A GARCH model with autorregresive conditional asymmetry to model time-series: An application to the returns of the Mexican stock market index

Duran-Vazquez, Rocio and Lorenzo-Valdes, Arturo and Ruiz-Porras, Antonio

Universidad de Guadalajara, Universidad de las Americas Puebla

17 April 2013

N MODELO GARCH CON ASIMETRÍA CONDICIONAL AUTORREGRESIVA PARA MODELAR SERIES DE TIEMPO: UNA APLICACIÓN PARA LOS RENDIMIENTOS DEL INDICE DE PRECIOS Y COTIZACIONES DE LA BMV

A GARCH MODEL WITH AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL ASYMMETRY TO MODEL TIME-SERIES: AN APPLICATION TO THE RETURNS OF THE MEXICAN STOCK MARKET INDEX

(Esta versión: Abril 17, 2013)

Rocío Durán-Vázquez [*]
Universidad de las Américas Puebla

Arturo Lorenzo-Valdés [**]
Universidad de las Américas Puebla

Antonio Ruiz-Porras [***]
Universidad de Guadalajara, CUCEA

Resumen

Desarrollamos un modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva para describir series de tiempo. Esto significa que, en añadidura a la media y varianza condicionales, asumimos que el sesgo describe el comportamiento de las series de tiempo. Analíticamente usamos la metodología propuesta por Fernández y Steel (1998) para definir el comportamiento de las perturbaciones del modelo. Usamos el enfoque desarrollado por Brooks, et. al. (2005) para construirlo. Más aun, mostramos su utilidad a través de modelar la serie de rendimientos diarios del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México durante el periodo comprendido entre el 3 de enero de 2008 y el 29 de septiembre de 2009.

Palabras clave: Asimetría condicional, GARCH, Sesgo, Rendimientos Bursátiles, México

Abstract

We develop a GARCH model with autoregressive conditional asymmetry to describe time-series. This means that, in addition to the conditional mean and variance, we assume that the skewness describes the behavior of the time-series. Analytically, we use the methodology proposed by Fernández and Steel (1998) to define the behavior of the innovations of the model. We use the approach developed by Brooks, et. al., (2005), to build it. Moreover, we show its usefulness by modeling the daily returns of the Mexican Stock Market Index (IPC) during the period between January 3rd, 2008 and September 29th, 2009.

Keywords: Conditional Asymmetry, GARCH, Skewness, Stock Market Returns, Mexico

JEL: C22, G10

[*] Email: iguazurocio@gmail.com Departamento de Finanzas y Contaduría, Universidad de las Américas Puebla. Sta. Catarina Mártir, 72820, Cholula, Puebla, México.

[**] Email: arturo.lorenzo@udlap.mx Departamento de Finanzas y Contaduría, Universidad de las Américas Puebla. Sta. Catarina Mártir, 72820, Cholula, Puebla, México.

[***] Email: antoniop@cucea.udg.mx Departamento de Métodos Cuantitativos. Universidad de Guadalajara, CUCEA. Periferico Norte 799, Núcleo Universitario Los Belenes, 45100, Zapopan, Jalisco, México.

UN MODELO GARCH CON ASIMETRÍA CONDICIONAL AUTORREGRESIVA PARA MODELAR SERIES DE TIEMPO: UNA APLICACIÓN PARA LOS RENDIMIENTOS DEL INDICE DE PRECIOS Y COTIZACIONES DE LA BMV

1. Introducción

La modelación de series de rendimientos es necesaria para entender el funcionamiento de los mercados financieros. Particularmente, la modelación de las series bursátiles es necesaria para analizar decisiones de inversión, de valuación de activos y de administración de riesgos. Por esta razón, la modelación de las series bursátiles ha tenido una gran importancia en los ámbitos teórico y empírico. Esta modelación se ha centrado en el comportamiento de las medias y las varianzas de las series de rendimientos. Esto en consistencia con los trabajos de Markowitz (1952) y Tobin (1958) sobre la media y la varianza de los portafolios financieros.

Tradicionalmente, los análisis econométricos usados para modelar las series financieras han usado un enfoque univariado. Los más conocidos modelos univariados son aquellos conocidos como ARMA y de la familia GARCH. [1] Los modelos que asumen procesos ARMA se usan para explicar el comportamiento de la media condicional de las series. Los modelos de la familia GARCH explican el comportamiento de las series centrándose en su varianza condicional (y su volatilidad). Implícitamente, en estos modelos se asume que los

[1] Los nombres ARMA y GARCH derivan de las principales características que definen a los modelos econométricos. Concretamente, ARMA es acrónimo de "*Autoregressive Moving Average*"; GARCH es acrónimo de "*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*". Así los modelos ARMA se caracterizan por tener una estructura donde se conjugan procesos autorregresivos y de media móvil. Los modelos de la familia GARCH, por su parte, se caracterizan por tener una estructura autorregresiva y heteroscedasticidad condicional en los términos de perturbación.

primeros dos momentos de la distribución de probabilidad de las series, y sus variaciones en el tiempo, son suficientes para describir el comportamiento de las series financieras.

En este contexto, es necesario señalar que las características de las series financieras hacen difícil su modelación econométrica usando solamente dos momentos. Incluso hay quienes concluyen que ninguno de los modelos econométricos existentes es capaz de describir de manera integral dichas características (Malmsten y Teräsvirta, 2010). Usualmente las series financieras manifiestan curtosis excesivas, clusters de volatilidad, volatilidades no constantes y distribuciones no normales. En añadidura a las anteriores, la volatilidad de los rendimientos financieros frecuentemente suele experimentar de "efectos apalancamiento" cuando hay correlaciones negativas entre el rendimiento y la volatilidad. [2]

En esta investigación, desarrollamos un modelo GARCH univariado con asimetría condicional autorregresiva. Esto significa que, en añadidura a la media y varianza, asumimos que el sesgo (i.e. el tercer momento), es necesario para describir la dinámica de las series de rendimientos. Así, el modelo describe el comportamiento dinámico de las series suponiendo que sesgo de las perturbaciones puede variar en el tiempo. En este contexto, no solamente planteamos el modelo teórico. También ilustramos su utilidad modelando la serie de rendimientos diarios del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) para el periodo comprendido entre el 3 de enero de 2008 y el 29 de septiembre de 2009.

---

[2] Los efectos apalancamiento se pueden describir como aquellas reacciones asimétricas que ocurren en los rendimientos financieros como consecuencia de "shocks" informacionales. Por esta razón, cuando existen efectos apalancamiento, suele decirse que las malas noticias tienen un impacto mayor que las buenas noticias.

Metodológicamente desarrollamos esta investigación en cinco etapas. En la primera etapa revisamos la literatura. En la segunda etapa construimos la distribución de probabilidad asimétrica que define el comportamiento de las perturbaciones en el modelo con base en la metodología de Fernández y Steel (1998). En la tercera etapa construimos el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva con base en el enfoque de Brooks, et. al. (2005). En la cuarta etapa construimos y analizamos el comportamiento estadístico de la serie de rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones. Finalmente, en la quinta etapa, estimamos los parámetros del modelo propuesto y evaluamos su bondad de ajuste.

El estudio está organizado en seis secciones. La Sección 2 incluye la revisión de la literatura. Particularmente revisamos algunos modelos que consideran múltiples momentos y mencionamos algunos estudios que usan los mismos para estudiar el mercado bursátil mexicano. En la Sección 3 construimos la distribución de probabilidad asimétrica necesaria para definir el comportamiento de las perturbaciones. En la sección 4 desarrollamos el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva. En la Sección 5 mostramos el ejercicio empírico de modelación del Índice de Precios y Cotizaciones. En la última sección, sintetizamos los resultados y mencionamos algunas líneas de investigación futura.

2. Revisión de la literatura

Los modelos de la familia GARCH son los más usados para modelar series económicas y financieras.[3] Estos modelos, para efectos analíticos, se clasifican con base en sus especificaciones funcionales. Estas especificaciones se refieren a las formas en que la

[3] Poon y Granger (2003) y Lorenzo-Valdés y Ruiz-Porras (2012) revisan los usos de estos modelos en la modelación econométrica.

información rezagada de una variable y los momentos de la misma describen la media, a la varianza condicional y la distribución probabilística de las series. En la literatura econométrica se considera que existen más de un centenar de especificaciones distintas (Bollerslev, 2010). Sin embargo, en la gran mayoría de los casos, se asume que los primeros dos momentos de la distribución y sus variaciones en el tiempo son suficientes para explicar el comportamiento de series univariadas.[4]

Metodológicamente los modelos GARCH univariados pueden describir adecuadamente las series cuando sus perturbaciones estandarizadas siguen un comportamiento normal o *t* de Student. Sin embargo, es reconocido que las series de rendimientos no siempre satisfacen esta condición (i.e. el sesgo es diferente de cero). Particularmente si el sesgo es negativo, la función de probabilidad es asimétrica a la izquierda (i.e. la probabilidad de tener rendimientos relativamente altos es mayor que la de tener rendimientos bajos). Si el sesgo es positivo, la función es asimétrica a la derecha. Esta consideración sugiere que los modelos simétricos tienden a ponderar inadecuadamente los rendimientos y riesgos. [5]

La asimetría condicional autorregresiva también se justifica si los inversionistas son racionales. Chunchachinda, et. al. (1997) muestran que los inversionistas suelen cambiar sus elecciones de portafolio cuando suponen la existencia de sesgos en los mercados. Así sus hallazgos confirman indirectamente la utilidad de los modelos con asimetría condicional. Más aun, Chen, Hong y Stein (2001) hallan evidencia de que los modelos con

---

[4] Adviértase que si la función de probabilidad es normal, los dos primeros momentos son suficientes para definir la forma y comportamiento probabilístico de la serie analizada. En este caso, lo mismo que en otras funciones de probabilidad simétricas, el tercer momento de la distribución de probabilidad, y el sesgo, son iguales a cero.

[5] Adviértase que asumir simetría en la función de los rendimientos equivale a subestimar (sobreestimar) las probabilidades de pérdida cuando la distribución de los rendimientos es asimétrica a la derecha (izquierda).

asimetría condicional pudieran ser convenientes para los inversionistas. De hecho, ellos son capaces de predecir "cracs" bursátiles usando estimaciones de los sesgos de los rendimientos financieros.

Las consideraciones anteriores justifican el desarrollo de modelos GARCH univariados con sesgo y curtosis condicionales autorregresivos. Particularmente, en lo que se refiere a los modelos con sesgos condicionales, Hansen (1994) es quien primero propone un modelo con una distribución *t* de Student asimétrica. Harvey y Siddique (1999) y (2000) extienden ese trabajo y proponen una metodología para estimar el coeficiente de asimetría condicional asociado a la distribución *t* asimétrica.[6] En lo que se refiere a los modelos con curtosis condicional destacan aquellos desarrollados por Jondeau y Rockinger (2003), León, Rubio y Serna (2005), Brooks, et. al. (2005), y White, Kim y Manganelli (2008).

En México, es reciente el uso de modelos GARCH para describir el comportamiento de series bursátiles de manera agregada o desagregada. Particularmente Guzmán-Plata (1998), describe el comportamiento de treinta y tres acciones mediante modelos ARCH-M. Asimismo Ortiz-Ramírez (2010) describe el IPC mediante un modelo GARCH-M. Cermeño-Bazán y Solís-Montes (2012) comparan los rendimientos accionarios en distintos sectores mediante modelos GARCH. Yamazaki-Tanabe y Díaz-Hernández (2012) describen la volatilidad del mercado usando modelos GARCH multivariados y datos de alta frecuencia. Estos estudios son relevantes aunque suponen que las distribuciones de probabilidad son simétricas.

[6] El coeficiente de asimetría es una medida del sesgo de la distribución de la probabilidad de una serie de tiempo. Se le define como el tercer momento central estandarizado.

En la literatura existen algunos estudios que han analizado los efectos asimétricos de la información en los rendimientos bursátiles mexicanos. Estos estudios usualmente no asumen sesgos condicionales; sino impactos diferenciados de las noticias sobre la volatilidad de los rendimientos (v.g. “efectos apalancamiento”). Entre estos estudios se encuentran aquellos de López-Herrera (2004), Cermeño-Bazán y Solís-Montes (2012) y Lorenzo-Valdés y Ruíz-Porras (2012). Estos estudios usan modelos GARCH univariados para describir los rendimientos bursátiles. Su importancia radica en que los mismos proveen evidencia que justifica el uso de modelos GARCH con sesgo condicional autorregresivos con fines de modelación.

Finalizamos esta sección enfatizando que el desarrollo y uso de modelos de la familia GARCH resulta un área de gran interés en la econometría financiera. Las dinámicas de los mercados financieros han hecho manifiesta la necesidad de describir y predecir sus movimientos de la mejor manera posible. Esta necesidad ha fomentado el continuo desarrollo de modelos teóricos y su uso empírico en los mercados financieros. En el mercado bursátil mexicano, esta necesidad esta asociada a fenómenos como la crisis financiera global y la integración de México a la economía global.[7] De hecho, creemos que estas razones justifican la pertinencia de la investigación desarrollada.

3. Metodología

En esta sección definimos la función de distribución asimétrica que explica las perturbaciones (ε) en nuestro modelo. Esta función de probabilidad asimétrica la

[7] Existen varios trabajos que muestran la dependencia de los movimientos bursátiles en México con respecto a los mercados financieros de Estados Unidos. Un trabajo reciente donde se muestra dicha dependencia es el de Durán-Vázquez, Lorenzo-Valdés y Ruiz-Porras (2012).

construimos con base en la metodología de Fernández y Steel (1998). Usamos esta metodología porque la misma nos permite transformar, de una manera muy sencilla, una distribución simétrica unimodal cualquiera en una asimétrica.[8] La metodología solamente nos requiere usar un parámetro escalar, λ, para hacer dicha transformación. Particularmente aquí usamos dicha metodología para transformar una distribución normal en una distribución "normal sesgada".[9]

Planteamos la transformación propuesta considerando la función de densidad de una normal estandarizada:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{1}$$

Siguiendo a Fernández y Steel (1998), introducimos la asimetría en esta distribución mediante factores de escala inversos en los valores positivos y negativos de x. Estos factores los definimos con el parámetro escalar $\lambda > 0$. Particularmente, si este escalar es fijo, la distribución de transformación queda definida como:

$$f(x \mid \lambda) = \frac{2}{(\lambda + 1/\lambda)} \left\{ f\left(\frac{x}{\lambda}\right) I_{[0,\infty)}(x) + f(\lambda x) I_{(-\infty,0)}(x) \right\}, \tag{2}$$

donde $I_A = \begin{cases} 1 & \text{si sucede } A \\ 0 & \text{no sucede } A \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación (2) a la distribución normal, la función de densidad de la normal sesgada queda como:

---

[8] La metodología de Fernández y Steel (1998) se ha usado en otros estudios (i.e. Lambert y Laurent 2001 y 2002).

[9] Fernández y Steel (1998) ejemplifican el uso de su metodología construyendo una distribución t de Student "sesgada".

$$f(x \mid \lambda) = \frac{2}{(\lambda + 1/\lambda)\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-x^2/(2\lambda^2)} I_{[0,\infty)}(x) + e^{-(x\lambda^2)/2} I_{(-\infty,0)}(x) \right\}. \tag{3}$$

Estadísticamente, la función normal sesgada se comporta como una normal para valores positivos y el comportamiento de otra normal para los valores negativos. Si $\lambda = 1$, tenemos una distribución normal simétrica. Si $\lambda < 1$, tenemos una distribución asimétrica sesgada a la izquierda y si $\lambda > 1$, tenemos una distribución sesgada a la derecha (véase la Figura 1):

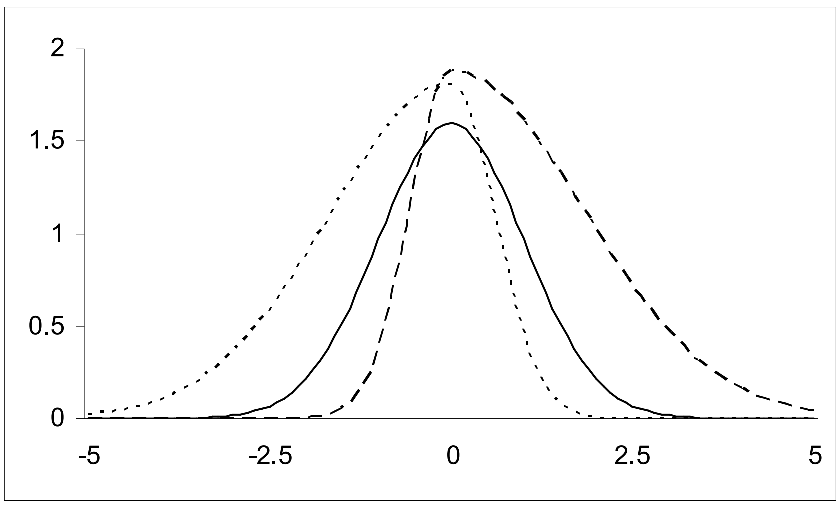

Figura 1. Funciones de densidad con $\lambda = 1$ (línea continua), $\lambda < 1$ (línea discontinua) y $\lambda > 1$ (línea punteada). Elaboración propia.

Las propiedades de la función en la ecuación (3) son:

1) $E[x] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \equiv m$

2) $Var[x] = m^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1$

3) $E\left[(x-m)^3\right] = m\left[\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)m^2 + 1\right]$

Estadísticamente la variable x se distribuye como una normal sesgada con valor esperado igual a m. Esta variable no puede ser usada directamente para explicar las perturbaciones porque tiene un valor esperado diferente a cero. Por esta razón definimos la variable $\varepsilon = x - m$. Esta nueva variable tiene un valor esperado igual a cero y su segundo y tercer momentos centrales son idénticos a aquellos de x. Así, la variable ε resulta equivalente a la perturbación estandarizada utilizada en los modelos GARCH univariados tradicionales. En este contexto, no sobra hacer notar que la varianza de ε no es unitaria. De hecho, esta situación explicará parcialmente la transformación de ε que se realizara en la siguiente sección.

4. Modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva

En esta sección construimos el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva con base en el enfoque de Brooks, et. al. (2005). Este modelo lo construimos asumiendo la media, la varianza y la asimetría condicionales autorregresivos y un comportamiento de las perturbaciones dado por ε. Particularmente, dado que nuestro interés consiste en modelar series de rendimientos bursátiles, definimos la tasa de rendimiento continuo en el periodo *t*, r_t, como el cambio en los logaritmos del precio de un activo, P_t:[10]

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}. \tag{4}$$

Estadísticamente suponemos que ε_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) como la normal sesgada descrita en la sección anterior.[11] En este contexto, consideramos una transformación de ε_t que denotaremos como δ_t. Esta

[10] Adviértase que esta formulación supone que los precios siguen un proceso continuo de interés compuesto.
[11] Brooks et. al. (2005), a diferencia nuestra, asumen una distribución t de Student.

transformación la usaremos para definir el proceso de las perturbaciones del modelo GARCH, u_t. Por conveniencia, este último proceso lo construiremos para que su varianza condicional sea σ_t^2 y para que su distribución de probabilidad dependa de un parámetro de asimetría condicional λ_t. Este proceso lo definimos como:

$$u_t = \delta_t \varepsilon_t . \tag{5}$$

La transformación δ_t la definimos como una función de la varianza condicional y de la asimetría a fin de que satisfaga los requerimientos de la varianza de u_t:

$$\delta_t = \left(\frac{\sigma_t^2}{m_t^2 [\pi/2-1]+1} \right)^{1/2} . \tag{6}$$

Si definimos el conjunto de información como Ω_t, la transformación (6) permite que la variable u_t, tenga definidos los siguientes momentos:

$$\begin{aligned} &E[u_t] = E[u_t \mid \Omega_{t-1}] = 0 \\ &Var[u_t \mid \Omega_{t-1}] = E\left[u_t^2 \mid \Omega_{t-1}\right] = \sigma_t^2 \\ &E\left[u_t^3 \mid \Omega_{t-1}\right] = \delta_t^3 m_t \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) m^2 + 1 \right] \end{aligned} . \tag{7}$$

Estadísticamente, los momentos anteriores existen cuando σ_t^2 y λ_t son procesos autorregresivos. Esto conlleva a que σ_t^2 y λ_t sean medibles en el tiempo *t*. Más aun, conlleva a que m_t y δ_t también sean medibles en *t*.

Econométricamente, el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva queda definido por las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
r_t &= v_t + u_t \\
u_t &= \delta_t \varepsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2 \\
\lambda_t &= \gamma_0 + \gamma_1 \left[u_{t-1}^2 b_t \right] + \gamma_2 \lambda_{t-1}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

La primera expresión define la dinámica de los rendimientos. En dicha expresión $v_t = E[r_t \mid \Omega_{t-1}]$ es la media condicional de los rendimientos y se describe mediante un proceso ARMA. La segunda expresión define al proceso de perturbaciones u_t. La tercera expresión describe la volatilidad condicional $\sigma_t^2 = Var[r_t \mid \Omega_{t-1}] = E\left[u_t^2 \mid \Omega_{t-1}\right]$ como un GARCH(1,1). La última expresión describe el parámetro de asimetría condicional de manera similar a un proceso GARCH(1,1). [12] Por esta razón la expresión de asimetría debe cumplir las mismas restricciones que este último proceso. En términos prácticos esto significa que los parámetros γ_0, γ_1 y γ_2 deben ser positivos y que $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

El coeficiente de asimetría condicional (CA$_t$) lo podemos construir a partir de la asimetría condicional (λ_t). Este coeficiente es el siguiente:

$$
CA_t \equiv \frac{E\left[(r_t - v_t)^3 \mid \Omega_{t-1}\right]}{\sigma_t^3} = \frac{\delta_t^3}{\sigma_t^3} m \left[\left(2 - \frac{\pi}{2} \right) m^2 + 1 \right]. \tag{9}
$$

[12] Matemáticamente es necesario hacer notar que en la expresión donde se define la asimetría condicional, aparece el término *bt*. Este término se calcula como $b_t = \dfrac{\lambda_t}{\delta_t^3 \varepsilon_t^3}$. El objeto de este término que garantizar que la expresión de la asimetría condicional sea insesgada. Adviértase que $E\left[u_t^3 b_t \mid \Omega_{t-1}\right] = \lambda_t$. Analíticamente este termino lo deducimos de manera similar a como garantizamos que la expresión de la varianza condicional fuera insesgada. Adviértase que, en este último caso, $E\left[u_t^2 \mid \Omega_{t-1}\right] = \sigma_t^2$.

Finalizamos esta sección indicando que el conjunto de especificaciones (8) define nuestro modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva. Este modelo lo hemos construido asumiendo que la media, la varianza y el sesgo son necesarios para describir el comportamiento de las series. En virtud de que la relevancia de incorporar la asimetría la hemos sustentado en consideraciones empíricas, la validación del modelo solo puede hacerse empíricamente. Particularmente, aquí validamos el modelo describiendo el comportamiento del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Los resultados de dicho ejercicio de modelación econométrica los mostramos en la siguiente sección.

5. Ejercicio de modelación econométrica del Índice de Precios y Cotizaciones

En esta sección usamos el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva, descrito en (8), para describir la serie de rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)[13]. Particularmente los datos empleados en este estudio comprenden los precios de cierre diarios del 3 de enero de 2008 al 29 de septiembre de 2009. Así la muestra de datos comprende 455 observaciones diarias. En virtud de que nuestro interés consiste en analizar la serie de rendimientos, construimos la serie de rendimientos agregados del mercado bursátil mexicano con base en la ecuación (4). Particularmente, la Tabla 1 muestra las estadísticas descriptivas de la serie estimada de rendimientos.

[13] El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el indicador representativo del comportamiento accionario de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Este índice expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa de las acciones cotizadas. Este índice mide el cambio diario del valor de capitalización de las 35 emisoras de mayor bursatilización de la BMV.

	r_{IPC}
Media	-0.0001
Máximo	0.1044
Mínimo	-0.0727
desv. estand.	0.0200
Asimetría	0.3716
Curtosis	7.0249
Observ.	454

Tabla 1. Estadísticas descriptivas. Elaboración propia

Analíticamente es interesante hacer notar que la media estimada es negativa y el coeficiente de asimetría puntual estimado es positivo. Como hemos mencionado anteriormente, los sesgos positivos indican que las probabilidades de obtener rendimientos bajos son mayores que aquellas de obtener altos rendimientos. El estimado del sesgo, si bien atípico, puede explicarse si se consideran los efectos de la crisis financiera global durante el periodo analizado. Es bien conocido que estos efectos redujeron en buena medida los rendimientos bursátiles a nivel internacional. [14] Por estas razones, no sobra indicar que consideramos que el ejercicio de modelación de los rendimientos bursátiles es interesante por sí mismo ya que comprende un periodo de gran inestabilidad en los mercados financieros internacionales.

Econométricamente usamos un proceso autorregresivo de orden uno para definir la media condicional de los rendimientos. Esto hace que el modelo estimado sea:

[14] El Centro de Estudios de las Finanzas Públicas (2009) de la Cámara de Diputados de México muestra que en el año 2008, el IPC tuvo una variación porcentual de -25.8%. La mayoría de las emisoras registraron pérdidas debido a la volatilidad e inestabilidad del mercado cambiario y de divisas, así como la depreciación de la moneda nacional. En el año 2009 se reflejo una ligera recuperación en concordancia con la situación económica del país.

$$
\begin{aligned}
r_t &= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + u_t \\
u_t &= \delta_t \varepsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2 \\
\lambda_t &= \gamma_0 + \gamma_1 \left[u_{t-1}^2 b_t\right] + \gamma_2 \lambda_{t-1}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Los resultados de la estimación realizada se presentan en las Tablas 2 y 3. Cabe aclarar que para revisar la especificación del modelo, en este caso, a diferencia de los GARCH en donde se diagnostican los residuales estandarizados, aquí utilizamos los residuales transformados por delta, es decir $\hat{\varepsilon}_t = \hat{u}_t / \hat{\delta}_t$.

	Coeficiente	Error estándar
ϕ_0	-0.0008	0.0001
ϕ_1	0.0823	0.0021
α_0	0.0000	0.0000
α_1	0.0947	0.0018
α_2	0.8984	0.0009
γ_0	0.0404	0.0038
γ_1	0.0129	0.0004
γ_2	0.9539	0.0010

Tabla 2. Parámetros, estimados por máxima verosimilitud con sus respectivos errores estándar. Elaboración propia.

Residuales transformados			Res. transformados al cuadrado		Residuales transformados al cubo	
	Q	Prob.	Q	Prob.	Q	Prob.
1	0.0659	0.7970	0.0022	0.9630	0.5136	0.4740
10	4.2782	0.9340	11.0480	0.3540	16.9380	0.0760
20	15.7060	0.7350	21.9560	0.3430	27.9380	0.1110
30	25.7150	0.6900	27.8480	0.5790	48.2370	0.0190

Tabla 3. Estadísticos de Ljung-Box para los órdenes 1, 10, 20 y 30 de los residuales transformados y de los residuales transformados al cuadrado y al cubo. Elaboración propia.

En los resultados se aprecia que todos los parámetros son significativamente diferentes de cero y que el ajuste es bueno, observando que, en general, no hay dependencia lineal, cuadrática o al cubo. En este último caso, para la autocorrelación de orden 30 en los residuales al cubo, se rechaza la hipótesis nula de dependencia cúbica con un nivel de significancia del 5%, pero no a un nivel de 1%. Lo anterior nos indica que el modelo presenta un buen ajuste y que puede utilizarse para realizar inferencias sobre la dinámica de los rendimientos bursátiles.

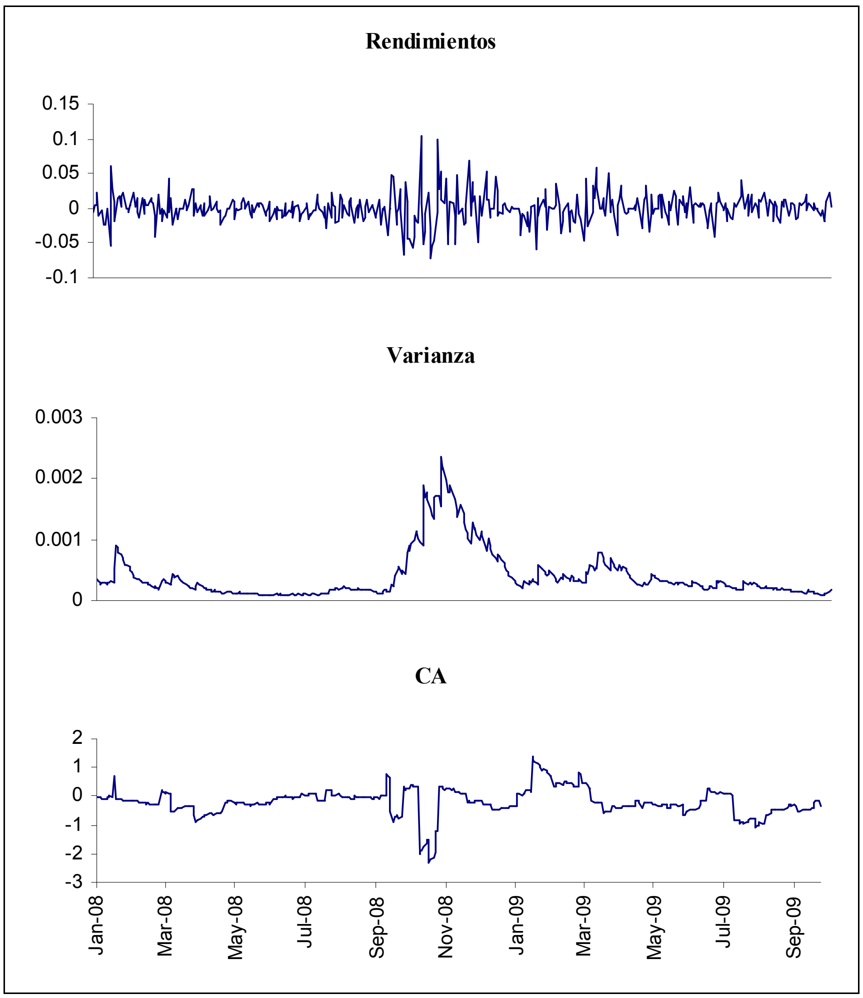

Figura 2. Gráficas de los rendimientos del IPC, varianza condicional del IPC y coeficiente de asimetría condicional (CA) del IPC. Los dos últimos estimados mediante el modelo. Elaboración propia.

En la Figura 2 presentamos las gráficas de los rendimientos y de las series de la volatilidad y el coeficiente de asimetría obtenidos mediante el modelo desarrollado. Visualmente podemos apreciar que la asimetría es más pronunciada hacia la parte negativa cuando aumenta la volatilidad. Por tanto es posible inferir que al aumentar la asimetría negativa, la volatilidad de los rendimientos y, eventualmente, su media tienden a incrementarse. Esta situación, de mantenerse en el tiempo, podría resultar de importancia para tomar decisiones financieras diversas; como son las referidas a construir portafolios de inversión, valuar activos y administrar riesgos.

Académicamente las gráficas también muestran los efectos de la crisis financiera global en el mercado mexicano. De acuerdo el Fondo Monetario Internacional (2009), se distinguen cuatro periodos diferenciados en la crisis global. Lo interesante de los mismos es que estos tienen correspondencia con el desempeño bursátil observado en las gráficas. Particularmente el primer periodo, que comprende de agosto 2007 a mayo 2008 se identifica un periodo de inestabilidad en el IPC. En el segundo periodo, de junio a octubre de 2008, ocurren caídas en la Bolsa Mexicana de Valores como respuesta al comportamiento observado en los mercados financieros internacionales. En el tercer periodo, que comprende de noviembre de 2008 a marzo de 2009, se registran altibajos e inestabilidad en el mercado. En el cuarto periodo, que comprende de marzo a julio de 2009, el comportamiento del mercado mexicano refleja una cierta estabilidad.

Finalizamos esta sección indicando que los resultados del ejercicio de modelación validan la conveniencia de usar el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva. Como hemos mostrado, el modelo parece reflejar adecuadamente el comportamiento de los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones. El ajuste ocurre a pesar de lo atípico del periodo analizado. Particularmente el modelo sugiere que aumentos en la asimetría negativa tienden a incrementar la volatilidad de los rendimientos y, eventualmente, su media. Asimismo las estimaciones sugieren que los movimientos de los rendimientos del mercado bursátil mexicano estuvieron sincronizados con la crisis financiera global.

6. Conclusiones y líneas de investigación futura

En este estudio hemos desarrollado un modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva para modelar series financieras. Esto significa que, en añadidura a la media y varianza, hemos asumido que el sesgo es necesario para describir el comportamiento de las series. Analíticamente hemos usado la metodología de Fernández y Steel (1998) para definir el comportamiento de las perturbaciones. Asimismo hemos usado el enfoque de Brooks, et. al. (2005) para construir el modelo. Más aun, hemos mostrado su utilidad modelando la serie de rendimientos diarios del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) considerando el periodo entre el 3 de enero de 2008 y el 29 de septiembre de 2009.

Los resultados de esta investigación validan la conveniencia de usar el modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva. Empíricamente el modelo parece reflejar adecuadamente el comportamiento de los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones. El ajuste ocurre a pesar de lo atípico del periodo analizado. Particularmente el modelo sugiere que aumentos en la asimetría negativa tienden a incrementar la volatilidad de los rendimientos y, eventualmente, su media. Más aún, las estimaciones sugieren que los movimientos de los rendimientos del mercado bursátil mexicano estuvieron sincronizados con la crisis financiera global.

Estos resultados tienen implicaciones econométricas y financieras. Desde una perspectiva econométrica, los resultados validan la conveniencia de usar modelos que consideren momentos de orden superior a la varianza para describir los rendimientos bursátiles en economías emergentes.[15] Desde una perspectiva financiera, los resultados sugieren que el coeficiente de asimetría condicional puede utilizarse con provecho en la administración de riesgos, en la valuación de activos (opciones, notas estructuradas) y en la construcción y evaluación del desempeño de portafolios de inversión. [16] Por tanto, los resultados sugieren que el modelo pudiera ser una herramienta útil para tomar decisiones financieras.

Finalizamos este estudio indicando algunas líneas de investigación futura. Una primera se refiere al desarrollo de otros modelos GARCH univariados con asimetría condicional. Esto en virtud de que es factible usar los procedimientos usados aquí en modelos similares (EGARCH, IGARCH, GARCH-M, etc.). Una segunda línea, y natural extensión de este estudio, se refiere al desarrollo de modelos con curtosis condicional autorregresiva. Una tercera línea se refiere al uso de modelos GARCH multivariados y con saltos para describir y predecir series. [17] Muy probablemente la investigación alrededor de estas líneas será de gran utilidad para entender la dinámica de las series económicas y financieras.

---

[15] En las economías en desarrollo los estudios que usan modelos GARCH que asumen momentos de orden superior a la varianza son muy escasos. Entre estos se encuentra el de Ahmad (2011). Su estudio modela la inflación en México.

[16] Los modelos de valuación que se definen con base en una estructura media-varianza asumen comportamientos simétricos. Esto es, tienden a sobre y a subvaluar las probabilidades de pérdidas y ganancias. Modelos tan conocidos y usados como el CAPM y el de Black-Scholes asumen comportamientos simétricos.

[17] Un estudio teórico reciente vinculado a esta línea de investigación es el de Sánchez Torres, Ortiz Arango y Venegas Martínez (2012).

REFERENCIAS

Ahmad, D.A., (2011), "Modelling the density of inflation using autoregressive conditional heteroscedasticity, skewness, and kurtosis models", *Ensayos Revista de Economía*, 30(2), 1-28

Bollerslev, T. (2010), "Glossary to ARCH (GARCH)", en Bollerslev, T., Russell, J.R. y M.W. Watson, (eds.), *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert Engle* (Oxford University Press, Oxford), 137-163

Brooks, C., S. Burke, S. Heravi y G. Persand, (2005), "Autoregressive conditional kurtosis", *Journal of Financial Econometrics*, 3(3), 399–421

Campbell, R.H. y A. Siddique, (2000), "Conditional skewness in asset pricing tests", *Journal of Finance*, 55(3), 1263–1296

Centro de Estudios de las Finanzas Públicas, (2009), *El Mercado de Valores en México*, LXI Legislatura, Cámara de diputados. CEFP-124-2009.

Cermeño-Bazán, R. y M.P. Solís-Montes, (2012), "Impacto de sorpresas macroeconómicas de México y Estados Unidos sobre el mercado accionario mexicano", *Economía Mexicana*, 21(1), 35-67

Chen, J., H. Hong y J. Stein, (2001), "Forecasting crashes: Trading volume, past returns, and conditional skewness in stock prices", *Journal of Financial Economics*, 61(3), 345-381

Chunchachinda, P., K. Dandapani, S. Hamid, y A. Prakash, (1997), "Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets", *Journal Banking and Finance*, 21(2), 143–167

Durán-Vázquez, R., A. Lorenzo-Valdés y A. Ruiz-Porras, (2012), "Valuation of Latin-American stock prices with alternative versions of the Ohlson model: An investigation of cointegration relationships with time-series and panel-data", en Espinosa Ramirez R. (ed.), *Research Issues in International Economic Relations,* (Universidad de Guadalajara, México), 161-183

Fernández, C. y M.F.J. Steel, (1998), "On Bayesian modeling of fat tails and skewness", *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 359–371

FMI, (2009), "Comunicado del Comité Monetario y Financiero Internacional de la Junta de Gobernadores del Fondo Monetario Internacional", *Comunicado de Prensa No. 09/139* 25 de abril 2009. http://www.im f.org/external/spanish/np/sec/pr/2009/pr09139s

Guzmán-Plata, M.P. (1998), "Los modelos CAPM y ARCH-M: Obtención de los coeficientes beta para una muestra de 33 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores", *Economía, Teoría y Práctica*, 9, 63-76

Hansen, B.E, (1994), "Autoregressive conditional density estimation", *International Economic Review*, 35(3), 705–730

Harvey, C. y A. Siddique, (1999), "Autoregressive conditional skewness", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(4), 465–487

Harvey, C. y A. Siddique, (2000), "Conditional skewness in asset pricing tests", *Journal of Finance*, 55(3), 1263-1295

Jondeau, E. y M. Rockinger, (2003), "Conditional volatility, skewness and kurtosis: Existence, persistence and comovements", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(10), 1699-1737

Lambert, P. y S. Laurent (2001), “Modeling financial time series using GARCH-type models with a skewed student distribution for the innovations”, Lovaina, Universite Catholique de Louvain-Institut de Statistique, *Discussion Paper 0125*

Lambert, P. y S. Laurent (2002), “Modeling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions”, Lovaina, Universite Catholique de Louvain-Institut de Statistique, *Discussion Paper 0119*

León A., G. Rubio y G. Serna, (2005), “Autoregresive conditional volatility, skewness and kurtosis”, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 45(4-5), 599–618

López-Herrera, F. (2004), “Modelado de la volatilidad y pronóstico del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores”, *Contaduría y Administración*, 213, 43-72

Lorenzo-Valdés, A. y A. Ruiz-Porras (2012), “Modelación de los rendimientos bursátiles mexicanos mediante los modelos TGARCH y EGARCH: Un estudio econométrico para 30 acciones y el Índice de Precios y Cotizaciones", en Coronado Ramírez S. y L. Gatica Arreola (coords.), *Modelos no Lineales en Series Económicas y/o Financieras,* (Universidad de Guadalajara, Guadalajara), 46-81

Malmsten, H. y T. Teräsvirta, (2010), “Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility”, *Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(3), 413-447

Markowitz, H. (1952), “Portfolio selection”, *Journal of Finance*, 7(1), 77-91

Ortíz-Ramírez, A., (2010), “Valuación de opciones europeas sobre el IPC con un modelo GARCH para la volatilidad”, en Ortíz-Arango, F. (coord.), *Avances Recientes en Valuación de Activos y Administración de Riesgos, Vol. 1.* (Universidad Panamericana, México D.F.), 217-233

Poon, SH. y C.W.J. Granger, (2003), “Forecasting volatility in financial markets: A review”, *Journal of Economic Literature*, 41(2), 478-539

Sánchez-Torres, F.J., F. Ortíz-Arango y F. Venegas-Martínez, (2012), “Volatilidad estocástica y procesos de difusión GARCH”, en Ortíz-Arango, F. y F. López-Herrera, (coords.), *Avances Recientes en Valuación de Activos y Administración de Riesgos, Vol. 3.* (Universidad Panamericana, México D.F.), 143-154

Tobin, J. (1958), “Liquidity preference as behavior towards risk”, *Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86

White, H., TH. Kim y S. Manganelli, (2008), “Modeling autoregresive conditional skewness and kurtosis with multi-quantile CAViaR”, Francfort, European Central Bank, *Working Paper 957*

Yamazaki-Tanabe, E. y A. Díaz-Hernández (2012), “Modelado de la volatilidad del mercado accionario mexicano con datos de alta frecuencia”, en Ortíz-Arango, F. y F. López-Herrera, (coords.), *Avances Recientes en Valuación de Activos y Administración de Riesgos, Vol. 3.* (Universidad Panamericana, México D.F.), 23-45