich aufgrund entweder der Kapitalflucht betrügerischer Systembetreiber oder der schliesslich eintretenden Zahlungsunfähigkeit der Kollaps des Systems.

Ebenfalls nach einem Pyramidenschema laufen Schneeballsysteme (wie Kettenbriefsysteme, Schenkkreise oder gewisse Formen des Multi-Level-Marketings) ab, wobei allerdings jeder Neuteilnehmer proaktiv weitere Teilnehmer gewinnen muss, um sich einen (meistens wachsenden) Profit zu sichern. Dies soll die Ausbildung eines Systemdefizits verhindern und gleichzeitig den Gewinn der Teilnehmer garantieren. Derartige Systeme brechen in der Regel rasch mangels weiterer Teilnehmernachfrage oder nach behördlicher Intervention ein. Ponzi-Systeme münden hingegen auch bei zunehmender Teilnehmernachfrage mangels genügender oder inexistenter Performance in mutwilliger Überschuldung der Betreiber. Auch ist ein mittels eines Ponzi-Schemas vorübergehend angehäufter Kapitalstock nicht mit einer marktfundamentalen Preisblase aufgrund übertrieben stark nachgefragter, überbewerteter Güter zu verwechseln [1].

Belegte historische Beispiele für Ponzi-Systeme sind sowohl Adele Spitzeder's "Dachauer Bank", welche während zwei Jahren bis zum intrigierten betrügerischen Bankrott 1872 operierte [2], als auch William Miller's 1899 in den USA entlarvtes "Franklin Syndicate" [3]. Von deutlich weiter in der Zeit zurückliegenden derartigen Investionssystemen ist allerdings auszugehen. Benannt sind die Systeme nach dem besonders raffinierten US-Gauner Charles Ponzi aus den 1920er Jahren [3]. In den vergangenen Jahrzehnten haben weltweit zahlreiche echte und vermeintliche Ponzi-Systeme erheblichen Schaden angerichtet [4]. Die faktenreichen Ausführungen in [5], beispielsweise, zur Rolle diverser, auch institutioneller Protagonisten in der Vor- und Nachgeschichte des Bernard Madoff-Skandals zeugen von einem breiten Spektrum krimineller bis tragischer Ingredienzen. Unerfreulicherweise weist auch "die klassische Rentenversicherung (..) typische Merkmale einer Ponzi-Pyramide auf und ist daher bei einer stagnierenden oder schrumpfenden Bevölkerung vom Zusammenbruch bedroht."[6] Wirtschaftspolitische Massnahmen sind gegebenenfalls vorsorglich zu ergreifen.

Der vorliegende Artikel bietet ein Werkzeug für das quantitative Studium potenzieller Ponzi-Systeme an und ist daher differenzierten Diskussionen darüber förderlich. Dazu wird ein einfaches mathematisches Modell mit acht Parametern zur formal geschlossenen Beschreibung idealtypischer Ponzi-Systeme eingeführt. Die grundlegende Herleitung erfordert nur Kenntnisse zu Folgen und

[1]Gewerblich-industrielles Bildungszentrum Zug (GIBZ), Baarerstrasse 100, CH-6302 Zug, Schweiz; E-Mail: bernhard.parodi@gibz.ch. Artikelversion vom 15.3.2013.

Reihen auf Mittelschulstufe und versteht sich als finanzmathematische Anwendung dazu. Die einem Ponzi-System zugrunde liegenden Mechanismen und das Zusammenspiel charakteristischer Systemparameter erschliessen sich dann ohne Umweg über Iterationen durch die direkte Angabe interessierender Grössen, wie verfügbares Kapital, Einnahmen, Ausgaben und Zahl der Teilnehmer.

In Abschnitt 2 wird der mathematische Rahmen in Form des (hier so bezeichneten) abc-Modells rekursiver Zeitreihen vorgestellt, welches einem eleganten, allgemeinen Ansatz bei der Beschreibung elementarer finanzmathematischer Prozesse entspricht. Die Beschreibung der Kapitaldynamik eines Ponzi-Systems mittels Herleitung der Rekursionsrelation in diskreten Zeitschritten (Perioden) erfolgt in Abschnitt 3.1, ebenso schliesslich deren explizite Darstellung. In Abschnitt 3.2 geht es um die formale Bestimmung der Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingungen sowie des Zeitspunkts des Systemkollapses. Abschnitt 4 beschreibt drei weitere Systemvarianten. Abschnitt 5 beleuchtet einige zusätzliche modellspezifische Gesichtspunkte, inklusive des Zusammenhangs mit Artzrouni's Kontinuumsmodell eines Ponzi-Systems [7].

2 Das abc-Modell

Das im nächsten Abschnitt eingeführte spekulative Investmentsystem steht auf folgendem wohlbekanntem mathematischem Fundament. Eine von der diskreten Zeitschrittvariablen n abhängige Grösse $P(n)$ entwickle sich rekursiv gemäss der inhomogenen Differenzengleichung erster Ordnung

$$P(n) = (1+p)P(n-1) + Q_1(n-1) + Q_2(n-1), \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{1}$$

mit bekanntem Anfangswert $P(0)$, konstanter Wachstumsrate p und den spezifisch exponentiellen Funktionen $Q_i(n) = \rho_i(1+q_i)^n$, i=1,2, welche ihrerseits konstante reelle Wachstumsraten q_i haben. Schrittweise Iteration der Rekursionsrelation (1) unter Einbezug simpler Eigenschaften geometrischer Reihen führt auf die explizite Darstellung

$$P(n) = \left[P(0) + \frac{\rho_1}{p-q_1} + \frac{\rho_2}{p-q_2}\right](1+p)^n - \frac{\rho_1}{p-q_1}(1+q_1)^n - \frac{\rho_2}{p-q_2}(1+q_2)^n \tag{2a}$$

$$\equiv a\,(1+p)^n + b\,(1+q_1)^n + c\,(1+q_2)^n. \tag{2b}$$

Die Lösung eines durch Gleichung (1) charakterisierten, deterministischen Prozesses ist somit als Summe dreier Exponentialfunktionen darstellbar, deren konstante Koeffizienten a, b und c die hier gewählte Benennung "abc-Modell" motivieren. Evidente Anwendungen dieses Formalismus auf ausgewählte Standardprozesse in Finanzmathematik und dynamischer Makroökonomie reichen von der Tilgung eines Annuitätendarlehens und dem Rentenbezug nach dem Kapitaldeckungsverfahren (mittels konstanten oder geometrisch fortschreitenden Renten) über die Barwertberechnung einer Aktie im einstufigen Dividendendiskontierungsmodell (DDM) bis zur "Schuldenfallenformel" für die Entwicklung einer Staatsschuld (unter der Annahme eines progressiv wachsenden Primärdefizits) und bis hin zum AK-Modellansatz endogenen Wirtschaftswachstums.

3 Das Investitionssystem

3.1 Kapitaldynamik

Das spekulative Investmentsystem asymmetrisch wachsender Kapitalzu- und -abflüsse gehorcht folgendem Schema (Varianten davon werden in Abschnitt 4 beschrieben): Einer Gruppe von N_{00} Initiatoren, welche das System begründen und betreiben und insgesamt ein Anfangskapital K_0 einbringen, schliessen sich gleich zu Beginn der ersten Periode N_0 Investoren (Anleger) an, die ihrerseits je ein einmaliges Cash-Investment I_0 tätigen[2]. Das somit vorhandene Kapital $K_0 + N_0\, I_0$ wird

[2] Das Zeitschrittargument n wird fortan als Index geschrieben.

zu einem mindestens marktüblichen Zinssatz p (bezogen auf eine Periode, z.B. jährlich) angelegt bzw. bewirtschaftet. Am Ende der ersten Periode hat das Gesamtkapital somit um den Faktor $(1+p)$ zugenommen. Da jedem Investor wie auch jedem Initiator *dieselbe* versprochene Rendite (return on investment, ROI) von r Prozent eines Investorenbeitrags I_0 periodisch ausbezahlt wird (siehe jedoch Abschnitt 5 für die Aufweichung dieser Einschränkung), beläuft sich am Ende der ersten Periode das verfügbare Kapital auf $K_1 = [K_0 + B_1](1+p) - A_1$, worin $B_1 = N_0\, I_0$ die Bareinnahmen zu Beginn und $A_1 = (N_{00} + N_0) I_0\, r$ die Ausgaben am Ende der ersten Periode sind.

Zu Beginn der zweiten Periode stossen $(1+q)N_0$ weitere Investoren zu denselben Bedingungen hinzu, wobei $(1+q)$ der Zunahmefaktor der *Neu*investoren ist. Zu Beginn der dritten Periode sind es $(1+q)^2 N_0$ zusätzliche Investoren, usw. Die Zahl der Neuinvestoren wächst somit exponentiell. Analog zu Gleichung (1) werden die Cash-Einlagen B_n der Neuinvestoren zu Beginn der n-ten Periode zusammen mit dem verfügbaren Kapital K_{n-1} (d.h. dem Kapital am Ende der $(n-1)$-ten Periode) verzinst, so dass sich am Ende der n-ten Periode nach Auszahlung A_n an die Investoren das Gesamtkapital

$$K_n = [K_{n-1} + B_n]\,(1+p) - A_n \tag{3}$$

im System befindet. Die Berechnung der Grössen A_n und B_n erfordert die Kenntnis der entsprechenden Anzahl Systemteilnehmer. So sind die zu Beginn der n-ten Periode eingenommenen Neugelder B_n proportional zur Zahl der Neuinvestoren, d.h. zu

$$\Delta N_n = N_0 (1+q)^{n-1}, \qquad (\forall n) \tag{4}$$

während die Auszahlungen A_n am Ende der n-ten Periode von der Anzahl aller Initiatoren und Investoren zu Beginn der Periode abhängen, d.h. von

$$N_n = N_{00} + \sum_{k=1}^{n} \Delta N_k = N_{00} + N_0 \frac{(1+q)^n - 1}{q}. \qquad (n \leq m) \tag{5}$$

Gleichung (5) enthält neben der Anzahl N_{00} der Initiatoren die n-te Teilsumme einer geometrischen Folge mit Gliedern gemäss Gleichung (4). Die Anzahl aller investierten Systemteilnehmer wächst somit ebenfalls geometrisch. Als optionale Modellspezifikation wird zudem angenommen, dass jeder Investor nur eine beschränkte Anzahl von m Perioden investiert bleibt (die Initiatoren hingegen dem System dauerhaft treu sind): falls $n \geq m$ ist, treten am Ende der n-ten Periode ΔN_{n-m+1} Investoren aus. Die Zahl aller investierten Systemteilnehmer zu Beginn der n-ten Periode ist somit

$$\begin{aligned} N_n &= N_{00} + \sum_{k=1}^{n} \Delta N_k - \sum_{k=m}^{n-1} \Delta N_{k-m+1} \\ &= N_{00} + N_0 \frac{(1+q)^n - (1+q)^{n-m}}{q}. \qquad (n > m) \end{aligned} \tag{6}$$

Folglich kommt zu Beginn der n-ten Periode ein Cash-Betrag von

$$B_n = I_0 \Delta N_n = I_0 N_0 (1+q)^{n-1} \qquad (\forall n) \tag{7}$$

an Neugeldern hinzu, während am Ende der n-ten Periode die Auszahlungen aufgrund von Rendite- und Rückzahlungen entweder mit Gleichung (5)

$$A_n = N_n I_0 r = N_{00} I_0 r + N_0 I_0 \frac{(1+q)^n - 1}{q} r \qquad (n < m) \tag{8a}$$

oder mit Gleichung (6)

$$\begin{aligned} A_n &= N_n I_0 r + \Delta N_{n-m+1} I_0 \\ &= N_{00} I_0 r + I_0 N_0 \left[\frac{(1+q)^n - (1+q)^{n-m}}{q} r + (1+q)^{n-m} \right] \qquad (n \geq m) \end{aligned} \tag{8b}$$

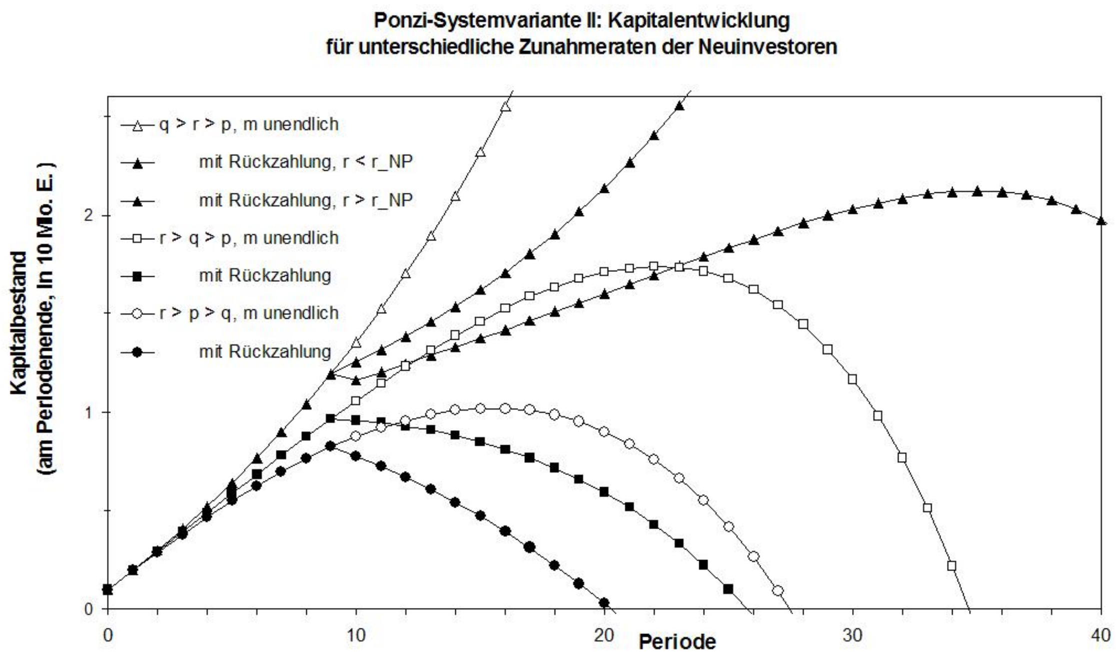

Abbildung 1: Ponzi-Systemvariante II: Kapitalentwicklung ceteris paribus für unterschiedliche Wachstumsraten q der Neuinvestoren (12% (△,▲), 7% (□,■), 3% (○,●)), und bei ansonsten gleichbleibenden Parameterwerten: $K_0 = 1'000'000$ E, $I_0 = 100'000$ E, N_{00}=1, N_0=10, p=4%, r=10% und entweder $m \to \infty$ (d.h. es kommt zu keinen finalen Rückzahlungen; offene Symbole) oder m=10 (d.h. jeder Investor bleibt 10 Perioden investiert, bevor er sich auszahlen lässt; gefüllte Symbole); E steht für Währungseinheit. Eine Ausnahme von der ceteris-paribus-Vorgabe bildet der untere der beiden mit ▲ markierten Graphen: hier liegt der Renditesatz bei r=11%, was knapp über dem für ein Nicht-Ponzi-Spiel erforderlichen Satz von r_{NP}=10.74% ist.

betragen. Hierin ist $I_0 r$ der Return on Investment (ROI) und $\Delta N_{n-m+1} I_0$ steht für die Rückzahlungen an die vor m Perioden in das System eingetretenen und nun ausscheidenden Investoren: sie ziehen ihre Einmalinvestition I_0 wieder aus dem System ab. (Investoren, die sich weiterhin am System beteiligen wollen, treten einfach erneut ins System ein und reinvestieren ihr Kapital.)

Einsetzen der Ausdrücke (7) und (8a) in Gleichung (3) führt auf die Rekursion

$$K_n = (1+p)K_{n-1} + \rho_1 (1+q)^{n-1} + \rho_2, \tag{9}$$

mit den Konstanten $\rho_1 = I_0 N_0 \left[1 + p - (1+q)\, r/q\right]$ und $\rho_2 = -N_{00} I_0 r + N_0 I_0 r/q$. Da die implizite Rekursionsgleichung (9) formal äquivalent zu Gleichung (1) ist, folgt durch Vergleich mit Gleichung (2a) nach wenigen algebraischen Umformungen die explizite Lösung des abc-Modells

$$K_n = a(1+p)^n + b(1+q)^n + c, \tag{10}$$

wobei die Formeln zur Berechnung der konstanten Koeffizienten a, b und c in der Übersichtstabelle 2 unter Modellvariante II (Periodischer ROI) aufgeführt sind (für den Fall $n < m$, d.h. mit $\mathbf{1}_{nm} = 0$).

Tabelle 1: Die acht Parameter des Ponzi-Systems

K_0	Startkapital aller Initiatoren	p	Geldmarktbezogene Wachstumsrate
I_0	Investment eines Investors	q	Zunahmerate der Neuinvestoren
N_{00}	Anzahl Initiatoren	r	Versprochener Renditesatz
N_0	Anzahl Investoren zu Beginn	m	Dauer eines Engagements

Tabelle 2: Vier Varianten eines spekulativen Investitionssystems (Ponzi-Systems): die Koeffizienten im abc-Modell

Verfügbares Kapital nach n Perioden: $K_n = a(1+p)^n + b(1+q)^n + c$. Investoren (Anleger) können während m Perioden Ansprüche bezüglich Rendite (ROI) und Rückzahlungen geltend machen. Initiatoren (Systembetreiber) sind hingegen dauerhaft investiert und erhalten entweder periodisch ein ROI (u.a. zur Deckung der Unkosten, $N_{00} \neq 0$) oder kein ROI (philanthropische Initiatoren, dazu $N_{00} = 0$ setzen). Die Fallunterscheidung für die Kapitalberechnung entweder innerhalb der allerersten $m-1$ Perioden oder später erfolgt mittels der Heaviside-Funktion $\mathbf{1}_{nm} = \begin{cases} 0 & n < m, \\ 1 & n \geq m \end{cases}$.

I. ***Kumulierter ROI*** (mit finaler Rückzahlung). Jedem Investor wird erst nach m Perioden eine kumulierte Rendite ausbezahlt; gleichzeitig erhält er sein Investment zurück und verlässt das System: die einmalige Auszahlung an einen Investor ist $I_0(1+r)^m$. Jeder Initiator erhält hingegen periodisch ein ROI von $I_0\, r$.	$a = I_0 N_0 \frac{1+p}{p-q}\left[1-\left(\frac{1+r}{1+p}\right)^m \mathbf{1}_{nm}\right] + K_0 - \frac{N_{00} I_0\, r}{p}$ $b = -I_0 N_0\left[\frac{1+q}{p-q}\left[1-\left(\frac{1+r}{1+q}\right)^m \mathbf{1}_{nm}\right] + 1\right]$ $c = \frac{N_{00} I_0\, r}{p}$
II. ***Periodischer ROI*** (mit finaler Rückzahlung). Jeder Investor erhält periodisch ein ROI von $I_0\, r$; am Ende der m-ten Periode erhält er zudem sein Investment zurück und verlässt das System. Jeder Initiator erhält ebenfalls periodisch ein ROI von $I_0\, r$.	$a = I_0 N_0 \frac{1+p}{p-q}\left(1-\frac{r}{p}\right)\left(1-\frac{1}{(1+p)^m}\mathbf{1}_{nm}\right) + K_0 - \frac{N_{00} I_0\, r}{p}$ $b = -I_0 N_0\left[\frac{1+q}{p-q}\left(1-\frac{r}{q}\right)\left(1-\frac{1}{(1+q)^m}\mathbf{1}_{nm}\right) + 1\right]$ $c = \frac{I_0\, r}{p}\left[N_{00} - \frac{N_0}{q}\left(1-\mathbf{1}_{nm}\right)\right]$
III. ***Periodische Rückzahlungen*** (mit periodischem ROI). Jeder Investor erhält periodisch sowohl ein ROI von $I_0\, r$ als auch eine Teilrückzahlung I_0/m. Bis zum Ende der m-ten Periode hat er sein Investment zurück erhalten und verlässt das System. Jeder Initiator erhält ebenfalls periodisch ein ROI von $I_0\, r$.	$a = I_0 N_0 \frac{1+p}{p-q}\left[1-\frac{r+m^{-1}}{p}\left(1-\frac{1}{(1+p)^m}\mathbf{1}_{nm}\right)\right] + K_0 - \frac{N_{00} I_0\, r}{p}$ $b = -I_0 N_0\left[\frac{1+q}{p-q}\left[1-\frac{r+m^{-1}}{q}\left(1-\frac{1}{(1+q)^m}\mathbf{1}_{nm}\right)\right] + 1\right]$ $c = \frac{N_{00} I_0\, r}{p} - \frac{N_0 I_0}{pq}\left(r+m^{-1}\right)\left(1-\mathbf{1}_{nm}\right)$
IV. ***Subsidiärinvestitionen*** (keine Rückzahlungen). Jeder Investor erhält während m Perioden ein ROI von $I_0\, r$; danach verlässt er das System, belässt jedoch seine Investition darin (Subsidiarität). Jeder Initiator erhält ebenfalls periodisch ein ROI von $I_0\, r$.	$a = I_0 N_0 \frac{1+p}{p-q}\left[1-\frac{r}{p}\left(1-\frac{1}{(1+p)^m}\mathbf{1}_{nm}\right)\right] + K_0 - \frac{N_{00} I_0\, r}{p}$ $b = -I_0 N_0\left[\frac{1+q}{p-q}\left[1-\frac{r}{q}\left(1-\frac{1}{(1+q)^m}\mathbf{1}_{nm}\right)\right] + 1\right]$ $c = \frac{I_0\, r}{p}\left[N_{00} - \frac{N_0}{q}\left(1-\mathbf{1}_{nm}\right)\right]$

Die Ermittlung der Koeffizienten für Perioden $n \geq m$ (d.h. unter Berücksichtigung der Rückzahlungen an Investoren, die das System nach m Perioden verlassen, erstmals Ende der (n=m)-ten Periode) verläuft analog zum oben durchexerzierten Schema, doch wird der Periodenindex n für das Kapital erst ab der m-ten Periode laufen gelassen bzw. durch den Index $n' = n - m = 1, 2, 3, ...$ ersetzt. Einsetzen der Ausdrücke (7) und (8b) in die adaptierte Gleichung (3), $K_{n'} = [K_{n'-1} + B_n]\,(1+p) - A_n$, liefert Rekursion (9) in adaptierter Form: $K_{n'} = (1+p)K_{n'-1} + \rho_1(1+q)^{n'-1} + \rho_2$, diesmal mit den Konstanten $\rho_1 = N_0 I_0 \big[p - q + (1+q)(1-r/q)(1-(1+q)^{-m})\big](1+q)^m$ und $\rho_2 = -N_{00} I_0\, r$. Anfangswert der adaptierten Rekursion ist das verfügbare Kapital am Ende der m-ten Periode, verringert um die erstmalige Rückzahlung an die erste Investorengeneration, also $K_{n'=0} = K_{n=m} - N_0 I_0$. Wiederum führt der Vergleich mit den Gleichungen (1) und (2a) nach wenigen algebraischen Schritten auf die Lösung (10), wobei die resultierenden Koeffizienten des abc-Modells der Übersichtstabelle 2 unter Modellvariante II (Periodischer ROI) für den Fall $n \geq m$ (d.h. mit $\mathbf{1}_{nm} = 1$) entnommen werden können.

Fazit: das im vorliegenden spekulativen Investmentsystem nach n Perioden verfügbare Kapital K_n ergibt sich im Rahmen des abc-Modells als Summe zweier Exponentialfunktionen plus einer additiven Konstanten und hängt von den acht Parametern K_0, I_0, N_{00}, N_0, p, q, r und m ab (vgl. Tabelle 1). Die Lösungen erweisen sich als zusammengesetzte Funktionen für die Fälle $n<m$ und $n \geq m$. Die in Tabelle 2 aufgelisteten Modellkoeffizienten gelten, falls $p \neq q$, $p \neq 0$, $q \neq 0$; für die Sonderfälle mit $p = q \neq 0$ lassen sich ebenso wie bei Vorliegen von p=0 oder q=0 mittels Grenzwertuntersuchungen (z.B. $\lim_{q\to 0}[(1+q)^n - 1]/q = n$) die entsprechenden Koeffizienten ebenfalls formal ermitteln (auf deren Angabe an dieser Stelle verzichtet wird mit dem Hinweis darauf, dass für quantitative Berechnungen einfach sehr kleine Werte von p oder q eingesetzt werden können).

Abbildung 1 repräsentiert zeitliche Entwicklungen des Kapitalbestands ceteris paribus (also unter bis auf die Einstellung eines einzelnen variablen Parameters gleichen Bedingungen): je nach dem Wert der Wachstumsrate q der Neuinvestoren liegt ein Ponzi-System —mit anwachsendem Kapital, Erreichen eines maximalen Kapitalbestands und Kollaps nach endlicher Zeit— vor oder eben nicht. Nehmen die Einmaleinlagen im Verhältnis zu den ebenfalls wachsenden Ausgaben genügend rasch zu, liegt ein Nicht-Ponzi-Spiel vor: die beiden mit gefüllten Dreieckssymbolen gekennzeichneten Kurven unterscheiden sich nur dadurch, dass in der oberen Situation der Renditesatz kleiner (r=10%; Nicht-Ponzi-Spiel) und in der unteren Situation grösser (r=11%; Ponzi-System) als ein kritischer Renditesatz r_{NP} ist (mehr dazu in Abschnitt 3.2). Im Vergleich zur Dauer des Kapitalaufbaus kann die Phase des Kapitalabbaus sowohl deutlich kürzer als auch länger dauern. Die Knick im Übergang von der $(m-1)$-ten zur m-ten Periode ist durch das Einsetzen der ersten Rückzahlungen an ausscheidende Investoren bedingt. Dieser Zeitpunkt muss nicht den maximal verfügbaren Kapitalbestand markieren, wie der Verlauf der unteren der beiden bereits erwähnten Kurven illustriert.

3.2 Nicht-Ponzi-Spiel und Systemkollaps

Im Folgenden werden positive Wachstumsraten $p > 0$ und $q > 0$ vorausgesetzt. Die Berechnung der (reellen) Periode mit dem maximal verfügbaren Kapital, n_{max}, ergibt sich indirekt aus der Extremalbedingung dK_n/dn=0 (sei ad hoc $n \in \mathbb{R}$), welche die beiden provisorischen Perioden

$$n_i = \ln\left[-\frac{a\ln(1+p)}{b\ln(1+q)}\right] \Big/ \ln\left(\frac{1+q}{1+p}\right) \qquad (i = 0, 1) \tag{11}$$

liefert, wobei n_0 mit den abc-Koeffizienten für den Fall $n<m$ (d.h. mit $\mathbf{1}_{nm}$=0) und n_1 mit denjenigen für den Fall $n \geq m$ ($\mathbf{1}_{nm}$=1) berechnet ist. Damit wird die (reelle) Kapitalmaximumsperiode

$$n_{\max} \cong \begin{cases} n_0 & n_0 < m-1 \\ m-1 & n_1 < m-1 \quad (n_0 \geq m-1) \\ n_1 & n_1 \geq m-1 \quad (n_0 \geq m-1). \end{cases} \tag{12}$$

Tabelle 3: NICHT-PONZI-SPIEL-BEDINGUNGEN
für die in Tabelle 2 aufgeführten Systemvarianten. Als kritische Grösse fungiert der Renditesatz $r{>}0$: Systeme mit Werten $r < r_{NP}$ sind Nicht-Ponzi-Spiele. Variante I ist gemäss Konstruktion für $n{<}m$ kein durch Kapitalverzehr zusammenbrechendes Ponzi-System. Die beiden Kriterien $a, b > 0$ (falls $p{>}q$) und $a, b < 0$ (falls $p{<}q$) sind durch den Maximumauswahloperator $\max\{...\}$ zusammenführbar. Abgekürzte Notation: $p_{nm} \equiv 1{-}(1{+}p)^{-m}\mathbf{1}_{nm}$ und $q_{nm} \equiv 1{-}(1{+}q)^{-m}\mathbf{1}_{nm}$.

I. ***Kumulierter ROI*** ($n{\geq}m$):

$$\begin{cases} \left(\frac{1+r_{NP}}{1+p}\right)^m + \frac{p-q}{1+p}\left(\frac{N_{00}}{N_0 p} r_{NP} - \frac{K_0}{N_0 I_0}\right) - 1 = 0 & (p > q;\;\; r_{NP} \text{ numerisch}) \\ r_{NP} = (1+q)\left(\frac{1+p}{1+q}\right)^{1/m} - 1 & (p < q) \end{cases}$$

II. ***Periodischer ROI***:

$$r_{NP} = \max\{\;\; \left(1 + \frac{p-q}{1+q}\, q_{nm}^{-1}\right) q \;;\;\; \frac{p_{nm} + \frac{p-q}{1+p}\frac{K_0}{N_0 I_0}}{p_{nm} + \frac{p-q}{1+p}\frac{N_{00}}{N_0}}\; p \;\;\}$$

III. ***Periodische Rückzahlungen***:

$$r_{NP} = \max\{\;\; \frac{1+p}{1+q}\, q\, q_{nm}^{-1} - \frac{1}{m} \;;\;\; \frac{1 + \frac{p-q}{1+p}\frac{K_0}{N_0 I_0} - \frac{1}{mp} p_{nm}}{p_{nm} + \frac{p-q}{1+p}\frac{N_{00}}{N_0}}\; p \;\;\}$$

IV. ***Subsidiärinvestitionen***:

$$r_{NP} = \max\{\;\; \frac{1+p}{1+q}\, q\, q_{nm}^{-1} \;;\;\; \frac{1 + \frac{p-q}{1+p}\frac{K_0}{N_0 I_0}}{p_{nm} + \frac{p-q}{1+p}\frac{N_{00}}{N_0}}\; p \;\;\}$$

Diese leicht umständliche, Fall abhängige Bestimmung ist eine Konsequenz der Zusammengesetztheit der in Gleichung (10) formulierten Kapitalfunktion.

Eine Kapitalmaximumsperiode kann aus mathematischer Sicht existieren, falls das Argument im Logarithmus des Zählers in Gleichung (11) positiv ist und daher die Koeffizienten a und b ungleiche Vorzeichen haben. Das Vorliegen eines Maximums impliziert auch das Vorliegen einer Nullstelle (da sich die Funktion (10) für grosse Werte von n divergent verhält) und somit eines unausweichlichen Systemkollapses, was insgesamt ein (illegales) Ponzi-System darstellt. Notwendige Bedingung für ein sogenanntes Nicht-Ponzi-Spiel ist demgegenüber die Nichtexistenz einer Maximumsperiode beziehungsweise die Forderung, dass die Koeffizienten a und b gleiche Vorzeichen haben. (Dies folgt auch aus der Hochpunktbedingung $d^2K_n/dn^2{<}0$, insbesondere für $n{\to}\infty$.) Die hieraus bestimmten parameterabhängigen Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingungen sind in Tabelle 3 sowohl für das in Abschnitt 3.1 hergeleitete System (Variante II) als auch für die später in Abschnitt 4 behandelten Systemvarianten aufgeführt. Dabei wird der positive Renditesatz $r{>}0$ als kritische Grösse verwendet (doch lassen sich die Bedingungsgleichungen im Prinzip auch nach einem anderen Parameter auflösen), und wie oben und in Tabelle 2 wird wiederum zwischen früheren ($n < m$) und späteren Perioden ($n \geq m$) unterschieden.

Die vitalste Frage, die sich bei Vorliegen eines Ponzi-Systems stellt und an deren Antwort sowohl betrügerische Initiatoren als auch bewusst profitierende Investoren interessiert sind, ist die nach dem Zeitpunkt des Systemkollapses bzw. nach der Periode, in welcher das Kapital vollständig aufgebraucht ist. Leider bietet das abc-Modell keinen analytisch-geschlossenen Ausdruck für die generelle Berechnung der "Nullstelle" von K_n an (d.h. eine Lösung der Gleichung $K_n \approx 0$ beziehungsweise einer Periode $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $K_n{\geq}0$, $K_{n+1}{<}0$). Im Allgemeinen muss die Lösung numerisch (z.B. mit dem Regula falsi-Verfahren) oder grafisch ermittelt werden. Ausgesuchte Parameterwertekonstellationen erlauben allerdings eine formale Abschätzung der Periode des Systemkollapses oder geben in Ausnahmefällen ein exaktes Ergebnis:

(1) Erfüllen die abc-Koeffizienten die Bedingung $|a|, |b| \gg c$ (was z.B. immer für $p \approx q$ gilt), so ist die additive Konstante in Gleichung (10) näherungsweise vernachlässigbar, d.h. $c \approx 0$. Die geschätzte (reelle) Periode des Systemkollapses ist dann

$$n_{\text{Kollaps}} \approx \ln\Big(-\frac{a}{b}\Big) / \ln\Big(\frac{1+q}{1+p}\Big) \qquad (|a|,\ |b| \gg c). \tag{13}$$

(2) Für ausgewählte Wertekombinationen von p und q sind exakte Lösungen bestimmbar. So lässt sich Gleichung (10) für $1+q = (1+p)^2$ bzw. $1+p = (1+q)^2$ als quadratische Gleichung in der Variablen $(1+p)^n$ bzw. $(1+q)^n$ schreiben; dies mündet in der (reellen) Kollapsperiode

$$n_{\text{Kollaps}} = \begin{cases} \ln\Big(-\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\Big) / \ln(1+p) & q = (1+p)^2 - 1 > 0 \\ \ln\Big(-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Big) / \ln(1+q) & p = (1+q)^2 - 1 > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Ein Zahlenbeispiel mag diesen Abschnitt beschliessen: die abc-Koeffizientenwerte der beiden in Abbildung 1 mit Quadrat-Symbolen dargestellten Systemvarianten sind a = 52'750'000, b = –16'285'714, c = –35'464'286 (□) und a = 17'620'663, b = –8'515'232, c = 250'000 (■), was rechnerisch mit Gleichung (12) die Kapitalmaximumsperioden $n_{\max} = 22.2$ bzw. $n_{\max} = 9$ und im zweiten System mit Gleichung (13) die Kollapsperiode $n_{\text{Kollaps}} \approx 25.6$ ergibt.

4 Varianten des Investitionssystems

Das bisher beschriebene Investitionssystem lässt sich durch Abändern der Auszahlungsfunktion A_n bei ansonsten gleicher Dynamik variieren. Dementsprechend bleibt der durch das abc-Modell gegebene Rahmen erhalten, die Koeffizienten a, b und c erfahren jedoch eine Anpassung. Die formalen Ergebnisse dieses Abschnitts sind in den Übersichtstabellen 2 und 3 zusammengestellt.

(0) *Philanthropische Initiatoren.* Eine Untervariante des vorliegenden Investmentsystems besteht in der Annahme, dass die Initiatoren zwar insgesamt ein Grundkapital K_0 ins System einbringen, sich im Folgenden aber keine Renditen ausbezahlen (und somit weder direkt profitieren noch damit die Systembetriebsunkosten decken können); nur die Investoren erhalten periodisch eine Rendite ausbezahlt. Formale Konsequenz dieser Untervariante: in allen vier der im Folgenden beschriebenen Systemvarianten muss im Falle eines Renditeverzichts seitens der Initiatoren bei der Berechnung der abc-Modellkoeffizienten einfach der Paramter $N_{00} = 0$ gesetzt werden. (Die Bezeichnung "philanthropisch" ist bei [7] entlehnt, entspricht dort aber eher unserer Variante IV, siehe weiter unten.)

(I) *Kumulierte Rendite, mit finaler Rückzahlung.* Eine Variante des Investmentsystems besteht darin, dass den Investoren die Rendite nicht periodisch ausbezahlt wird, sondern dass sie die nach Art eines Zinseszinses berechnete Gesamtrendite erst am Ende ihres Engagements nach m Perioden zusammen mit der Rückzahlung der Erstinvestition ausbezahlt erhalten, d.h. beim Austritt aus dem System wird an sie je der Betrag $I_0(1+r)^m$ ausgeschüttet. Die Auszahlungsfunktionen sind

$$A_n = \begin{cases} N_{00} I_0 r & (n < m) \\ N_{00} I_0 r + \Delta N_{n-m+1} I_0 (1+r)^m & (n \geq m). \end{cases} \tag{15}$$

Die Berechnung der Koeffizienten des abc-Modells erfolgt nach dem gleichen Verfahren wie in Abschnitt 3.1, mit dem in Tabelle 2 unter Systemvariante I (Kumulierter ROI) zusammengefassten Resultat.

Der populärwissenschaftliche Artikel "Der Milliardenbetrug und die Rentenversicherung" von Jean-Paul Delahaye in *Spektrum der Wissenschaft* [6] verwendet ein fiktives Ponzi-Schema, um in aller Kürze mittels eines schrittweise durchgerechneten Zahlenbeispiels die typische Entwicklung des Kapitals bis zum Systemkollaps zu illustrieren. Das dort iterierte Modell entspricht der hier vorgestellten Systemvariante I (Kumulierte Rendite), mit den Parameterwerten $K_0 = 0$, $I_0 = 100'000$, $N_{00} = 0$, $N_0 = 1$, $p = 10\%$, $q = 0\%$, $r = 30\%$, $m = 3$, wobei noch zu berücksichtigen

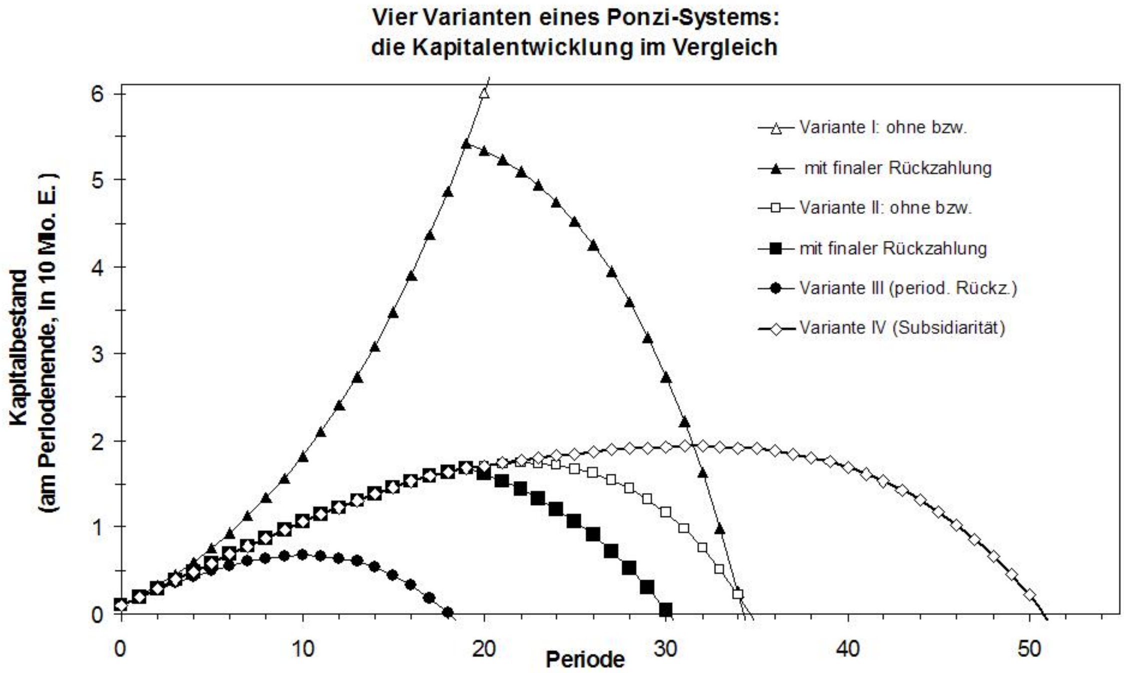

Abbildung 2. Vier Systemvarianten eines Ponzi-Systems: die Kapitalentwicklung im Vergleich. Die Kapitalströme der in Abschnitt 4 beschriebenen Varianten des Ponzi-Systems weisen wie erwartet unterschiedlich lange Überlebenszeiten auf. Allen Graphen liegen dieselben Parameterwerte zugrunde: K_0=1'000'000 E, I_0=100'000 E, N_{00}=1, N_0=10, p=4%, q=7%, r=10% und $n<m\to\infty$ ($\triangle$, $\square$) oder m=20 (übrige Symbole). E steht für Währungseinheit.

ist, dass Delahaye's Zahlenwerte den Kassenbestand zu Beginn der n-ten Periode nach Eingang der Neugelder angeben, während das vorliegende abc-Modell das Kapital am Ende einer Periode unmittelbar nach allen Auszahlungen berechnet. Nebenbei sei angemerkt, dass sich durch diese unterschiedliche Bestandesaufnahme der Zeitpunkt des Systemkollapses scheinbar leicht verschiebt.

(II) *Periodischer ROI, mit finaler Rückzahlung.* Das in Abschnitt 3.1 exemplarisch hergeleitete Modell sei hier und in Tabelle 2 der Systematik und der Vollständigkeit halber als Systemvariante II aufgeführt.

(III) *Periodische Rückzahlung, mit periodischem ROI.* Jeder Investor reduziert periodisch sein Investment um den konstanten Betrag I_0/m, gleichwohl erhält er während m-Perioden eine fixe Rendite auf der ursprünglichen Einlage I_0 ausbezahlt. Die effektive Investorenrendite ist somit $I_0(r + 1/m)$. Dementsprechend ist die Auszahlungsfunktion

$$A_n = N_{00}I_0r + (N_n - N_{00})I_0(r + m^{-1}), \tag{16}$$

wobei für die Teilnehmerzahlen N_n der gegebenen Fallunterscheidung gemäss die Formeln der Gleichungen (5) oder (6) einzusetzen sind. Die Rechenprozedur zur Bestimmung der abc-Modellkoeffizienten ist wie gehabt durchführbar und liefert die in Tabelle 2 unter Systemvariante III (Periodische Rückzahlung) eingetragenen Ausdrücke.

(IV) *Subsidiärinvestitionen.* Als letzte der besprochenen Varianten sei angenommen, dass die Investoren m Jahre investiert bleiben und periodisch ihre Rendite beziehen, danach aber bei Systemaustritt ihr Geld à fonds perdu im System belassen. Die nicht rückbezahlten Investitionen der ausscheidenden Investoren können somit für Renditezahlungen an die im System verbleibenden Investoren verwendet werden (Subsidiarität). Diese systemunterstützende Variante entspricht der Situation von Sozialversicherungssystemen, die zum Zeitpunkt der Pensionierung eines Rentners (Neuinvestors) eine Einmaleinlage einbezahlt erhalten und während der restlichen Lebenszeit des Rentners (typischerweise m Perioden) Renten ausbezahlen; nach dem Tod eines Versicherten verlieren dessen Hinterbliebene den Anspruch auf eine allenfalls vorhandene Restsumme. Die Auszahlungsfunktion ist in allen Perioden

$$A_n = N_n I_0 r, \tag{17}$$

wobei für die Teilnehmerzahlen N_n der periodenabhängigen Fallunterscheidung gemäss die Formeln aus den Gleichungen (5) bzw. (6) einzusetzen sind. Die Rechenprozedur zur Bestimmung der abc-Modellkoeffizienten läuft nach inzwischen bekanntem Muster ab und liefert die in der Tabelle 2 unter Systemvariante IV (Subsidiärinvestitionen) eingetragenen Ausdrücke. Nicht überraschend entspricht das Resultat demjenigen der insofern modifizierten Systemvariante III, als der effektive Renditesatz $(r+1/m)$ in allen Koeffizienten auf r reduziert wird, was Rückzahlungen unterdrückt.

Abbildung 2 vergleicht die vier Systemvarianten exemplarisch unter gleichen Bedingungen. Mit den gegebenen Parameterwerten führen alle Varianten (ausser selbstverständlich Variante I ohne jegliche Auszahlungen) aufgrund vollständigen Kapitalverzehrs schliesslich zum Zusammenbruch des Systems. Diesen ereilt bemerkenswerterweise auch das subventionistische System der Variante IV, trotz eingefrorenen Anlagegeldern; würde allerdings die Dauer m des Investitionsengagements um 15% auf m=17 reduziert oder der Umwandlungssatz r nur wenig verringert ($r < r_{NP} = 9.18\%$), so wäre der Kapitalbestand langfristig wachsend (nicht abgebildet). — Matchentscheidend ist in allen Varianten die Verletzung oder die Erfüllung der jeweiligen Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingung (siehe Tabelle 3).

5 Diskussion

Abschliessend werden einige bisher nicht oder kaum berücksichtigte sowie weiterführende Gesichtspunkte kurz angesprochen.

Mittels eines Tabellenkalkulationsprogramms ist die Gültigkeit der in Tabelle 2 gegebenen Formeln durch Vergleich mit den Resultaten einer rein iterativen Berechnung leicht überprüfbar. Vertrauen in die Korrektheit der in Tabelle 3 aufgeführten Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingungen ist ebenfalls numerisch wohl am leichtesten zu gewinnen.

Nebst der Kapitalentwicklung K_n sind auch andere interessierende Kennzahlen wie Teilnehmerzahl N_n oder deren Änderung ΔN_n, Einnahmen B_n und Ausgaben A_n analytisch ermittelbar und dadurch auch entsprechende Verhältniszahlen einfach berechenbar. Damit vereinfacht sich auch der Parallelvergleich des tatsächlichen Ablaufs eines Ponzi-Systems (basierend auf realen Renditen) und mit der von den Promotoren behaupteten, angeblichen Entwicklung (basierend auf einer fiktiven Rendite).

Die Kapitalentwicklung allein liesse sich für alle Varianten mit nur sieben Parametern beschreiben, falls der Parameter N_0 in den abc-Koeffizienten durch einen Parameter $I_{00} = N_0 I_0$ ersetzt und der wiederkehrende Ausdruck $N_{00} I_0 r$ für die Initiatorenrendite ebenfalls als einzelner Parameter geschrieben würde. Damit verschenkte man sich allerdings die Möglichkeit einer zusätzlichen, ausdrücklichen Ermittlung der bis zum Beginn einer Periode kumulierten Teilnehmerzahl N_n und der Zahl der Neuinvestoren ΔN_n wie auch der Zahl der an einem Periodenende ausscheidenden Investoren, ΔN_{n-m+1}.

Die Management-Gebühren für die Verwaltung des Systemkapitals sind in der Rendite der Initiatoren eingerechnet, was deren tatsächliche Rendite verringert. Doch stellt die in den abc-Koeffizienten auftretende Grösse $N_{00} r$ einen pauschalen Initiatorenrenditesatz dar, dessen Höhe durch Schrauben an $N_{00} \in \mathbb{R}$ ad hoc beliebig verändert werden kann.

Die Ansprüche der einzelnen Investoren steigen nicht, ihr ROI (bzw. r) ist konstant; doch steigt mit jeder Periode der Gesamtanspruch (A_n) aller investierten Renditebezüger. Der Einbau exponentiell steigender ROIs (z.B. in der Form $r_n{=}r(1{+}q_r)^{n-1}$) stellte eine unkomplizierte, im Rahmen des abc-Modells ohnehin vorgesehene logische Erweiterung des vorliegenden Ponzi-Systems dar.

Die Anzahl der Investoren wird aus Gründen einfacher analytischer Berechenbarkeit als reell angenommen; in einem Tabellenkalkulationsprogramm sind realistische, auf natürliche Zahlen gerundete Werte allerdings einfach zu bewerkstelligen, und es zeigt sich, dass das kapitaldynamische Verhalten des Systems qualitativ gleich und (für nicht zu kleine Teilnehmerzahlen) quantitativ vergleichbar bleibt.

Selbst bei Erfüllung der Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingung ist die praktische Wachstumsgrenze eines Systems erreicht, sobald sich die gesamte Bevölkerung mit einer Einmaleinlage beteiligt hat (d.h. wenn $N_n{=}N_{\max}$, siehe dazu die gedachte Extrapolation von "Variante I ohne Rückzahlung" in Abbildung 2). Liessen sich allerdings, hypothetischerweise, genügend Investoren finden, die gewillt wären, eine Zweiteinlage in adäquater Höhe zu leisten, dann verschöbe sich der Kollapszeitpunkt ein wenig. Doch auch durch eine Debitorenspirale (dank solcherart realisierter Mehrfacheinlagen) wäre der Zusammenbruch aufgrund beschränkter Geldressourcen letztendlich nicht vermeidbar.

Die Werte der acht Parameter bleiben im vorgestellten Modell während der gesamten Kapitalstromentwicklung unverändert. Realistischerweise wäre es aber von Interesse, nach einer gewissen Anzahl Perioden einzelne Parameterwerte (z.B. den Marktzins p oder —insbesondere vor dem Hintergrund einer möglichen Anwendung auf Rentenversicherungssysteme— die Einmaleinlagen I_0, den Renditesatz r oder die Dauer der Engagements m) zu ändern und dann den Kapitalstrom weiterzuverfolgen. Dies stellt eine herausfordernde Ausbaumöglichkeit des Modells dar.

Die vier Ponzi-Systemvarianten beschreiben unter besonderer Berücksichtigung der Option, Investorenaustritte jeweils einzubeziehen oder nicht (formal durch die Heaviside-Stufenfunktion umgesetzt), eigentlich sogar acht Systemvarianten. Die Möglichkeit philanthropischer Initiatoren erweitert den Variantenreichtum zusätzlich. Eine weitere Diversifikation ist durch die Definition anderer als der oben verwendeten Auszahlungsfunktionen zu erreichen.

Die Superposition von Ponzi-Systemen mit verschiedenen Parameterwerten und gegebenenfalls auch mit unterschiedlichen Anfangsperioden ist mit dem vorliegenden Formalismus unkompliziert zu bewerkstelligen. Dabei kann dieselbe Systemvariante mehrfach vorkommen oder verschiedene Varianten können kombiniert auftreten. Damit liesse sich beispielsweise die Zulassung mehrerer, verschieden grosser Investorengruppen (welche zudem je andere Einmaleinlagen mit anderen Investitionshorizonten tätigen) oder auch regelmässige Kapitalspritzen von ausserhalb des Systems (z.B. durch eine solvente externe Interessengruppe, welche am möglichst langen Überleben des Systems interessiert ist) simulieren.

Durch geeignete Uminterpretation oder Quantifizierung der Modellparameter lassen sich die am Ende von Abschnitt 2 erwähnten wirtschaftsmathematischen Standardprozesse dank des einheitlichen abc-Modell-Formalismus reproduzieren. Dies mag von gewissem didaktischem Nutzen sein. Zwei Beispiele seien kurz skizziert:

(i) *Kapitalfonds.* Die renditelose ($r{=}0$), frühperiodische ($n{<}m$) Systemvariante II (oder auch IV) entspricht dann einem mit dem Renditesatz p bewirtschafteten Kapitalfonds, dem periodisch mit der Rate q progressiv-zunehmend Gelder *ab*fliessen, wenn I_0 durch $-I_0$ ersetzt wird bzw. ein negatives Parameterprodukt $-N_0I_0(1+p) \equiv A$ die Rolle der ersten *Aus*zahlung spielt. Die Rekursionsrelation ist $K_n = K_{n-1}(1+p) - A(1+q)^{n-1}$, bei einem Anfangsvermögen K_0. Die entsprechende Lösung K_n kann aus Tabelle 2 abgelesen werden: $K_n = [K_0 - A/(p-q)](1+p)^n + A/(p-q)(1+q)^n$. In dieser Situation liefert die allgemeine Nicht-Ponzi-Spiel-Bedingung $a, b > 0$ (für $p > q \geq 0$, siehe Abschnitt 3.2) wiederspruchslos die spezielle Bedingung $p > q + A/K_0$. Dies folgt auch aus Tabelle 3, welche allerdings nur mit Vorsicht verwendbar ist: wegen des Vorzeichenwechsels gilt jetzt $r > r_{NP}$ bzw. $0 > r_{NP}$. Ist obige Bedingung verletzt, so ist das Fondsvermögen nach einer mit Gleichung (13) berechenbaren Laufzeit aufgezehrt.

(ii) *Staatsschuldenquote.* Ein analoger Mechanismus wie unter (i) besprochen regelt näherungsweise auch die Entwicklung einer Staatsschuldenquote K_n (d.h. Staatsschulden dividiert durch reales Bruttoinlandprodukt BIP, je in Periode n), wenn p den realen Schuldzinssatz i minus die

Wachstumsrate g des BIP bedeutet, q die reale Wachstumsrate j des Staatshaushaltsüberschusses minus g ist und A die anfängliche Haushaltsüberschussquote (bzw. eine negative Primärdefizitquote) darstellt: $K_n \approx K_{n-1}(1 + i - g) - A\,(1 + j - g)^{n-1}$ (vergleiche z.B. [8], Gleichung 26.5). Aus dieser Perspektive besehen konvergiert die Schuldenquote (ausser für j=g) nie gegen einen festen Wert (steady state), und ein erwünschter Abbau des Schuldenbergs setzt nebst einer wirksamen Schuldenbremse die Erfüllung der Ponzi-Spiel-Bedingung $i - g \leq j - g + A/K_0$ geradezu voraus. Über die mögliche Rolle eines (entgegen der bisherigen Annahme) nichtverschwindenden Renditesatzes $r{\neq}0$ seien stille Gedankenspiele in Richtung gestaffelter Schuldenerlässe, Privatisierungen, etc. erlaubt.

In kontinuierlicher Zeit $t \in \mathbb{R}$ geht die Differenzengleichung (1) in die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{P}(t) = pP(t){+}Q_1(t){+}Q_2(t)$ über, welche die zu Gleichung (2) analoge Lösung $P(t) = a\exp(pt) + b\exp(q_1t) + c\exp(q_2t)$ besitzt (herleitbar mittels der Methode eines integrierenden Faktors). Der Ponzi-Systemansatz von Gleichung (3) führt auf eine dementsprechende Darstellung des Kapitalbestands mit zwei exponentiellen Termen plus einem additiven Term: $K(t) = a\exp(pt){+}b\exp(qt){+}c$, wobei die abc-Koeffizienten nun einer Investitionsdauer t_m (statt m) entsprechend zu wählen sind und auch die Wachstumsbasen $\exp(p)$ und $\exp(q)$ enthalten. Tabelle 2 ist dadurch erheblichen Modifikationen ausgesetzt (die Details folgen anderswo). Das formale Resultat erinnert stark an das siebenparametrige Modell von Artzrouni [7], dessen explizite Lösung für den Kapitalstock allerdings drei exponentielle Terme enthält. Die kontinuierliche Auszahlungsfunktion (seine Gleichung 5) weist einen exponentiell zu- oder abnehmendem, hybriden Renditesatz $r = r_w\exp[(r_p - r_w)t]$ auf; sie ist im Spezialfall, dass der Wert der versprochenen Profitrate (r_p) gleich demjenigen der Rückzahlungsrate (r_w) ist, in unsere Gleichung (8a) in ihrer zeitkontinuierlichen Version überführbar. Das Schema berücksichtigt nur ein monoton abnehmendes und zudem kein zeitlich beschränktes Investorenengagement. Auch macht es keine Aussagen über die Teilnehmerzahlen. Artzrouni's Kontinuumsmodell ist mit unserem Modell vom Ansatz her gleichwohl eng verwandt und stellt insofern eine Vorläufervariante in stetiger Zeit dar.

Das im vorliegenden Artikel beschriebene abc-Modell eines Ponzi-Systems ist einfach nachvollziehbar, analytisch, direkt replizierbar und beachtlich vielseitig. Daher vermittelt es ein vertieftes Grundlagenverständnis und animiert vielleicht zur Weiterentwicklung und insbesondere zur Suche nach empirischen Anwendungen.

Literatur

[1] Garber, Peter M., *Famous First Bubbles*, Journal of Economic Perspectives, Vol. 4, Nr. 2, Spring 1990, pp. 35-54.

[2] Spitzeder, Adele, *Geschichte meines Lebens*, Stuttgart 1878, III. Kapitel, insbes. S. 39-52.

[3] Zuckoff, Mitchell, *Ponzi's Scheme: The True Story of a Financial Legend*, Random House, New York 2005.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Ponzi_schemes (19.2.2013)

[5] Markopolos, Harry, *No One Would Listen: A True Financial Thriller*, John Wiley & Sons, Hoboken 2010; und derselbe, *Testimony before the U.S. house of representatives´ committee on financial services (February 4, 2009)*, Wall Street Journal, http://online.wsj.com/public/resources/documents/MarkopolosTestimony20090203.pdf (19.2.2013).

[6] Delahaye, Jean-Paul, *Der Milliardenbetrug und die Rentenversicherung*, Spektrum der Wissenschaft, Juli 2010, S. 72-78; online www.spektrum.de/alias/pdf/sdw-10-07-s072-pdf/1036784.

[7] Artzrouni, Marc, *The mathematics of Ponzi schemes*, Mathematical Social Sciences 58(2), 2009, S. 190-201; online http://mpra.ub.uni-muenchen.de/14420/ (19.2.2013).

[8] Blanchard, Olivier, *Macroeconomics*, 5th ed. (updated), Pearson Prentice-Hall, Boston, 2011.