Fuzzy Probabilistic Sets as a Tool for Behavioural Finance

Piasecki, Krzysztof

Poznań University of Economics

15 June 2011

UNIWERSYTET EKONOMICZNY
W POZNANIU

Krzysztof Piasecki

Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO W POZNANIU

POZNAŃ 2011

RECENZENT

Michał Kolupa

PROJEKT OKŁADKI

Jacek Pietrzyński

Na okładce wykorzystano wizerunki awersów i rewersów złotych monet uncjowych wyemitowanych przez Narodowy Bank Polski, zaprojektowanych przez Roussankę Nowakowską. Fotografia ze zbiorów Antykwariatu Numizmatycznego – Paweł Niemczyk, www.numizmatyka.waw.pl.

REDAKCJA I KOREKTA

Magdalena Kraszewska

ISBN 978-83-7417-601-9

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO W POZNANIU
ul. Powstańców Wielkopolskich 16, 61-895 Poznań
tel. 61 854 31 54, 61 854 31 55, faks 61 854 31 59
www.wydawnictwo-ue.pl, e-mail: wydawnictwo@ue.poznan.pl
Adres do korespondencji: al. Niepodległości 10, 61-875 Poznań

Skład komputerowy: Michał Krawczyk

Druk: UNI-DRUK Wydawnictwo i Drukarnia
ul. Przemysłowa 13, 62-030 Luboń
tel. 61 899 49 49-52, faks 61 813 93 31
www.unidruk.poznan.pl, e-mail: biuro@uni-druk.pl

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Moim zamiarem było zaprezentowanie w tej książce własnych badań na temat możliwości zastosowania rozmytych zbiorów probabilistycznych do tworzenia modeli formalnych finansów behawioralnych. Główną inspiracją co do obszaru zastosowań było wzrastające znaczenie finansów behawioralnych. W przypadku tej książki obszar aplikacji obejmuje teorię rynków finansowych i teorię rachunku aktuarialnego.

Skwantyfikowana wiedza o finansach jest przedstawiana na ogół za pomocą formalnego instrumentarium analizy probabilistycznej. Proponowane tutaj podejście behawioralne do finansów powinno pozwalać na wykorzystanie bez zmian całej bogatej empirycznej wiedzy na temat rozkładów ryzyka finansowego. Jest to wysoce korzystna cecha nowo proponowanych modeli, gdyż przybliża możliwość ich realnych zastosowań. Z drugiej strony uwzględnianie behawioralnych przesłanek prowadzi do utraty precyzji w rozumowaniu. Splot niepewności co do przyszłych stanów finansowych i braku precyzji w rozumowaniu jednoznacznie wskazał na rozmyte zbiory probabilistyczne jako potencjalne narzędzie finansów behawioralnych.

Lektura każdego elaboratu badawczego, czym jest ta książka, stawia pewne wymogi merytoryczne wobec Czytelnika. Proponowana książką jest adresowana do odbiorców dysponujących podstawową wiedzą na temat rynków finansowych, ubezpieczeń i finansów behawioralnych. Wskazywanie na właściwą literaturę ma ułatwić wszystkim przypomnienie sobie tych treści. Jako swe główne narzędzie badawcze stosuję instrumentarium matematyczne, co jest naturalnym podejściem w wypadku budowy modeli formalnych. Stawia to wobec Czytelników określone wymagania co do ich umiejętności matematycznych. Znajomość matematyki w standardowym zakresie przewidzianym dla absolwentów studiów ekonomicznych będzie tutaj niewystarczająca. Chcąc ułatwić pokonanie tej bariery, w jednym z rozdziałów przedstawiam stosowane tutaj ponadstandardowe instrumentarium matematyczne.

W książce są przedstawione wyniki badań uzyskanych w ramach realizacji własnego tematu badawczego „Stochastyczne zbiory Hiroto jako narzędzie opisu behawioralnych aspektów modeli finansowych" finansowanego przez grant badawczy N N111 441034 Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Zebrane tą drogą wyniki przedstawiłem do druku przekonany, że w ten sposób zostaną pokazane kolejne kierunki rozwoju teorii rynków finansowych. Wydanie niniejszej książki też jest finansowane ze środków wspomnianego powyżej grantu.

Na ostateczny kształt książki wywarła też wpływ moja współpraca z Paniami Edytą Tomasik (*de domo* Piotrowską) i Małgorzatą Just oraz z Panami Markiem Serafinem, Łukaszem Świątczakiem i Rogerem Ziomkiem. Z tego miejsca chciałbym podziękować tym osobom za możliwość wspólnej pracy naukowej.

Panu Profesorowi Michałowi Kolupie dziękuję za piękną recenzję tej książki. Jestem dumny z tego, że Pan Profesor zgodził się poświęcić swój czas ocenie mojej książki. Cieszę się z kolejnych słów wsparcia Profesora. Dzięki tym słowom nabieram pewności, że moje badania służą słusznej sprawie Nauki.

Każdemu Czytelnikowi z góry dziękuję za czas poświęcony lekturze tego opracowania.

Bnin, 17 czerwca 2011 *Krzysztof Piasecki*

Rozdział 1

ISTOTA FINANSÓW BEHAWIORALNYCH

Intensywny wzrost obrotów na rynkach finansowych oraz narastająca złożoność tych rynków wywołały naturalny popyt na analizę naukową tych zjawisk. Oczekiwano takich modeli normatywnych, które ułatwią inwestorom poruszanie się po rynkach finansowych. Spodziewano się uzyskania tą drogą metod zarządzania aktywami finansowymi takich, że ich stosowanie powodowałoby radykalny wzrost szans na godny zarobek i redukowałoby ryzyko poniesienia dotkliwych strat.

Oczekiwania te spotkały się z należytym zrozumieniem. Tematyka rynków finansowych wzbudziła zainteresowanie wielu badaczy. Pierwsze znaczące wyniki badawcze istotne dla rynków finansowych zawierała praca Bacheliera [1900]. Cały dwudziesty wiek był okresem intensywnych badań naukowych na temat rynków finansowych. Czytelników pragnących sobie przypomnieć najważniejsze efekty tych dociekań zapraszam do lektury niezmiernie zwięzłego i kompetentnego omówienia historii badań nad problematyką inwestycji finansowych przedstawionego w pracy K. Jajugi i T. Jajugi [2008, s. 15–19].

Uzyskane tą drogą modele normatywne rynku powszechnie zostały uznane za poprawny obraz realnego rynku finansowego. Dalsze badania prowadzone nad tymi modelami koncentrowały się głównie na bardziej wiernym odzwierciedleniu rozkładów ryzyka niepewności. Wprowadzane nowe modele formalne nie falsyfikowały zastanych modeli, ale jedynie zawierały opisy kolejnych mechanizmów rynków finansowych. Praktycy rynków finansowych potwierdzali rzetelność tych modeli. Wnioski uzyskiwane na ich gruncie pozwalały na formułowanie kryterium i reguł zarządzana inwestycjami finansowymi. Reguły te były na tyle przekonujące, że zdecydowana większość uczestników rynków finansowych deklarowała ich stosowanie w swej praktyce inwestycyjnej. Stosowanie tych reguł miało zapewnić inwestorom możliwie wysokie i bezpieczne zyski.

Szybko okazało się jednak, że aktywnie działający inwestorzy nie stosują się w ścisły sposób do tych reguł. Początkowo źródła takiego stanu rzeczy upatrywano w niedostatku bieżącej informacji rynkowej, zróżnicowanym dostępie poszczególnych inwestorów do informacji oraz w braku możliwości przetworzenia tych informacji. Analiza skutków takiego stanu rzeczy doprowadziła do sformułowania teorii efektywnych rynków kapitałowych [Fama 1970]. Założono tutaj, że każdy inwestor dysponuje dostępem do wszystkich informacji o stanach minionych wycenianej spółki oraz do informacji o wszelkich minionych cenach akcji. Wiedzę tę nazywamy w skrócie historią rynku. Prawo do takiego dostępu zapewnia na ogół system prawny konstytuujący daną giełdę papierów wartościowych. Następnie wyróżniono tutaj trzy formy efektywności rynkowej:

- słabą efektywność rynku, kiedy to jedyną podstawą wyceny rynkowej akcji jest historia rynku,
- średnią efektywność rynku, kiedy podstawą wyceny rynkowej akcji są ceny, historia rynku i publicznie dostępne prognozy przyszłej kondycji ekonomicznej emitenta wycenianych akcji,
- mocną efektywność rynku, kiedy podstawą wyceny rynkowej akcji są historia rynku, publicznie dostępne prognozy i poufne informacje o przyszłym stanie rzeczy.

W razie braku możliwości korzystania z poufnych informacji rynkowych średnio efektywny rynek kapitałowy jest identyfikowany jako rynek silnie efektywny.

Jeśli inwestor działający na słabo efektywnym rynku kapitałowym korzysta z ogólnie niedostępnych prognoz lub z informacji poufnych, to jego działanie będzie postrzegane jako odbiegające od standardów określonych przez uniwersalny model normatywny odwołujący się tutaj jedynie do historii rynku. Osiągnięcie przez takiego inwestora ponadprzeciętnych zysków nie jest jednak anomalią falsyfikującą normatywny model ryku, gdyż zyski te są tłumaczone skorzystaniem z informacji ogólnie niedostępnych. Podobnie ma się rzecz w wypadku inwestora działającego na średnio efektywnym rynku kapitałowym i dysponującym informacjami poufnymi.

Każdy rynek kapitałowy ewoluuje. Postępująca profesjonalizacja działalności inwestorskiej powoduje to, że wszyscy inwestorzy mogą korzystać z prognoz na temat rynku kapitałowego i przyszłej kondycji ekonomicznej emitentów akcji. Skorzystanie z tej możliwości wiąże się na ogół z poniesieniem pewnych kosztów. Szybko rozwijająca się informatyzacja i komputeryzacja pozwalają na pozyskanie i przetworzenie informacji rynkowych w rzeczywistym przedziale czasowym pozostającym do momentu podjęcia decyzji. Możemy tutaj stwierdzić, że rynki kapitałowe w naturalny sposób wzmacniają swoją efektywność do co najmniej średniej efektywności rynków kapitałowych.

Z drugiej strony modernizowane regulacje prawne i nadzór instytucjonalnych rynków finansowych coraz skuteczniej eliminują możliwość bezkarnego posługiwania się informacjami poufnymi. Oznacza to, że średnio efektywne rynki kapitałowe upodabniają się do rynków silnie efektywnych. Wszystko to razem oznacza, że ewolucja dowolnego rynku kapitałowego jest zbieżna do silnie efektywnego rynku kapitałowego. Stąd w dalszych rozważaniach, o ile to będzie potrzebne, zakładać będziemy silną efektywność rynku kapitałowego.

To wzmocnienie efektywności rynku kapitałowego nie usunęło jednak rozbieżności pomiędzy teorią a praktyką rynkową. Zachowania inwestorów nadal odbiegały jednak od racjonalnych zachowań przewidzianych w teorii. Ujawnienie tych anomalii w jednoznaczny sposób dowiodło istnienia przesłanek decyzyjnych niezależnych od normatywnych modeli analizy technicznej lub analizy fundamentalnej.

Zwróciło to uwagę na kolejny aspekt obrazu procesów ekonomicznych. Nadrzędnym podmiotem wszelkiego rodzaju działań gospodarczo-finansowych jest człowiek. I to jego decyzje mają istotny wpływ na ostateczny przebieg procesów ekonomicznych. Ludzkie decyzje są determinowane przez racjonalne zmierzanie do wyraźnie sformułowanych normatywnych celów oraz przez psychologiczne mechanizmy zachowania się decydenta. Wyróżnienie tego drugiego czynnika prowadziło wprost do wyodrębnienia się psychologii ekonomicznej bardziej powszechnie nazywanej ekonomią behawioralną. Wszelkie przesłanki decyzyjne implikowane przez mechanizmy psychologiczne nazwano przesłankami behawioralnymi.

Hipoteza o istotnym wpływie czynników behawioralnych na ekonomikę wymagała oczywiście weryfikacji. Z początku hipotezę tę potwierdzały rozliczne obserwacje[1]. Konieczne tutaj było dowiedzenie istotności wpływu wyizolowanego czynnika behawioralnego na ostateczny wybór decyzji. Pierwszą przełomową pracą zawierająca taki dowód był artykuł Kahnemana i Tversky'ego [1979]. Przedstawione tam wyniki dały podwaliny pod dalsze poszukiwania na gruncie ekonomii behawioralnej. Szybko z tego ogólnego nurtu wyłoniła się domena badawcza finansów behawioralnych. Przedmiotem badań finansów behawioralnych stało się wyróżnianie czynników behawioralnych mających wpływ na rynki finansowe oraz ocena tego wpływu. Istotą behawioralnego podejścia do finansów jest poszukiwanie psychologicznych mechanizmów zachowania się uczestników rynku finansowego. Wyróżnić można tutaj dwa nurty badawcze. Część badań koncentruje się na poszukiwaniu i objaśnianiu anomalii rynkowych polegających na odstępstwach od normatywnych rynków finansowych. Przedmiotem tych badań są te paradoksy i anomalie rynków finansowych, które trudno wyjaśnić na gruncie neoklasycznej teorii ekonomicznej. Wykryto tutaj między innymi zróżnicowane autokorelacje pomiędzy stopami zwrotu, efekty kalendarza, efekt wielkości firmy, paradoks zamkniętych funduszy powierniczych, efekt konsekwentnego wyboru akcji spadkowych. Skutki oddziaływania tych efektów były poddawane analizie statystycznej pozytywnie weryfikującej stawiane tutaj hipotezy poznawcze.

[1] Można znaleźć na przykład w pracach Tversky'ego i Kahnemana [1973] oraz Kahnemana i Tversky'ego [1974].

Analiza behawioralna rynków finansowych wskazuje na aspekt psychologiczny działań inwestorów jako przyczynę takiego stanu rzeczy. Niektóre dostrzegane paradoksy występują jedynie lokalnie. Poza tym niektóre anomalie zanikają wraz z momentem ich spopularyzowania w literaturze. Przykładami są tutaj efekt stycznia lub efekt małych firm. Wynika to przypuszczalnie z faktu, że inwestorzy giełdowi starają się wykorzystać pojawiające się tutaj możliwości dodatkowej stopy zwrotu [Zielonka 2004, s. 341]. Jest to kolejna egzemplifikacja zjawiska samosprawdzających się prognoz zachowań społecznych [Merton 1948].

Drugi z nurtów finansów behawioralnych koncentruje się na wyszukiwaniu i objaśnianiu tych zachowań uczestników rynku finansowego, które są postrzegane z punktu widzenia kryteriów normatywnych jako irracjonalne. Jak pokazały liczne badania, inwestorzy powszechnie wykazują odstępstwa od racjonalności zarówno w swych przekonaniach, jak i w swych preferencjach. Nieracjonalność decyzji inwestorskich jest wywołana skłonnościami poznawczymi inwestorów oraz ich skłonnościami motywacyjnymi. Do skłonności poznawczych inwestorów zaliczamy:

- nierespektowanie prawa zbieżności regresji do średniej przeciwstawione złudzeniom przegrywającego gracza hazardzisty,
- sentyment inwestycyjny przejawiający się w nadreaktywności lub subreaktywności w odniesieniu do pojawiających się informacji rynkowych,
- przesadną pewność co do własnej wiedzy i umiejętności,
- nadmierną ufność we własną kontrolę nad zachodzącymi procesami finansowymi,
- efekt myślenia wstecznego usprawiedliwiającego własne błędy, co prowadzi do ponownego popełniania identycznych błędów w przyszłości,
- efekt zakotwiczenia polegający na przywiązaniu nadmiernej wagi do pewnych sugerowanych wartości, co utrudnia obiektywną analizę sytuacji rynkowej,
- efekt rozpoznawalności polegający na przywiązywaniu nadmiernej wagi do obiektów lepiej znanych, co wypacza obiektywną analizę rynku finansowego.

Do skłonności motywacyjnych inwestorów zaliczamy:

- efekt unikania strat połączony z efektem utopionych kosztów polegające na preferowaniu inwestycji, na które ponieśliśmy już duże koszty, wliczając w to straty na pozycji,
- księgowanie umysłowe polegające na subiektywnym zróżnicowaniu podejścia do równoważnych przepływów finansowych,
- efekt dyspozycji polegający na preferowaniu sprzedaży akcji przynoszących zyski i zatrzymywaniu akcji przynoszących straty,
- efekt krótkowzroczności polegający na ocenianiu inwestycji długoterminowych za pomocą krótkoterminowych stop zwrotu,

– dysonans poznawczy polegający – w odniesieniu do nabytych aktywów finansowych – na koncentrowaniu się jedynie na pozytywnych informacjach na temat tych aktywów.

Każda z tych anomalii decyzji inwestycyjnych ma swoje bogate udokumentowanie w literaturze przedmiotu. Analiza tych publikacji jednoznacznie wskazuje, że na dorobek badawczy finansów behawioralnych składa się wiele dobrze udokumentowanych i przedyskutowanych obszernych studiów przypadków połączonych wspólnym celem polegającym na zbadaniu czynników behawioralnych mających wpływ na rynki finansowe.

Intensywny rozwój psychologii powodował intensywny wzrost złożoności logicznej tej dyscypliny wiedzy. Potrzeby kompleksowego traktowania tej wiedzy spowodowały konieczność substytucji złożoności logicznej poprzez złożoność matematyczną [Matraszek i Such 1989]. Doprowadziło to do wyodrębnienia się psychologii matematycznej [Combs, Dawes i Tversky 1970].

Konsekwencją takiej ewolucji psychologii jest dążenie do budowy modeli formalnych objaśniających behawioralne mechanizmy rynku finansowego. Można tutaj wyróżnić kilka podejść do tego tematu.

Najbardziej typowym dla finansów behawioralnych modelem formalnym jest teoria perspektywy zaproponowana w pracach Tversky'ego i Kahnemana [1973] i Kahnemana i Tversky'ego [1974; 1979]. W teorii tej wyróżnia się subiektywne przekształcenie obiektywnego prawdopodobieństwa jako behawioralną przesłankę decyzji inwestycyjnych.

Barberis, Shleifer i Vishny [1998] rozwijają teorię perspektywy, wskazując dodatkowo na nieprecyzyjne oszacowanie wartości bieżącej jako efekt subiektywnego podejścia do problemu wyceny papieru wartościowego.

Daniel, Hirshleifer i Subrahmanyam [2001] wskazują na zróżnicowany sposób reakcji poszczególnych inwestorów na otrzymane informacje jako przyczynę ujawniania się paradoksów rynkowych. Jednym z wyróżników tej teorii jest założony brak silnej efektywności rynku finansowego.

Hong i Stein [1999] przedstawiają działalność inwestycyjną jako grę pomiędzy inwestorami stosującymi analizę fundamentalną a inwestorami stosującymi analizę techniczną. Ten splot dwóch racjonalnych teorii wywołuje takie zjawiska rynkowe, które stanowią paradoksy z punktu widzenia teorii ekonomii. Behawioralne podłoże ma tutaj wybór strategii poznawczej.

Podejście podobne do neoklasycznego prezentują Dacey i Zielonka [2008]. Proponują opisanie behawioralnych przesłanek decyzji ekonomicznych za pomocą subiektywnych funkcji użyteczności.

Tak w ogólnym zarysie przedstawia się domena badawcza finansów behawioralnych rozumianych powszechnie jako nauka o wpływie czynników behawioralnych na rynki finansowe. Obecnie wynikom tych badań poświęcona już jest obszerna bibliografia. Na polskim rynku wydawniczym do tego nurtu możemy zaliczyć monografie Plumera [1995], Koppela i Abella [1997], Pringa [1999], Zaleskiewicza [2003], Tyszki [2004], Zielonki [2006], Czerwonki i Gorlewskiego [2008], Szyszki [2009] i Zweiga [2010]. Warta polecenia jest tutaj też lektura książki Bernsteina [1997] nawiązującej w obszernych swych fragmentach do problematyki finansów behawioralnych. Wobec kazualnego charakteru finansów behawioralnych, zapoznanie się z tymi kompetentnymi opracowaniami nie może być zastąpione przez lekturę nawet bardzo obszernych streszczeń.

Z drugiej strony tematyka finansów behawioralnych nie wyczerpuje problemu wpływu czynników behawioralnych na finanse. Należy tutaj przede wszystkim zwrócić uwagę na finanse ubezpieczeń. Z ogólnej nauki o finansach ten nurt badawczy wyodrębnił się już w siedemnastym wieku. Badania zainicjował Graunt [1662]. Pierwsze znaczące wyniki badawcze istotne dla finansów ubezpieczeniowych zawierały pochodzące z 1694 roku tablice czasu życia sporządzone przez Halleya. Tematyka finansów ubezpieczeniowych wzbudziła zainteresowanie wielu badaczy. Już w osiemnastym wieku można zaobserwować intensywny rozwój nauki o finansach ubezpieczeń życiowych. Rozwój ten był jednym z głównych ówczesnych czynników rozwoju rachunku prawdopodobieństwa. W wiek dwudziesty, będący wiekiem intensywnego rozwoju nauki o rynkach finansowych, nauka o finansach ubezpieczeniowych wkroczyła jako już dojrzała dyscyplina wiedzy.

I chyba właśnie ta łatwo dostrzegalna różnica „wiekowa" pomiędzy tymi dwoma nurtami nauki o finansach powoduje, że w obu tych obszarach badawczych te same problemy są nazywane całkowicie odmiennymi terminami. Czynniki behawioralne oddziaływające na finanse ubezpieczeniowe są w nauce o ubezpieczeniach określane jako pewne rodzaje hazardu personalnego. Szczególną uwagę zwraca się tutaj [Kowalewski 1994; Kowalczyk, Poprawska i Ronka-Chmielowiec 2006, s. 12] na następujące rodzaje tego hazardu:

– hazard moralny polegający na podjęciu działań zmierzających do wyłudzenia od ubezpieczyciela nienależnego odszkodowania,
– hazard motywacyjny objawiający się mniejszą starannością i dbałością o obiekt ubezpieczony i obojętnością wobec zagrożeń,
– hazard popytowy przejawiający się poprzez w dużej mierze subiektywny wybór decyzji: ubezpieczać czy też nie ubezpieczać.

Kolejny behawioralny czynnik mający wpływ na finanse ma swoje źródło w teorii poznania. Jest to swoisty hazard poznawczy uprawiany przez badacza empirycznej problematyki finansowej. Hazard ten ma podłoże subiektywne i polega na wybraniu stosowanej metody badawczej w sytuacji, gdy racjonalne wskazania tej metody są wieloznaczne. Wybór ten może mieć wpływ na postać sformułowanych wniosków [Zielonka 2004, s. 341], co dalej prowadzi do jednoznacznego wyboru sposobu działań finansowych.

Przykładami takich czynników behawioralnych będziemy się zajmowali w rozdziałach 3 i 5 prezentowanej książki.

Wymienione powyżej przesłanki behawioralne nie wyczerpują listy wszystkich czynników behawioralnych mających wpływ na finanse.

W wypadku finansów przedsiębiorstw należy pamiętać o psychologicznych mechanizmach zachowania się menedżera. Efekty tych zachowań leżą jednak na styku gospodarki finansowej i gospodarki towarowej, co kwalifikuje te efekty do badania przez bardziej ogólną ekonomię behawioralną.

W wypadku polityki podatkowej nie można pominąć problemu zachowań podatników. Działania te jednak są powiązane między innymi z sytuacją na rynku pracy, ze skłonnością do konsumpcji przeciwstawionej skłonności do inwestowania oraz z preferencjami co do określonych form oszczędzania. Wszystkie te aspekty zachowań podatników są przedmiotem badań ekonomii behawioralnej.

I na koniec rzut oka na finanse publiczne będące jednym z najistotniejszych działów nauki o finansach. Tutaj na pewno bardzo ważne są psychologiczne mechanizmy zachowania się polityków. Ten behawioralny czynnik mający niewątpliwie fundamentalny wpływ na ogół finansów stanowi już przedmiot badania politologii.

Literatura

Bachelier L., 1900, *Theory of Speculation*, Gauthier-Villars, Paris.

Barberis N., Shleifer A., Vishny R., 1998, *A model of investor sentiment*, Journal of Financial Economics, vol. 49.

Bernstein P.L., 1997, *Przeciw Bogom: niezwykłe dzieje ryzyka*, WIG-Press, Warszawa.

Combs C.H., Dawes R.M., Tversky A., 1970, *Mathematical Psychology: An Elementary Introduction*, Prentice Hall.

Czerwonka M., Gorlewski B., 2008, *Finanse behawioralne*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie – Oficyna Wydawnicza, Warszawa.

Dacey R., Zielonka P., 2008, *A detailed prospect theory explanation of the disposition effect*, Journal of Behavioral Finance, vol. 9, no. 1.

Daniel K., Hirshleifer D., Subrahmanyam A., 2001, *Overconfidence, arbitrage and equilibrium asset pricing*, Journal of Finance, vol. 56, issue 3.

Fama E.F., 1970, *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, Journal of Finance, vol. 25, issue 2.

Graunt J., 1662, *Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality*, London.

Hong H., Stein J., 1999, *A unified theory of under reaction, momentum trading and over reaction in asset market*, Journal of Finance vol. 54, issue 6.

Jajuga K., Jajuga T., 2008, *Inwestycje, instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Kahneman D., Tversky A., 1974, *Judgment under uncertainty; Heuristic and biases*, Science vol. 185.

Kahneman D., Tversky A., 1979, *Prospect theory: An analysis of decision under risk*, Econometrica vol. 47, no. 2.

Koppel R., Abell H., 1997, *Wewnętrzna gra*, WIG-Press, Warszawa.

Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W., 2006, *Metody aktuarialne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Kowalewski E., 1994, *Wprowadzenie do teorii ryzyka ubezpieczeniowego*, w: Wąsiewicz A. (red.), *Ubezpieczenia w gospodarce rynkowej*, Oficyna Branta, Bydgoszcz.

Matraszek K., Such J., 1989, *Ontologia, teoria poznania i ogólna metodologia nauk*, PWN, Warszawa.

Merton R., 1948, *The self-fulfilling prophecy*, Antioch Review 8 (Summer).

Plumer T., 1995, *Psychologia rynków finansowych, u źródeł analizy technicznej*, WIG-Press, Warszawa.

Pring M.J., 1999, *Psychologia inwestowania. Klasyczne strategie osiągania sukcesów na giełdzie*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa.

Szyszka A., 2009, *Finanse behawioralne. Nowe podejście do inwestowania na rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.

Tversky A., Kahneman D., 1973, *Availability: A heuristic for judging frequency and probability*, Cognitive Psychology no. 5.

Tyszka T. (red.), 2004, *Psychologia ekonomiczna*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

Zaleśkiewicz T., 2003, *Psychologia inwestora giełdowego. Wprowadzenie do behawioralnych finansów*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

Zielonka, P., 2004, *Finanse behawioralne*, w: Tyszka T. (red.), *Psychologia ekonomiczna*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

Zielonka, P., 2006, *Behawioralne aspekty inwestowania na rynku papierów wartościowych*, CeDeWu, Warszawa.

Zweig J., 2010, *Twój mózg, twoje pieniądze*, Laurum, Warszawa.

Rozdział **2**

WYBRANE UOGÓLNIENIA TEORII MNOGOŚCI

„Racjonalne poznanie naszego otoczenia oraz racjonalne stosowanie wyników tego poznania jest usystematyzowane przez logikę. Logika jest to teoria czynności poznawczych, […], a więc głównie:

- grupowania (to jest: klasyfikacji, uporządkowania, typologii) obiektów badań,
- stwierdzania faktów i konwencji teoretycznych – odpowiednio poprzez obserwację, dostarczającą bazy empirycznej dla teorii, oraz poprzez pomiar i definicję,
- rozumowania, a w szczególności uzasadniania (czyli dowodzenia i weryfikacji) oraz wyjaśniania i wnioskowania.

[…] Rdzeniem logiki jest logika formalna *sensu stricto,* obejmująca klasyczny rachunek zdań i nadbudowany nad nim klasyczny rachunek kwantyfikatorów; stanowi on wystarczającą podstawę formalizacji zasadniczych rozumowań, przeprowadzanych w obrębie […] matematyki" [*Encyklopedia* 2005, t. 9, s. 652].

Przestrzeń wszystkich zdań twierdzących oznaczamy symbolem $\mathbb{P}$. Przedmioty dowolnego poznawczo-aplikacyjnego działania stanowią elementy pewnej przestrzeni $\mathbb{X}$. Podstawowym narzędziem do klasyfikacji tych elementów jest pojęcie zbioru. Za pomocą funkcji zdaniowej $\varphi_A : \mathbb{X} \to \mathbb{P}$ dowolny zbiór $A \subset \mathbb{X}$ można określić w następujący sposób

$$A = \{x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x)\}. \tag{2.1}$$

Funkcję zdaniową $\varphi_A \in \mathbb{P}^{\mathbb{X}}$ nazywamy predykatorem zbioru $A \subset \mathbb{X}$. Powiązania pomiędzy dowolnym zbiorem i jego predykatorem są wzajemnie jednoznaczne.

Dla jednoznacznego określenia postaci zbioru $A \subset \mathbb{X}$ konieczne jest określenie sposobu, w jaki jest dana relacja pomiędzy rzeczywistym stanem rzeczy a informacją zawartą w zdaniu na temat tego stanu rzeczy.

Punktem wyjścia do rozważań na ten temat jest ograniczenie się na wstępie do klasycznego rachunku zdań. Przedmiotem klasycznego rachunku zdań są jedynie te zdania twierdzące, które są prawdziwe albo fałszywe. Zdanie prawdziwe jest to zdanie, które opisuje rzeczywistość taką, jaka jest. Natomiast zdanie fałszywe jest to zdanie, które opisuje rzeczywistość niezgodnie z tym, jak się ona ma. Jeśli zdanie nie jest prawdziwe, to jest fałszywe. Dowolne zdania spełniające te warunki nazywamy zdaniami logicznymi [Ziembiński 2006, s. 63–65]. Przestrzeń wszystkich zdań logicznych oznaczamy za pomocą symbolu $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{X}$. Tak określony sposób oceny zdań stanowi podwaliny dla logiki dwuwartościowej.

Prawdziwemu zdaniu logicznemu $\mathcal{p} \in \mathbb{P}_0$ przypisujemy wartość logiczną prawda

$$\mathcal{V}(\mathcal{p}) = 1.$$

Fałszywemu zdaniu logicznemu $\mathcal{p} \in \mathbb{P}_0$ przypisujemy wartość logiczną fałsz

$$\mathcal{V}(\mathcal{p}) = 0.$$

W ten sposób nad przestrzenią $\mathbb{P}_0$ wszystkich możliwych do wypowiedzenia zdań logicznych rozpinamy funkcję ewaluacji logicznej $\mathcal{V}: \mathbb{P}_0 \to \{0, 1\}$.

Jeśli predykator zbioru $\varphi_A : \mathbb{X} \to \mathbb{P}_0$ przyporządkowuje poszczególnym elementom przestrzeni $\mathbb{X}$ zdania logiczne, to zbiór $A \subset \mathbb{X}$ określony za pomocą zależności (2.1) jest klasycznym zbiorem w ujęciu teorii mnogości. Zbiór ten jest poniżej opisany za pomocą zależności (2.2). Rodzinę wszystkich takich zbiorów oznaczamy symbolem $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. Rodzina tworzy algebrę Boole'a ze względu na następująco zdefiniowane działania:

– sumę

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)\right\},$$

– iloczyn

$$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x)\right\},$$

– dopełnienie

$$A' = \left\{x \in \mathbb{X} : \sim\varphi_A(x)\right\},$$

gdzie:

$$A = \left\{x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x),\ \varphi_A \in \mathbb{P}_0^{\mathbb{X}}\right\}, \tag{2.2}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{X} : \varphi_B(x),\ \varphi_B \in \mathbb{P}_0^{\mathbb{X}}\right\}.$$

Algebra Boole'a zbiorów tworzy istotny element fundamentu dowolnej teorii matematycznej.

Dowolnemu zbiorowi $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ możemy przypisać jego funkcję charakterystyczną $\chi_A : \mathbb{X} \to \{0, 1\}$ określoną przez tożsamość

$$\chi_A(x) = \mathcal{V}\left(\varphi_A(x)\right).$$

Wartość funkcji charakterystycznej $\chi_A(x)$ jest równa wartości logicznej zdania $x \in A$. Przestrzeń wszystkich funkcji charakterystycznych nad przestrzenią $\mathbb{X}$ oznaczamy za pomocą symbolu $2^{\mathbb{X}}$. Przestrzenie $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ i $2^{\mathbb{X}}$ są izomorficzne. Izomorfizm ten tutaj określimy za pomocą bijekcji $\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to 2^{\mathbb{X}}$. Dzięki temu izomorfizmowi odpowiednie operacje na zbiorach możemy w równoważny sposób zastąpić właściwie dobranymi działaniami w przestrzeni funkcji charakterystycznych. Między innymi można to zrobić, stosując następujące tożsamości:

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\left\{\chi_A(x), \chi_B(x)\right\},$$

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\left\{\chi_A(x), \chi_B(x)\right\},$$

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

2.1. Elementy teorii zbiorów rozmytych

Logika dwuwartościowa wielokrotnie była poddawana krytyce. Podnoszono tutaj zarzuty, że pomiędzy rzeczywistymi wypowiedziami znajdujemy „zdania prawie prawdziwe" i „zdania prawie fałszywe". Dostrzegano istnienie „zdań bardziej prawdziwych niż fałszywych" oraz „zdań bardziej fałszywych niż prawdziwych". Wskazywano na istnienie „zdań możliwych", to jest zdań równie prawdziwych jak ich zaprzeczenie. Pierwszym formalnym rozwiązaniem tego problemu była propozycja logik wielowartościowych złożona przez Łukasiewicza [1922]. Propozycja ta została powszechnie zaakceptowana i w zasadzie do tej pory teoria logik wielowartościowych jest intensywnie rozwijana.

Przedmiotem rozważań w logice wielowartościowej są te zdania, dla których jednoznacznie jest określona spójna relacja „**nie mniej prawdziwe**". Dowolne zdania spełniające te warunki nazywamy zdaniami intuicyjnymi. Przestrzeń wszystkich zdań spełniających ten warunek oznaczamy za pomocą symbolu $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$. Jest oczywiste, że każde „zdanie prawdziwe" jest „**nie mniej prawdziwe**" niż „zdanie fałszywe". W tej sytuacji możemy zapisać $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$. Pozwala to na stwierdzenie, że logika wielowartościowa jest rozszerzeniem logiki dwuwartościowej. Przy rozszerzeniu tym obowiązują następujące zasady:

– każde „zdanie prawdziwe" jest „**nie mniej prawdziwe**" niż dowolne zdanie intuicyjne,
– każde zdanie intuicyjne jest „**nie mniej prawdziwe**" niż dowolne „zdanie prawdziwe".

Każdemu zdaniu intuicyjnemu $p \in \mathbb{P}_1$ przypisujemy jego wartość logiczną $\tilde{v}(p)$ rozumianą jako funkcja użyteczności relacji „**nie mniej prawdziwe**". Oznacza to, że jeśli zdanie p jest „**nie mniej prawdziwe**" niż zdanie q, to

$$\tilde{v}(p) \geq \tilde{v}(q).$$

Dodatkowo, zgodnie ze spostrzeżeniem, że logika wielowartościowa jest rozszerzeniem logiki dwuwartościowej, dla dowolnego zdania intuicyjnego, mamy $p \in \mathbb{P}$.

$$\tilde{v}(p) = v(p).$$

W ten sposób nad przestrzenią $\mathbb{P}_1$ wszystkich możliwych do wypowiedzenia zdań intuicyjnych rozpinamy funkcję ewaluacji intuicyjnej $\tilde{v}\colon \mathbb{P}_1 \rightarrow [0, 1]$.

Równolegle do rozwoju logiki wielowartościowej na gruncie informatyki teoretycznej prowadzono dociekania na temat zmiennej lingwistycznej, to jest zmiennej osiągającej wartości będące słowami lub zdaniami języka naturalnego. Zwracano tutaj uwagę na brak precyzji informacji opisanej za pomocą zmiennych lingwistycznych. Istotnym elementem tych rozważań było poszukiwanie adekwatnego modelu formalnego zmiennej lingwistycznej. Wyznaczenie takiego modelu formalnego pozwoliłoby na precyzyjne określenie właściwości nieprecyzyjnego pojęcia zmiennej lingwistycznej, a to z kolei pozwoliłoby na zastosowanie dedukcji matematycznej do rozszerzenia naszej wiedzy na temat zastosowań zmiennej lingwistycznej.

Takim powszechnie akceptowanym modelem formalnym okazało się zaproponowane przez Zadeha [1965] pojęcie zbioru rozmytego $\tilde{A}$ rozumianego jako nieprecyzyjnie wyróżniony obiekt w przestrzeni elementów $\mathbb{X}$. Każdy z elementów $x \in \mathbb{X}$ należał do rozmytego zbioru $\tilde{A}$ w stopniu $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$. W ten sposób reprezentacją zbioru rozmytego $\tilde{A}$ stała się jego funkcja przynależności $\mu_A\colon \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$. W kolejnych swych pracach Zadeh [1975a; 1975b; 1975c] wykazał przydatność zbioru rozmytego użytego jako modelu formalnego zmiennej lingwistycznej.

Propozycja Zadeha wywołała ożywioną dyskusję między innymi na temat istoty matematycznej pojęcia zbioru rozmytego. Na przykład Gougen [1967] przez pojęcie zbioru rozmytego rozumiał jego funkcję przynależności, Koczy i Hajnal [1977] zaś za rozmyte podzbiory w przestrzeni $\mathbb{X}$ proponują uznać elementy pewnego niepustego zbioru, nad którym określono różnowartościowe przekształcenie na zbiór $[0, 1]^{\mathbb{X}}$. Można też się spotkać[1] z określeniem zbioru rozmytego $\tilde{A}$, opisanego przez swą funkcję przynależności, jako zbioru par uporządkowanych

$$\tilde{A} = \left\{\left(x, \mu_A(x)\right); x \in \mathbb{X}\right\}.$$

Obiecująca formalnie była też sugestia przedstawienia teorii zbiorów rozmytych jako rozszerzenia teorii mnogości opartej na logice dwuwartościowej. Równolegle toczyła się dyskusja nad interpretacją funkcji przynależności. Przeważył tutaj pogląd[2], że wartości funkcji przynależności należy interpretować w świetle teorii logik wielowartościowych Łukasiewicza. Wartość funkcji przynależności $\mu_A(x)$ jest tutaj identyfikowana z wartością logiczną zdania intuicyjnego stwierdzającego, że element $x \in \mathbb{X}$ jest składnikiem zbioru rozmytego $\tilde{A}$. Formalnym odzwierciedleniem tej interpretacji jest tożsamość

$$\mu_A(x) = \tilde{\mathcal{V}}\left("x \in \mathbb{X}"\right). \tag{2.3}$$

Na bazie tej dyskusji Świtalski [1986] zaproponował prostą formalną definicję zbioru rozmytego. Definicję tę przytoczymy tutaj w całości.

Dany jest opisany już powyżej izomorfizm $\Phi\colon \mathcal{B}(\mathbb{X}) \to 2^{\mathbb{X}}$ pomiędzy rodziną $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ wszystkich klasycznych zbiorów a rodziną $2^{\mathbb{X}}$ wszystkich funkcji charakterystycznych. Istnieje wtedy też bijekcja odwrotna $\Phi^{-1}\colon 2^{\mathbb{X}} \to \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Rodzinę wszystkich zbiorów klasycznych możemy przedstawić w następujący sposób:

$$\mathcal{B}(\mathbb{X}) = \Phi^{-1}(2^{\mathbb{X}}) \tag{2.4}$$

jako obraz rodziny wszystkich funkcji charakterystycznych. Izomorfizm Φ^{-1} poszerzamy do dowolnego przekształcenia różnowartościowego $\tilde{\Phi}^{-1}$ określonego nad zbiorem wszystkich funkcji przynależności $[0,1]^{\mathbb{X}}$. Każdy element obrazu tego przekształcenia

$$\mathcal{F}(\mathbb{X}) = \tilde{\Phi}^{-1}\left([0,1]^{\mathbb{X}}\right), \tag{2.5}$$

nazywamy zbiorem rozmytym. Dla wyróżnienia zbiory pochodzące z rodziny $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ nazywać będziemy zbiorami klasycznymi.

Dzięki takiemu podejściu oraz interpretacji (2.3) dowolny zbiór rozmyty $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ przypisany funkcji przynależności μ_A będziemy mogli zapisać w postaci

$$\tilde{A} = \left\{x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x) \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{X}},\ \mu_A(x) = \tilde{\mathcal{V}}\left(\varphi_A(x)\right)\right\}. \tag{2.6}$$

[1] Na przykład w pracy Negoity i Ralescu [1975].

[2] Przedstawiany między innymi w pracach Gilesa [1976], Gottwalda [1979], Lee i Changa [1979] i Wygralaka [1985].

Najogólniejszą podstawą formalną przydatną do rozwoju teorii zbiorów rozmytych jest opisana przez Birkhoffa [1967] teoria krat[3].

W wielu wnioskowaniach, dla dowolnego zbioru rozmytego $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ wyróżniamy jego nośnik $\|\tilde{A}\| \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ określony przez zależność

$$\|\tilde{A}\| = \left\{ x \in \mathbb{X} : \ \mu_A(x) > 0 \right\}.$$

Kierunki rozwoju teorii zbiorów rozmytych są ograniczone zasadą rozszerzenia Zadeha [1975a]. Zasada ta głosi, że jeśli wybrane pojęcie jest już zdefiniowane w przestrzeni $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ klasycznych zbiorów, to dowolne uogólnienie tej definicji w przestrzeni zbiorów rozmytych $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ może być jedynie rozszerzeniem definicji sformułowanej już w przestrzeni $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

2.1.1. Algebra zbiorów rozmytych

Definiując działania algebry zbiorów rozmytych, korzystamy z zasady rozszerzenia Zadeha. Stąd działania teoriomnogościowe na rodzinie zbiorów rozmytych $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ określamy w następujący sposób:

– sumę

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \left\{ x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x) \right\},$$

– iloczyn

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{ x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x) \right\},$$

– dopełnienie

$$\tilde{A}' = \left\{ x \in \mathbb{X} : \sim \varphi_A(x) \right\},$$

gdzie zbiór rozmyty $\tilde{A}$ jest określony za pomocą zależności (2.6), zbiór rozmyty $\tilde{B}$ zaś jest dany w postaci:

$$\tilde{B} = \left\{ x \in \mathbb{X} : \varphi_B(x), \ \varphi_B \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{X}} \right\}.$$

[3] We współczesnym piśmiennictwie polskim obszerne omówienie tej teorii można znaleźć w pracy Walendziaka [2009]. Problem związków pomiędzy teorią krat a teorią zbiorów rozmytych został kompetentnie omówiony przez Drewniaka [1984].

Korzystając z izomorfizmu pomiędzy rodziną funkcji przynależności a rodziną zbiorów rozmytych, poszczególne działania teoriomnogościowe możemy zapisać w równoważny sposób, stosując następujące tożsamości:

$$\mu_{A\cup B}(x) = S\big(\mu_A(x),\ \mu_B(x)\big),$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = T\big(\mu_A(x),\ \mu_B(x)\big),$$

$$\mu_{A'}(x) = C\big(\mu_A(x)\big),$$

gdzie:

– funkcja S: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ jest rozszerzeniem funkcji max: $\{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$,
– funkcja T: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ jest rozszerzeniem funkcji min: $\{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$,
– funkcja C: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ jest rozszerzeniem funkcji f: $\{0, 1\} \to \{0, 1\}$ zadanej przez tożsamość $f(a) = 1 - a$.

Funkcje S, T, C powinny być tak dobrane, aby ich właściwości gwarantowały spełnienie intuicyjnych wymagań stawianych działaniom na zbiorach rozmytych. W wyniku szerokiej dyskusji[4] wykrystalizował się pogląd głoszący, że:

– jedyna funkcja C: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ definiująca dopełnienie zbioru rozmytego jest określona za pomocą tożsamości

$$C(a) = 1 - a,$$

– każda funkcja T: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ definiująca iloczyn zbiorów rozmytych jest dowolną t-normą [Menger 1942], co oznacza, że spełnione są tożsamościowe warunki

$$T(0, 0) = 0,$$

$$T(a, 1) = T(1, a) = a,$$

$$(a, b) \leq (c, d) \Rightarrow T(a, b) \leq T(c, d),$$

$$T(a, b) = T(b, a),$$

$$T\big(T(a, b), c\big) = T\big(a, T(b, c)\big),$$

[4] Dyskusję tę można prześledzić w pracach: Bellmana i Giertza [1973], Czogały i Drewniaka [1984], Dombiego [1982a, 1982b], Hamachera [1978], Klementa [1982], Mesiara i Piaseckiego [1990], Mizumoto i Zimmermanna [1982], Roddera [1975], Thole'a, Zimmermanna i Zysny [1979], Yagera [1982], Zimmermanna [1978], Zimmermanna i Zysna [1980].

– każda funkcja S: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ definiująca sumę zbiorów rozmytych jest dualną dla zadanej t-normy T t-konormą [Schweizer i Sklar 1961] określoną przez tożsamość

$$S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b).$$

W wypadku tak zdefiniowanych działań teoriomnogościowych nie jest spełniona rozdzielność pomiędzy działaniami sumy i iloczynu zbiorów rozmytych. Postulat rozdzielności tych działań będzie spełniony jedynie wtedy, gdy dodatkowo będą spełnione następujące tożsamościowe warunki:

$$S\big(a, T(b, c)\big) = S\big(T(a, b), T(a, c)\big),$$

$$T\big(a, S(b, c)\big) = T\big(S(a, b), S(a, c)\big).$$

Hamacher [1978] dowiódł, że jedynymi t-normą i t-konormą spełniającymi te dodatkowe warunki są funkcje określone przez tożsamości:

$$S(a, b) = \max\{a, b\},$$

$$T(a, b) = \min\{a, b\}.$$

Oznacza to, że przy spełnieniu postulatu rozdzielności sumy i iloczynu poszczególne działania teoriomnogościowe w przestrzeni $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ zbiorów rozmytych są określone w jednoznaczny sposób przez tożsamości:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\big\{\mu_A(x), \mu_B(x)\big\},$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\big\{\mu_A(x), \mu_B(x)\big\},$$

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

W tej książce wszystkie rozważania będą prowadzone dla przypadku spełnienia praw rozdzielności iloczynu i sumy zbiorów. Jest to warunek konieczny dla istnienia przestrzeni metrycznej zbiorów rozmytych [Birkhoff 1967]. Pojęcie odległości pomiędzy zbiorami rozmytymi będzie nam potrzebne w trakcie badania właściwości tych zbiorów.

Przestrzeń $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ zbiorów rozmytych z tak zdefiniowanymi działaniami teoriomnogościowymi tworzy taką algebrę de Morgana, która nie jest algebrą Boole'a. Oznacza to, że w przypadku działań teoriomnogościowych na zbiorach rozmytych nie jest zachowane prawo wyłączonego środka.

W naszych dalszych rozważaniach będziemy też korzystać z relacji zawierania się zbiorów rozmytych. Relacja ta dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(\tilde{A}, \tilde{B})$ jest określona w następujący sposób:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{F}(\mathbb{X}): \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

2.1.2. Miary nieprecyzji zbioru rozmytego

Jak już wspomniano, zbiory są stosowane jako narzędzie do przedstawienia wyniku przeprowadzonych czynności klasyfikacyjnych. Sporządzona w ten sposób informacja na ogół jest nieprecyzyjna. Wielu badaczy przedmiotu w obrazie nieprecyzyjności informacji wyróżnia niewyrazistość informacji oraz wieloznaczność informacji [Klir 1993; Stirling 2003]. Niejednoznaczność informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia pomiędzy wieloma wskazanymi alternatywami jednej rekomendowanej alternatywy. Niewyrazistość informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją i jej zaprzeczeniem.

Nasilanie się nieprecyzyjności danej informacji obniża przydatność tej informacji. Stąd w tym podrozdziale zajmiemy się problemem pomiaru nieprecyzji. Punktem wyjścia do tego pomiaru będzie miara m zdefiniowana na pewnym σ-ciele podzbiorów zawartych w przestrzeni $\mathbb{X}$. Zadaniem tej miary jest wskazanie tych elementów przestrzeni $\mathbb{X}$, do których przykładamy większą wagę. Podstawą dalszych ocen dowolnego mierzalnego zbioru rozmytego $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ będzie jego miara $m(\tilde{A})$ określona przez Khaliliego [1979] w następujący sposób:

$$m(\tilde{A}) = \int_{\mathbb{X}} \mu_A(x)\, dx.$$

Ze swej istoty jedynie informacja wieloznaczna może być niewyrazista. Dlatego w pierwszym kroku nasze rozważania skupimy na pomiarze wieloznaczności. Właściwym narzędziem jest tutaj miara energii zaproponowana przez de Lucę i Terminiego [1979] jako uogólnienie pojęcia liczby kardynalnej zbioru. W naszych rozważaniach będziemy wykorzystywać zmodyfikowaną definicję tej miary podaną przez Gottwalda, Czogałę i Pedrycza [1982]. Zgodnie z tą propozycją miarą energetyczną będziemy nazywać dowolne przekształcenie $d: \mathcal{F}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, +\infty[$ spełniające dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(\tilde{A}, \tilde{B})$ następujące warunki:

$$d(\emptyset) = 0, \tag{2.7}$$

$$d(\tilde{A}) \leq d(\mathbb{X}), \tag{2.8}$$

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Rightarrow d(\tilde{A}) \le d(\tilde{B}). \tag{2.9}$$

Warunek (2.7) wskazuje, że zbiorowi pustemu przypisujemy zerową wartość miary energetycznej. Warunek (2.8) jest uzasadniony stwierdzeniem tego, że informacja reprezentowana przez zbiór $\mathbb{X}$ jest w największym stopniu wieloznaczna. Warunek ten dodatkowo określa miarę energetyczną jako miarę skończoną. Ostatni warunek (2.9) mówi, że miara energetyczna jest monotonicznym przekształceniem nad rodziną zbiorów rozmytych.

Dla naszych dalszych celów aplikacyjnych wystarczające jest, że ograniczymy się tutaj do zaproponowanej przez Gottwalda, Czogałę i Pedrycza [1982] egzemplifikacji tej miary danej za pomocą tożsamości

$$d(\tilde{A}) = f\left(\int_{\mathbb{X}} g\left(\mu_A(x) \right) dx \right),$$

gdzie funkcje $f: [0, +\infty[\; \rightarrow [0, f_{\max}]$ i $g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ są rosnącymi funkcjami spełniającymi dodatkowo warunek

$$f(0) = g(0) = 0. \tag{2.10}$$

Zastosowanie odpowiednio dobranych postaci tych funkcji ma zagwarantować to, że miara energetyczna zawsze będzie miarą skończoną. Wyniki przedstawione w pracy Estevy i Quantanilli [1987] pozwalają stwierdzić, że w dalszych rozważaniach możemy się ograniczyć do przypadku

$$g(x) = x.$$

Ostatecznie stosowana przez nas dalej miara energetyczna $d: \mathcal{F}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, +\infty[$ przyjmuje postać

$$d(\tilde{A}) = f\left(m(\tilde{A}) \right). \tag{2.11}$$

Zwiększanie się miary energetycznej zbioru rozmytego oznacza przyrost wieloznaczności informacji reprezentowanej przez ten zbiór.

Dodatkowo miara zbioru rozmytego może nam posłużyć do wyznaczenia metryki na rodzinie $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ zbiorów rozmytych. Zgodnie z sugestią zawartą w pracy Kaufmanna [1975], jest nią odległość Hamminga $\delta: \left[\mathcal{F}(\mathbb{X}) \right]^2 \rightarrow [0, +\infty]$ określona za pomocą tożsamości

$$\delta\left(\tilde{A}, \tilde{B} \right) = m\left(\tilde{A} \cup \tilde{B} \right) - m\left(\tilde{A} \cap \tilde{B} \right) = \int_{\mathbb{X}} \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| dx.$$

Rosnące przekształcenie odległości Hamminga $f \circ \delta$ może być stosowane między innymi jako miara podobieństwa pomiędzy zbiorami rozmytymi. Przyjmuje się wtedy, że im zbiory są mniej odlegle, tym bardziej są do siebie podobne.

Fakt ten wykorzystamy przy ocenie niewyrazistości informacji reprezentowanej przez zbiór rozmyty. Przystępując do tej oceny, określmy na wstępie zbiór rozmyty $\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}$ jako zbiór przypisany funkcji przynależności

$$\mu_{\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}}(x) = \frac{1}{2}.$$

Każdy element przestrzeni $\mathbb{X}$ należy do zbioru $\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}$ w stopniu równym stopniowi jego nienależenia. Oznacza to, że opisany powyżej podzbiór rozmyty jest równy własnemu dopełnieniu. Możemy w tej sytuacji stwierdzić, że informacja reprezentowana przez ten zbiór jest w największym stopniu niewyrazista.

Właściwym narzędziem do pomiaru niewyrazistości informacji reprezentowanej przez zbiór rozmyty jest miara entropii[5] zaproponowana przez de Lucę i Terminiego [1972]. W porównaniu z oryginalną definicją, zostanie tutaj jedynie osłabiony warunek wyróżniający zbiory charakteryzujące się zerową wartością miary entropii. Zmiana ta swoim duchem odpowiada zaproponowanym przez Gottwalda, Czogałę i Pedrycza [1982] zmianom definicji miary energetycznej. Zgodnie z tym miarą entropii nazywać będziemy dowolne przekształcenie $e\colon \mathcal{F}(\mathbb{X}) \to [0, +\infty[$ spełniające dla dowolnej pary zbiorów rozmytych $(\tilde{A}, \tilde{B})$ następujące warunki:

$$\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{X}) \Rightarrow e(\tilde{A}) = 0, \tag{2.12}$$

$$e(\tilde{A}) \le e\left(\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}\right), \tag{2.13}$$

$$\left(\tilde{A} \cap \left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}} \subset \tilde{B} \cap \left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}\right) \wedge \left(\tilde{B} \cup \left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}} \subset \tilde{A} \cup \left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}\right) \Rightarrow e(\tilde{A}) \le e(\tilde{B}). \tag{2.14}$$

Warunek (2.12) wskazuje, że wszystkim zbiorom klasycznym przypisujemy zerową wartość miary entropii. Warunek (2.13) jest uzasadniony stwierdzeniem tego,

[5] Teza ta obszernie została uzasadniona w pracy: Bierdosian i Xie [1984].

że informacja reprezentowana przez zbiór $\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right]_{\mathbb{X}}$ jest w największym stopniu niewyrazista. Warunek ten dodatkowo określa miarę entropii jako miarę skończoną. Trzeci z kolei warunek, (2.14), mówi, że bardziej zdecydowane rozstrzygnięcie problemu przynależenia lub nieprzynależenia elementów do ocenianego zbioru powoduje zmalenie jego entropii.

W literaturze przedmiotu znajdujemy wiele propozycji miar entropii zbiorów rozmytych. Propozycje te można z grubsza podzielić na dwie grupy. W pierwszej z nich znajdujemy te miary entropii, w których definicjach skorzystano ze znajomości przebiegu zmienności pewnych specyficznych funkcji. Jedynym uzasadnieniem wprowadzenia tych miar entropii było spełnianie przez nie warunków (2.12), (2.13) i (2.14). Drugą grupą miar entropii są miary zdefiniowane na podstawie pewnych intuicyjnych przesłanek. Przesłanki te wynikają z przekonania, że miara entropii powinna być funkcją podobieństwa pomiędzy pewnymi zbiorami. Poszczególne propozycje miary entropii różniły się wskazaniem pary porównywanych zbiorów. Autorzy, omawiając swoje propozycje określenia miary entropii, przedstawiali przesłanki uzasadniające merytorycznie dokonany wybór pary porównywanych zbiorów. Traktując propozycje miary entropii z tej drugiej grupy jako lepiej uzasadnione, zaproponujemy je do zastosowania.

Kaufmann [1975] zaproponował, aby jako miernik entropii zbioru rozmytego $\tilde{A}$ przyjąć jego podobieństwo do najbardziej podobnego zbioru klasycznego. Możemy zapisać określenie miary entropii Kaufmana e_K w następujący sposób:

$$e_K(\tilde{A}) = f\left(\inf\left\{\delta(\tilde{A}, B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})\right\}\right) = f\left(\delta\left(\tilde{A}, \left\{x \in \mathbb{X} : \mu_A(x) \geq \frac{1}{2}\right\}\right)\right).$$

Czogała, Gottwald i Pedrycz [1981] eksponują przesłankę mówiąca, że niewyraźne określenie przynależności elementów do zbioru rozmytego powoduje niespełnianie prawa wyłączonego środka. Wynika z tego ich propozycja, aby miarę entropii zbioru rozmytego $\tilde{A}$ rozumieć jako miarę podobieństwa zbioru $\tilde{A} \cap \tilde{A}'$ do zbioru pustego Ø. Sugerowana przez nich miara entropii e_C zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$e_C(\tilde{A}) = f\left(\delta(\tilde{A} \cup \tilde{A}', \varnothing)\right).$$

Wychodząc z tych samych przesłanek co powyżej, miarę entropii zbioru rozmytego $\tilde{A}$ będziemy rozumieć jako miarę podobieństwa zbioru $\tilde{A} \cup \tilde{A}'$ do uniwersum $\mathbb{X}$. Uzyskujemy wtedy miarę entropii $e_{C'}$ daną przez tożsamość

$$e_{C'}(\tilde{A}) = f\left(\delta(\tilde{A} \cup \tilde{A}', \mathbb{X})\right).$$

Innym ujęciem miar entropowych jest ujęcie zaproponowane przez Yagera [1979]. Jego zdaniem, miara entropii zbioru rozmytego $\tilde{A}$ powinna być oceną rozróżnialności pomiędzy zbiorem $\tilde{A}$ i jego dopełnieniem $\tilde{A}'$. Oczywistą przesłanką tak rozumianego pojęcia miary entropii jest zauważenie faktu, że im zbiór rozmyty jest mniej wyraziście określony, tym bardziej jest podobny do swego dopełnienia. Miara entropii powinna więc być malejącą funkcją oceny tego podobieństwa. Oznacza to, że miara entropii Yagera e_Y może być zapisana na przykład w postaci

$$e_Y(\tilde{A}) = f\left(\frac{1}{2}\cdot\left(m(\mathbb{X}) - \delta(\tilde{A}, \tilde{A}')\right)\right).$$

W porównaniu z podanymi przez poszczególnych autorów określeniami miary entropii, we wszystkich przytoczonych definicjach zastosowano złożenie oryginalnie zdefiniowanej miary z rosnącą funkcją $f: [0, +\infty[\;\rightarrow [0, f_{\max}]$ spełniającą warunek (2.10). Podobnie jak poprzednio, zastosowanie odpowiednio dobranych postaci tej funkcji ma zagwarantować to, że miara entropii zawsze będzie miarą skończoną. Dodatkowo, w porównaniu z oryginalną definicją Yagera, w uogólnionej definicji tej miary wprowadzono mnożenie przez $\frac{1}{2}$. Ten prosty zabieg formalny ułatwi nam wkrótce czytelne sformułowanie pewnego wniosku. Żaden z tych zabiegów formalnych nie ma wpływu na porządek wyznaczony przez wartości miary entropii.

Dzięki prostym przekształceniom, łatwo można sprawdzić, że wszystkie zdefiniowane powyżej miary entropii są identyczne, gdyż mamy

$$e(\tilde{A}) = e_K(\tilde{A}) = e_C(\tilde{A}) = e_{C'}(\tilde{A}) = e_Y(\tilde{A})$$

dla dowolnego zbioru rozmytego $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. W trakcie dalszych rozważań będziemy stosować następujące równoważne zależności określające miarę entropii:

$$e(\tilde{A}) = f\left(\delta(\tilde{A} \cap \tilde{A}', \varnothing)\right) = f\left(m(\tilde{A} \cap \tilde{A}')\right) =$$

$$= d(\tilde{A} \cap \tilde{A}') = f\left(\int_{\mathbb{X}} \mu_A(x) \wedge \left(1 - \mu_A(x)\right) dx\right). \qquad (2.15)$$

2.1.3. Przybliżenia liczb rzeczywistych i oszacowania nieprecyzyjne

Nasze rozważania ograniczamy do przypadku, gdy przestrzeń $\mathbb{X}$ rozpatrywanych elementów jest identyczna z przestrzenią wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Dowolna liczba rzeczywista $\ell \in \mathbb{R}$ jest reprezentowana tutaj przez jednoelementowy zbiór $L(\ell) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jednoznacznie określony przez swą funkcję charakterystyczną

$$\chi_{\ell}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x = \ell, \\ 0 & \text{dla} \quad x \neq \ell. \end{cases} \tag{2.16}$$

Liczba taka może reprezentować wartość, którą znamy dokładnie. Z drugiej strony, w praktyce poznawczej wielokrotnie znane nam są jedynie przybliżone wartości obserwowanych zmiennych. Każda z tych przybliżonych wartości jest liczbą nieprecyzyjną. Istnieje tutaj naturalna potrzeba stworzenia takiej teorii formalnej, która umożliwi przeprowadzanie przekształceń algebraicznych lub obliczeń arytmetycznych.

Wyniki dotychczasowych rozważań są przesłanką do określenia liczby nieprecyzyjnej jako liczby rozmytej w postaci zaproponowanej przez Dubois i Prade'a [1979 i 1981]. Przedstawiana przez tych autorów oryginalna definicja liczby rozmytej odnosi się do pojęcia zbioru rozmytego rozumianego jako funkcja przynależności. Używając języka formalnego stosowanego w tym rozdziale, dowolną liczbę rozmytą definiujemy jako zbiór rozmyty $\tilde{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentowany przez swą funkcję przynależności μ_L: $\mathbb{R} \to [0, 1]$ spełniającą warunki:
- normalności

$$\exists \ell \in \mathbb{R}: \; \mu_L(\ell) = 1, \tag{2.17}$$

- wypukłości

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \; x \le y \le z \Rightarrow \mu_L(y) \ge \min\{\mu_L(x), \mu_L(z)\}.$$

Dowolny zbiór rozmyty $\tilde{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ spełniający jedynie warunek (2.17) nazywamy „przybliżeniem liczby $\ell \in \mathbb{R}$" i oznaczamy symbolem $\tilde{L}(\ell)$. Stosując tę konwencję, musimy pamiętać, że:
- dowolna liczba rzeczywista może mieć wiele różnych przybliżeń reprezentowanych przez różne liczby rozmyte,
- ustalona liczba rozmyta może być przybliżeniem różnych liczb rzeczywistych.

Obie te właściwości w dobry sposób odzwierciedlają behawioralną istotę pojęcia przybliżonej wartości. Każda rozmyta liczba rzeczywista spełniająca warunek (2.17) jest oczywiście „przybliżeniem liczby $\ell \in \mathbb{R}$".

Dowolny zbiór rozmyty $\tilde{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ interpretujemy jako nieprecyzyjne oszacowanie pewnej wartości. Jeśli oszacowanie to nie spełnia warunku (2.17), to nie możemy stwierdzić, jakiej liczby rzeczywistej jest to przybliżenie. Taka sytuacja jest spotykana w praktyce badawczej.

Operacje arytmetyczne i przekształcenia algebraiczne przybliżeń liczb rzeczywistych zostały zdefiniowane w pracy Dubois i Prade'a [1978] z zachowaniem zasady rozszerzenia Zadeha.

Niech będą dane dwa przybliżenia licz rzeczywistych:

- przybliżenie $\tilde{L}(\ell) = \tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentowane przez swą funkcję przynależności $\mu_A \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$,
- przybliżenie $\tilde{L}(\mathscr{k}) = \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentowane przez swą funkcję przynależności $\mu_B \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Zajmiemy się najpierw operacjami jednoargumentowymi. W przypadku dokładnych liczb rzeczywistych każdą taką operację można przedstawić w postaci

$$\mathscr{h} = h(\ell). \tag{2.18}$$

W wyniku przekształcenia – za pomocą operacji jednoargumentowej – przybliżenia $\tilde{L}(\ell)$ liczby rzeczywistej otrzymujemy przybliżenie $\tilde{L}\big(h(\ell)\big) = \tilde{C}$ reprezentowane przez swą funkcję przynależności

$$\mu_C(z) = \sup\big\{0, \mu_A(x) : z = h(x),\ x \in \mathbb{R}\big\}. \tag{2.19}$$

Klasa przybliżeń liczb rzeczywistych jest zamknięta ze względu na dowolną operację jednoargumentową wyznaczoną przez ciągłą funkcję (2.18).

W zbliżony sposób określa się operacje dwuargumentowe. W przypadku dokładnych liczb rzeczywistych każdą taką operację można przedstawić w postaci

$$\mathscr{h} = h(\mathscr{k}, \ell). \tag{2.20}$$

W wyniku przekształcenia – za pomocą operacji dwuargumentowej – przybliżeń $\tilde{L}(\mathscr{k})$ i $\tilde{L}(\ell)$ liczb rzeczywistych otrzymujemy przybliżenie $\tilde{L}\big(h(\mathscr{k}, \ell)\big) = \tilde{C}$ reprezentowane przez swą funkcję przynależności

$$\mu_C(z) = \sup\big\{0, \min\big\{\mu_B(x), \mu_A(y)\big\} : z = h(x, y),\ \ x, y \in \mathbb{R}\big\}.$$

Klasa przybliżeń licz rzeczywistych jest zamknięta ze względu na dowolną operację dwuargumentową wyznaczoną przez ciągłą funkcję (2.20). Bez konieczności jakichkolwiek zmian definicje operacji jednoargumentowych i operacji dwuargumentowych można rozszerzyć do definicji analogicznych operacji na oszacowaniach nieprecyzyjnych.

W praktycznych zastosowaniach większość badaczy ogranicza się do rozmytych liczb trapezoidalnych oraz do rozmytych liczb trójkątnych[6].

Trapezoidalną liczbą rozmytą nazywamy liczbę rozmytą $\tilde{T}(q,s,t,u)=\tilde{A}$ wyznaczoną dla dowolnej czwórki liczb rzeczywistych $q \le s \le t \le u$ za pomocą swej funkcji przynależności danej przez tożsamość

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x<q, \\ \dfrac{1}{s-q}\cdot(x-a), & q\le x<s, \\ 1, & s\le x\le t, \\ \dfrac{1}{t-u}\cdot(x-u), & t<x\le u, \\ 0, & x>q. \end{cases}$$

Liczba trapezoidalna $\tilde{T}(q,s,t,u)$ jest przybliżeniem $\tilde{L}(\ell)$ dowolnej liczby rzeczywistej $\ell \in [s, t]$. Jeśli teraz założymy, że $s = t$, to otrzymamy liczbę trójkątną $\tilde{T}(q,s,s,u)=\tilde{A}$ wyznaczoną dla dowolnej trójki liczb rzeczywistych $q \le s \le u$ za pomocą swej funkcji przynależności danej przez tożsamość

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x<q, \\ \dfrac{1}{s-q}\cdot(x-a), & q\le x<s, \\ 1, & x=s, \\ \dfrac{1}{s-u}\cdot(x-u), & s<x\le u, \\ 0, & x>q. \end{cases}$$

Każda liczba trójkątna $\tilde{T}(q,s,s,u)$ jest przybliżeniem $\tilde{L}(s)$ tylko jednej liczby rzeczywistej $s \in \mathbb{R}$. Dowolna liczba rzeczywista $\ell \in \mathbb{R}$ może być przedstawiona jako liczba trójkątna $\tilde{T}(\ell, \ell, \ell, \ell)$.

Liczba trapezoidalna $\tilde{T}(s, s, t, t)$ jest reprezentowana przez przedział liczbowy i z tego względu jest nazywana liczbą przedziałową lub liczbą interwałową.

Dowolny rozmyty zbiór $\tilde{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ nazywamy liczbowym zbiorem rozmytym. Każde przybliżenie $\tilde{L}(\ell) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ liczby rzeczywistej jest szczególnym przypadkiem liczbowego zbioru rozmytego.

[6] Można sprawdzić na przykład w pracy: Fang Yong, Lai Kin Keung i Wang Shouyang [2008].

Dla dowolnego liczbowego zbioru rozmytego $\tilde{L}$ reprezentowanego przez swą funkcję przynależności $\mu_L \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$, dla którego całka

$$M(\tilde{L}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_L(x)\, dx \right)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \mu_L(x)\, dx \tag{2.21}$$

jest zbieżna, możemy wyznaczyć przeciętną wartość $M(\tilde{L})$ tego zbioru. Przeciętna wartość liczbowego zbioru rozmytego jest interpretowana jako średnia ważona wszystkich branych pod uwagę ilościowych alternatyw.

Szczególnym przypadkiem liczbowego zbioru rozmytego jest zbiór o skończonym nośniku. Jest to taki liczbowy zbiór rozmyty $\tilde{L}$, dla którego funkcji przynależności μ_L istnieje para liczb rzeczywistych $(l_{\min}, l_{\max}) \in \mathbb{R}^2$ taka, że spełniony jest warunek

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \mu_L(x) > 0 \right\} \subset \left[l_{\min}, l_{\max} \right].$$

Dla dowolnego liczbowego zbioru rozmytego $\tilde{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o skończonym nośniku istnieje jego wartość przeciętna $M(\tilde{L})$.

2.1.4. Uporządkowanie oszacowań nieprecyzyjnych

Oszacowania nieprecyzyjne mogą posłużyć do uporządkowania obiektów reprezentowanych przez te oszacowania. Przygotowując się do realizacji tego zadania, na wstępie określimy w tym podrozdziale relacje porządku na zbiorze wszystkich nieprecyzyjnych oszacowań $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Jedyną przesłanką, jaką będziemy się tutaj kierować, będzie zasada rozszerzenia Zadeha. W sytuacji, gdy porównywane oszacowania są zbiorami rozmytymi na prostej rzeczywistej, należy to uporządkowanie wyznaczyć jako rozmyty preporządek w rozumieniu podanym przez Orlovskiego [1978].

Rozmyta relacja preporządku $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})\right)$ jest określona przez swą funkcję przynależności $\nu_Q : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$. Dla dowolnych oszacowań nieprecyzyjnych $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ danych odpowiednio przez swe funkcje przynależności $\mu_A, \mu_B \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ wspomniana funkcja przynależności jest reprezentowana przez zależność

$$\nu_Q(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup\left\{ \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(y) \right\} : x \geq y \right\}. \tag{2.22}$$

Wartość funkcji przynależności $\nu_Q(\tilde{A}, \tilde{B})$ będzie tutaj interpretowana jako wartość logiczna zdania:

oszacowanie $\tilde{A}$ jest większe równe od oszacowania $\tilde{B}$,

co zapisujemy $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$. Jeśli oszacowanie $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentuje liczbę precyzyjną $x \in \mathbb{R}$ opisaną przez funkcję przynależności (2.16), to funkcja przynależności relacji preporządku jest wyznaczona przez tożsamość

$$\nu_Q(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup\left\{\mu_B(y) : x \geq y\right\}. \tag{2.23}$$

Rozmyta relacja ostrego porządku $\mathcal{Z} \in \mathcal{F}\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})\right)$ jest określona przez swą funkcję przynależności ν_Z: $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ daną za pomocą tożsamości

$$\nu_Z(\tilde{A}, \tilde{B}) = \min\left\{\nu_Q(\tilde{A}, \tilde{B}), 1 - \nu_Q(\tilde{B}, \tilde{A})\right\}. \tag{2.24}$$

Wartość funkcji przynależności $\nu_Z(\tilde{A}, \tilde{B})$ będzie tutaj interpretowana jako wartość logiczna zdania:

$$\textit{oszacowanie } \tilde{A} \textit{ jest większe od oszacowania } \tilde{B}, \tag{2.25}$$

co zapisujemy $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

Rozmyta relacja równości $\mathcal{V} \in \mathcal{F}\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})\right)$ jest określona przez swą funkcję przynależności ν_V: $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ daną za pomocą tożsamości

$$\nu_V(\tilde{A}, \tilde{B}) = \min\left\{\nu_Q(\tilde{A}, \tilde{B}), \nu_Q(\tilde{B}, \tilde{A})\right\}. \tag{2.26}$$

Wartość funkcji przynależności $\nu_V(\tilde{A}, \tilde{B})$ będzie tutaj interpretowana jako wartość logiczna zdania:

oszacowanie $\tilde{A}$ jest równe oszacowaniu $\tilde{B}$,

co zapisujemy $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

Niech będzie dana ustalona relacja preporządku $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})\right)$. Relację tę wykorzystamy do uporządkowania elementów zadanego zbioru $\mathbb{X}$. Weźmy pod uwagę dowolną funkcję $f : \mathbb{X} \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Funkcja ta określa na zbiorze $\mathbb{X}$ preporządek $\sqsupseteq$ zdefiniowany dla dowolnej pary $(X, Y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ w następujący sposób

$$X \sqsupseteq Y \Leftrightarrow f(X) \succcurlyeq f(X).$$

Wyznaczona w ten sposób relacja jest scharakteryzowana przez swą funkcję przynależności φ_Q: $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \to [0, 1]$ określoną przez tożsamość

$$\varphi_Q(X, Y) = \nu_Q\left(f(X), f(Y)\right).$$

Preporządek ten wyznacza rozmyty zbiór $U_{opt} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ elementów maksymalnych w zbiorze $\mathbb{X}$. Zbiór ten jest dany przez swą funkcję przynależności $\mu_U : \mathbb{X} \to [0, 1]$ określoną przez tożsamość

$$\mu_U(X) = \inf\left\{\max\left\{\varphi_Q(X, Y), 1 - \varphi_Q(Y, X)\right\} : Y \in \mathbb{X}\right\}. \tag{2.27}$$

2.1.5. Elementy teorii rozmytych przestrzeni probabilistycznych

Przedmiotem rozważań jest tutaj przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega\}$. Właściwości tej przestrzeni zdarzeń elementarnych są scharakteryzowane za pomocą precyzyjnie określonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, σ, P), gdzie poszczególne symbole oznaczają:
- $\sigma \subset \mathcal{B}(\Omega)$ – przeliczalne ciało zdarzeń losowych,
- $P : \sigma \to [0, 1]$ – ustaloną miarę prawdopodobieństwa.

Nad tą przestrzenią zdarzeń elementarnych jest określona zmienna losowa $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$. Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej jest jednoznacznie określony przez jej dystrybuantę $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ zdefiniowaną następująco:

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) < x\right\}\right).$$

Obrazem dowolnego zdarzenia losowego $A \in \sigma$ po przekształceniu przez zmienną losową $\mathcal{X}$ jest zbiór $\mathcal{X}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ stanowiący element przeliczalnego ciała Borela. Jeśli zdarzenie losowe $A \in \sigma$ jest reprezentowane przez swą funkcję charakterystyczną χ_A: $\Omega \to \{0, 1\}$, to funkcja charakterystyczna $\chi_{(A)}$: $\mathbb{R} \to \{0, 1\}$ obrazu $\mathcal{X}(A)$ tego zdarzenia jest dana przez tożsamość

$$\chi_{(A)}(x) = \max\left\{0, \sup\left\{\chi_A(\omega) : x = \mathcal{X}(\omega)\right\}\right\}.$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia losowego $A \in \sigma$ jest wtedy określone przez zależność

$$P(A) = \int_A dP = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(A)}(x)\, dF(x).$$

Z drugiej strony rzeczywiste zdarzenia losowe są określone nieprecyzyjnie i w związku z tym tworzą rozmytą algebrę zdarzeń losowych $\sigma \subset \tilde{\sigma} \subset \mathcal{F}(\Omega)$. Do oceny prawdopodobieństwa tych zdarzeń wykorzystamy rozmytą miarę probabilistyczną[7] [Khalili 1979].

[7] Dalsze uogólnienia tej miary [Klement, Schwyhla i Lowen 1981; Piasecki 1985] nie będą nam tutaj potrzebne.

Weźmy pod uwagę dowolne nieprecyzyjnie określone zdarzenie losowe $\tilde{A} \in \tilde{\sigma}$. Zdarzenie to jest reprezentowane przez swoją funkcję przynależności $\mu_A : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Wtedy funkcja przynależności $\mu_{(A)}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ obrazu $\mathcal{X}(\tilde{A})$ tego zdarzenia jest dana przez tożsamość

$$\mu_{(A)}(x) = \max\left\{0, \sup\left\{\mu_A(\omega) : x = \mathcal{X}(\omega)\right\}\right\}.$$

Prawdopodobieństwo zajścia nieprecyzyjnie określonego zdarzenia losowego $\tilde{A} \in \tilde{\sigma}$ jest wtedy określone przez zależność

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{(A)}(x)\, dF(x). \tag{2.28}$$

Miarę $\tilde{P} : \tilde{\sigma} \rightarrow [0,1]$ nazywamy rozszerzeniem miary $P: \sigma \rightarrow [0, 1]$. Zaproponowane rozszerzenie jest naturalnym sposobem ekstrapolacji wiedzy zebranej przy stosowaniu logiki dwuwartościowej.

2.2. Rozmyte zbiory probabilistyczne

Przedmiotem naszych rozważań są nadal zdania intuicyjne $\mathcal{p} \in \mathbb{P}_1$. Są to zdania, których wartość logiczna jest oceniana z zastosowaniem logiki wielowartościowej. Jeśli ocena ta zależy jedynie od treści ocenianego zdania, to nazywamy ją oceną bezwarunkową. Często ocena wartości logicznej zdania zależy nie tylko od treści samego zdania, ale także od zastanego stanu otoczenia. Otoczenie to jest identyfikowane ze zbiorem stanów $\Omega = \{\omega\}$. Taką ocenę wartości logicznej nazywamy ocena warunkową. W ten sposób nad przestrzenią $\mathbb{P}_1$ wszystkich możliwych do wypowiedzenia zdań intuicyjnych rozpinamy warunkową funkcję ewaluacji intuicyjnej $\widetilde{\mathcal{V}} : \mathbb{P}_1 \times \Omega \rightarrow [0,1]$.

Rozważać będziemy tutaj przypadek, w którym w momencie określania warunkowej wartości logicznej $\widetilde{\mathcal{V}}(\mathcal{p}, \omega)$ zdania intuicyjnego $\mathcal{p} \in \mathbb{P}_1$ nie będziemy pewni, jaki stan $\omega \in \Omega$ osiągnie otoczenie. Z taką sytuacją mamy zawsze do czynienia wtedy, gdy nasza wiedza o otoczeniu nie pozwala w jednoznaczny sposób określić spodziewanego stanu tego otoczenia. Oznacza to całkowitą niewiedzę na ten temat lub wiedzę jedynie niepełną. Jeśli jednak możemy dodatkowo założyć możliwość poznania tego stanu otoczenia w ustalonym momencie przyszłości, to właściwym narzędziem formalnym do opisu naszej niepełnej wiedzy na ten temat jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, σ, P). Warunkowa funkcja ewaluacji intuicyjnej $\widetilde{\mathcal{V}} \in [0,1]^{\mathbb{P}_1 \times \Omega}$ określa wtedy logikę probabilistyczną w rozumieniu podanym przez Hailperina [1984].

W punkcie 2.1 pokazano, że dowolny zbiór rozmyty $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ możemy przedstawić w postaci (2.6), to jest

$$\tilde{A} = \left\{ x \in \mathbb{X} : \varphi_A(x),\ \varphi_A \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{X}} \right\}.$$

Dla ustalonego zbioru $\Omega = \{\omega\}$ stanów otoczenia rozkład wartości logicznej predykatora $\varphi_A \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{X}}$ można przedstawić jako funkcję $\overset{\frown}{\mu}_A : \mathbb{X} \times \Omega \to [0,1]$ określoną przez tożsamość

$$\overset{\frown}{\mu}_A(x, \omega) = \overset{\frown}{\nu}\left(\varphi_A(x), \omega \right).$$

Dla ustalonego stanu $\omega \in \Omega$ funkcja $\overset{\frown}{\mu}_A(\,\cdot\,, \omega) \in [0,1]^{\mathbb{X}}$ jest funkcją przynależności, która w jednoznaczny sposób wyznacza zbiór rozmyty[8]

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{\Phi}^{-1}\left(\overset{\frown}{\mu}_A(\,\cdot\,, \omega) \right).$$

W ten sposób otrzymujemy indeksowaną rodzinę zbiorów rozmytych

$$\overset{\frown}{H} = \left\{ \tilde{H}(\omega) \in \mathcal{F}(\mathbb{X}) : \omega \in \Omega \right\}.$$

Rodzinę $\overset{\frown}{H}$ nazywamy rodziną rozmytych zbiorów probabilistycznych. Pojęcie to zostało zaproponowane przez Hiroto [1979; 1981]. Dla podkreślenia tego faktu rodzinę rozmytych zbiorów probabilistycznych nazywamy w skrócie zbiorem Hiroto.

Stopień przynależenia dowolnego elementu $x \in \mathbb{X}$ do zbioru Hiroto $\overset{\frown}{H}$ określamy jako funkcję $\overset{\frown}{\mu}_A(x, \cdot) \in [0,1]^{\Omega}$. Dodatkowo zakładamy tutaj, że stopień przynależenia dowolnego elementu do zbioru Hiroto jest zmienną losową na ciele zdarzeń losowych σ. W tej sytuacji dla każdego elementu $x \in \mathbb{X}$ możemy wyznaczyć oczekiwaną wartość jego stopnia przynależenia:

$$\mu_{E(\overset{\frown}{H})}(x) = E\left(\overset{\frown}{\mu}_A(x, \cdot) \right) = \int_{\Omega} \overset{\frown}{\mu}_A(x, \omega)\, dP. \tag{2.29}$$

W ten sposób wyznaczamy funkcję przynależności $\mu_{E(\overset{\frown}{H})} \in [0, 1]^{\mathbb{X}}$. Funkcję tę będziemy nazywać rozkładem oczekiwań zadanego zbioru Hiroto. Rozkład ten opisuje zbiór rozmyty

$$\tilde{E}(\overset{\frown}{H}) = \tilde{\Phi}^{-1}\left(\overset{\frown}{\mu}_{E(\overset{\frown}{H})} \right)$$

[8] Do określenia tego zbioru rozmytego wykorzystano izomorfizm $\tilde{\Phi}^{-1} : [0, 1]^{\mathbb{X}} \to \mathcal{F}(\mathbb{X})$ opisany za pomocą zależności (2.4) i (2.5).

nazywany zbiorem oczekiwanym. Dla dowolnego zbioru Hiroto $\widetilde{H} \subset \mathcal{F}(\mathbb{X})$ możemy wyznaczyć miary energetyczną i entropii jego zbioru oczekiwanego. Wektor $\left(d\left(\tilde{E}(\widetilde{H})\right), e\left(\tilde{E}(\widetilde{H})\right)\right)$ będzie podstawową charakterystyką nieprecyzji informacji reprezentowanej przez zbiór Hiroto $\widetilde{H}$.

2.2.1. Zbiory Hiroto liczb rzeczywistych

Rozważać teraz będziemy liczbowy zbiór Hiroto $\widetilde{L} = \left\{\tilde{L}(\omega) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \omega \in \Omega\right\}$ składający się jedynie z przybliżeń pewnych liczb rzeczywistych $\tilde{L}(\omega)$ spełniających warunek (2.17).

W szczególnym przypadku dowolną zmienną losową $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ możemy jednoznacznie opisać za pomocą zbioru $\widetilde{\mathcal{X}}$ reprezentowanego przez poniższą rodzinę funkcji przynależności

$$\forall \omega \in \Omega: \quad \widetilde{\mu}_{\mathcal{X}}(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \mathcal{X}(\omega) = x, \\ 0 & \text{dla} \quad \mathcal{X}(\omega) \neq x. \end{cases}$$

Oznacza to, że dowolny liczbowy zbiór Hiroto $\widetilde{L} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest rozszerzeniem klasycznego pojęcia zmiennej losowej przyporządkowującego zdarzeniom elementarnym liczby rzeczywiste do pojęcia zmiennej losowej przyporządkowującego tym zdarzeniom przybliżenia liczb rozmytych. Rozszerzenie to jest zgodne z zasadą rozszerzenia Zadeha. Zbiór oczekiwany $\tilde{E}(\widetilde{L})$ jest tutaj wyznaczony przez swą funkcję przynależności daną jako rozkład oczekiwań

$$\mu_{E(\widetilde{L})}(x) = \int_{\Omega} \widetilde{\mu}_L(x, \omega)\, dP.$$

Zbiór oczekiwany może nie być przybliżeniem liczby rzeczywistej. Z innej jednak strony, dla dowolnej zmiennej losowej $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mamy tutaj

$$\mu_{E(\widetilde{\mathcal{X}})}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad E(\mathcal{X}) = x, \\ 0 & \text{dla} \quad E(\mathcal{X}) \neq x. \end{cases}$$

gdzie symbol $E(\mathcal{X})$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\mathcal{X}$. Oznacza to, że oczekiwany liczbowy zbiór Hiroto $\tilde{E}(\widetilde{L})$ może być interpretowany jako rozszerzenie pojęcia wartości oczekiwanej zmiennej losowej. Rozszerzenie to jest zgodne z zasadą rozszerzenia Zadeha. Dodatkowo, dla dowolnej zmiennej losowej $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mamy tutaj

$$M\left(\tilde{E}(\widetilde{\mathcal{X}})\right) = E(\mathcal{X}). \tag{2.30}$$

Wynika stąd, że także wartość przeciętna oczekiwanego liczbowego zbioru Hiroto jest rozszerzeniem pojęcia wartości oczekiwanej zmiennej losowej. Także to rozszerzenie spełnia zasadę rozszerzenia Zadeha. Stąd wartość przeciętną oczekiwanego liczbowego zbioru Hiroto $M\left(\tilde{E}(\overset{\frown}{L})\right)$ nazywać będziemy w skrócie wartością oczekiwaną tego zbioru.

Podsumowując tę cześć rozważań, możemy powiedzieć, że wartość oczekiwana $\tilde{E}(\overset{\frown}{L})$ zbioru Hiroto $\overset{\frown}{L}$ jest określona w następujący sposób:

$$E(\overset{\frown}{L}) = M\left(\tilde{E}(\overset{\frown}{L})\right) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\Omega} \overset{\frown}{\mu}_L(x, \omega)\, dPdx \right)^{-1} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\Omega} x \cdot \overset{\frown}{\mu}_L(x, \omega)\, dPdx.$$

Podobnie jak w przypadku zmiennej losowej, istnieją takie liczbowe zbiory Hiroto, dla których nie istnieje ich wartość oczekiwana.

W zastosowaniach będziemy się posługiwać obiema propozycjami rozszerzenia pojęcia wartości oczekiwanej. Wybór ten zależy od celów poznawczych, jakie będziemy stawiali przed sobą. Jeśli zamiar zachowania informacji o nieprecyzji będzie stawiany ponad paradygmatem prostoty wnioskowania, to pojęcie wartości oczekiwanej zmiennej losowej będziemy rozszerzali do pojęcia oczekiwanego liczbowego zbioru Hiroto. Jeśli paradygmat prostoty wnioskowania przeważy nad potrzebą zachowania informacji o nieprecyzji, to wtedy pojęcie wartości oczekiwanej zmiennej losowej będziemy rozszerzali do pojęcia wartości oczekiwanej zbioru Hiroto. Opisany powyżej wybór jest egzemplifikacją dylematu wyboru pomiędzy wiernością epistemologiczną a funkcją eksplanacyjną działań poznawczych. Ostateczny wybór należy tutaj zawsze do badacza.

Korzystanie z informacji prezentowanej przez liczbowy zbiór Hiroto łączy się w nierozerwalny sposób z niepewnością co do przypadkowego stanu, w jakim znajduje się otoczenie. W przypadku liczbowych zbiorów Hiroto reprezentujących zmienne losowe niepewność ta jest oceniana za pomocą wariancji, to jest wartości oczekiwanej kwadratu różnicy pomiędzy zmienną losową a jej wartością oczekiwaną. Zgodnie z zależnością (2.19), w przypadku dowolnego liczbowego zbioru Hiroto $\overset{\frown}{L} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ kwadrat różnicy $\tilde{D}\left(\overset{\frown}{L}\middle|\omega\right)$ pomiędzy przybliżeniem liczbowym $\tilde{L}(\omega)$ reprezentowanym przez funkcję przynależności $\overset{\frown}{\mu}_L(\,\cdot\,, \omega) \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ a wartością oczekiwaną $E(\overset{\frown}{L})$ tego zbioru jest określony przez funkcję przynależności

$$\overset{\frown}{\mu}_{D(L)}(x, \omega) = \begin{cases} \max\left\{ \overset{\frown}{\mu}_L\left(E(\overset{\frown}{L}) + \sqrt{x}, \omega\right), \overset{\frown}{\mu}_L\left(E(\overset{\frown}{L}) - \sqrt{x}, \omega\right) \right\} & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Uzyskany w ten sposób liczbowy zbiór Hiroto $\overset{\frown}{D}(\overset{\frown}{L}) = \left\{ \tilde{D}\left(\overset{\frown}{L}\middle|\omega\right) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \omega \in \Omega \right\}$ nazywamy kwadratem residuum zbioru Hiroto. Oczekiwany kwadrat residuum $\tilde{E}\left(\overset{\frown}{D}(\overset{\frown}{L})\right)$ jest tutaj określony za pomocą swej funkcji przynależności

$$\mu_{E\left(\overleftrightarrow{D}(\overleftrightarrow{L})\right)}(x) = \int_{\Omega} \overleftrightarrow{\mu}_{D(L)}(x, \omega)\, dP. \tag{2.31}$$

Dla dowolnej zmiennej losowej $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mamy tutaj

$$\mu_{E\left(\overleftrightarrow{\mathrm{D}}(\overleftrightarrow{\mathcal{X}})\right)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad S^2(\mathcal{X}) = x, \\ 0 & \text{dla} \quad S^2(\mathcal{X}) \neq x, \end{cases}$$

gdzie symbol $S^2(\mathcal{X})$ oznacza wariancję zmiennej losowej $\mathcal{X}$. Oznacza to, że oczekiwany kwadrat residuum $\tilde{E}\left(\overleftrightarrow{D}(\overleftrightarrow{L})\right)$ może być interpretowany jako rozszerzenie pojęcia wariacji zmiennej losowej. Rozszerzenie to jest zgodne z zasadą rozszerzenia Zadeha. Dodatkowo, dla dowolnej zmiennej losowej $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{U}}$ mamy tutaj

$$M\left(\tilde{E}\left(\overleftrightarrow{\mathrm{D}}(\overleftrightarrow{\mathcal{X}})\right)\right) = S^2(\mathcal{X}). \tag{2.32}$$

Wynika stąd, że także wartość przeciętna oczekiwanego kwadratu residuum jest rozszerzeniem pojęcia wariancji zmiennej losowej. Także to rozszerzenie spełnia zasadę rozszerzenia Zadeha. Stąd wartość przeciętną oczekiwanego kwadratu residuum liczbowego zbioru Hiroto $M\left(\tilde{E}\left(\overleftrightarrow{\mathrm{D}}(\overleftrightarrow{L})\right)\right)$ będziemy w skrócie nazywać wariancją tego zbioru. Podsumowując tę cześć rozważań, możemy powiedzieć, że wariancja $S^2(\overleftrightarrow{L})$ zbioru Hiroto $\overleftrightarrow{L}$ jest określona w następujący sposób:

$$S^2(\overleftrightarrow{L}) = M\left(\tilde{E}\left(\overleftrightarrow{\mathrm{D}}(\overleftrightarrow{L})\right)\right) = \left(\int_0^{+\infty}\int_{\Omega} \overleftrightarrow{\mu}_{D(L)}(x, \omega)\, dPdx\right)^{-1} \cdot \int_0^{+\infty}\int_{\Omega} x \cdot \overleftrightarrow{\mu}_{D(L)}(x, \omega)\, dPdx.$$

Podobnie jak w przypadku zmiennej losowej, istnieją takie liczbowe zbiory Hiroto, dla których nie istnieje ich wartość oczekiwana.

Ostateczny wybór postaci rozszerzenia pojęcia wariancji zależy od kontekstu, w jakim to rozszerzenie będzie stosowane.

Literatura

Bellman R.E., Giertz M., 1973, *On the analytic formalism theory of fuzzy sets*, Inf. Sci. vol. 5.

Birkhoff G., 1967, *Lattice theory*, 3rd ed., AMS Coll. Publ. 25, Providence.

Biedrosian S.D., Xie W.X., 1984, *An information measure for Fuzzy sets*, IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 14.

Czogała E., Drewniak J., 1984, *Associative monotonic operations in fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems 12.

Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W., 1981, *On the concepts of measures of fuzziness and their Applications in decision making*, 8th triennial World Congress IFAC, Kyoto.
Dombi J., 1982a, *A general class of fuzzy operators*, Fuzzy Sets and Systems 8.
Dombi J., 1982b, *Basic concept for a theory of evaluation*, European J. Op. Res. 10.
Drewniak J., 1984, *Podstawy teorii zbiorów rozmytych*, Uniwersytet Śląski, Katowice.
Dubois D., Prade H., 1978, *Operations on fuzzy numbers*, Int. J. Syst. Sci. 9.
Dubois D., Prade H., 1979, *Fuzzy real algebra: some results*, Fuzzy Sets and Systems 2.
Dubois D., Prade H., 1981, *Fuzzy sets and systems; theory and application*, Academic Press, New York.
Esteva F., Quantanilla R., 1987, *On symetric algebras of fuzzy subsets*, Fuzzy Sets and Systems 24.
Encyklopedia Gazety Wyborczej, 2005, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Fang Yong, Lai Kin Keung, Wang Shouyang, 2008, *Fuzzy portfolio optimization. Theory and methods*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 609, Springer, Berlin.
Giles R., 1976, *Łukaszewicz logic and fuzzy set theory*, Int. J. Man-Machines Studies 8.
Gottwald S., 1979, *Set theory for fuzzy sets of higher level*, Fuzzy Sets and Systems 2.
Gottwald S., Czogała E., Pedrycz W., 1982, *Measures of fuzziness and operations with fuzzy sets*, Stochastica 3, vol. VI.
Goguen J.A., 1967, *L-fuzzy Sets*, J. Anal. Math. Appl. 18.
Hailperin, T., 1984, *Probability logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic 25.
Hamacher H., 1978, *Über logische Aggregationen nicht-binar expliziertet Entscheidungskriterien*, Fischer, Franfurkt.
Hiroto K., 1979, *Concepts of probabilistic sets*, Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Berkeley.
Hiroto K., 1981, *Concepts of probabilistic sets*, Fuzzy Sets and Systems 5.
Kaufmann A., 1975, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, vol. I, *Fundamental Theoretical Elements*, Academic Press, New York.
Khalili S., 1979, *Fuzzy measures and mappings*, J. Math. Anal. Appl. 68.
Klement E.P., 1982, *Construction of fuzzy σ-algebras using triangular norms*, J. Math. Anal. Appl. 82.
Klement E.P., Schwyhla W., Lowen R., 1981, *Fuzzy probability measure*, Fuzzy Sets and Systems 5.
Klir G.J., 1993, *Developments in uncertainty-based information*, w: Yovits M. (ed.), Advances in Computers. 36, Academic Press, San Diego.
Koczy L.T., Hajnal M., 1977, *A new attempt to axiomatic fuzzy algebra with an application example*, Prob. Conf. Inf. Th. 6.
Lee R.C.T., Chang C.L., 1971, *Some properties of fuzzy logic*, Inf. Cont. 19.
Luca A. de, Termini S., 1972, *A definition of a nonprobabilistic entropy in the settings of fuzzy set theory*, Inform. and Control 20.
Luca A. de, Termini S., 1979, *Entropy and energy measures of fuzzy sets*, w: Gupta M.M. (ed.), *Advances in fuzzy set theory and applications*, North-Holland, Amsterdam.
Łukasiewicz J., 1922, *Interpretacja liczbowa teorii zdań*, Ruch Filozoficzny nr 7.
Mesiar R., Piasecki K., 1990, *On a possible generalization of the Bayes method of inference*, Fuzzy Sets and Systems 37.

Menger K., 1942, *Statistical metric spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 28.
Mizumoto M., Zimmermann H.J., 1982, *Comparision of fuzzy reasoning methods*, Fuzzy Sets and Systems 8.
Negoita C.V., Ralescu D.A., 1975, *Applications of Fuzzy Set for Systems Analysis*, Birkhauser Verlag-Editorial Technica, Stuttgart.
Orlovsky S.A., 1978, *Decision making with a fuzzy preference relation*, Fuzzy Sets and Systems 1.
Piasecki K., 1985, *Probability of fuzzy events defined as denumerable additivity measure*, Fuzzy Sets and Systems 17.
Rodder W., 1975, *On „and" and „or" connectives in fuzzy set theory*, Working Paper 5707, RWTH Aachen.
Schweizer B., Sklar A., *Associative functions and abstract semi groups*, Publ. Math. Debrecen 10.
Stirling W.C., 2003, *Satisficing Games and Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge.
Świtalski Z., 1986, *A note on a definition of fuzzy set*, Proc. Second Polish Symp. Interval and Fuzzy Mathematics, Poznań
Thole R.M., Zimmermann H.J., Zysno P., 1979, *On the suitability of minimum and product operator for intersection of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 2.
Walendziak A., 2009, *Podstawy algebry ogólnej i teorii krat*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Wygralak M., 1985, *A few words on the importance of Jan Łukasiewicz logic for fuzzy set theory*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu nr 132.
Yager R.R., 1979, *On the measure on fuzziness and negation*, *Part I*, *Membership in the unit interval*, School of Business Administration Rep. RRY 79-10-16., New Rochelle.
Yager R.R., 1982, *Some procedures for selecting fuzzy set-theoretic operators*, Int. J. Gen. Syst. 8.
Zadeh L., 1965, *Fuzzy sets*, Information and Control, vol. 8.
Zadeh L., 1975a, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*-I, Information Sciences 8.
Zadeh L., 1975b, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*-II, Information Sciences 8.
Zadeh L., 1975c, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*-III, Information Sciences 8.
Ziembiński Z., 2006, *Logika praktyczna*, wyd. XXVI, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Zimmermann H.J., 1978, *Results of empirical studies in fuzzy set theory*, w: Klir J.G.L. (ed.), *Applied General systems Research*, Plenum Press New York.
Zimmermann H.J., Zysno P., 1980, *Latent connectives in human decision making*, Fuzzy Sets and Systems 4.

Rozdział 3

WPŁYW WYBRANYCH BEHAWIORALNYCH PRZESŁANEK NA NIEPRECYZYJNE OSZACOWANIE OCZEKIWANEJ STOPY ZWROTU

Racjonalne przesłanki pozwoliły na sformułowanie wielu teorii wyjaśniających działanie rynku finansowego. Teorie te zaliczamy do klasycznego nurtu ogólnej teorii rynków finansowych. Uzasadniając i rozwijając te teorie, opisano i przeanalizowano wiele faktów empirycznych. W badaniach tych dominującym stosowanym narzędziem formalnym było instrumentarium szeroko rozumianej analizy probabilistycznej. Zgromadzonej w ten sposób wiedzy nie sposób pominąć w przygotowaniu decyzji inwestycyjnych.

Ograniczanie się jedynie do tego klasycznego nurtu teoretycznego powodowało postrzeganie wielu działań inwestorskich jako anomalii. Dało to asumpt do rozwoju finansów behawioralnych. Jednym z głównych założeń programowych tego nurtu [Kahneman i Tversky 1979] była akceptacja tej części wiedzy o rynku, która jest reprezentowana przez narzędzia probabilistyczne. Zastrzeżono tutaj jedynie, że te obiektywne informacje mogą być przekształcone pod wpływem behawioralnych przesłanek. Wśród obserwowanych efektów behawioralnego podejścia jest brak precyzji w opisie stanów osiąganych przez rynek finansowy [Barberis, Shleifer i Vishny 1998]. Jednym z efektów takiego działania są modele rynków finansowych uwzględniające jedynie obserwowany brak precyzji w określonych celach inwestycyjnych [Fang Yong, Lai Kin Keung i Wang Shouyang 2008].

Naturalną odpowiedzią na te postulaty jest konstrukcja takich modeli rynku kapitałowego, które równocześnie uwzględniają obiektywną wiedzę reprezentowaną przez rozkłady losowych zmiennych rynkowych i subiektywne behawioralne przesłanki reprezentowane przez nieprecyzyjne określenia stanów i celi. Stosując takie modele, można równocześnie analizować ryzyko nieprecyzyjności i ryzyko niepewności, obarczające instrument finansowy. Umożliwione jest wtedy też badanie interakcji pomiędzy tymi typami ryzyka. Formalnym modelem ujmującym równocześnie oba są zbiory Hiroto opisane w rozdziale 2.

Kluczową rolę w przygotowaniu decyzji inwestycyjnych odgrywają stopy zwrotu z rozważanych instrumentów finansowych. Można zapewnie zbudować wiele modeli formalnych korzystających z pojęcia zbioru Hiroto w opisie stopy zwrotu. W tym rozdziale zostaną przedstawione propozycje dwóch takich modeli. Modele te zostały dobrane w taki sposób, aby przedstawić czytelnikowi pełne spektrum możliwości tkwiących w zastosowaniu zbiorów Hiroto w finansach behawioralnych. Jeden z modeli eksponuje nieprecyzyjne oszacowanie stopy zwrotu, podczas gdy drugi model – określenie rozkładu stopy zwrotu. Każdy z tych modeli odnosi się też do innego przypadku nośnika rozkładu oczekiwań stopy zwrotu. Są tutaj analizowane przypadki zarówno ciągły, jak i dyskretny.

3.1. Behawioralna wartość bieżąca

Weźmy pod uwagę dowolny papier wartościowy będący przedmiotem obrotu na ustalonym rynku finansowym. Zazwyczaj analiza właściwości dowolnego papieru wartościowego jest prowadzona jako analiza własności jego stopy zwrotu. Dowolna stopa zwrotu jest funkcją rosnącą wartości przyszłej i funkcją malejącą wartości bieżącej. Wartość przyszła danego instrumentu finansowego jest przedstawiana jako zmienna losowa[1]. Rozkład tej zmiennej losowej jest obrazem formalnym ryzyka niepewności obarczającej papier wartościowy. W tym podrozdziale nasze rozważania ograniczamy do badania porządku wyznaczonego przez stopy zwrotu. Porównywać będziemy stopy zwrotu wyznaczone dla tego samego instrumentu finansowego przez różne podmioty rynku finansowego. O rozważanym rynku finansowym będziemy zakładać, że jest w pełni efektywny. W tej sytuacji wszyscy uczestnicy rynku przyjmują identyczną wartość przyszłą danego papieru wartościowego. Wtedy rosnący porządek stóp zwrotu jest równoważny malejącemu porządkowi wartości bieżących. W tej sytuacji decydujemy się na badanie porządku danego za pomocą wartości bieżących. Dzięki temu ominiemy tutaj kłopotliwą dyskusję na temat szczegółowej postaci rozkładu stopy zwrotu[2].

Zgromadzona wiedza o rynku finansowym stanowi jedyną przesłankę do wyznaczenia uzasadnionej merytorycznie ceny C_0 rozważanego papieru wartościowego. W formalnych analizach rynkowych cena ta odgrywa rolę deklarowanej ceny równowagi. Z tej przyczyny wartość C_0 jest w skrócie nazywana ceną równowagi. W naszych rozważaniach cena równowagi odgrywa rolę syntetycznego obrazu wie-

[1] W przypadku instrumentu finansowego wolnego od ryzyka niepewności jest to zmienna losowa o rozkładzie jednopunktowym.

[2] Dyskusję taką można znaleźć w wielu pracach [Winkler-Drews 2009; Echaust i Tomasik 2008; Tomasik 2008 i 2009; Piasecki i Tomasik 2008 i 2011; Tomasik i Wikler-Drews 2009]

dzy o rynku. O rozważanym rynku finansowym będziemy zakładać, że jest w pełni efektywny. W tej sytuacji wszyscy uczestnicy rynku przyjmują identyczną wartość C_0 ceny równowagi. Równocześnie wszyscy ci uczestnicy rynku obserwują tę samą wartość $\check{C}$ ceny rynkowej. Znajomość obu tych wartości wystarcza do racjonalnego uzasadnienia podejmowanych decyzji inwestycyjnych. Dla przypadku

$$\check{C} < C_0 \tag{3.1}$$

racjonalne przesłanki jednoznacznie sugerują kupno rozważanego instrumentu finansowego. Zakup taki jest możliwy jedynie wtedy, gdy pojawi się oferta jego sprzedaży. Naturalne jest tutaj pytanie, jakimi przesłankami kieruje się inwestor sprzedający taki papier wartościowy. Podobnie dla przypadku

$$\check{C} > C_0 \tag{3.2}$$

racjonalne przesłanki jednoznacznie sugerują sprzedaż rozważanego instrumentu finansowego. Sprzedaż taka jest możliwa jedynie wtedy, gdy pojawi się oferta jego kupna. Rodzi to pytanie, jakimi przesłankami kieruje się inwestor kupujący ten papier wartościowy.

Odpowiedź na powyższe dwa pytania może być tylko jedna. Na efektywnym rynku finansowym równowaga pomiędzy popytem i podażą jest określona przez nieracjonalne przesłanki. Oczywiste jest, że przesłanki te mają charakter behawioralny.

Z innej jednak strony dowolna wartość bieżąca kapitału jest definiowana jako pewna teraźniejsza wartość równoważna danej wartości przyszłej kapitału. Wspomniana relacja równoważności jest relacją subiektywną, gdyż w dużej mierze zależy od podatności inwestora na wewnętrzne i zewnętrzne czynniki behawioralne. Wynika stąd, że na skutek oddziaływania czynników behawioralnych wartość bieżąca rozpatrywanego instrumentu finansowego może się odchylać od jego obserwowanej ceny rynkowej. W swej istocie stany środowiska behawioralnego są definiowane nieprecyzyjnie. Z tej przyczyny odchylenie wartości bieżącej od ceny rynkowej jest obarczone ryzykiem nieprecyzji. Tak rozumianą wartość bieżącą będziemy nazywać behawioralną wartością bieżąca (w skrócie BPV).

Głównym celem tego podrozdziału będzie zaproponowanie pewnego modelu formalnego BPV. Model ten powinien służyć wyjaśnieniu mechanizmu utrzymywania się na efektywnym rynku finansowym równowagi pomiędzy popytem i podażą. Po osiągnięciu tego celu pokażemy, że w wyniku nieprecyzyjnego oszacowania wartości bieżącej stopa zwrotu jest reprezentowana przez zbiór Hiroto. W ten sposób zostanie dowiedziona teza głosząca, że zbiory Hiroto mogą być stosowane jako narzędzie finansów behawioralnych.

3.1.1. Wieloznaczność behawioralnej wartości bieżącej

Ryzyko nieprecyzji wynika z nieprecyzyjności stosowanych definicji i związanej z tym nieprecyzyjności obserwacji na temat teraźniejszego stanu rzeczy. To oznacza, że ryzyko nieprecyzji obarcza informacje na temat teraźniejszego stanu rzeczy. Z tego powodu istotnie różni się od ryzyka niepewności obciążającego informacje na temat tych zdarzeń, które poznamy w przyszłości. Z innej strony wielu badaczy przedmiotu (np. Klir [1993]) w obrazie nieprecyzyjności informacji wyróżnia niewyrazistość informacji oraz wieloznaczność informacji. Niejednoznaczność informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia pomiędzy wieloma wskazanymi alternatywami jednej rekomendowanej alternatywy. Niewyrazistość informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją i jej zaprzeczeniem.

Ze swej istoty jedynie informacja wieloznaczna może być niewyrazista. Dlatego w pierwszym kroku nasze rozważania ograniczymy do przypadku wieloznacznego określenia wartości bieżącej. Najczęściej spotykanym i najprostszym modelem wieloznacznej informacji liczbowej jest przedział liczbowy.

Subiektywna ocena wartości bieżącej jest wieloznaczna. Każdą z rozważanych alternatyw tej wyceny nazywać będziemy potencjalną wartością bieżącą (w skrócie PPV). W tej sytuacji wieloznaczne określenie BPV sprowadza się do wyznaczenia takiego przedziału, którego każdy element jest interpretowany jako PPV.

Nasze rozważania na temat BPV rozpocznijmy od rozważenia przypadku równowagi finansowej, kiedy to cena rynkowa $\check{C}$ pokrywa się z ceną równowagi C_0, to jest

$$\check{C} = C_0. \tag{3.3}$$

Równowaga ta jest chwilowa, co nakazuje określać wartość PPV jako liczbę zbliżoną do ceny rynkowej. Zakładany zakres zmienności PPV charakteryzuje specyficzną podatność inwestora na wpływ wewnętrznych i zewnętrznych czynników behawioralnych. Każdy z inwestorów określa wtedy następujące wartości:

- C_{min} – dolny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej,
- C_{max} – górny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej.

W wypadku równowagi finansowej inwestor musi uwzględniać możliwość spadków i wzrostów notowań. W tej sytuacji zakres zmienności PPV spełnia warunek

$$C_{min} < C_0 < C_{max}.$$

Przedział liczbowy $[C_{min}, C_{max}]$ jest obrazem BPV dla przypadku równowagi finansowej.

Dalsze rozważania o BPV poprowadzimy teraz dla przypadku, w którym jest notowana dowolna cena rynkowa $\check{C}$. Oczywiste jest, że BPV powinna być zależna od odchylenia

$$\Delta C = \check{C} - C_0$$

ceny rynkowej od ceny równowagi. Każdy z inwestorów określa wtedy następujące wartości:

- $\check{C}_{\min}$ – dolny zakres PPV zakładany dla ceny rynkowej $\check{C}$,
- $\check{C}_{\max}$ – górny zakres PPV zakładany dla ceny rynkowej $\check{C}$.

Zauważmy, że w ten sposób BPV identyfikowana z przedziałem liczbowym może być w równoważny sposób przedstawiona jako specyficzna liczba trapezoidalna dana w postaci $\tilde{T}(\check{C}_{\min}, \check{C}_{\min}, \check{C}_{\max}, \check{C}_{\max})$. Każda z tych wartości jest zależna od liczby $\alpha \in [0, 1]$ określającej stopień podatności inwestora na zmiany. Wartość tego stopnia informuje nas, jak wielki wpływ na zmianę przekonań inwestora ma odchylenie ΔC ceny rynkowej od ceny równowagi. Oznacza to, że wartość $1 - \alpha$ opisuje stopień oddziaływania fenomenu konserwatyzmu poznawczego opisanego na gruncie psychologii przez Edwardsa [1968]. Fenomen ten jest uwzględniany w wielu behawioralnych modelach rynku finansowego. Dyskusję na ten temat można znaleźć na przykład w pracy Barberis, Shleifer i Vishny [1998]. Stopień podatności na zmiany jest indywidualną cechą inwestora mającą podłoże behawioralne.

Dolny zakres PPV inwestor określa jako średnią ważoną dolnego zakresu $C_{\min}$ zakładanego w warunkach równowagi finansowej i wartości $C_{\min} + \Delta C$ opisującej ten sam zakres skorygowany o odchylenie ceny rynkowej od ceny równowagi. W zależności tej waga skorygowanego dolnego zakresu jest równa stopniowi podatności inwestora na zmiany. Określając dolny zakres PPV, inwestor musi brać pod uwagę też to, że zakres ten jest zawsze mniejszy równy od aktualnej ceny rynkowej. Mamy tutaj

$$\check{C}_{\min} = \min\left\{\alpha\left(C_{\min} + \Delta C\right) + \left(1-\alpha\right)C_{\min}, \check{C}\right\} = \min\left\{C_{\min} + \alpha\Delta C, C_0 + \Delta C\right\}.$$

Górny zakres PPV inwestor określa jako średnią ważoną górnego zakresu $C_{\max}$ zakładanego w warunkach równowagi finansowej i wartości $C_{\max} + \Delta C$ opisującej ten sam zakres skorygowany o odchylenie ceny rynkowej od ceny równowagi. W zależności tej waga skorygowanego górnego zakresu jest równa stopniowi podatności inwestora na zmiany. Określając górny zakres PPV, inwestor musi brać pod uwagę też to, że zakres ten jest zawsze większy równy od aktualnej ceny rynkowej. Mamy tutaj

$$\check{C}_{\max} = \max\left\{\alpha\left(C_{\max} + \Delta C\right) + \left(1-\alpha\right)C_{\max}, \check{C}\right\} = \max\left\{C_{\max} + \alpha\Delta C, C_0 + \Delta C\right\}.$$

Ostateczne oszacowania zakresu zmienności PPV otrzymujemy w postaci:

$$\check{C}_{\min} = \begin{cases} C_0 + \Delta C, & \Delta C \le \dfrac{C_{\min} - C_0}{1-\alpha}, \\ C_{\min} + \alpha \Delta C, & \Delta C > \dfrac{C_{\min} - C_0}{1-\alpha}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\check{C}_{\max} = \begin{cases} C_{\max} + \alpha \Delta C, & \Delta C < \dfrac{C_{\max} - C_0}{1-\alpha}, \\ C_0 + \Delta C, & \Delta C \ge \dfrac{C_{\max} - C_0}{1-\alpha}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Zakładany w warunkach równowagi zakres zmienności PPV oraz stopień podatności inwestora określają wpływ behawioralnych przesłanek na wieloznaczność wartości PPV. Poszczególni inwestorzy różnią się swą podatnością na wpływy środowiska behawioralnego. Dlatego mogą się różnić pomiędzy sobą zarówno stopniem podatności na zmiany, jak i zakresami zmienności PPV.

Łatwo zauważyć, że przy dużej nadwyżce ceny równowagi nad ceną rynkową:

$$\Delta C \le \frac{C_{\min} - C_0}{1-\alpha} \tag{3.6}$$

model BPV wyklucza możliwość dalszych spadków notowań. Także w wypadku dużej nadwyżki ceny rynkowej nad ceną równowagi:

$$\Delta C \ge \frac{C_{\max} - C_0}{1-\alpha} \tag{3.7}$$

model BPV wyklucza dalsze wzrosty notowań. Oznacza to, że dopiero przy znacznych odchyleniach ceny rynkowej od ceny równowagi o podejmowaniu decyzji inwestycyjnych decydują jedynie przesłanki racjonalne. Zasięg oddziaływania przesłanek behawioralnych jest określony przez kombinację ich stanów:

$$\frac{C_{\min} - C_0}{1-\alpha} < \Delta C < \frac{C_{\max} - C_0}{1-\alpha}. \tag{3.8}$$

Ostatecznie dla każdego inwestora można wyznaczyć specyficzny zakres zmienności PPV. Zakres ten zależy między innymi od odchylenia ΔC ceny rynkowej od ceny równowagi. Z tego powodu zakres ten jest określany jako wartość funkcji $\mathbb{Z}(\Delta C)$. Funkcja ta jest dana za pomocą tożsamości

$$\mathbb{Z}(\Delta C)=\begin{cases}[C_0+\Delta C; C_{\max}+\alpha\Delta C] & \text{dla warunku (3.6)},\\ [C_{\min}+\alpha\Delta C; C_{\max}+\alpha\Delta C] & \text{dla warunku (3.8)},\\ [C_{\min}+\alpha\Delta C; C_0+\Delta C] & \text{dla warunku (3.7)}.\end{cases} \tag{3.9}$$

W ten sposób uzewnętrznia się wpływ sytuacji rynkowej na przekonania inwestora.

3.1.2. Niewyrazistość behawioralnej wartości bieżącej

Zbudowany powyżej przedziałowy obraz BPV w jednakowy sposób traktuje wszystkie dopuszczalne wartości PPV. Możemy jednak przypuszczać, że inwestor w większym stopniu akceptuje PPV bliższe cenie rynkowej. Oznacza to, że przedziałowy model BPV opisuje złożoność wpływów behawioralnych w niewystarczający sposób. Powoduje to konieczność zbudowania modelu BPV uwzględniającego zmienność wagi poszczególnych PPV i prowadzi wprost do zbudowania niewyrazistego modelu BPV. Najczęściej spotykanym i najprostszym modelem niewyrazistej informacji jest zbiór rozmyty[3]. W tej sytuacji niewyraziste określenie BPV sprowadza się do wyznaczenia funkcji przynależności przypisującej poszczególnym PPV stopień ich akceptacji.

Nasze dalsze rozważania prowadzimy dla ustalonej wartości ΔC odchylenia ceny rynkowej od ceny równowagi. Jednoznacznie jest określony wtedy zakres $\mathbb{Z}(\Delta C)=[\check{C}_{\min}, \check{C}_{\max}]$ zmienności PPV. Dla zunifikowania dalszych rozważań przedział ten poddamy standaryzacji. Wykorzystamy tutaj przekształcenie

$$\beta=\begin{cases}\dfrac{p-\check{C}}{\check{C}-\check{C}_{\min}} & \text{dla} \quad p\in]\check{C}_{\min}, \check{C}],\\[2ex] \dfrac{p-\check{C}}{\check{C}_{\max}-\check{C}} & \text{dla} \quad p\in[\check{C}, \check{C}_{\max}[.\end{cases} \tag{3.10}$$

Zauważmy, że zgodnie z zależnościami (3.4) i (3.5), zakres zmienności $[\check{C}_{\min}, \check{C}_{\max}]$ przekształcamy tutaj na standaryzowany zakres $\mathbb{I}(\Delta C)$ dany przez tożsamość

$$\mathbb{I}(\Delta C)=\begin{cases}[0,1] & \text{dla warunku (3.6)},\\ [-1,1] & \text{dla warunku (3.8)},\\ [-1,0] & \text{dla warunku (3.7)}.\end{cases}$$

[3] Podejście do przedstawiania wartości finansowych jako zbiorów rozmytych wywodzi się od Buckleya [1987] i Calziego [1990].

Wartość $|\beta|$ określa względną odległość PPV od ceny równowagi. Stopień γ podobieństwa PPV do ceny rynkowej określamy za pomocą zależności

$$\gamma = 1 - |\beta|.$$

Zdefiniowany powyżej stopień podobieństwa γ określa równocześnie względną odległość PPV od granic zakresu.

Standaryzowany model nieprecyzyjnej BPV określamy jako podzbiór rozmyty dany za pomocą swej funkcji przynależności $\nu(\cdot|\Delta C)$: $\mathbb{I}(\Delta C) \rightarrow [0, 1]$. Funkcja ta określa stopień akceptacji dopuszczalnych poszczególnych PPV. Z tego względu funkcja ta nie powinna maleć wraz ze wzrostem stopnia podobieństwa PPV do ceny rynkowej. Zakładać będziemy dalej, że dla przypadku równowagi finansowej (3.3) zrównoważony rozkład akceptacji $\nu(\cdot|0)$: $\mathbb{I}(0) \rightarrow [0, 1]$ jest opisany za pomocą tożsamości

$$\nu(\cdot|0) = \nu_0(\cdot),$$

gdzie $\nu_0 : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest zadaną funkcją spełniającą dodatkowo warunki:

$$\nu_0(0) = 1 - \nu_0(-1) = 1 - \nu_0(1) = 1 \tag{3.11}$$

oraz

- ν_0 jest funkcją niemalejącą w przedziale $[-1, 0]$,
- ν_0 jest funkcją nierosnącą w przedziale $[0, 1]$.

Warunek (3.11) informuje, że w przypadku (3.3) cena równowagi jest w pełni akceptowana jako dopuszczalna PPV. Założona monotoniczność funkcji ν_0 oznacza, że wraz ze wzrostem podobieństwa PPV do ceny rynkowej nie maleje stopień jej akceptacji. Zrównoważony rozkład akceptacji będzie punktem odniesienia do określenia rozkładu akceptacji PPV w przypadku stanów nierównowagi (3.1) lub (3.2).

Drugą przesłanką do określenia przebiegu rozkładu akceptacji PPV będzie racjonalna prognoza $\Theta(\cdot|\Delta C) : [-1, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ zmiany notowania. Wiadomo, że:

- jeżeli jest spełniony warunek (3.1) nierównowagi, to racjonalne przesłanki nakazują oczekiwać wzrostu notowań,
- jeżeli jest spełniony warunek (3.2) nierównowagi, to racjonalne przesłanki nakazują oczekiwać spadku notowań,
- jeżeli jest spełniony warunek (3.3) równowagi, to racjonalne przesłanki nakazują oczekiwać spadku lub wzrostu notowań.

Stąd funkcja opisująca racjonalną prognozę dana jest za pomocą tożsamości:

– dla $\Delta C < 0$

$$\Theta(\beta|\Delta C) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \beta < 0, \\ 1 & \text{dla} \quad \beta \geq 0, \end{cases}$$

– dla $\Delta C > 0$

$$\Theta(\beta|\Delta C) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \beta \leq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad \beta > 0, \end{cases}$$

– dla $\Delta C = 0$

$$\Theta(\beta|0) = 1.$$

Znaczenie racjonalnej prognozy będzie wzrastać wraz ze wzrostem odległości $|\Delta C|$ ceny rynkowej od ceny równowagi oraz wraz ze wzrostem odległości γ pomiędzy PPV i granicą zasięgu. Oznacza to, że para złożona z ceny rynkowej i granicy zasięgu jest punktem odniesienia oceny znaczenia prognozy racjonalnej. W tej sytuacji iloczyn $\gamma|\Delta C|$ ocenia odległość od tego punktu odniesienia.

Dla dowolnego odchylenia $|\Delta C|$ inwestor ocenia stopień akceptacji jako średnią ważoną racjonalnej prognozy i zrównoważonego rozkładu akceptacji. Dyskusja stymulantów znaczenia prognozy racjonalnej uzasadnia określenie wagi prognozy racjonalnej jako unormowanej odległości od punktu odniesienia[4]. Dowolny rozkład akceptacji jest wtedy opisany za pomocą tożsamości

$$\nu(\beta|\Delta C) = \frac{1}{1+\gamma|\Delta C|}\nu_0(\beta) + \frac{\gamma|\Delta C|}{1+\gamma|\Delta C|}\Theta(\beta|\Delta C) =$$

$$= \frac{1}{1+(1-|\beta|)|\Delta C|}\nu_0(\beta) + \frac{(1-|\beta|)|\Delta C|}{1+(1-|\beta|)|\Delta C|}\Theta(\beta|\Delta C).$$

Opisana powyżej funkcja przynależności opisuje standaryzowany model BPV. Korzystając z odwrotności przekształcenia (3.10), wyznaczamy teraz uogólniony model BPV. W ogólnym przypadku jest to podzbiór rozmyty dany za pomocą swej

[4] Inne przykłady stosowania unormowanych metryk w naukach ekonomicznych można znaleźć w pracach Czerwińskiego [1976], Ostasiewicza [1986] i Piaseckiego [1990].

funkcji przynależności $\mu(\cdot\,|\Delta C) : \mathbb{Z}(\Delta C) \to [0, 1]$ zdefiniowanej w następujący sposób

$$\mu(p|\Delta C) = \begin{cases} v\left(\dfrac{p-\check{C}}{\check{C}-\check{C}_{\min}}|\Delta C\right) & \text{dla} \quad p \in]\check{C}_{\min}, \check{C}], \\ v\left(\dfrac{p-\check{C}}{\check{C}_{\max}-\check{C}}|\Delta C\right) & \text{dla} \quad p \in [\check{C}, \check{C}_{\max}[. \end{cases}$$

Biorąc razem pod uwagę (3.6), (3.7) i (3.8) dla poszczególnych przypadków, otrzymujemy wtedy:

– jeżeli jest spełniony warunek (3.6), to dla $p \in [\check{C}, \check{C}_{\max}]$

$$\mu(p|\Delta C) = \lambda(p|\Delta C),$$

– jeżeli są spełnione warunki (3.8) i $\Delta C < 0$, to dla $p \in [\check{C}_{\min}, \check{C}_{\max}]$

$$\mu(p|\Delta C) = \begin{cases} \kappa(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p \in [\check{C}_{\min}, \check{C}], \\ \lambda(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p \in [\check{C}, \check{C}_{\max}], \end{cases}$$

– jeżeli są spełnione warunki (3.8) i $\Delta C \geq 0$, to dla $p \in [\check{C}_{\min}, \check{C}_{\max}]$

$$\mu(p|\Delta C) = \begin{cases} \varphi(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p \in [\check{C}_{\min}, \check{C}], \\ \psi(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p \in [\check{C}, \check{C}_{\max}], \end{cases}$$

– jeżeli jest spełniony warunek (3.7), to dla $p \in [\check{C}_{\min}, \check{C}]$

$$\mu(p|\Delta C) = \varphi(p|\Delta C).$$

Użyte powyżej funkcje $\kappa(p|\Delta C)$, $\lambda(p|\Delta C)$, $\varphi(p|\Delta C)$, $\psi(p|\Delta C)$ są opisane za pomocą tożsamości:

$$\kappa(p|\Delta C) = \frac{\check{C}-\check{C}_{\min}}{\check{C}-\check{C}_{\min}+\left(\check{C}_{\min}-p\right)\Delta C} \cdot v_0\left(\frac{p-\check{C}}{\check{C}-\check{C}_{\min}}\right),$$

$$\lambda(p|\Delta C) = \frac{\check{C}_{\max}-\check{C}}{\check{C}_{\max}-\check{C}+\left(p-\check{C}_{\max}\right)\Delta C} \cdot \left(v_0\left(\frac{p-\check{C}}{\check{C}_{\max}-\check{C}}\right) + \frac{p-\check{C}_{\max}}{\check{C}_{\max}-\check{C}}\Delta C\right),$$

$$\varphi(p|\Delta C)=\frac{\check{C}-\check{C}_{\min}}{\check{C}-\check{C}_{\min}+\left(p-\check{C}_{\min}\right)\Delta C}\cdot\left(\nu_0\left(\frac{p-\check{C}}{\check{C}-\check{C}_{\min}}\right)+\frac{p-\check{C}_{\min}}{\check{C}-\check{C}_{\min}}\Delta C\right),$$

$$\psi(p|\Delta C)=\frac{\check{C}_{\max}-\check{C}}{\check{C}_{\max}-\check{C}+\left(\check{C}_{\max}-p\right)\Delta C}\cdot\nu_0\left(\frac{p-\check{C}}{\check{C}_{\max}-\check{C}}\right).$$

Założonym w tym rozdziale głównym celem budowy modelu formalnego BPV była próba wyjaśnieniu mechanizmu utrzymywania się na efektywnym rynku finansowym równowagi pomiędzy popytem i podażą. Zmierzając do rozwiązania tego problemu, przedstawiamy *explicite* wpływ odchylenia ΔC ceny rynkowej na funkcję przynależności $\mu(\cdot|\Delta C):\mathbb{Z}(\Delta C)\to[0,1]$. Mamy tutaj:

– jeżeli jest spełniony warunek (3.6), to dla $p\in[C_0+\Delta C, C_{\max}+\alpha\Delta C]$

$$\mu(p|\Delta C)=\lambda(p|\Delta C), \tag{3.12}$$

– jeżeli są spełnione warunki (3.8) i $\Delta C<0$, to

$$\mu(p|\Delta C)=\begin{cases}\kappa(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p\in[C_{\min}+\alpha\Delta C, C_0+\Delta C],\\ \lambda(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p\in[C_0+\Delta C, C_{\max}+\alpha\Delta C],\end{cases} \tag{3.13}$$

– jeżeli są spełnione warunki (3.8) i $\Delta C\geq 0$, to

$$\mu(p|\Delta C)=\begin{cases}\varphi(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p\in[C_{\min}+\alpha\cdot\Delta C, C_0+\Delta C],\\ \psi(p|\Delta C) & \text{dla} \quad p\in[C_0+\Delta C, C_{\max}+\alpha\Delta C],\end{cases} \tag{3.14}$$

– jeżeli jest spełniony warunek (3.7), to dla $p\in[C_{\min}+\alpha\Delta C, C_0+\alpha\Delta C]$

$$\mu(p|\Delta C)=\varphi(p|\Delta C) \tag{3.15}$$

oraz

$$\kappa(p|\Delta C)=$$

$$=\frac{C_0-C_{\min}+(1-\alpha)\Delta C}{C_0-C_{\min}+(1-\alpha)\Delta C+(C_{\min}+\alpha\Delta C-p)\Delta C}\cdot\nu_0\left(\frac{p-(C_0+\Delta C)}{C_0-C_{\min}+(1-\alpha)\Delta C}\right), \tag{3.16}$$

$$\psi(p|\Delta C) =$$

$$= \frac{C_{\max} - C_0 + (\alpha - 1)\Delta C}{C_{\max} - C_0 + (\alpha - 1)\Delta C + (C_{\max} + \alpha\Delta C - p)\Delta C} \cdot v_0\left(\frac{p - (C_0 + \Delta C)}{C_{\max} - C_0 + (\alpha - 1)\Delta C}\right), \quad (3.17)$$

$$\lambda(p|\Delta C) = \psi(p|\Delta C)\left(1 + \frac{p - C_{\max} - \alpha\Delta C}{C_{\max} - C_0 + (\alpha - 1)\Delta C} \cdot \frac{\Delta C}{v_0\left(\frac{p - (C_0 + \Delta C)}{C_{\max} - C_0 + (\alpha - 1)\Delta C}\right)}\right), \quad (3.18)$$

$$\varphi(p|\Delta C) = \kappa(p|\Delta C)\left(1 + \frac{p - C_{\min} - \alpha\Delta C}{C_0 - C_{\min} + (1 - \alpha)\Delta C} \cdot \frac{\Delta C}{v_0\left(\frac{p - (C_0 + \Delta C)}{C_0 - C_{\min} + (1 - \alpha)\Delta C}\right)}\right). \quad (3.19)$$

Model ten stanowi przybliżenie liczby rzeczywistej opisane w podrozdziale 2.1.3. Wartość przeciętną tej liczby[5] interpretujemy jako przeciętną PPV. Każdemu odchyleniu ceny rynkowej ΔC możemy przypisać wartość $\xi(\Delta C)$ przeciętnej PPV. Wartość ta jest dana za pomocą tożsamości

$$\xi(\Delta C) = \left(\int_{\mathbb{Z}(\Delta C)} \mu(x|\Delta C)\,dx\right)^{-1} \cdot \int_{\mathbb{Z}(\Delta C)} x\mu(x|\Delta C)\,dx.$$

Przeciętną wartość PPV – $\xi(\Delta C)$ – wyznaczoną dla danego inwestora możemy interpretować jako jego przeciętną subiektywną ocenę wartości bieżącej danego instrumentu finansowego. Obiektywna ocena wartości bieżącej identyfikowana z ceną równowagi C_0 jest tutaj jedynie jedną z przesłanek determinujących subiektywną ocenę wartości bieżącej. W tej sytuacji przeciętna PPV $\xi(\Delta C)$ jest dla inwestora informacją bardziej wiarygodną niż cena równowagi C_0. Oznacza to, że swe decyzje inwestycyjną inwestor uzależnia od wzajemnych relacji pomiędzy ceną rynkową $\check{C}$ i przeciętną PPV $\xi(\Delta C)$.

Jeżeli jest spełniony warunek

$$\check{C} < \xi(\Delta C), \quad (3.20)$$

[5] Zdefiniowanej za pomocą zależności (2.21).

to inwestor uznaje, że rynek finansowy zaniżył wycenę rozważanego papieru wartościowego. W związku z tym inwestor spodziewa się rychłego wzrostu ceny rynkowej tego instrumentu finansowego. Oczekiwania te uzasadniają zgłoszenie oferty zakupu rozważanego papieru wartościowego. Wartość tego popytu zależy od strategii inwestycyjnej inwestora oraz od posiadanych przez niego zasobów finansowych.

Jeżeli jest spełniony warunek

$$\check{C} > \xi(\Delta C), \tag{3.1.42}$$

to inwestor uznaje, że rynek finansowy zawyżył wycenę rozważanego papieru wartościowego. W związku z tym inwestor spodziewa się rychłego spadku ceny rynkowej tego instrumentu finansowego. Oczekiwania te uzasadniają zgłoszenie oferty sprzedaży rozważanego papieru wartościowego. Wartość tej podaży może być co najwyżej równa wartości posiadanego przez niego papieru wartościowego.

Zauważmy tutaj, że subiektywny warunek (3.20) zastępuje obiektywny warunek (3.1) oraz subiektywny warunek (3.21) zastępuje obiektywny warunek (3.2). Co jest oczywiste, na efektywnym rynku finansowym nie mogły być równocześnie spełnione warunki (3.1) i (3.2).

Oba zakresy PPV zakładane dla ceny równowagi, stopień podatności inwestora na zmiany i jego zrównoważony rozkład akceptacji opisują efekty wpływu środowiska behawioralnego na inwestora. Charakterystyka ta jest specyficzna dla każdego z inwestorów. Z drugiej strony wszystkie wymienione tutaj czynniki stanowią behawioralne przesłanki określenia BPV. Oznacza to, że na efektywnym rynku finansowym każdy z inwestorów określa swą BPV w specyficzny sposób. W tej sytuacji przebieg zmienności przeciętnej PPV może być specyficzną cechą każdego z inwestorów. Oznacza to, że na efektywnym rynku finansowym mogą się znaleźć równocześnie inwestorzy spełniający warunek (3.20) i inwestorzy spełniający warunek (3.21). W przeciwieństwie do koniunkcji warunków (3.1) i (3.2), na efektywnym rynku finansowym mogą być spełnione równocześnie warunki (3.20) i (3.21).

W tej sytuacji popyt zgłaszany przez inwestorów spełniających warunek (3.20) jest równoważony przez podaż oferowaną przez inwestorów spełniających warunek (3.21). Należy tutaj jednak pamiętać, że spostrzeżenie to odnosi się jedynie do inwestorów obecnych w danym momencie na rynku finansowym. W proponowanym modelu nie są uwzględniane przesłanki nakłaniające inwestora do wejścia na dany rynek finansowy.

Jeżeli nie następuje redukcja sprzedaży lub redukcja kupna, to obserwowana cena rynkowa $\check{C}$ jest ceną równowagi rynkowej w ujęciu mikroekonomicznym. Cena równowagi rynkowej zależy w dużym stopniu od podatności inwestorów na wpływ środowiska behawioralnego. Cena C_0 jest natomiast ceną równowagi finansowej w ujęciu finansowym. Cena równowagi finansowej opisuje najbardziej stabilną cenę papieru wartościowego. Oznacza to, że na rynku finansowym możemy obserwować cenę równowagi finansowej C_0 i cenę równowagi rynkowej $\check{C}$. Ceny te mogą mieć różne wartości. Wniosek ten w pełni wyjaśnia opisany na wstępie paradoks osiągania równowagi rynkowej na efektywnym rynku finansowym.

Już nawet pobieżnie analizując zmienność rozkładu akceptacji, łatwo jest dostrzec, że:

– warunek (3.6) jest warunkiem dostatecznym dla (3.20);
– warunek (3.7) jest warunkiem dostatecznym dla (3.21).

W tej sytuacji szczegółowej analizy wymaga jedynie przypadek (3.8).

3.1.3. Behawioralna wartość bieżąca – studium przypadku

Złożona postać modelu BPV skłania nas do badania jego właściwości na drodze eksperymentów obliczeniowych. Pierwszym krokiem w stronę tego typu badań numerycznych jest poniższe studium przypadku. Głównym jego celem będzie demonstracja przypadku, w którym równocześnie pojawiają się oferta zakupu i oferta sprzedaży. Dodatkowym celem będzie tutaj ilustracja wpływu wybranych czynników behawioralnych na wyznaczany model BPV. Z tej przyczyny przebieg obliczeń zostanie przedstawiony w bardzo szczegółowy sposób.

Rozważamy instrument finansowy scharakteryzowany za pomocą ceny równowagi finansowej $C_0 = 100$. Obrotem tym papierem wartościowym są zainteresowani inwestor A i inwestor B.

Podatność inwestora A na wpływ wewnętrznych i zewnętrznych czynników behawioralnych jest opisana za pomocą wartości:

– $C^A_{\min} = 95$ – dolny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej,
– $C^A_{\max} = 100$ – górny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej.

Podatność inwestora B na wpływ wewnętrznych i zewnętrznych czynników behawioralnych jest opisany za pomocą wartości:

– $C^B_{\min} = 90$ – dolny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej,
– $C^B_{\max} = 105$ – górny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej.

Porównanie obu tych zakresów pozwala stwierdzić, że w warunkach równowagi finansowej oczekiwania rynkowe inwestora A są bardziej optymistyczne niż oczekiwania rynkowe inwestora B.

Stopień podatności inwestora A na zmiany jest równy $\alpha_A = 0{,}2$. Analogiczny stopień podatności inwestora B na zmiany jest równy $\alpha_B = 0{,}8$. Jest tutaj wyraźnie widoczne to, że reakcja rynkowa inwestora B jest szybsza niż reakcja rynkowa inwestora A.

W ten sposób zgromadziliśmy wszystkie informacje niezbędne do określenia wieloznacznej BPV. Łatwo jest zauważyć, ze każdy z inwestorów został wyposażony w jedną zaletę i w jedną wadę. Zaletami są tutaj bardziej optymistyczne oczekiwania inwestora A i szybsza reakcja rynkowa inwestora B. Wadami są natomiast bardziej pesymistyczne oczekiwania inwestora B i wolniejsza reakcja rynkowa inwestora A.

Korzystając z zależności (3.9), wyznaczamy teraz zakres zmienności PPV dla inwestora A. Mamy tutaj

$$\mathbb{Z}_A(\Delta C) = \begin{cases} [100+\Delta C, 110+0{,}2\cdot\Delta C], & \Delta C \le -6{,}25, \\ [95+0{,}2\cdot\Delta C, 110+0{,}2\cdot\Delta C], & -6{,}25 < \Delta C < 12{,}5, \\ [95+0{,}2\cdot\Delta C, 100+\Delta C], & \Delta C \ge 12{,}5. \end{cases}$$

Dla inwestora B zakres zmienności przyjmuje postać

$$\mathbb{Z}_B(\Delta C) = \begin{cases} [100+\Delta C, 105+0{,}8\cdot\Delta C], & \Delta C \le -50, \\ [90+0{,}8\cdot\Delta C, 105+0{,}8\cdot\Delta C], & -50 < \Delta C < 25, \\ [90+0{,}8\cdot\Delta C, 100+\Delta C], & \Delta C \ge 25. \end{cases}$$

Zauważmy tutaj, że bardziej optymistyczny inwestor A wyklucza dalsze wzrosty notowań już powyżej ceny rynkowej $\check{C}_A$ = 112,5. W tym samym czasie inwestor B wyklucza możliwość dalszego wzrostu notowań dopiero po przekroczeniu ceny $\check{C}_B$ =125. Efekt ten zawdzięczamy szybszej reakcji rynkowej inwestora B.

Zakresy zmienności PPV i stopnie podatności na zmiany rynkowe są danymi wystarczającymi do wyznaczenia opisanych za pomocą zależności (3.16), (3.17), (3.18) i (3.19) składników modelu BPV.

Dla inwestora A mamy tutaj:

$$\kappa_A(p|\Delta C) = \frac{5+0{,}8\cdot\Delta C}{5+(95{,}8-p)\cdot\Delta C+0{,}2\cdot(\Delta C)^2}\cdot\nu_A\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{5+0{,}8\cdot\Delta C}\right),$$

$$\psi_A(p|\Delta C) = \frac{10-0{,}8\cdot\Delta C}{10+(109{,}2-p)\cdot\Delta C+0{,}2\cdot(\Delta C)^2}\cdot\nu_A\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{10-0{,}8\cdot\Delta C}\right),$$

$$\lambda_A(p|\Delta C) = \psi_A(p|\Delta C)\left(1+\frac{p-110-0{,}2\cdot\Delta C}{10-0{,}8\cdot\Delta C}\cdot\frac{\Delta C}{\nu_A\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{10-0{,}8\cdot\Delta C}\right)}\right),$$

$$\varphi_A(p\,|\,\Delta C)=\kappa_A(p\,|\,\Delta C)\left(1+\frac{p-95-0{,}2\cdot\Delta C}{5+0{,}8\cdot\Delta C}\cdot\frac{\Delta C}{\nu_A\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{5+0{,}8\cdot\Delta C}\right)}\right),$$

gdzie $\nu_A: [-1, 1] \to [0, 1]$ jest zrównoważonym rozkładem akceptacji określonym przez inwestora A.

Dla inwestora B mamy tutaj:

$$\kappa_B(p\,|\,\Delta C)=\frac{10+0{,}2\cdot\Delta C}{10+(90{,}2-p)\cdot\Delta C+0{,}8\cdot(\Delta C)^2}\cdot\nu_B\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{10+0{,}2\cdot\Delta C}\right),$$

$$\psi_B(p\,|\,\Delta C)=\frac{5-0{,}2\cdot\Delta C}{5+(104{,}8-p)\cdot\Delta C+0{,}8\cdot(\Delta C)^2}\cdot\nu_B\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{5-0{,}2\cdot\Delta C}\right),$$

$$\lambda_B(p\,|\,\Delta C)=\psi_B(p\,|\,\Delta C)\left(1+\frac{p-105-0{,}8\Delta C}{5-0{,}2\cdot\Delta C}\cdot\frac{\Delta C}{\nu_B\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{5-0{,}2\cdot\Delta C}\right)}\right),$$

$$\varphi_B(p\,|\,\Delta C)=\kappa_B(p\,|\,\Delta C)\left(1+\frac{90+0{,}8\cdot\Delta C-p}{10+0{,}2\cdot\Delta C}\cdot\frac{\Delta C}{\nu_B\left(\frac{p-(100+\Delta C)}{10+0{,}2\cdot\Delta C}\right)}\right),$$

gdzie $\nu_B: [-1, 1] \to [0, 1]$ jest zrównoważonym rozkładem akceptacji określonym przez inwestora B.

Przy określaniu zrównoważonego rozkładu akceptacji skorzystamy z sugestii przedstawionych w podrozdziale 2.1.3. Stwierdzono tam, że w praktycznych zastosowaniach większość badaczy ogranicza się do rozmytych liczb trapezoidalnych oraz do rozmytych liczb trójkątnych. Zgodnie z tą sugestią, określimy zrównoważone rozkłady akceptacji jako rozmyte liczby trójkątne $\tilde{T}(-1, 0, 0, 1)$. Oznacza to, że zrównoważone rozkłady akceptacji obu inwestorów są identyczne i są dane za pomocą tożsamości

$$\nu_A(\beta) = \nu_B(\beta) = 1 - |\beta|. \tag{3.22}$$

Warunek (3.22) jest równoważny założeniu, że w warunkach równowagi finansowej (3.3) stopień akceptacji PPV jest równy stopniu podobieństwa PPV do ceny rynkowej.

Dla inwestora A mamy wtedy:

$$\kappa_A(p|\Delta C)=\frac{p-0{,}2\cdot\Delta C-95}{-\Delta C\cdot p+0{,}2\cdot(\Delta C)^2+95{,}8\cdot\Delta C+5},$$

$$\psi_A(p|\Delta C)=\frac{-p+0{,}2\cdot\Delta C+110}{-\Delta C\cdot p+0{,}2\cdot(\Delta C)^2+109{,}2\cdot\Delta C+10},$$

$$\lambda_A(p|\Delta C)=\frac{(-p+0{,}2\cdot\Delta C+110)\cdot(1-\Delta C)}{\Delta C\cdot p-0{,}2\cdot(\Delta C)^2-110{,}8\cdot\Delta C+10},$$

$$\varphi_A(p|\Delta C)=\frac{(p-0{,}2\cdot\Delta C-95)\cdot(1+\Delta C)}{\Delta C\cdot p-0{,}2\cdot(\Delta C)^2-94{,}8\cdot\Delta C+5}.$$

Dla inwestora B mamy tutaj:

$$\kappa_B(p|\Delta C)=\frac{p-0{,}8\cdot\Delta C-90}{-\Delta C\cdot p+0{,}8\cdot(\Delta C)^2+90{,}2\cdot\Delta C+10},$$

$$\psi_B(p|\Delta C)=\frac{-p+0{,}8\cdot\Delta C+105}{-\Delta C\cdot p+0{,}8\cdot(\Delta C)^2+104{,}8\cdot\Delta C+5},$$

$$\lambda_B(p|\Delta C)=\frac{(-p+0{,}8\cdot\Delta C+105)\cdot(1-\Delta C)}{\Delta C\cdot p-0{,}8\cdot(\Delta C)^2-104{,}8\cdot\Delta C+5},$$

$$\varphi_B(p|\Delta C)=\frac{(p-0{,}8\cdot\Delta C-90)\cdot(1+\Delta C)}{\Delta C\cdot p-0{,}8\cdot(\Delta C)^2-90{,}2\cdot\Delta C+10}.$$

W następnym kroku dla każdego odchylenia ceny rynkowej ΔC spełniającego warunek (3.8) wyznaczamy funkcje przynależności BPV.

W przypadku inwestora A mamy tutaj:

– jeżeli $-6{,}25 < \Delta C < 0$, to dla $p \in [95 + 0{,}2\cdot\Delta C,\ 110 + 0{,}2\cdot\Delta C]$

$$\mu_A(p|\Delta C)=\begin{cases}\dfrac{p-0{,}2\cdot\Delta C-95}{-\Delta C\cdot p+0{,}2\cdot(\Delta C)^2+95{,}8\cdot\Delta C+5}, & p<100+\Delta C,\\[2ex] \dfrac{(-p+0{,}2\cdot\Delta C+110)\cdot(1-\Delta C)}{\Delta C\cdot p-0{,}2\cdot(\Delta C)^2-110{,}8\cdot\Delta C+10}, & p\geq 100+\Delta C,\end{cases}$$

– jeżeli $0 \leq \Delta C < 12{,}5$, to dla $p \in [95 + 0{,}2 \cdot \Delta C, 110 + 0{,}2 \cdot \Delta C]$

$$\mu_A(p\,|\,\Delta C) = \begin{cases} \dfrac{(p - 0{,}2 \cdot \Delta C - 95) \cdot (1 + \Delta C)}{\Delta C \cdot p - 0{,}2 \cdot (\Delta C)^2 - 94{,}8 \cdot \Delta C + 5}, & p < 100 + \Delta C, \\ \dfrac{-p + 0{,}2 \cdot \Delta C + 110}{-\Delta C \cdot p + 0{,}2 \cdot (\Delta C)^2 + 109{,}2 \cdot \Delta C + 10}, & p \geq 100 + \Delta C. \end{cases}$$

Dla inwestora B otrzymujemy:

– jeżeli $-50 < \Delta C < 0$, to dla $p \in [90 + 0{,}8 \cdot \Delta C, 105 + 0{,}8 \cdot \Delta C]$

$$\mu_B(p\,|\,\Delta C) = \begin{cases} \dfrac{p - 0{,}8 \cdot \Delta C - 90}{-\Delta C \cdot p + 0{,}8 \cdot (\Delta C)^2 + 90{,}2 \cdot \Delta C + 10}, & p < 100 + \Delta C, \\ \dfrac{(-p + 0{,}8 \cdot \Delta C + 105) \cdot (1 - \Delta C)}{\Delta C \cdot p - 0{,}8 \cdot (\Delta C)^2 - 104{,}8 \cdot \Delta C + 5}, & p \geq 100 + \Delta C, \end{cases}$$

– jeżeli $0 \leq \Delta C < 25$, to dla $p \in [90 + 0{,}8 \cdot \Delta C, 105 + 0{,}8 \cdot \Delta C]$

$$\mu_B(p\,|\,\Delta C) = \begin{cases} \dfrac{(p - 0{,}8 \cdot \Delta C - 90) \cdot (1 - \Delta C)}{\Delta C \cdot p - 0{,}8 \cdot (\Delta C)^2 - 90{,}2 \cdot \Delta C + 10}, & p < 100 + \Delta C, \\ \dfrac{-p + 0{,}8 \cdot \Delta C + 105}{-\Delta C \cdot p + 0{,}8 \cdot (\Delta C)^2 + 104{,}8 \cdot \Delta C + 5}, & p \geq 100 + \Delta C. \end{cases}$$

Jak łatwo zauważyć, inwestorzy A i B różnią się pomiędzy sobą wyznaczonymi przez warunek (3.8) zasięgami oddziaływania czynników behawioralnych.

Dla każdego z inwestorów wyznaczamy wartości $\xi(\Delta C)$ przeciętnej PPV[6]. Ograniczamy się tutaj oczywiście do odchyleń ceny rynkowej ΔC spełniających ograniczenie (3.8). Następnie, stosując metodę bisekcji przedziału, rozwiązujemy nierówności (3.20) lub (3.21). Ostatecznie otrzymujemy dwa wnioski:

– inwestor A spełnia warunek (3.20) wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta C < 5{,}18$,
– inwestor B spełnia warunek (3.21) jedynie wtedy, gdy $\Delta C > -21{,}37$.

Oznacza to, że jeśli cena rynkowa $\check{C} \in \,]78{,}62, 105{,}18[$, to popyt zgłaszany przez inwestora A może być równoważony przez podaż oferowaną przez inwestora B.

W ten sposób została wykazana możliwość zastosowania proponowanego modelu do opisu zjawiska osiągania równowagi rynkowej w warunkach nierównowagi finansowej.

[6] Zastosowano tutaj program Mathematica v. 8.0.0.0, numer licencji L4719-1731.

3.1.4. Behawioralna wartość bieżąca a teoria finansów behawioralnych

Zaproponowany w tym rozdziale model behawioralnej wartości bieżącej stosuje się także w przypadku silnie efektywnego rynku finansowego. Tym różni się od modelu Daniela, Hirshleifera i Subrahmanyama [2001], w którym założono brak silnej efektywności.

Rozkład prawdopodobieństwa stopy zwrotu wyznaczonej za pomocą behawioralnej wartości bieżącej jest identyczny z rozkładem empirycznym. Tym zaproponowany model różni się od teorii perspektywy [Tversky i Kahneman 1974], w której stosuje się subiektywne przekształcenie obserwowanego rozkładu prawdopodobieństwa.

Prowadzone w tej pracy rozważania nie wymagają stosowania funkcji użyteczności. Tym zaproponowany model różni się od modelu Daceya i Zielonki [2008].

Behawioralna wartość bieżąca jest obarczona ryzykiem nieprecyzji, co jest wspólną cechą zaproponowanego modelu i modelu proponowanego przez Barberisa, Shleifera i Vishny'ego [1998].

W zaproponowanym modelu behawioralne przesłanki decyzji ekonomicznych pozwalają na przedstawienie działania rynku finansowego jako gry toczonej pomiędzy inwestorami o różnych charakterystykach behawioralnych. Dzięki temu zaproponowany model może być stosowany w teorii zaproponowanej przez Honga i Steina [1999].

Dodatkowo przy konstrukcji zbioru potencjalnych wartości bieżących PPV odwołano się tutaj do fenomenu konserwatyzmu poznawczego opisanego na gruncie psychologii przez Edwardsa [1968].

3.1.5. Wpływ behawioralnej wartości bieżącej na stopę zwrotu

Załóżmy teraz dodatkowo, że jest dany ustalony horyzont czasowy $t > 0$ inwestycji. Rozważany papier wartościowy jest wtedy określony za pomocą dwóch wartości:

- przewidywanej wartości przyszłej $V_t \in \mathbb{R}^+$,
- oszacowanej wartości początkowej $V_0 \in \mathbb{R}^+$.

Podstawową charakterystyką informującą o korzyściach z posiadania tego instrumentu finansowego jest stopa zwrotu r_t dana za pomocą tożsamości

$$r_t = r(V_0, V_t).$$

W szczególnym przypadku tutaj mamy:

- prostą stopę zwrotu

$$r_t = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1,$$

– logarytmiczną stopę zwrotu

$$r_t = \ln\frac{V_t}{V_0}.$$

W ogólnym przypadku funkcja $r: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją malejącą wartości początkowej i funkcją rosnącą wartości przyszłej. Dzięki temu dla dowolnych wartości początkowej V_0 i wartości przyszłej V_t możemy wyznaczyć funkcje odwrotne $r_t^{-1}(V_0, \cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ i $r_0^{-1}(\cdot, V_t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

W klasycznym podejściu do problemu wyznaczenia stopy zwrotu wartość początkowa inwestycji jest identyfikowana z obserwowaną ceną rynkową $\check{C}$, co zapisujemy

$$V_0 = \check{C}. \tag{3.23}$$

Wartość przyszła inwestycji V_t jest obarczona ryzykiem niepewności co do przyszłego stanu rzeczy. Modelem formalnym tej niepewności jest przedstawianie wartości przyszłej jako zmiennej losowej $\tilde{V}_t: \Omega = \{\omega\} \to \mathbb{R}^+$. Zbiór Ω jest zbiorem elementarnych stanów rynku finansowego. Jeżeli przy wyznaczaniu stopy zwrotu skorzystano z warunku (3.23), to także stopa zwrotu jest zmienną losową obarczoną ryzykiem niepewności. Zmienna losowa ta jest wyznaczona za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}_t(\omega) = r\left(\check{C}, \tilde{V}_t(\omega)\right).$$

W praktyce analizy rynków finansowych przyjęto opisywanie ryzyka niepewności za pomocą opisu rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu. W chwili obecnej dysponujemy obszernym kompendium wiedzy na ten temat. Przykładami mogą być tutaj cytowane już prace: Winklera-Drewsa [2009], Echausta i Tomasika [2008], Tomasika [2008 i 2009], Tomasika i Piaseckiego [2008], Tomasika i Winklera-Drewsa [2009], Piaseckiego i Tomasika [2011]. Załóżmy, że opis rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu spełniającej warunek (3.23) jest dany za pomocą dystrybuanty $F_r: \mathbb{R} \to [0, 1]$. Wtedy dystrybuanta $F_V: \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ rozkładu prawdopodobieństwa wartości przyszłej jest dana przez tożsamość

$$F_V(x) = F_r\left(r_t(\check{C}, x)\right).$$

Z drugiej strony dystrybuanta $F_V: \mathbb{R} \to [0, 1]$ opisuje rozkład prawdopodobieństwa wartości przyszłej, to jest wartości ocenianej *ex post* jedynie na podstawie obiektywnego pomiaru. Oznacza to, że dystrybuanta wartości przyszłej jest niezależna od sposobu ustalenia wartości początkowej.

Jak już wykazano, wartość początkowa może być obarczona ryzykiem nieprecyzji. Załóżmy tutaj, że nieprecyzyjne oszacowanie wartości początkowej jest przedstawione za pomocą funkcji przynależności $\mu_{BPV}: \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$. Przykład takiej funkcji przynależności został opisany za pomocą zależności od (3.12) do (3.19). Wtedy stopa zwrotu jest obarczona splotem ryzyka niepewności obarczającego wartość przyszłą i ryzyka nieprecyzji obarczającego wartość początkową. Zgodnie z zasadą rozszerzenia L. Zadeha, dla każdego ustalonego elementarnego stanu $\omega \in \Omega$ rynku finansowego funkcja przynależności stopy zwrotu $\rho_\omega: \mathbb{R} \to [0, 1]$ jest określona za pomocą zależności

$$\rho_\omega(r) = \max\left\{\mu_{\mathrm{BPV}}(y) : y \in \mathbb{R}^+, r = r\left(y, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right\} = \mu_{\mathrm{BPV}}\left(r_0^{-1}\left(r, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right).$$

Wynika stąd, że w ogólnym przypadku funkcja przynależności stopy zwrotu jest warunkowa zmienną losową $\rho: \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$ określoną za pomocą tożsamości

$$\widetilde{\rho}(r, \omega) = \mu_{\mathrm{BPV}}\left(r_0^{-1}\left(r, \tilde{V}_t(\omega)\right)\right).$$

Oznacza to, że obarczona splotem ryzyka niepewności i ryzyka nieprecyzji stopa zwrotu jest reprezentowana przez probabilistyczny zbiór rozmyty

$$\widetilde{R} = \left\{\tilde{\Phi}^{-1}\left(\widetilde{\rho}(\,\cdot\,, \omega)\right) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \omega \in \Omega\right\}$$

nazywany inaczej zbiorem Hiroto. Pojęcie to zostało opisane w podrozdziale 2.2. W szczególnych przypadkach mamy tutaj:

– dla prostej stopy zwrotu

$$\rho(r, \omega) = \mu_{\mathrm{BPV}}\left((1+r)^{-1} \cdot \tilde{V}_t(\omega)\right),$$

– dla logarytmicznej stopy zwrotu

$$\rho(r, \omega) = \mu_{\mathrm{BPV}}\left(e^{-r} \cdot \tilde{V}_t(\omega)\right).$$

Dla każdej z tak opisanych stóp zwrotu wyznaczamy parametry jej rozkładu. Dla prostej stopy zwrotu mamy:

– rozkład oczekiwań

$$\rho(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathrm{BPV}}\left((1+r)^{-1} \cdot y\right) dF_V(y), \tag{3.24}$$

– oczekiwaną stopę zwrotu

$$E(\widetilde{R}) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r \cdot \mu_{\mathrm{BPV}}\left((1+r)^{-1} \cdot y\right) dF_V(y)\, dr}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathrm{BPV}}\left((1+r)^{-1} \cdot y\right) dF_V(y)\, dr}.$$

Dla logarytmicznej stopy zwrotu mamy:

– rozkład oczekiwań

$$\rho(r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathrm{BPV}}(e^{-r} \cdot y)\, dF_V(y),$$

– oczekiwaną stopę zwrotu

$$E(\widetilde{R}) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r \cdot \mu_{\mathrm{BPV}}\left(e^{-r} \cdot y\right) dF_V(y)\, dr}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathrm{BPV}}\left(e^{-r} \cdot y\right) dF_V(y)\, dr}.$$

Następnie dla obu tych stóp wyznaczamy kwadrat residuum stopy zwrotu

$$\widetilde{\mu}_{D(R)}\left(x, \tilde{V}_t(\omega)\right) = \begin{cases} \max\left\{\widetilde{\rho}\left(E(\widetilde{R}) + \sqrt{x}, \omega\right), \widetilde{\rho}\left(E(\widetilde{R}) - \sqrt{x}, \omega\right)\right\} & \text{dla } \ x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } \ x < 0. \end{cases}$$

Kwadrat ten posłuży nam dalej do określenia rozszerzenia pojęcia wariancji stopy zwrotu. Rozszerzenie to ma odgrywać tutaj rolę oceny ryzyka niepewności. W analizie rynków finansowych zakłada się *implicite*, że takie ryzyko jest porównywalne. Z drugiej jednak strony naturalny preporządek określony przez zbiory rozmyte nie jest liniowy. Oznacza to, że w tym wypadku oczekiwany kwadrat residuum określony za pomocą zależności (2.31) nie znajduje zastosowania. W tej sytuacji, drogą eliminacji, jako ocenę ryzyka niepewności przyjmujemy wariancję stopy zwrotu

$$\sigma^2 = S^2(\widetilde{R}) = \left(\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_{D(R)}(r, y)\, dF_V(y)\, dr\right)^{-1} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r \cdot \widetilde{\mu}_{D(R)}(r, y)\, dF_V(y)\, dx. \tag{3.25}$$

Podobnie jak w przypadku precyzyjnie określonej stopy zwrotu, istnieją takie rozkłady prawdopodobieństwa wartości przyszłej, dla których nie istnieje wariancja stopy zwrotu. Wtedy taki rozkład zastępujemy rozkładem obustronnie obciętym, dla którego wariancja istnieje zawsze. Postępowanie takie znajduje swe uzasadnienie w teorii perspektywy [Kahneman i Tversky 1979], która to między innymi odwołuje się do behawioralnego zjawiska odrzucania skrajnych możliwości.

Pomimo tej modernizacji, w zaproponowanym modelu można wykorzystać bez zmian całą bogatą empiryczną wiedzę zebraną na temat rozkładów prawdopodobieństwa stóp zwrotu. Jest to wysoce korzystna cecha zaproponowanego modelu, gdyż przybliża możliwość jego realnych zastosowań.

W artykułach Piaseckiego [2007a, 2007b, 2007c] została postawiona hipoteza o możliwości zastosowania zbiorów Hiroto jako narzędzia formalnego finansów behawioralnych. Hipoteza ta została tutaj pozytywnie zweryfikowana poprzez oszacowanie stopy zwrotu za pomocą behawioralnej wartości bieżącej.

3.2. Nieprecyzyjne określenie rozkładu stopy zwrotu

Podstawowym problemem, przed jakim staje zarządzający ryzykiem inwestycji w instrumenty finansowe, jest określenie rozkładu prawdopodobieństwa stóp zwrotu z tych instrumentów finansowych. Mandelbrot [1964] zaproponował wykorzystywanie tutaj takich rozkładów, które mogłyby uchwycić leptokurtyczność i grube ogony stóp zwrotu. Badania przeprowadzone przez Famę [1965] potwierdziły hipotezy Mandelbrota. Wskazuje to na potrzebę poszukiwania innych, nieskończenie podzielnych rozkładów prawdopodobieństwa posiadających grubsze ogony niż rozkład normalny, za pomocą których można by lepiej modelować empiryczne rozkłady stóp zwrotu z instrumentu finansowego. Na przykład badania empiryczne przeprowadzone przez Eberleina i Kellera [1994] potwierdziły słuszność stosowania rozkładów hiperbolicznych do modelowania finansowego na rynku niemieckim. Potwierdzono również, że zasadne jest wykorzystywanie rozkładów α-stabilnych w przypadku rynku amerykańskiego.

Badania tego rodzaju są także prowadzone w odniesieniu do empirycznych rozkładów stóp zwrotu z instrumentów finansowych na polskim rynku. W pracy Jajugi [2000] zaprezentowano badanie zgodności rozkładów empirycznych stóp zwrotu instrumentów finansowych notowanych na GPW w Warszawie z rozkładem normalnym. Stwierdzono tam, że dla wszystkich spółek i indeksów giełdowych dzienne stopy zwrotu nie są zgodne z rozkładem normalnym. W wypadku tygodniowych oraz miesięcznych stóp zwrotu, w niektórych przypadkach nie było jednak podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności analizowanych szeregów czasowych. Analizując logarytmiczne stopy zwrotu wybranych instrumentów finansowych notowanych na GPW w Warszawie, Szczepaniak [2000] pokazał, że rozkłady α-stabilny i hiperboliczny lepiej niż rozkłady gaussowskie aproksymują rozkład prawdopodobieństwa badanych szeregów czasowych. Analogicznie do Jajugi, także Tarczyński i Mojsiewicz [2001] odrzucili hipotezę o normalności rozkładu stóp zwrotu. Podobne wyniki uzyskał Rokita [2000]. Wyniki przedstawione w pracy Witkowskiej i Kompy [2007] jednoznacznie wskazują, że empiryczne rozkłady analizowanych szeregów czasowych stop zwrotu nie są zgodne z rozkładem normalnym.

Zastosowanie rozkładu GED lub rozkładu Laplace'a do modelowania dziennych stóp zwrotu z indeksu WIG daje lepsze wyniki niż przy wykorzystaniu do tego celu rozkładu normalnego [Purczyński 2002]. Łażewski [2007] wykazał, że dla wybranych spółek rozkłady α-stabilne dają lepsze dopasowanie do danych empirycznych aniżeli rozkłady normalne.

Już to krótkie omówienie badań wskazuje na to, że poszczególni badacze zgodnie odrzucają rozkład normalny jako model empirycznego rozkładu stopy zwrotu z instrumentu finansowego. Z kolei wyniki ich statystycznych analiz wskazują na różne rozkłady prawdopodobieństwa mogące być teoretycznymi modelami rozkładów stop zwrotu. Pewnym usprawiedliwieniem może być tutaj to, że w każdej ze wspomnianych prac badano różniące się okresem obserwacji szeregi czasowe różnych stóp zwrotu z różnych instrumentów finansowych. To zróżnicowanie rodzi postulat zaplanowania kompleksowych badań rozkładów stóp zwrotu obserwowanych na GPW w Warszawie. Rozległy obszar tych badań i przypuszczalnie nieuniknione zróżnicowanie wniosków nakłada tutaj obowiązek przygotowania modelu syntezy wniosków zebranych w trakcie analizy empirycznych rozkładów stop zwrotu. Budowie pewnej propozycji takiego modelu będzie poświęcony ten podrozdział.

Analizując szeregi czasowe obserwowane na rynkach finansowych, wielokrotnie zauważamy, że ścisłe badania zjawisk ilościowych na rynkach finansowych nie poddają się zasadzie generalizacji historycznej[7]. Spełnienie zasady generalizacji historycznej jest konieczne w wypadku badań naukowych polegających na poszukiwaniu predykatorów. Z taką sytuacją mamy do czynienia w wypadku poszukiwań rozkładów stóp zwrotu. Stanowi to przesłankę do poszukiwania takiego sposobu formułowania wniosków z analizy empirycznych rozkładów stóp zwrotu, że zostanie zachowana zasada generalizacji historycznej. Jednym z takich sposobów może być nieprecyzyjne wyrażanie wniosków wynikających z analizy materiału empirycznego. Z tego powodu zostaną tutaj zaproponowane metody nieprecyzyjnego wypowiadania ostatecznych wniosków o rozkładzie stopy zwrotu. Przestudiowane zostaną też formalne konsekwencje takiego postępowania.

[7] Można ją znaleźć na przykład w pracy Piaseckiego [2009].

3.2.1. Rozkłady dopuszczalne

Określamy zbiór

$$\mathcal{D} = \{D_i : i = 1, 2,\ldots, n\}$$

rozpatrywanych rozkładów prawdopodobieństwa nad zbiorem liczb rzeczywistych. Do zbioru $\mathcal{D}$ zaliczamy wszystkie te rozkłady prawdopodobieństwa, które w literaturze przedmiotu są łączone z empirycznymi rozkładami stóp zwrotu z instrumentów finansowych.

Głównym przedmiotem naszego badania będzie pochodzący z przedziału czasu $[0, T]$ szereg czasowy kolejnych stóp zwrotu z wybranego instrumentu finansowego. Przedział $[0, T]$ dzielimy na $m > 1$ równych podprzedziałów czasowych T_j o identycznej długości. Zapiszmy

$$\mathcal{T} = \left\{ T_j : j = 1, 2, \ldots, m; \bigcup_{j=1}^{m} T_j = [0, T] \right\}.$$

Każdej parze $(D_i, T_j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{T}$ przypisujemy hipotezę zerową:

$\mathcal{H}_0^{(i,j)}$: Stopy zwrotu obserwowane w przedziale T_j mają rozkład D_i,

której przeciwstawiamy hipotezę alternatywną:

$\mathcal{H}_1^{(i,j)}$: Stopy zwrotu z przedziału T_j mają rozkład różny od D_i.

Do weryfikacji wszystkich postawionych hipotez zerowych wykorzystujemy ten sam ustalony test statystyczny. Prowadząc weryfikację tych hipotez, dla każdego przedziału czasowego $T_j \in \mathcal{T}$ wyróżniamy podzbiór $\mathcal{D}_0^{(j)} \subset \mathcal{D}$ wszystkich takich rozkładów $D_i \in \mathcal{D}$, dla których brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej $\mathcal{H}_0^{(i,j)}$. Można tutaj śmiało przypuszczać, że istnieją takie zbiory $\mathcal{D}_0^{(j)}$ zawierające więcej niż jeden rozkład. Przykłady takich zbiorów możemy znaleźć w pracy Szczepaniaka [2000]. Lektura literatury przedmiotu upoważnia nas też do przyjęcia założenia, że co najmniej jeden zbiór $\mathcal{D}_0^{(j)}$ jest różny od zbioru pustego.

Przeprowadzone obserwacje szeregów czasowych stóp zwrotu nie pozwalają na przyjęcie założenia o całkowitej niewiedzy na temat badanego zjawiska. Oznacza to, że przy doborze typu rozkładu stopy zwrotu nie możemy skorzystać z zasady Walda totalnej ignorancji. Zatem podejmując statystyczne badania empirycznych właściwości stopy zwrotu, stajemy przed koniecznością wskazania typu rozkładu stopy zwrotu. Naturalne jest, że w przedziale czasowym T_j wybór tego rozkładu ograniczamy do rozkładów pochodzących ze zbioru $\mathcal{D}_0^{(j)}$. W ten sposób każdy rozkład D_j pochodzący ze zbioru $\mathcal{D}_0^{(j)}$ traktujemy jako rozkład dopuszczalny. Nie można jednak wykluczyć, że spełniony jest tutaj warunek

$$\exists(j,k): \qquad j \neq k \Rightarrow \mathcal{D}_0^{(j)} \neq \mathcal{D}_0^{(k)}. \tag{3.26}$$

W tej sytuacji zbiór $\mathcal{D}_0^{(j)}$ traktujemy, jako j-tą obserwację podzbioru rozkładów dopuszczalnych. Przeanalizujmy teraz zdanie:

$$\textit{Rozkład } D_i \textit{ jest rozkładem dopuszczalnym.} \tag{3.27}$$

Jeśli warunek (3.26) jest spełniony, to wartość logiczną powyższego zdania można ocenić jedynie z punktu widzenia logiki wielowartościowej. Bez utraty ogólności rozważań można tutaj przyjąć, że stopień prawdziwości zdania (3.27) jest równy częstości f_i zaliczenia rozkładu D_i do zbioru $\mathcal{D}_0^{(j)}$, to jest częstości braku podstaw do odrzucenia hipotezy $\mathcal{H}_0^{(i,j)}$ w kolejnych przedziałach T_j. Częstość jest określona przez identyczność

$$f_i = \frac{\operatorname{card}\left\{T_j : D_i \in \mathcal{D}_o^{(j)}\right\}}{m}. \tag{3.28}$$

W ten sposób funkcja $\mu_D : \mathcal{D} \to [0, 1]$ określona za pomocą tożsamości

$$\mu_D(D_i) = f_i \tag{3.29}$$

jest funkcją przynależności rozmytego podzbioru $\tilde{\mathcal{D}}_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ rozkładów dopuszczalnych. Zauważmy tutaj, że częstości f_i nie określają rozkładu prawdopodobieństwa nad zbiorem $\mathcal{D}$ rozpatrywanych rozkładów prawdopodobieństwa. Tym samym zostały wyczerpane możliwości zastosowania analizy probabilistycznej do wnioskowania o zbiorze rozpatrywanych rozkładów.

Jakości informacji reprezentowanych przez podzbiór rozkładów dopuszczalnych $\tilde{\mathcal{D}}_0$ będziemy oceniać z punktu widzenia jej nieprecyzji. Zgodnie z opisem przedstawionym w podrozdziale 2.1.2, w obrazie nieprecyzji informacji wyróżniamy niewyrazistość informacji oraz niejednoznaczność informacji. Niewyrazistość informacji oceniamy za pomocą miary entropowej tutaj danej przez zależność

$$e(\tilde{\mathcal{D}}_0) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \min\left\{f_i, 1 - f_i\right\}. \tag{3.30}$$

Pożądane jest oczywiście korzystanie z informacji o możliwie niskiej entropii. Niejednoznaczność informacji oceniamy za pomocą miary energetycznej opisanej tutaj przez zależność

$$d(\tilde{\mathcal{D}}_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i. \tag{3.31}$$

Pożądane jest korzystanie z informacji o możliwie niskiej energii. Zastosowanie tych kryteriów pozwoli na wybór zbioru rozkładów dopuszczalnych spośród takich zbiorów uzyskanych za pomocą różnych testów statystycznych.

3.2.2. Studium przypadku

Opisane tutaj badanie empiryczne zostało przedstawione w pracy Piaseckiego i Tomasika [2008]. Głównym przedmiotem naszego badania jest pochodzący z przedziału czasu od 17.11.1995 do 16.11.2007 szereg czasowy kolejnych dobowych logarytmicznych stóp zwrotu z notowań spółki BRE. Ten okres badań podzielono na następujące roczne podprzedziały obserwacji:

- T_1 – okres od 17.11.1995 do 16.11.1996,
- T_2 – okres od 17.11.1996 do 16.11.1997,
- T_3 – okres od 17.11.1997 do 16.11.1998,
- T_4 – okres od 17.11.1998 do 16.11.1999,
- T_5 – okres od 17.11.1999 do 16.11.2000,
- T_6 – okres od 17.11.2000 do 16.11.2001,
- T_7 – okres od 17.11.2001 do 16.11.2002,
- T_8 – okres od 17.11.2002 do 16.11.2003,
- T_9 – okres od 17.11.2003 do 16.11.2004,
- T_{10} – okres od 17.11.1004 do 16.11.2005,
- T_{11} – okres od 17.11.2005 do 16.11.2006,
- T_{12} – okres od 17.11.2006 do 16.11.2007.

Punktem wyjścia do tego podziału przedziału czasowego obserwacji jest data 17.11.2000. W tym dniu wprowadzono na warszawskiej GPW system WARSET. Wydarzenie to w znaczący sposób wpłynęło na zachowania inwestorów, a co za tym idzie, także na rozkłady stóp zwrotu.

Proponując w studium przypadku podział na przedziały obserwacji $T_j \in \mathcal{T}$, pominięto problem identyfikacji stanów hossy, stagnacji i bessy. Zrobiono to z premedytacją, gdyż stosowanie narzędzi prognostycznych odrębnych dla poszczególnych rodzajów trendu jest zawsze obarczone błędem prognozy przyszłych tendencji na rynku finansowym. Ponadto w pracy Piaseckiego [2009] pokazano, że wyodrębnienie rodzaju trendu może pogorszyć precyzję formułowanych wniosków. Fakt ten pokazuje, że dostępna prognoza trendu rynku wcale nie musi podnosić precyzji stawianych prognoz rynkowych.

Do zbioru $\mathcal{D}$ rozpatrywanych rozkładów prawdopodobieństwa zaliczymy następujące rozkłady:

- D_1 – rozkład normalny,
- D_2 – rozkład α-stabilny,
- D_3 – rozkład hiperboliczny,
- D_4 – rozkład uogólniony hiperboliczny,
- D_5 – rozkład NIG,
- D_6 – rozkład VG,
- D_7 – rozkład skośny t-Studenta,
- D_8 – rozkład t-Studenta,
- D_9 – rozkład GED.

Do weryfikacji każdej hipotezy zerowej $\mathcal{H}_0^{(i,j)}$, której przeciwstawiono hipotezę alternatywną $\mathcal{H}_1^{(i,j)}$, zastosowano kolejno testy χ^2 i Kołmogorowa. Hipotezę zerową każdorazowo weryfikowano na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Wyniki testu hipotezy o rozkładzie stóp zwrotu

Okres obserwacji	Test χ^2									Test Kołmogorowa								
	Typ rozkładu									Typ rozkładu								
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
T_1		■	■		■		■	■	■									
T_2	■	■	■	■	■		■		■	■			■	■		■		
T_3	■	■	■	■	■		■		■	■	■	■	■	■	■	■		■
T_4		■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	■		■
T_5	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	■		■
T_6	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	■		■
T_7		■	■	■	■		■	■	■		■	■	■	■		■		■
T_8		■	■	■	■		■	■	■		■	■	■	■		■	■	■
T_9		■	■		■		■	■	■	■	■	■		■		■	■	■
T_{10}	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
T_{11}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	■		■
T_{12}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	■		■

Legenda: ■ – brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Źródło: Piasecki i Tomasik [2008].

Porównując tutaj wyniki uzyskane za pomocą testu χ^2 i testu Kołmogorowa, widzimy przypadki, w których hipoteza zerowa została odrzucona jedynie za pomocą jednego z tych testów. Są to takie różnice, których nie można uzasadnić różną mocą testu. Fakt ten sygnalizuje potrzebę dyskusji nad kryteriami doboru testu weryfikującego hipotezę zerową o rozkładzie stóp zwrotu. Uderzające jest, że przy zastosowaniu testu Kołmogorowa zostały odrzucone wszystkie hipotezy zerowe dla okresu T_1 od 17.11.1995 do 16.11.1996. Oznacza to brak możliwości wskazania rozkładu stopy zwrotu. Wydaje się, że z takim zjawiskiem możemy mieć do czynienia w przypadku młodych rynków wschodzących. Przeprowadzone obliczenia potwierdzają też słuszność przyjęcia założenia (3.26).

Korzystając z danych zebranych w tabeli 3.1 oraz z zależności (3.28)–(3.31), wyznaczamy dla każdego testu funkcję przynależności rozmytego podzbioru rozkładów dopuszczalnych oraz entropię i energię tego zbioru. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Rozmyte podzbiory rozkładów dopuszczalnych

Test	Stopnie przynależności									Entropia	Energia
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9		
χ^2	0,58	1,00	1,00	0,83	1,00	0,50	1,00	0,42	1,00	3,00	7,33
Kołmogorowa	0,75	0,83	0,83	0,83	0,92	0,58	0,92	0,25	0,83	3,50	6,75

Ź r ó d ł o : Piasecki i Tomasik [2008].

Wyniki obliczeń zebrane w tabelach pozwalają stwierdzić, że przy zastosowaniu testu χ^2 uzyskaliśmy informację bardziej wyrazistą niż w wypadku stosowania testu Kołmogorowa. Z kolei za pomocą testu Kołmogorowa otrzymaliśmy informację bardziej jednoznaczną niż za pomocą testu χ^2. Brak jednak tutaj jakichkolwiek przesłanek, aby móc to spostrzeżenie uogólnić.

W badaniu statystycznym zastosowano poziom istotności $\alpha = 0{,}05$. Ten poziom jest najwyższym ze stosowanych w praktyce ekonometrii. Zastosowanie niższego poziomu istotności powodowało jedynie nieuzasadniony wzrost niejednoznaczności informacji o dopuszczalnym rozkładzie stopy zwrotu. Należy jednak rozważyć i prześledzić skutki dalszego podnoszenia wartości poziomu istotności, tym bardziej że wtedy będzie malał błąd II rodzaju. W omawianym badaniu empirycznym malenie błędu II rodzaju oznacza malenie błędu zaakceptowania niewłaściwego rozkładu stóp zwrotu.

Jesteśmy w studiowanym przypadku bardzo odlegli od jednoznacznego wskazania „dopuszczalnych" rozkładów stopy zwrotu. Zatem kategoryczna generalizacja historyczna nie jest możliwa.

3.2.3. Behawioralny wybór rozkładu stopy zwrotu

Pomimo przedstawionych powyżej pesymistycznych wniosków, rozpatrywane studium przypadku prowadzi do pewnych konstruktywnych ustaleń. W każdym wierszu tabeli 3.2 obserwujemy rozmyty podzbiór $\tilde{\mathcal{D}}_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ dopuszczalnych rozkładów badanej stopy zwrotu. Stwierdzony w studium przypadku brak wyrazistego rozgraniczenia pomiędzy rozkładami dopuszczalnymi a pozostałymi w pełni uzasadnia to podejście. Wskazuje to na możliwość wykorzystania metod rozmytej matematyki finansowej do zarządzania rynkiem finansowym.

Przystępując do oszacowania parametrów stopy zwrotu, analityk finansowy musi na wstępie określić typ rozkładu prawdopodobieństwa tej stopy. Naturalne tutaj jest, że wybór ten pozostaje ograniczony do zbioru rozkładów dopuszczalnych. Zbiór ten jednak jest nieprecyzyjnie wyróżniony. Analityk finansowy jest świadomy, że postać zbioru rozkładów dopuszczalnych jest obarczona błędem II rodzaju. W tej sytuacji ostateczny wybór rozkładu jest wyborem w dużej mierze subiektywnym. Pozwala to zaklasyfikować zadanie wyboru postaci rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu jako wydarzenie o podłożu behawioralnym. Przeanalizujmy wartość logiczną zdania:

Rozkład D_i jest wybrany jako rozkład stopy zwrotu. (3.32)

Jedyną racjonalną przesłanką tego wyboru może być tutaj wartość logiczna zdania (3.27). Wiadomo też, że przynajmniej jeden rozkład musi zostać wybrany. Odzwierciedleniem tych spostrzeżeń jest przyjęcie założeń:

- wartość logiczna zdania (3.32) rośnie wraz z wartością logiczną zdania (3.27);
- jest pewne, że zostaną wybrane te rozkłady D_i, dla których zdanie (3.27) jest najbliższe prawdzie.

Przy powyższych założeniach, bez utraty ogólności, wartość logiczną zdania (3.32) można określić za pomocą wartości

$$\mu_G(d_i) = g_i = \frac{f_i}{\max\limits_j \left\{ f_j \right\}}.$$

Funkcja μ_D: $\mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności rozmytego podzbioru $\tilde{\mathcal{G}}_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ wybranych rozkładów prawdopodobieństwa. Niewyrazistość informacji opisanej przez ten zbiór oceniamy za pomocą miary entropowej danej przez zależność

$$e\left(\tilde{\mathcal{G}}_0\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \min\left\{ g_i, 1 - g_i \right\}.$$

Niejednoznaczność informacji oceniamy za pomocą miary energetycznej opisanej tutaj przez zależność

$$d\left(\tilde{\mathcal{G}}_0\right) = \frac{d\left(\tilde{D}_0\right)}{\max\limits_j \left\{f_j\right\}} = \sum_{i=1}^{n} g_i \geq d\left(\tilde{D}_0\right).$$

Ostatni wynik oznacza, że pojęcie „wybrany rozkład" jest nie mniej wieloznaczne niż pojęcie „rozkład dopuszczalny". Dowodzi to w niezbity sposób behawioralnego charakteru dokonanego wyboru.

Powróćmy na chwilę do studium przypadku opisanego w poprzednim podrozdziale. Kontynuując tamte obliczenia, wyznaczamy funkcje przynależności zbiorów wybranych rozkładów oraz charakterystyki nieprecyzji tych zbiorów. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 3.3.

Tabela 3.3. Rozmyte podzbiory wybranych rozkładów

Test	Stopnie przynależności									Entropia	Energia
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9		
χ^2	0,58	1,00	1,00	0,83	1,00	0,50	1,00	0,42	1,00	3,00	7,33
Kołmogorowa	0,82	0,90	0,90	0,90	1,00	0,63	1,00	0,27	0,90	2,44	7,34

Źródło: Obliczenia własne.

Nad zbiorem zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega\}$ określamy ustaloną stopę zwrotu $r : \Omega \to \mathbb{R}$. Ta stopa zwrotu wyznacza w zbiorze zdarzeń elementarnych ciało zdarzeń losowych

$$\varsigma = r^{-1}(\mathbb{B}), \tag{3.33}$$

gdzie symbol $\mathbb{B}$ oznacza ciało Borela na prostej rzeczywistej. Każdy z rozkładów D_i określa w ten sposób przestrzeń probabilistyczną (Ω, ς, D_i). Wobec zależności (3.33) każdą taką przestrzeń można identyfikować z parą

$$(D_i, \Omega) \equiv \left\{(D_i, \omega) : \omega \in \Omega\right\}.$$

Dzięki temu wybrany sposób oceny prawdopodobieństwa można przedstawić jako zbiór

$$\left\{(D_i, \Omega) : D_i \in \tilde{\mathcal{G}}_0\right\} = \left\{(D_i, \omega) : D_i \in \tilde{\mathcal{G}}_0, \omega \in \Omega\right\} = \tilde{\mathcal{G}}_0 \times \Omega = \tilde{\mathcal{H}}.$$

Wyznaczony powyżej produkt kartezjański jest zbiorem Hiroto $\tilde{\mathcal{H}}$ wyznaczonym przez swą funkcje przynależności $\mu_H : \tilde{\mathcal{G}}_0 \times \Omega \to [0,1]$. Wspomniana funkcja przynależności określona jest przez tożsamość

$$\mu_H(D_i, \omega) = g_i.$$

Opisany powyżej zbiór Hiroto opisuje wszystkie zebrane informacje o rozkładach stopy zwrotu. Opis ten w wyraźny sposób ujmuje brak możliwości dokonania kategorycznej generalizacji historycznej. W ten sposób odrzuca jeden z elementów idealizacji każdej teorii opartej na faktach empirycznych. Oznacza to, że zaproponowany model oceny rozkładu prawdopodobieństwa przybliża nas do rzeczywistego stanu rzeczy. Dzięki temu stosowanie zbioru $\tilde{\mathcal{G}}_0$ wybranych rozkładów czyni nasze wnioskowanie bardziej wiarygodnym, co wpływa na podniesienie wiarygodności uzyskiwanych tą drogą wniosków. Ten wzrost jakości stawianych wniosków ma jednak swoją cenę. Tą ceną jest utrata precyzji sformułowanych wniosków.

3.2.4. Wpływ behawioralnego wyboru rozkładów na ocenę stopy zwrotu

Rozważamy stopę zwrotu $r: \Omega \to \mathbb{R}$. Każdy z jej rozkładów D_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) jest tutaj opisany przez swą dystrybuantę $F_i: \mathbb{R} \to [0, 1]$. Ułatwi to rozwiązanie problemu wyznaczenia parametru

$$\mathcal{Y} = E\big(f(r)\big)$$

rozkładu stopy zwrotu. Jeśli parametr ten istnieje dla ustalonego rozkładu $D_i \in \mathcal{D}$, to zapisujemy go w postaci

$$Y_i = E\big(f(r)\big|D_i\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF_i(x). \tag{3.34}$$

Rozważmy teraz parametr $E\big(f(r)\big|\tilde{\mathcal{G}}_0\big)$ określony dla zbioru wybranych rozkładów. Wartość tego estymatora przedstawiamy jako zbiór rozmyty $\tilde{Y} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ opisany za pomocą funkcji przynależności $\mu_Y: \mathbb{R} \to [0, 1]$ określonej przez tożsamość

$$\mu_Y(x) = \max\{0, g_i : Y_i = x\}.$$

Opisany powyżej estymator rozmyty jest przybliżeniem liczby rzeczywistej w rozumieniu podanym w podrozdziale 2.1.3. Funkcja przynależności (3.34) opisuje rozkład oczekiwań estymatora parametru $\mathcal{Y}$. Istnieją zatem formalne podstawy na to, aby zbiór Hiroto wybranych rozkładów mógł zostać zastosowany w zadaniach analizy stopy zwrotu.

Najpierw zajmijmy się tutaj problemem wyznaczenia warunkowej oczekiwanej stopy zwrotu

$$\mathcal{E}(r) = E\left(r \middle| \tilde{\mathcal{G}}_0\right).$$

Zgodnie z opisaną powyżej procedurą rozkład oczekiwań tego parametru jest opisany przez tożsamość

$$\rho(x) = \max\{0, g_i : R_i = x\}, \tag{3.35}$$

gdzie

$$R_i = E\left(r \middle| D_i\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_i(x).$$

Ten rozkład oczekiwań wyznacza przybliżenie $\tilde{E}(r)$ oczekiwanej stopy zwrotu. Nośnikiem tego przybliżenia jest zbiór

$$\left\|\tilde{E}(r)\right\| = \left\{x \in \mathbb{R} : x = R_i,\ \ g_i > 0\right\}.$$

Zauważmy tutaj, że nośnik $\left\|\tilde{E}(r)\right\|$ przybliżenia oczekiwanej stopy zwrotu może być mniej liczny niż nośnik $\left\|\tilde{\mathcal{G}}_0\right\|$ zbioru wybranych rozkładów. Dzieje się tak wtedy, gdy ta sama wartość zostanie przypisana warunkowym stopom oczekiwanym wyznaczonym przez różne rozkłady. Przybliżenie wartości oczekiwanej stopy zwrotu można wówczas opisać za pomocą skończonego zbioru

$$\left\{\left(x, \rho(x)\right) : x \in \left\|\tilde{E}(r)\right\|\right\}.$$

Ostatecznie, zgodnie z (2.30), oczekiwaną stopę zwrotu $E(r)$ wyznaczamy, korzystając z zależności

$$E(r) = \left(\sum_{x \in \left\|\tilde{E}(r)\right\|} \rho(x)\right)^{-1} \cdot \sum_{x \in \left\|\tilde{E}(r)\right\|} x\rho(x).$$

W kolejnym kroku zajmijmy się problemem wyznaczenia warunkowej wariancji stopy zwrotu

$$S^2(r) = E\left(\left(r - E(r)\right)^2 \middle| \tilde{\mathcal{G}}_0\right).$$

Zgodnie z opisaną powyżej procedurą, rozkład oczekiwań tego parametru jest opisany przez tożsamość

$$\varsigma(x) = \max\left\{0,\ g_i : S_i^2 = x\right\},$$

gdzie

$$S_i^2 = E\left(\left(r - E(r)\right)^2 \middle| D_i\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r - E(r)\right)^2 dF_i(x).$$

Jeśli dla pewnych rozkładów F_i nie istnieje wariancja, to takie rozkłady zastępujemy rozkładami obustronnie obciętymi, dla których wariancja zawsze istnieje. Postępowanie takie znajduje swe uzasadnienie w teorii perspektywy [Kahneman i Tversky 1979], która między innymi odwołuje się do behawioralnego zjawiska odrzucania skrajnych możliwości.

Ten rozkład oczekiwań wyznacza przybliżenie $\tilde{S}(r)$ wariancji stopy zwrotu. Nośnikiem tego przybliżenia jest zbiór

$$\left\|\tilde{S}(r)\right\| = \left\{x \in \mathbb{R} : x = S_i^2,\ \ g_i > 0\right\}.$$

Zauważmy tutaj, że nośnik $\left\|\tilde{S}(r)\right\|$ przybliżenia wariancji stopy zwrotu może być mniej liczny niż nośnik $\left\|\tilde{\mathcal{G}}_0\right\|$ zbioru wybranych rozkładów. Dzieje się tak wtedy, gdy ta sama wartość zostanie przypisana warunkowym stopom oczekiwanym wyznaczonym przez różne rozkłady. Dodatkowo możemy się tutaj spotkać z sytuacją, w której zbiory $\left\|\tilde{E}(r)\right\|$ i $\left\|\tilde{S}(r)\right\|$ będą miały różną liczbę elementów. Przybliżenie wartości oczekiwanej stopy zwrotu można wtedy opisać za pomocą skończonego zbioru

$$\left\{\left(x, \varsigma(r)\right) : x \in \left\|\tilde{S}(r)\right\|\right\}.$$

Ostatecznie, zgodnie z (2.32), wariancję stopy zwrotu $S^2(r)$ wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\sigma^2 = S^2(r) = \left(\sum_{x \in \left\|\tilde{S}(r)\right\|} \varsigma(x)\right)^{-1} \cdot \sum_{x \in \left\|\tilde{S}(r)\right\|} x\varsigma(x). \tag{3.36}$$

Literatura

Barberis N., Shleifer A., Vishny R., 1998, *A model of investor sentiment*, Journal of Financial Economics 49.

Buckley I.J., 1987, *The fuzzy mathematics of finance*, Fuzzy Sets and Systems 21.

Calzi M.L., 1990, *Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance*, Fuzzy Sets and Systems 35.

Czerwiński Z., 1976, *Przyczynek do dyskusji nad jakością modelu ekonometrycznego*, Przegląd Statystyczny nr 4.

Dacey R., Zielonka P., 2008, *A detailed prospect theory explanation of the disposition effect*, Journal of Behavioral Finance vol. 9, no. 1.

Daniel K., Hirshleifer D., Subrahmanyam A, 2001, *Overconfidence, arbitrage and equilibrium asset pricing*, Journal of Finance 53/6.

Eberlein E., Keller U., 1994, *Hyperbolic distributions in finance*, Bernoulli 1.

Echaust K., Tomasik, E., 2008, *Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa w modelowaniu empirycznych stóp zwrotu akcji notowanych na GPW w Warszawie*, Zeszyty Naukowe nr 104, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Edwards W., 1968, *Conservatism in human information processing*, w: Klienmutz B. (ed.) *Formal representation of human judgment*, Wiley, New York.

Fama E., 1965, *The behavior of stock market prices*, Journal of Business, 38.

Fang Yong, Lai Kin Keung, Wang Shouyang, 2008, *Fuzzy portfolio optimization. Theory and methods*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 609. Springer, Berlin.

Hong H., Stein J., 1999, *A unified theory of under reaction, momentum trading and over reaction in asset market*, Journal of Finance 54/6.

Jajuga K., 2000, *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław.

Kahneman D., Tversky A., 1979, *Prospect theory: An analysis of decision under risk*, Econometrica 47.

Klir G.J., 1993, *Developments in uncertainty-based information*, w: Yovits M. (ed), *Advances in Computers*, vol. 36.

Łażewski M., 2007, *Zastosowanie α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa do analizy danych finansowych o wysokiej częstotliwości*, rozprawa doktorska, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.

Mandelbrot B., 1964, *The variation of certain speculative process*, w: Cootner P.H. (red.), *The random character of stock market prices*, MIT Press, Cambridge, MA.

Ostasiewicz W., 1986, *Zastosowanie zbiorów rozmytych w ekonomii*, PWN, Warszawa.

Piasecki K., 1990, *Decyzje i wiarygodne prognozy*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej S. II, z. 106, Poznań.

Piasecki K., 2007a, *Trójwymiarowy obraz ryzyka*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 450, Szczecin.

Piasecki K., 2007b, *Obraz ryzyka w rozmytych przestrzeniach probabilistycznych*, w: Chrzan P. (red.), *Matematyczne i ekonometryczne metody oceny ryzyka finansowego*, Wydawnictwa Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.

Piasecki K., 2007c, *Rozmyta efektywność portfela*, w: Chrzan P. (red.), *Metody matematyczne, ekonometryczne, i komputerowe w finansach i ubezpieczeniach*, Wydawnictwa Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
Piasecki K., 2009, *O sposobie poszukiwania dobrej metody inwestowania na giełdzie*. w: Hozer J., (red.) *Metody ilościowe w ekonomii*, Uniwersytet Szczeciński, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 11, Szczecin.
Piasecki K., Tomasik E., 2008, *O sposobie nieprecyzyjnego określenia rozkładu stopy zwrotu*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 9.
Piasecki K., Tomasik E., 2011, *Return Rates of WIG20 Index in the Situation of Extreme Tide Turning on the Warsaw Stock Exchange*, European Finance eJournal 5.
Pring M.J., 1999, *Psychologia inwestowania. Klasyczne strategie osiągania sukcesów na giełdzie*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa.
Purczyński J., 2002, *Estymacja parametrów rozkładu GED*, w: Tarczyński W. (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
Rokita P., 2000, *Próba estymacji VaR na rynku polskim*, w: Tarczyński W. (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
Szczepaniak W., 2000, *Zastosowanie rozkładów stabilnych i hiperbolicznych do aproksymacji rozkładów stóp zwrotu GPW w Warszawie*, Materiały konferencyjne XXXVII Konferencji Ekonometryków, Statystyków i Matematyków Polski Południowej, Ustroń.
Tarczyński W., Mojsiewicz M., 2001, *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa.
Tomasik E., 2008, *Rozkłady prawdopodobieństwa stop zwrotu indeksów i akcji notowanych na GPW w Warszawie*, w: Ostasiewicz W. (red.), *Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
Tomasik E., 2009, *Homogeneity hypothesis for tail index of return rate distributions*, w: Chrzan P., Czernik T., (red.), *Innowacje w finansach i ubezpieczeniach. Metody Matematyczne, ekonometryczne i informatyczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
Tomasik E., Winkler-Drews T., 2009, *Rozkłady stabilny, uogólniony Pareto oraz t-Studenta w modelowaniu dziennych stóp zwrotu indeksu WIG20*, w: Chrzan P., Czernik T. (red.), *Innowacje w finansach i ubezpieczeniach. metody matematyczne, ekonometryczne i informatyczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
Tversky A., Kahneman D., 1974, *Availability: A heuristic for judging frequency and probability*, Cognitive Psychology 5.
Winkler-Drews T., 2009, *Zarządzanie ryzykiem zmiany ceny*, PWE Warszawa.
Witkowska D., Kompa K., 2007, *Analiza własności stóp zwrotu akcji wybranych spółek*, w: Tarczyński W. (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.

Rozdział 4

INSTRUMENTY FINANSOWE OBARCZONE RYZYKIEM NIEPEWNOŚCI I RYZYKIEM NIEPRECYZJI

Podstawowym instrumentem finansowym nazywamy dowolny papier wartościowy stanowiący odrębny przedmiot obrotu na giełdzie papierów wartościowych. Wspólną nazwą instrument finansowy będziemy określać zarówno dowolny podstawowy instrument finansowy, jak i portfel złożony z instrumentów finansowych. W klasycznych teoriach rynku finansowego, opartych jedynie na racjonalnych przesłankach, eksponowane jest ryzyko niepewności obarczające poszczególne instrumenty finansowe. W teoriach tych dowolny instrument finansowy jest na ogół reprezentowany przez parę uporządkowaną składającą się z oczekiwanej stopy zwrotu i jej wariancji[1]. Oczekiwana stopa zwrotu reprezentuje tutaj względne korzyści osiągane przez posiadacza instrumentu finansowego. Wariancja natomiast jest oceną ryzyka niepewności. Na gruncie tych teorii powstało wiele precyzyjnie sformułowanych kryteriów optymalizacji decyzji inwestycyjnych. Stosowanie tych kryteriów jest odzwierciedleniem tych racjonalnych przesłanek, którymi się kierują inwestorzy w swej działalności na rynkach finansowych. Trudno jest sobie wyobrazić, że inwestor zabiegający o własne korzyści i bezpieczeństwo swojego majątku całkowicie zrezygnuje z racjonalnego podejścia do procesu inwestycyjnego. W tej sytuacji można śmiało założyć, że w każdym wieloaspektowym modelu finansów behawioralnych należy te racjonalne i precyzyjne kryteria uwzględniać. Takie też podejście będzie zastosowane w tym rozdziale, w którym racjonalne aspekty podejmowania decyzji inwestycyjnych będą reprezentowane przez dobrze znane z literatury przedmiotu kryteria zarządzania portfelem.

W rozdziale 3 zaproponowano odzwierciedlenie behawioralnych aspektów inwestowania za pomocą nieprecyzyjnego oszacowania oczekiwanej stopy zwrotu.

[1] Jeśli dla danego rozkładu stopy zwrotu nie istnieje wariancja, to konsekwentnie zastępujemy go innym parametrem rozproszenia istniejącym dla danego rozkładu.

W każdym z rozważanych tam studiów przypadku rozkład oczekiwań stopy zwrotu był wyznaczany za pomocą zbioru Hiroto obrazującego splot ryzyka niepewności z ryzykiem nieprecyzji. Opisywane ryzyko nieprecyzji było implikowane przez wybrane behawioralne przesłanki procesu inwestycyjnego. W tej sytuacji behawioralne aspekty podejmowania decyzji inwestycyjnych będą reprezentowane przez nieprecyzyjne oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu. We wszystkich rozważanych w tym rozdziale modelach rynku finansowego dowolny instrument finansowy będzie reprezentowany przez parę uporządkowaną składającą się z nieprecyzyjnie oszacowanej oczekiwanej stopy zwrotu i wariancji.

4.1. Trójwymiarowy obraz ryzyka

W rozdziale 3 oczekiwaną stopę zwrotu rozpatrywanego instrumentu finansowego przedstawiono jako oszacowanie nieprecyzyjne $\tilde{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ nazywane dalej rozmytą oczekiwaną stopą zwrotu. Rozmytą oczekiwaną stopę zwrotu nazywać też będziemy w skrócie przybliżoną rentownością. Przybliżona rentowność $\tilde{R}$ jest reprezentowana przez swoją funkcję przynależności $\rho \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ nazywaną również rozkładem oczekiwań rentowności. W omawianych rozdziale 3 studiach przypadku ten rozkład oczekiwań został określony przez zależność (3.24) lub (3.35). Stąd wiemy, że przybliżona rentowność reprezentuje zarówno racjonalne, jak i behawioralne aspekty podejścia do problemu oszacowania spodziewanych korzyści. Jako ocenę ryzyka niepewności wskazano tam wariancję stopy zwrotu σ^2. W omawianych w rozdziale 3 studiach przypadku wariancja ta została określona przez zależność (3.25) lub (3.36). Szczegółowa analiza tych zależności dowodzi, że wyznaczona w ten sposób wariancja opisuje równocześnie racjonalne i behawioralne aspekty oceny bezpieczeństwa zainwestowanego kapitału.

W klasycznej teorii Markowitza [1952] normatywną strategią inwestowania jest maksymalizacja oczekiwanej stopy $\overline{r}$ przy równoczesnej minimalizacji wariancji stopy zwrotu σ^2. W tej sytuacji dowolny podstawowy instrument finansowy jest tam reprezentowany przez parę $(\overline{r}, \sigma^2)$. Para ta reprezentuje jedynie racjonalne przesłanki oceny instrumentu finansowego. W tym rozdziale ten obraz podstawowego instrumentu finansowego zastąpimy przez parę $(\tilde{R}, \sigma^2)$ uwzględniającą również behawioralne aspekty podejmowania decyzji inwestycyjnych. W ten sposób podnosimy wartość poznawczą opisu instrumentu finansowego. Ten przyrost użyteczności tego opisu ma jednak swoją cenę. Jest nią ujawnienia ryzyka nieprecyzji obarczającego rozważany instrument. Na to ryzyko składają się ryzyko wieloznaczności i ryzyko niewyrazistości.

Zgodnie z sugestią daną w podrozdziale 2.1.2 ryzyko wieloznaczności będziemy oceniać za pomocą miary energetycznej $d(\tilde{R})$ przybliżonej rentowności $\tilde{R}$

określonej przez zależność (2.11). W przypadku dowolnej miary energetycznej interesuje nas tylko porządek wyznaczony przez wartości tej miary. W tej sytuacji, bez utraty ogólności dalszego rozumowania, możemy przyjąć, że występująca w zależności (2.11) funkcja f: $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje postać określoną przez tożsamość[2]

$$f(x) = \frac{x}{1+x}. \tag{4.1}$$

W przypadku ciągłego nośnika $\|\tilde{R}\|$ miarę energetyczną przybliżonej rentowności wyznaczamy, stosując zależność

$$d(\tilde{R}) = \left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx\right)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Jeśli nośnik $\|\tilde{R}\|$ przybliżonej rentowności jest zbiorem dyskretnym, to wymaganą miarę energetyczną wyznaczamy, korzystając z zależności

$$d(\tilde{R}) = \left(1 + \sum_{x \in \|\tilde{R}\|} \rho(x)\right)^{-1} \cdot \sum_{x \in \|\tilde{R}\|} \rho(x). \tag{4.3}$$

Miary energetyczne można porównywać jedynie wtedy, gdy reprezentują przybliżone rentowności o identycznych właściwościach formalnych.

Zgodnie z sugestią daną w podrozdziale 2.1.2, ryzyko niewyrazistości będziemy oceniać za pomocą miary entropii $e(\tilde{R})$ przybliżonej rentowności określonej przez zależność (2.15). Także w przypadku dowolnej miary entropii interesuje nas jedynie porządek wyznaczony przez wartości tej miary. W tej sytuacji, bez utraty ogólności dalszego rozumowania, możemy przyjąć, że występująca w zależności (2.15) funkcja f: $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje postać określoną przez tożsamość (4.1). W przypadku ciągłego nośnika $\|\tilde{R}\|$ miarę entropii przybliżonej rentowności wyznaczamy, stosując zależność

$$e(\tilde{R}) = \left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \min\left\{\rho(x), 1-\rho(x)\right\} dx\right)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \min\left\{\rho(x), 1-\rho(x)\right\} dx. \tag{4.4}$$

[2] Ponownie korzystamy tutaj z zaprezentowanej już w tej książce koncepcji stosowania unormowanej metryki.

Jeśli nośnik $\|\tilde{R}\|$ przybliżonej rentowności jest zbiorem dyskretnym, to wymaganą miarę entropii wyznaczamy, korzystając z zależności

$$e(\tilde{R}) = \left(1 + \sum_{x \in \|\tilde{R}\|} \min\left\{\rho(x), 1-\rho(x)\right\}\right)^{-1} \cdot \sum_{x \in \|\tilde{R}\|} \min\left\{\rho(x), 1-\rho(x)\right\}. \tag{4.5}$$

Miary entropii można porównywać jedynie wtedy, gdy reprezentują przybliżone rentowności o identycznych właściwościach formalnych.

W tej sytuacji każdej przybliżonej rentowności $\tilde{R}$ przyporządkowujemy trójwymiarowy wektor $(\sigma^2, \delta, \varepsilon)$, gdzie

$$\delta = d(\tilde{R}), \tag{4.6}$$

$$\varepsilon = e(\tilde{R}). \tag{4.7}$$

Wektor ten jest obrazem ryzyka rozumianego jako złożenie ryzyka niepewności, ryzyka niejednoznaczności i ryzyka niewyrazistości. Ryzyko niepewności jest odzwierciedleniem braku wiedzy inwestora o przyszłych stanach rynku finansowego. Brak tej wiedzy powoduje brak pewności inwestora co do przeszłych zysków lub strat. Własności tego ryzyka znajdują bogate omówienie w literaturze przedmiotu.

Tutaj ten klasyczny obraz ryzyka obarczającego instrument finansowy poszerzyliśmy o ryzyko nieprecyzji. Powstaje pytanie, czy z punktu widzenia potrzeb procesów inwestycyjnych jest to ryzyko istotne.

Na ryzyko nieprecyzji składają się ryzyko niejednoznaczności i ryzyko niewyrazistości. Inwestor część odpowiedzialności za podejmowane przez siebie inwestycje przerzuca na doradców lub na stosowane narzędzia analityczne. Z tego powodu inwestor w znakomitej części ogranicza swoje wybory decyzji inwestycyjnych do alternatyw rekomendowanych przez doradców lub stosowane instrumentarium analityczne. W ten sposób minimalizuje ryzyko osobistej odpowiedzialności za podjętą decyzję finansową[3].

Wzrost ryzyka wieloznaczności oznacza, że wzrastać będzie liczba alternatywnych rekomendacji inwestycyjnych. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych alternatyw takiej decyzji finansowej, która *ex post* zostanie obarczona stratą utraconych szans.

Wzrost ryzyka niewyrazistości oznacza zacieranie się granic wyróżniających rekomendowane alternatywy inwestycyjne. W ten sposób wzrastają szanse wyboru alternatywy nierekomendowanej; wzrost ryzyka niewyrazistości wpływa na przyrost istotnego ryzyka osobistej odpowiedzialności inwestora.

[3] Szerzej ten problem został opisany w pracach Piaseckiego [1988, 1990].

Powyższe spostrzeżenia dowodzą, że wzrost ryzyka nieprecyzji pogarsza w zauważalny sposób warunki inwestowania. Można więc ryzyko nieprecyzji uznać za istotne ryzyko obarczające proces inwestycyjny.

Jeśli obrazem podstawowego instrumentu finansowego będzie para $(\tilde{R}, \sigma^2)$, to ryzyko nieprecyzji będzie opisane jedynie *implicite*, jako właściwości rozkładu oczekiwań rentowności. Ryzyko niepewności i ryzyko nieprecyzji obarczające podstawowy instrument finansowy są pokazane *explicite* w trójwymiarowym obrazie ryzyka $(\sigma^2, \delta, \varepsilon)$. Wtedy obrazem tego instrumentu finansowego będzie para $(\tilde{R}, (\sigma^2, \delta, \varepsilon))$. Wobec zależności (4.6) i (4.7), obie wymienione w tym akapicie pary uporządkowane są równoważne, co zapisujemy

$$(\tilde{R}, \sigma^2) \equiv (\tilde{R}, (\sigma^2, \delta, \varepsilon)).$$

Posługiwanie się trójwymiarowym obrazem ryzyka $(\sigma^2, \delta, \varepsilon)$ ułatwia zarządzanie ryzykiem nieprecyzji. Pożądana tutaj jest minimalizacja każdej z trzech ocen ryzyka. Korzystanie z trójwymiarowego obrazu ryzyka umożliwia śledzenie wzajemnych relacji pomiędzy poszczególnymi jego rodzajami. W pierwszym rzędzie można tutaj obserwować empiryczne interakcje pomiędzy rodzajami ryzyka. Istnieje też współzależność formalna pomiędzy ryzykiem niepewności a ryzykiem wieloznaczności. Wraz ze wzrostem ryzyka wieloznaczności rośnie stopień rekomendacji poszczególnych alternatyw inwestycyjnych. Dzięki temu przyrasta liczba rekomendowanych alternatyw inwestycyjnych. W ten sposób staje się coraz bardziej pewne, że pomiędzy rekomendowanymi alternatywami jest decyzja inwestycyjna najlepsza *ex post*. Oznacza to, że spada ryzyko niepewności. Reasumując, ryzyko niepewności i ryzyko nieprecyzji są skorelowane ujemnie.

W porównaniu z klasyczną teorią Markowicza nieprecyzja jest nowym aspektem oceny ryzyka. Powstaje tutaj natychmiast kolejne pytanie, czy takie poszerzenie oceny ryzyka jest celowe. Za uwzględnieniem w badaniu ryzyka nieprecyzji przemawiają następujące trzy argumenty.

Primo, jak już pokazano, zawsze istnieje możliwość ograniczenia ryzyka niepewności prognozy poprzez odpowiednie manipulacje obniżające precyzję prognozy.

Secundo, uwzględnienie ryzyka nieprecyzji pozwoli odrzucać te spośród wariantów inwestycyjnych, które co prawda są atrakcyjne z punktu widzenia klasycznej teorii Markowitza, ale, niestety, informacje zebrane na ich temat są mocno wieloznaczne. Innymi słowy, proponowany w tej pracy trójwymiarowy obraz ryzyka pozwala odrzucać warianty inwestycyjne dające prawie pewne wysokie zarobki w sytuacji, gdy tak naprawdę nasza wiedza na temat tych wariantów jest niewiele warta.

Tertio, z punktu widzenia klasycznej teorii Markowitza i jej implikowanych teorii, w praktyce rynków finansowych spotykamy się z wieloma anomaliami. Dostrzeganie tych paradoksów stało się punktem wyjścia do rozwoju finansów behawioralnych. W dalszej części tego rozdziału pokażemy, w jaki sposób uwzględnianie ryzyka nieprecyzji prowadzi do teorii normatywnych wyjaśniających paradoksy rynkowe.

Udokumentowane powyżej istotność i celowość wyeksponowania ryzyka nieprecyzji są niewątpliwymi zaletami zaproponowanego uogólnienia teorii Markowitza. Zalety te mają jednak swoją cenę. Principium oryginalnej teorii Markowitza jest przyjęcie założenia o normalności rozkładu stóp zwrotu poszczególnych podstawowych instrumentów finansowych. Założona normalność jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wariancję stopy zwrotu z portfela przedstawić, jako pewną wartość formy kwadratowej określonej przez macierz kowariancji. Z kolei wyniki badań empirycznych dają podstawę do powszechnego kwestionowania uniwersalizmu założenia o normalności rozkładów stop zwrotu[4]. W tej sytuacji brak możliwości analitycznego wyznaczenia wariancji portfela nie jest ceną dotkliwą.

Powyżej przedstawiliśmy trójwymiarowy obraz ryzyka obarczającego pojedynczy podstawowy instrument finansowy. Klasyczna teoria portfelowa Markowitza daje formalne podstawy do zarządzania portfelem takich instrumentów. Rodzi to pytanie, jakimi możliwościami zarządzania portfelem dysponujemy w wypadku zastąpienia oczekiwanej stopy zwrotu $\overline{r}$ przez przybliżenie rentowności $\tilde{R}$. W akapicie powyżej stwierdziliśmy już brak możliwości wyznaczenia wariancji stopy zwrotu z portfela jako funkcji macierzy kowariancji stóp zwrotu ze składników tego portfela. Wtedy wariancję portfela możemy wyznaczyć jedynie z właściwości stopy zwrotu opisanych we właściwym studium przypadku.

Natomiast do oszacowania przybliżonej rentowności i ocen ryzyka niepewności portfela instrumentów finansowych wystarczą prezentowane w tym rozdziale informacje o przybliżeniach rentowności poszczególnych składników tego portfela. Składniki te możemy przedstawić jako ciąg podstawowych instrumentów finansowych $\left\{\breve{Z}_i\right\}_{i=1}^{n}$. Przybliżona rentowność instrumentu finansowego $\breve{Z}_i$ jest dana jako nieprecyzyjne oszacowanie $\tilde{R}_j \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentowane przez swój rozkład oczekiwań $\rho_i \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$. Bieżąca wartość rynkowa instrumentu finansowego $\breve{Z}_i$ zgromadzonego w portfelu Π wynosi c_i. Wtedy łączna wartość portfela jest równa

$$c_{\Pi} = \sum_{i=1}^{n} c_i > 0.$$

Wtedy udział p_i wartości składnika $\breve{Z}_i$ w wartości portfela Π jest określony przez zależność

$$p_i = \frac{c_i}{c_{\Pi}}.$$

[4] Problem ten został szerzej przedstawiony w podrozdziale 3.2.

Wszystkie te informacje pozwalają wyznaczyć rozkład $\rho_\Pi \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ oczekiwań rentowności portfela Π. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha ten rozkład oczekiwań jest wyznaczony za pomocą tożsamości

$$\rho_\Pi(z) = \sup\left\{0, \min\left\{\rho_i(x_i) : i = 1, 2, \ldots, n\right\} : z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\}.$$

Wyznaczony w ten sposób rozkład oczekiwań wyznacza przybliżoną rentowność $\tilde{R}_j \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ portfela Π. Ryzyko wieloznaczności obarczające portfel Π określamy, wyznaczając za pomocą zależności (4.2) lub (4.3) miarę energetyczną $d(\tilde{R}_\Pi)$. Podobnie ryzyko niewyrazistości obarczające portfel oceniamy, stosując zależności (4.4) lub (4.5) do wyznaczenia miary entropii $e(\tilde{R}_\Pi)$.

W ten sposób zostało dowiedzione, że zgromadzone w tym podrozdziale instrumentarium formalne pozwala na bezpośrednie zarządzanie stopą zwrotu obarczoną ryzykiem nieprecyzji. Z innej strony zarządzanie ryzykiem niepewności wymaga odwołania się do specyficznych właściwości modelu nieprecyzji rozmytej oczekiwanej stopy zwrotu. Wobec zróżnicowania przykładów takich modeli rozpatrywanych w rozdziale 3, trudno jest tutaj oczekiwać jakichś uniwersalnych zależności wyznaczających wariancję portfela.

4.2. Efektywność finansowa

Efektywny jest instrument finansowy o ustalonej wariancji i maksymalnej oczekiwanej stopie zwrotu. W klasycznej teorii portfelowej Markowitza, zakładającej normalność rozkładów stóp zwrotu, zbiór efektywnych instrumentów finansowych jest dany jako górna gałąź krzywej Markowitza. Gałąź tę nazywamy krzywą efektywnych instrumentów finansowych.

Zbiór efektywnych instrumentów finansowych można też określić za pomocą aparatu formalnego porównań wielokryterialnych. Korzystając z tego ujęcia, będzie można zrezygnować z założenia o normalności rozkładów stóp zwrotu. Stosując to podejście, określamy dwa preporządki na zbiorze wszystkich instrumentów finansowych. Preporządki te to kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu i kryterium minimalizacji wariancji. Zbiorem efektywnych instrumentów nazywamy optimum Pareto określone dla porównania wielokryterialnego zdefiniowanego przez wymienione wyżej preporządki. Jeśli dodatkowo założymy tutaj normalność rozkładów stóp zwrotu, to zbiór efektywnych instrumentów finansowych pokrywa się z górną gałęzią krzywej Markowitza. Oznacza to, że zbiór efektywnych instrumentów finansowych jest uogólnieniem pojęcia krzywej efektywnych instrumentów zdefiniowanej na gruncie klasycznej teorii Markowitza.

4.2.1. Rozmyta efektywność instrumentów finansowych

Inwestowanie w efektywny instrument finansowy oznacza inwestowanie w instrument finansowy gwarantujący maksymalne zyski przy minimalnym zagrożeniu utraty zainwestowanego kapitału lub jego części. Jest to standardowy cel inwestorski w normatywnych teoriach rynków finansowych. Rodzi to pewne trudności aplikacyjne, gdyż inwestorzy inwestują na ogół w instrumenty finansowe leżące poza zbiorem instrumentów efektywnych, a więc z punktu widzenia tych teorii inwestują w nieefektywne instrumenty finansowe. Równocześnie jako swój normatywny cel inwestorzy ci deklarują inwestowanie w efektywne instrumenty finansowe. W ten sposób ujawnia się jeden z realnych paradoksów rynków finansowych.

Wyjaśnieniem masowości występowania tego paradoksu nie może być brak wystarczającej wiedzy o zachodzących rzeczywistych procesach na rynkach finansowych i w otoczeniu gospodarczym. Postępująca profesjonalizacja działalności inwestorskiej i szybki rozwój informatyki sprawiają, że pełnym dostępem do informacji rynkowej i umiejętnością jej właściwego przetworzenia dysponują inwestorzy zarządzający zdecydowaną większością wolumenu obrotów na tym rynku.

W tej sytuacji wytłumaczeniem tego paradoksu może być przypuszczenie, że inwestorzy – deklarujący normatywny zamiar inwestowania w efektywne instrumenty finansowe – równocześnie inwestują w instrumenty finansowe w pewnym sensie podobne do efektywnych instrumentów finansowych. Możemy tutaj mówić o stopniu efektywności poszczególnych instrumentów finansowych równym stopniowi ich podobieństwa do efektywnego instrumentu finansowego. W praktyce oznacza to, że prawie każdy dostępny na rynku instrument finansowy jest w pewnym stopniu efektywnym instrumentem finansowym. Z kolei nieefektywny instrument finansowy w naturalny sposób przestaje być przedmiotem obrotu na giełdzie. Wszystko to razem wyjaśnia paradoks rozbieżności pomiędzy normatywnym celem inwestorskim a rzeczywistym celem strategii inwestycyjnej. Inwestorzy zawsze działają w mniej lub bardziej efektywny sposób.

W dalszej części tego podrozdziału zostanie przedstawiona teoria normatywna zawierająca opis służący wyjaśnieniu takiego sposobu działania inwestorów.

Symbolem $\mathbb{Y}$ oznaczamy zbiór wszystkich instrumentów finansowych. Instrument finansowy $\breve{Y} \in \mathbb{Y}$ jest reprezentowany przez parę

$$\breve{Y} \equiv \left(\tilde{R}_Y, (\sigma_Y^2, \delta_Y, \varepsilon_Y) \right),$$

gdzie:

$\tilde{R}_Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ – przybliżona rentowność instrumentu finansowego $\breve{Y}$ określona przez rozkład oczekiwań rentowności $\rho_Y \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$,

σ_Y^2 – wariancja stopy zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}$,

δ_Y – miara energetyczna przybliżonej rentowności instrumentu finansowego $\breve{Y}$ wyznaczona za pomocą zależności

$$\delta_Y = d(\tilde{R}_Y),$$

ε_Y – miara entropii przybliżonej rentowności instrumentu finansowego $\breve{Y}$ wyznaczona za pomocą zależności

$$\varepsilon = e(\tilde{R}_Y).$$

Na wstępie, korzystając z zależności (2.22), relację $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(\mathbb{Y} \times \mathbb{Y})$ definiujemy w następujący sposób:

Przybliżona rentowność $\tilde{R}_Y$ instrumentu finansowego $\breve{Y}$ jest większa równa od przybliżonej rentowności $\tilde{R}_Z$ instrumentu finansowego $\breve{Z}$, (4.8)

co zapisujemy $\tilde{R}_Y \succcurlyeq \tilde{R}_Z$. Relacja $\mathcal{Q}$ jest rozmytą relacją preporządku określoną przez swą funkcję przynależności ν_Q: $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$. Dla dowolnych przybliżonych rentowności $\tilde{R}_Y$, $\tilde{R}_Z \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ wspomniana funkcja przynależności jest reprezentowana przez zależność

$$\nu_Q\left(\tilde{R}_Y, \tilde{R}_Z\right) = \sup\left\{\min\left\{\rho_Y(u), \rho_Z(v)\right\} : u \geq v\right\}.$$

W następnym kroku wyznaczmy porównanie wielokryterialne określone przez kryterium (4.8) maksymalizacji przybliżonej rentowności i kryterium minimalizacji wariancji. Powstałą w ten sposób relację opisujemy za pomocą funkcji zdaniowej

Instrument finansowy $\breve{Y}$ jest nie mniej efektywny niż instrument finansowy $\breve{Z}$, (4.9)

co zapisujemy $\breve{Y} \sqsupseteq \breve{Z}$. W sposób formalny to porównanie wielokryterialne jest określone przez równoważność

$$\breve{Y} \sqsupseteq \breve{Z} \Leftrightarrow \tilde{R}_Y \succcurlyeq \tilde{R}_Z \wedge \sigma_Y \leq \sigma_Z. \tag{4.10}$$

W tej sytuacji relacja $\mathcal{W}$ jest rozmytą relacją preporządku określoną przez swą funkcję przynależności ν_W: $\mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \to [0, 1]$. Dla dowolnej pary instrumentów finansowych $\breve{Y}$, $\breve{Z} \in \mathbb{Y}$ wspomniana funkcja przynależności jest reprezentowana przez zależność

$$\nu_W(\breve{Y}, \breve{Z}) = \begin{cases} \nu_Q(\tilde{R}_Y, \tilde{R}_Z) & \text{dla} \quad \sigma_Y \le \sigma_Z, \\ 0 & \text{dla} \quad \sigma_Y > \sigma_Z. \end{cases}$$

Zbiór $\tilde{\Phi}$ efektywnych instrumentów finansowych jest identyczny z optimum Pareto wyznaczonym przez porównanie wielokryterialne (4.10). W tej sytuacji zbiór $\tilde{\Phi}$ efektywnych instrumentów finansowych definiujemy jako rozmyty zbiór elementów maksymalnych relacji (4.9). Zgodnie z zależnością (2.27), zbiór $\tilde{\Phi}$ efektywnych instrumentów finansowych jest reprezentowany przez swą funkcję przynależności φ: $\mathbb{Y} \to [0, 1]$ określoną przez tożsamość

$$\varphi(\tilde{Y}) = \inf\left\{\max\left\{\nu_W(\tilde{Y}, \tilde{Z}), 1 - \nu_W(\tilde{Z}, \tilde{Y})\right\} : \tilde{Z} \in \mathbb{Y}\right\}.$$

Wartość $\varphi(\breve{Y})$ jest interpretowana jako wartość logiczna zdania:

Instrument finansowy $\breve{Y}$ jest efektywny. (4.11)

W ten sposób pokazaliśmy, jak opisane w rozdziale 3 behawioralne przesłanki podejmowania decyzji inwestycyjnych przekształciliśmy do stwierdzenia podobieństwa poszczególnych instrumentów finansowych do instrumentów efektywnych. Rezultat ten został uzyskany z pominięciem założenia o normalności rozkładu stóp zwrotu. Zaprezentowana tutaj teoria normatywna wyjaśnia, że paradoks rozbieżności pomiędzy normatywnym celem inwestorskim a rzeczywistym celem strategii inwestycyjnej jest implikowany behawioralnymi aspektami postrzegania rynku finansowego. Każdy paradoks wyjaśniony staje się paradoksem pozornym. Przedstawienie formalnej teorii umożliwiającej oszacowanie wartość logicznej zdania (4.11) pozwala na pewną kontrolę nad wyborem instrumentów finansowych podobnych do efektywnych. Jest to pierwszy efekt aplikacyjny prezentowanej w tej książce teorii. Do wątków aplikacyjnych powrócimy w dalszych częściach tego elaboratu.

Opisaliśmy powyżej przypadek, w którym inwestor wyznacza efektywne instrumenty finansowe, biorąc pod uwagę jedynie ryzyko niepewności. Teraz uwagę naszą skupimy na wyznaczeniu zbioru ściśle efektywnych instrumentów finansowych w sposób uwzględniający równocześnie ryzyko niepewności i nieprecyzji. Zbiór taki będziemy definiować jako optimum Pareto określone dla porównania czterokryterialnego $\mathcal{L} \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ zdefiniowanego przez kryterium (4.8) maksymalizacji przybliżonej rentowności i kryteria minimalizacji miar ryzyka. Powstałą w ten sposób relację opisujemy za pomocą funkcji zdaniowej

Instrument finansowy $\breve{Y}$ jest nie mniej dokładnie
efektywny niż instrument finansowy $\breve{Z}$, (4.12)

co zapisujemy $\breve{Y} \sqsupseteq \breve{Z}$. W sposób formalny to porównanie wielokryterialne jest określone przez równoważność

$$\breve{Y} \sqsupseteq \breve{Z} \Leftrightarrow \tilde{R}_Y \succcurlyeq \tilde{R}_Z \wedge \sigma_Y \leq \sigma_Z \wedge \delta_Y \leq \delta_Z \wedge \varepsilon_Y \leq \varepsilon_Z. \tag{4.13}$$

W tej sytuacji relacja $\mathcal{L}$ jest rozmytą relacją preporządku określoną przez swą funkcję przynależności $\nu_L : \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1]$. Dla dowolnej pary instrumentów finansowych $\breve{Y}, \breve{Z} \in \mathbb{Y}$ wspomniana funkcja przynależności jest reprezentowana przez zależność

$$\nu_L(\breve{Y}, \breve{Z}) = \begin{cases} \nu_Q(\tilde{R}_Y, \tilde{R}_Z), & \sigma_Y \leq \sigma_Z \wedge \delta_Y \leq \delta_Z \wedge \varepsilon_Y \leq \varepsilon_Z, \\ 0, & \sim(\sigma_Y \leq \sigma_Z \wedge \delta_Y \leq \delta_Z \wedge \varepsilon_Y \leq \varepsilon_Z). \end{cases}$$

Zbiór $\tilde{\Psi}$ ściśle efektywnych instrumentów finansowych jest identyczny z optimum Pareto wyznaczonym przez porównanie wielokryterialne (4.13). W tej sytuacji zbiór $\tilde{\Psi}$ ściśle efektywnych instrumentów finansowych definiujemy jako rozmyty zbiór elementów maksymalnych relacji (4.12). Zgodnie z zależnością (2.27), zbiór $\tilde{\Psi}$ efektywnych instrumentów finansowych jest reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\psi : \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1]$ określoną przez tożsamość

$$\psi(\tilde{Y}) = \inf\left\{\max\left\{\nu_L(\tilde{Y}, \tilde{Z}), 1 - \nu_L(\tilde{Z}, \tilde{Y})\right\} : \tilde{Z} \in \mathbb{Y}\right\}.$$

Wartość $\varphi(\breve{Y})$ jest interpretowana jako wartość logiczna zdania:

Instrument finansowy $\breve{Y}$ *jest* ściśle *efektywny.*

Zdeklarowanie zamiaru inwestowania jedynie w ściśle efektywne instrumenty finansowe może zostać uznane za normatywny cel inwestorski. Stosowanie tej strategii prowadzi do odrzucania takich alternatyw inwestycyjnych, które co prawda są atrakcyjne z punktu widzenia klasycznej teorii Markowitza, ale, niestety, informacje zebrane na ich temat są mało precyzyjne.

Inwestor, podejmując decyzje o zakupie lub sprzedaży instrumentu finansowego $\breve{Y}$, może się kierować wartościami $\varphi(\breve{Y})$ i $\psi(\breve{Y})$. Każdy inwestor powinien ograniczyć obszar swoich inwestycji do instrumentów finansowych charakteryzujących się względnie dużą wartością tych wskaźników. Powinien też ograniczyć sprzedaż własnych aktywów finansowych do tych, dla których wymienione w tym akapicie wskaźniki osiągają niskie wartości. Zainicjowane w rozdziale 3 rozważania pozwalają przypuszczać, że poszczególni inwestorzy w danym momencie będą się posługiwali różnymi wartościami tych wskaźników. Zróżnicowanie to wynika ze zróżnicowania subiektywnych, behawioralnych przesłanek podejmowania decyzji inwestycyjnych.

Stosowanie przedstawionego powyżej normatywnego modelu efektywnych instrumentów finansowych niesie duże utrudnienia. Głównym utrudnieniem jest wysoka złożoność formalna i obliczeniowa zadania wyznaczania wartości $\varphi(\breve{Y})$ i $\psi(\breve{Y})$. W tej sytuacji przedstawiony powyżej model normatywny można uznać jedynie za dowód na istnienie nieprecyzyjnie określonego zbioru efektywnych instrumentów finansowych. Złożoność obliczeniowa modelu normatywnego jest ceną, jaką płacimy za brak założeń szczegółowych specyfikujących model stopy zwrotu, to jest za niską złożoność logiczną tego modelu. Niska złożoność logiczna jest jednak jego zaletą i z tej przyczyny model normatywny jest wart dalszych studiów.

Problem wyznaczenia funkcji przynależności zbioru efektywnych instrumentów finansowych będzie też rozstrzygany na gruncie ekonometrycznej analizy rynków finansowych. Przykłady takich rozstrzygnięć zostaną przedstawione w kolejnych podrozdziałach.

4.2.2. Efektywność instrumentów finansowych – ujęcie ekonometryczne

Podstawowym źródłem informacji o rynku są dane empiryczne. Specyficzne instrumentarium formalne służące do analizy tych danych jest określane w literaturze przedmiotu, jako ekonometria rynków finansowych[5]. Jednym z istotnych problemów, przed którym staje tutaj badacz, jest orzeczenie, czy w danym momencie dany instrument finansowy jest efektywny w rozumieniu podanym w klasycznej teorii Markowitza. Poniżej zostanie przedstawione pewne rozwiązanie tego problemu.

Dany rynek finansowy jest opisany przez skończony zbiór instrumentów finansowych

$$\mathbb{Y} = \{\breve{Y}_j : j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Założenie o skończonej liczbie elementów powyższego zbioru jest zgodne z rzeczywistym obrazem rynku finansowego, gdyż zawsze obserwujemy na nim skończoną liczbę instrumentów finansowych.

Weźmy teraz pod uwagę pojedynczego inwestora inwestującego na tym rynku. Zakładamy, że jego oczekiwania są jednorodne. Oznacza to, że z punktu widzenia rozpatrywanego inwestora wszystkie instrumenty finansowe mają identyczny termin wykupu $t = T > 0$.

W momencie czasowym $t = 0$ każdy instrument finansowy $\breve{Y}_j$ jest scharakteryzowany przez oczekiwaną stopę zwrotu *ex ante* r_j^a i wariancję *ex ante* σ_j^2. Pomijamy tutaj problem statystycznej procedury wyznaczania tych wartości.

Jak już stwierdziliśmy, para (r_j^a, σ_j^2) charakteryzuje instrument finansowy $\breve{Y}_j$ w momencie $t = 0$ zainwestowania w ten portfel. Z momentem tym niezaprze-

[5] Obszernie omówili tę problematykę Franke, Härdle i Hafner [2011].

czalnie łączy się koszt ponoszony przez inwestora. Koszt ten jest identyfikowany z ryzykiem obciążającym ten portfel. Ryzyko jest oceniane w momencie $t = 0$ za pomocą wariancji *ex ante* σ_j^2. Postulat minimalizacji kosztów inwestycji prowadzi do określenia na zbiorze instrumentów finansowych preporządku $\succcurlyeq_\sigma \subset \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ zdefiniowanego przez tożsamość

$$\breve{Y}_j \succcurlyeq_\sigma \breve{Y}_k \Leftrightarrow \sigma_j^2 \leq \sigma_k^2. \tag{4.14}$$

Zapis $\breve{Y}_j \succcurlyeq_\sigma \breve{Y}_k$ czytamy: z punktu widzenia oceny ryzyka instrument finansowy $\breve{Y}_j$ jest nie gorszy od instrumentu $\breve{Y}_k$.

Należy też pamiętać, że oczekiwana stopa zwrotu *ex ante* r_j^a jest jedynie prognozą zysków, jakie może osiągnąć inwestor angażujący w instrument finansowy $\breve{Y}_j$ swój kapitał. Z oczywistych powodów inwestora interesuje jednak maksymalizacja osiągniętego zysku, a nie maksymalizacja przewidywanego zysku. Osiągnięty zysk możemy ocenić jedynie w momencie wykupu $t = T$. Wtedy zysk ten jest oceniany za pomocą stopy zwrotu *ex post* r_j^p. Można założyć, że oczekiwane stopy zwrotu *ex ante* i stopy zwrotu *ex post* mogą nie być skorelowane dodatnio. Już w następnym podrozdziale hipoteza ta zostanie zweryfikowana z wykorzystaniem empirycznych danych.

Brak dodatniej korelacji pomiędzy stopami zwrotu *ex ante* i *ex post* oznacza, że kryterium maksymalizacji każdej z tych stóp wyznacza odmienne uporządkowanie zbioru instrumentów finansowych. Postulat maksymalizacji uzyskanych zysków z inwestycji prowadzi do określenia na zbiorze instrumentów finansowych preporządku $\succcurlyeq_r \subset \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ zdefiniowanego przez tożsamość

$$\breve{Y}_j \succcurlyeq_r \breve{Y}_k \Leftrightarrow r_j^p \geq r_k^p. \tag{4.15}$$

Zapis $\breve{Y}_j \succcurlyeq_r \breve{Y}_k$ czytamy: z punktu widzenia uzyskanych korzyści instrument finansowy $\breve{Y}_j$ jest nie gorszy od instrumentu $\breve{Y}_k$.

Równoczesne uwzględnienie postulatów minimalizacji kosztów i maksymalizacji zysków prowadzi nas do uznania za efektywny każdego takiego instrumentu finansowego, który jest elementem optimum Pareto $\mathcal{U} \subset \mathbb{Y}$ wyznaczonego przez porównanie wielokryterialne $\succcurlyeq_\sigma \cap \succcurlyeq_r$.

Para (r_j^p, σ_j^2) charakteryzuje instrument finansowy $\breve{Y}_j$ w momencie $t = T$ wykupu tego instrumentu. Zatem jest to ocena *ex post* instrumentu finansowego $\breve{Y}_j$ i nie może służyć podjęciu decyzji inwestycyjnej w momencie $t = T$. W tej sytuacji jedynie wielokrotne wyznaczanie optimum Pareto $\mathcal{U}$ w różnych momentach historii rynku finansowego może pozwolić na wyłonienie takich instrumentów, które możemy uznać za trwale efektywne. Powstaje oczywiście pytanie, czy specyfika rynku finansowego pozwoli w ogóle na taką aplikację zasady generalizacji historycznej. Odpowiedzi na nie będziemy poszukiwali, stosując następująca procedurę badawczą.

Dla określenia efektywności poszczególnych instrumentów finansowych wyznaczamy zbiór momentów czasowych obserwacji

$$\Theta = \{T_k : k = 1, 2, \ldots, l\}.$$

Dla każdego momentu obserwacji $T_k \in \Theta$ określamy podzbiór $\mathbb{Y}_k \subseteq \mathbb{Y}$ instrumentów finansowych obserwowanych w tym czasie. Następnie, na drodze pomiaru, każdemu instrumentowi finansowemu $\breve{Y}_j \in \mathbb{Y}_k$ przyporządkowujemy parę liczb $(R_{j,k}, S_{j,k}) \in \mathbb{R}^2$, gdzie:

- $R_{j,k}$ – obserwowana *ex post* w momencie czasowym $T_{k+1} \in \Theta$ stopa zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}_j \in \mathbb{Y}_k$,
- $S_{j,k}$ – wariancja obserwowanej *ex ante* w momencie czasowym $T_k \in \Theta$ oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}_j \in \mathbb{Y}_k$.

Następnie, korzystając z kryteriów (4.14) i (4.15), dla momentu obserwacji $T_k \in \Theta$ wyznaczamy optimum Pareto $\mathcal{U}_k \subset \mathbb{Y}_k$.

Dla ocenienia wartości logicznej zdania:

$$\textit{Instrument finansowy } \breve{Y}_j \textit{ jest efektywny} \tag{4.16}$$

najpierw wyznaczamy krotność obserwacji tego instrumentu

$$m_j = \operatorname{card}\{T_k \in \Theta : \breve{Y}_j \in \mathbb{Y}_k\}. \tag{4.17}$$

Wartość logiczną $\mu_M(\breve{Y}_j)$ zdania (4.16) wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\mu_M(\breve{Y}_j) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{card}\left\{T_k \in \Theta : \breve{Y}_j \in \mathcal{U}_k\right\}}{m_j} & \text{dla} \quad m_j > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad m_j = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Funkcja μ_M: $\mathbb{Y} \to [0, 1]$ określa rozmyty zbiór efektywnych instrumentów finansowych. Wartości tej funkcji mogą stanowić istotną wskazówkę dla inwestora wybierającego swoje cele inwestycyjne. Praktyczne problemy związane z tym problemem zostaną przybliżone w kolejnych podrozdziałach.

4.2.3. Efektywne strategie inwestowania

Podstawowym problemem, przed którym staje inwestor, jest określenie składu i struktury takiego portfela jego inwestycji, który z punktu widzenia interesów inwestora jest portfelem optymalnym. W teorii i praktyce rynków kapitałowych znajdujemy wiele metod rozwiązania tego problemu. Najbardziej popularną metodą optymalizacji portfela jest reguła Markowitza nakazująca wyznaczać portfel optymalny na drodze maksymalizacji stopy zwrotu przy jednoczesnej minimalizacji wariancji stopy zwrotu. Duże zainteresowanie problematyką inwestowania na rynku kapitałowym powoduje, że dostępne kolekcje metod optymalizacji portfela są coraz bogatsze. Zastosowanie każdej z tych metod daje na ogół inną propozycję takiego portfela, który należałoby uznać za optymalny. To z kolei rodzi następny problem. Inwestor musi sobie odpowiedzieć na pytanie, za pomocą której metody ma określać skład swojego portfela. Wybraną metodę zarządzania portfelem nazywamy strategią inwestowania.

Oczywiste jest, że wybierając właściwą metodę optymalizacji portfela, należy się kierować naczelną regułą finansów: maksymalizacją zysku przy jednoczesnej minimalizacji kosztów. Względną oceną osiągniętego zysku jest stopa zwrotu. Przy takiej ocenie zysku koszt inwestycji należy identyfikować z ryzykiem ponoszonym przez inwestora. Klasyczną względną oceną takiego ryzyka jest wariancja stopy zwrotu. Oznacza to, że także wybierając właściwą metodę optymalizacji portfela, należy się kierować regułą Markowitza. Strategię inwestycyjną gwarantującą maksymalizację stopy zwrotu przy jednoczesnej minimalizacji wariancji nazywamy efektywną stopą zwrotu. Spostrzeżenie to wskazuje na nowy obszar zastosowań reguły Markowitza, która tutaj znajdzie swe zastosowanie przy kreowaniu efektywnej strategii inwestowania. W tym podrozdziale zostanie przedstawiony pewien sposób wyboru efektywnej metody inwestowania.

Każdy rynek finansowy jest określony przez zbiór podstawowych instrumentów finansowych

$$\mathbb{Z} = \{\breve{Z}_i : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Podstawowym instrumentem finansowym nazywamy wszystkie aktywa finansowe mogące być odrębnym przedmiotem obrotu na rynku finansowym. Każdy podstawowy instrument finansowy jest szczególnym przypadkiem instrumentu finansowego. W momencie czasowym $t = 0$ własności zbioru podstawowych instrumentów finansowych są scharakteryzowane przez wektor oczekiwanych stóp zwrotu *ex ante* $\overline{r}^a = (r_1^a, r_2^a, \ldots, r_n^a)^T$ i macierz kowariancji *ex ante* $\underline{\Sigma}$. Wszystkie te stopy zwrotu zostały wyznaczone dla identycznego terminu wykupu $t = T > 0$.

Dowolny instrument finansowy występujący na tym rynku możemy przedstawić jako portfel Π złożony z podstawowych instrumentów finansowych. Bieżąca wartość rynkowa instrumentu finansowego $\breve{Z}_i$ zgromadzonego w portfelu Π wynosi c_i. Wtedy łączna wartość portfela jest równa

$$c_\Pi = \sum_{i=1}^{n} c_i > 0.$$

Wektor $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ udziałów poszczególnych podstawowych instrumentów finansowych $\breve{Z}_i$ w wartości portfela Π jest określony przez zależność

$$p_i = \frac{c_i}{c_\Pi}.$$

Wektor ten w jednoznaczny sposób określa strukturę składu portfela.

Metodą optymalizacji portfela nazywamy dowolną procedurę wyznaczenia struktury składu portfela. Rozważmy dowolny zbiór metod optymalizacji portfela

$$\mathcal{M} = \{M_j : j = 1, 2, \dots, m\}. \tag{4.19}$$

Badanym zbiorem instrumentów finansowych będzie zbiór

$$\mathbb{Y} = \{\breve{Y}_j : j = 1, 2, \dots, m\},$$

gdzie symbol $\breve{Y}_j$ oznaczać będzie portfel wyznaczony przez metodę M_j. Portfel ten będzie charakteryzowany przez wektor udziałów $\overline{p}_j = (p_{1,j}, p_{2,j}, \dots, p_{n,j})^T$. Zmienność w czasie składu każdego z portfeli nie jest przeszkodą w naszym badaniu. Efekty zastosowania tych metod będziemy obserwować w momentach $T_k \in \Theta$. Stosując zależności (4.17) i (4.19), wyznaczamy wartości funkcji $\mu_M(\breve{Y}_j)$. Wartości te możemy interpretować, jako wartości logiczne (4.16). Biorąc jednak pod uwagę cel naszego badania, wartości te interpretujemy jako wartości logiczne równoważnego zdania:

Metoda M_j optymalizacji portfela wyznacza portfele efektywne. (4.20)

Metodę M_j spełniającą warunek (4.20) nazywamy efektywną metodą optymalizacji portfela. Funkcja $\mu_M : \mathbb{Y} \to [0, 1]$ określa rozmyty zbiór efektywnych metod optymalizacji portfela.

Wybraną przez inwestora metodę optymalizacji portfela nazywamy jego strategią inwestycyjną. Wyniki opisanych powyżej badań ułatwią inwestorowi wybór efektywnej strategii inwestowania. W sytuacji, gdy zbiór efektywnych metod optymalizacji jest określony nieprecyzyjnie, ostateczny wybór należy do inwestora. Na inwestorze spoczywa też część odpowiedzialności za ten wybór. Oznacza to, że racjonalne przesłanki nie są wystarczające do podjęcia jednoznacznej decyzji inwestycyjnej. Inwestor, podejmując decyzję, musi się odwołać do behawioralnych aspektów prowadzenia działalności inwestycyjnej.

Praktyczne problemy związane z tym problemem zostaną przybliżone w poniższym studium przypadku. Zostaną tutaj wykorzystane szeregi czasowe notowań na warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych obejmujące okres od stycznia 2000 roku do grudnia 2003 roku. Okres ten podzielono na trzy podokresy odzwierciedlające wszystkie możliwe do zaistnienia główne trendy na giełdzie, to znaczy:

– bessę – od 2 stycznia 2000 roku do 10 sierpnia 2001 roku,
– stagnację – od 10 sierpnia 2001 roku do 25 lipca 2002 roku,
– hossę – od 25 lipca 2002 roku do 30 grudnia 2003 roku.

Niezbędne do dalszych rozważań podstawowe charakterystyki statystyczne tych notowań można znaleźć w pracy Serafina [2005].

Przedmiotem naszej analizy będzie problem wybrania dobrych metod optymalizacji portfela spośród metod opisanych w pracy Juraszek i Sikory [2002]. Inwestor rezygnuje tam z analizy fundamentalnej i z bieżącego śledzenia sytuacji makroekonomicznej. W swoich decyzjach opiera się wyłącznie na szeregach czasowych notowań spółek na warszawskiej GPW. Ze względu na niższe ryzyko specyficzne oraz większą płynność inwestor zamierza konstruować portfele wyłącznie z akcji odnotowywanych w indeksie WIG. W ten sposób została określona zawartość zbioru $\mathbb{Z}$ podstawowych instrumentów finansowych. Skład portfela będzie podlegał weryfikacji i przebudowie raz na miesiąc. Oznacza to, że końce kolejnych miesięcy będą stanowiły kolejne momenty obserwacji $T_k \in \Theta$. W pracy Serafina [2005] każdemu z tych momentów modyfikacji portfela przypisano oczekiwane miesięczne stopy zwrotu *ex ante* z każdej notowanej w WIG akcji oraz ich macierz kowariancji *ex ante*. Miesięczne oczekiwane stopy zwrotu *ex ante* są tam wyznaczane – tak jak u Juraszek i Sikory [2002] – jako średnie arytmetyczne kolejnych miesięcznych stóp zwrotu *ex post* obserwowanych w dwunastu miesiącach poprzedzających moment modyfikacji portfela.

Opiszmy teraz zbiór metod optymalizacji portfela postaci (4.19). Wstępnym etapem każdej z pięciu pierwszych metod jest comiesięczny wybór ze zbioru dwudziestu spółek charakteryzujących się w danym momencie największymi oczekiwanymi stopami zwrotu *ex ante*. Na każdy udział $p_{i,j}$ spółki $\breve{Z}_i$ w wartości tworzonego portfela Π_j narzucone jest wtedy ograniczenie

$$0 \leq p_{i,j} \leq 0{,}2.$$

Wspomniani autorzy badali następujące metody optymalizacji składu portfela:

M_1 – wybierz portfel o maksymalnej stopie zwrotu *ex ante* r_1^a,
M_2 – wybierz portfel o minimalnej stopie zwrotu *ex ante* r_2^a,
M_3 – wybierz portfel o minimalnej wariancji *ex ante* σ_3^2,
M_4 – wybierz portfel o minimalnej wariancji *ex ante* σ_4^2 i o założonej „przeciętnej" stopie zwrotu *ex ante* r_4^a,
M_5 – wybierz portfel o minimalnej wariancji *ex ante* σ_5^2 i o założonej „ponadprzeciętnej" stopie zwrotu *ex ante* r_5^a.

Określone powyżej wartości „przeciętnej" stopy zwrotu *ex ante* r_4^a i „ponadprzeciętnej" stopy zwrotu *ex ante* r_5^a wyznaczmy z zależności:

$$r_4^a = 0{,}5r_{\max} + 0{,}5r_{\min},$$

$$r_5^a = 0{,}75r_{\max} + 0{,}25r_{\min},$$

gdzie:

$r_{\max}$ – stopa zwrotu *ex ante* portfela wyznaczonego za pomocą metody M_1,
$r_{\min}$ – stopa zwrotu *ex ante* portfela wyznaczonego za pomocą metody M_2.

Do zbioru rozpatrywanych metod $\mathcal{M}$ należy ponadto metoda:

M_6 – wybierz portfel o strukturze identycznej ze strukturą portfela określającego WIG.

W pracach Serafina [2005] oraz Piaseckiego, Serafina i Świątczaka [2006] określono dla każdego z tych portfeli w każdym momencie jego modyfikacji stopy zwrotu *ex ante* i *ex post* oraz wariancje *ex ante*. Oceniano łącznie 288 portfeli. Ze względu na szczupłość miejsca, szczegółowe wyniki tej obszernej oceny nie zostały tutaj zaprezentowane. Na wstępie zajmijmy się odpowiedzią na pytanie, czy uporządkowanie wyznaczone przez oczekiwane stopy zwrotu *ex ante* jest trafną prognozą uporządkowania wyznaczonego przez stopy zwrotu *ex post*. W tym celu wyznaczono współczynniki Kendalla korelacji rangowej pomiędzy oboma rodzajami stóp zwrotu. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Współczynniki Kendalla korelacji między stopami zwrotu *ex ante* i *ex post*

Trend rynku	Metoda optymalizacji portfela					
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
Bessa	0,1355	0,0962	0,2382	0,2963	0,1901	0,2143
Stagnacja	–0,0800	–0,6614	–0,4382	–0,2904	–0,1682	–0,2897
Hossa	0,1892	0,0223	0,1036	0,2275	0,1110	0,0242

Źródło: Piasecki [2009].

Następnie, opierając się na tych wynikach, testowano ciąg hipotez zerowych: „Współczynnik korelacji jest równy zeru" przeciwstawionych hipotezom alternatywnym: „Współczynnik korelacji jest dodatni". Za każdym razem stwierdzano brak możliwości odrzucenia hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej. Brak podstaw do stwierdzenia, że porządek wyznaczony przez stopy zwrotu *ex ante* jest godną zaufania prognozą uporządkowania wyznaczonego przez stopy *ex post*. Tym samym została pozytywnie zweryfikowana hipoteza stwierdzająca możliwość braku dodatniej korelacji pomiędzy stopami *ex ante* i *ex post* postawiona w podrozdziale 4.1.

W kolejnym kroku dla każdego założonego momentu obserwacji i modyfikacji portfela wyznaczamy optimum Pareto określone przez kryteria maksymalizacji stopy zwrotu *ex post* i minimalizacji wariancji *ex ante*. W ten sposób dla każdego momentu obserwacji $T_k \in \Theta$ wybieramy *ex post* efektywne metody optymalizacji portfela inwestycyjnego. Rezultaty tych wyborów przedstawiono w tabeli 4.2. Kolejne wiersze odpowiadają kolejnym terminom modyfikacji portfela wyróżnionym w trakcie trwania poszczególnych rodzajów trendu. Łatwo można tam dostrzec brak wyraźnych wskazań efektywnej metody optymalizacji portfela.

Tabela 4.2. Kolejne wybory efektywnych metod optymalizacji portfela

Trend rynku																	
Bessa						Stagnacja						Hossa					
Metoda						Metoda						Metoda					
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
		■	■		■			■					■		■		
■		■	■		■		■	■	■	■			■	■		■	
		■			■			■	■	■	■	■		■	■	■	
		■	■		■			■	■		■		■	■	■	■	■
■		■			■			■						■	■	■	
	■				■			■			■			■		■	
		■			■	■		■	■	■			■	■			
	■				■			■	■				■	■	■		
					■			■			■			■			
		■	■	■	■	■		■		■	■		■	■	■		■
		■			■				■		■	■		■			■
					■		■		■				■			■	■
		■		■		×	×	×	×	×	×		■	■			■
		■	■			×	×	×	×	×	×		■			■	■
		■				×	×	×	×	×	×			■	■		■
	■	■				×	×	×	×	×	×				■	■	■
	■	■			■	×	×	×	×	×	×			■	■	■	■
■		■				×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
■	■			■	■	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Legenda: × – brak obserwacji, ■ – metoda optymalizacji portfela została zaliczona do optimum Pareto.

Źródło: Piasecki [2009].

Z innej jednak strony inwestor, tworząc portfel swoich inwestycji, jest zmuszony wybrać metodę określania struktury portfela tych inwestycji. Przy wyborze może się wtedy kierować częstościami zaliczenia poszczególnych ocenianych metod do optimum Pareto. Stosując metody częściej uznawane za efektywne, zwiększa swą szansę osiągnięcia powodzenia na rynku kapitałowym. Wspomniane częstości przedstawiono w tabeli 4.3. Łatwo można zauważyć, że dla każdego rodzaju trendu częstości te nie stanowią rozkładu prawdopodobieństwa nad zbiorem ocenianych metod $\mathcal{M}$. Oznacza to, że częstości $\mu_M(M_j)$ są wartościami funkcji przynależności rozmytego zbioru efektywnych metod optymalizacji portfela. Zatem uzasadnione jest stosowanie miary energetycznej i miary entropii jako oceny

Tabela 4.3. Częstości zaliczania poszczególnych metod optymalizacji portfela do optimum Pareto

Trend rynku	Metody						Miara energetyczna	Miara entropii
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6		
Bessa	0,21	0,26	0,74	0,26	0,16	0,74	0,70	0,58
Stagnacja	0,17	0,17	0,83	0,58	0,33	0,50	0,72	0,65
Hossa	0,12	0,53	0,76	0,53	0,53	0,53	0,75	0,69
Razem	0,17	0,33	0,77	0,44	0,33	0,60	0,73	0,67

Ź r ó d ł o : Piasecki [2009] oraz obliczenia własne.

nieprecyzji obarczającej te informacje[6]. Wspomniane wartości miary energetycznej i miary entropii dołączono do tabeli 4.3.

Porównanie miar nieprecyzji zestawionych w tabeli 4.3 pozwala na porównanie jakości informacyjnej wskazań doboru efektywnej strategii inwestowania. Szczególnie znamienne jest tutaj porównanie wartości miar nieprecyzji wyznaczonych dla przypadku hossy z wartościami tych miar wyznaczonymi dla przypadku, kiedy nie uwzględniamy rodzaju trendu rynku. Porównanie to pokazuje, że dostępna prognoza trendu rynku nie musi wcale ułatwiać wyboru właściwej metody optymalizacji portfela. Przedstawione w tabeli 4.3 częstości $\mu_M(M_j)$ wyznaczenia przez poszczególne metody efektywnych portfeli w niejednoznaczny sposób wskazują rekomendowaną strategię inwestowania. Zbiór efektywnych metod optymalizacji portfela jest zbiorem rozmytym. Inwestor stoi też przed przymusem jednoznacznego wyboru stosowanej przez siebie strategii inwestowania. Istotną racjonalną przesłanką tego wyboru mogą być wartości funkcji przynależności zbioru efektywnych metod optymalizacji. W rozpatrywanym tutaj studium przypadku wartości najbardziej zachęcają do wyboru metody M_3, minimalizacji wariancji *ex ante*, jako efektywnej strategii inwestowania.

4.2.4. Wybór efektywnych podstawowych instrumentów finansowych

Jak już wskazywaliśmy, normatywnym celem działalności inwestycyjnej jest ograniczenie się do inwestowania w efektywne instrumenty finansowe. Cel ten można zrealizować w bardzo prosty sposób; należy inwestować jedynie w efektywne podstawowe instrumenty finansowe[7] $\breve{Z}_i \in \mathbb{Z}$. Realizacja tego celu wymaga wyróżnienia zbioru takich instrumentów finansowych. Zgodnie z tym, co wykazano

[6] Miara energetyczna i miara entropii zostały szczegółowo omówione w podrozdziale 2.1.2. Szczegółowa postać analityczna stosowanych tutaj miar została przedstawiona za pomocą zależności (4.3) i (4.5).

[7] Jest to konsekwencja twierdzenia o replikacji portfeli efektywnych [Piasecki 2007, s. 246].

w podrozdziale 4.1, zbiór efektywnych podstawowych instrumentów finansowych jest zbiorem rozmytym. Funkcję przynależności tego zbioru wyznaczymy, stosując procedurę opisaną w podrozdziale 4.2.2[8]. Przedstawione też będą predykcyjne właściwości tego modelu.

Istotnym krokiem w zarządzaniu portfelem i równocześnie w minimalizacji kosztów zarządzania portfelem jest zmniejszenie liczby podstawowych instrumentów finansowych mogących wejść w skład zarządzanego portfela. To zmniejszenie liczby instrumentów powinno nastąpić w wyniku wyboru efektywnych podstawowych instrumentów finansowych.

Będziemy rozważać wybór takich podstawowych instrumentów finansowych notowanych na warszawskiej GPW, po których można było się spodziewać, że będą efektywne w pierwszym półroczu 2009 roku. Do zweryfikowania proponowanej metody wyboru dla każdej akcji notowanej na GPW i dla WIG wyznaczono półroczne stopy zwrotu *ex post*.

Jako podstawę do wskazania, jakie instrumenty finansowe mogą być uznane za efektywne, wykorzystamy dane zebrane w drugim półroczu 2008 roku. W tym czasie na GPW w Warszawie było notowanych 478 spółek. Opisaną w podrozdziale 4.2.4 funkcję przynależności zbioru efektywnych podstawowych instrumentów finansowych zamierzamy wykorzystać jako przesłankę do właściwego wyboru spółek efektywnych w pierwszym półroczu 2009 roku.

Oczekiwaną stopę zwrotu *ex ante* będziemy tutaj wyznaczać jako średnią arytmetyczną kolejnych pięciu jednodniowych stóp zwrotu *ex ante*. Pomiędzy badanymi spółkami znalazły się 24 spółki notowane tak rzadko, że w całym półroczu nie można było wyznaczyć pięciu jednodniowych stóp zwrotu *ex ante*. Kolejnymi momentami $T_k \in \Theta$ obserwacji rynku finansowego były kolejne dni notowań. W każdym z tych momentów ocenialiśmy wariancję stopy zwrotu *ex ante* wyznaczoną dla pięciu ostatnich obserwacji jednodniowych stóp zwrotu. Ponadto każdemu z momentów obserwacji T_k przyporządkowaliśmy wyznaczoną w momencie T_{k+1} stopę zwrotu *ex post*. W ten sposób w każdym momencie obserwacji T_k ograniczyliśmy zbiór obserwowanych podstawowych instrumentów finansowych do zbioru $\mathbb{Z}_k \subset \mathbb{Z}$ akcji notowanych równocześnie w terminach T_k i T_{k+1}.

W następnym kroku dla wszystkich podstawowych instrumentów finansowych skupionych w zbiorze $\mathbb{Z}_k$ wyznaczyliśmy optimum Pareto określone przez kryteria maksymalizacji stopy zwrotu *ex post* i minimalizacji wariancji stóp zwrotu *ex ante*. Ostatecznie, porównując skład poszczególnych optimów Pareto, dla każdego podstawowego instrumentu finansowego $\breve{Z}_i \in \mathbb{Z}$ wyznaczono wartość funkcji przynależności $\mu_M(\breve{Z}_i)$. Wartość tę nazywamy stopniem efektywności podstawowego instrumentu finansowego $\breve{Z}_i$. Funkcja $\mu_M : \mathbb{Z} \to [0, 1]$ jest funkcją przynależności rozmytego zbioru efektywnych podstawowych instrumentów finansowych.

[8] Zostanie tutaj wykorzystana część obliczeń wykonanych na rzecz przygotowania publikacji Piaseckiego i Ziomka [2011].

Tabela 4.4. Oceny efektywności spółek z GPW w Warszawie w drugim półroczu 2008

Spółka	Liczba obs.	Stopień efekt.	Stopa zwrotu (%)	Spółka	Liczba obs.	Stopień efekt.	Stopa zwrotu (%)
(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
01NFI	127	0,023622	–2,8	ATLASEST	92	0,01087	69,1
04PRO	127	0,007874	–5,0	ATMGRUPA	103	0,009709	–11,6
05VICT	127	0,007874	–13,2	ATONHT	127	0,047244	–50,3
06MAGNA	127	0,03937	–22,7	ATREM	0	0	98,6
08OCTAVA	127	0,007874	–9,8	AUXILIUM	119	0,016807	29,9
10FOKSAL	127	0,007874	–52,5	AZOTYTARNÓW	122	0	129,5
13FORTUNA	127	0,007874	–4,7	B3SYSTEM	118	0,016949	42,3
14ZACH	127	0,015748	5,9	BAKALLAND	127	0,023622	–32,6
ABMSOLID	105	0,028571	–27,1	BANKBPH	127	0	3,4
ABPL	108	0	113,2	BANKIERPL	124	0,016129	2,6
ACE	117	0,042735	86,8	BARLINEK	127	0,015748	68,2
ACTION	124	0,008065	50,3	BBICAPNFI	127	0	–47,0
ADVADIS	127	0	0,0	BBIDEVNFI	127	0,015748	–2,9
ADVPL	10	0,1	–16,2	BBIZENNFI	127	0,007874	–52,5
AGORA	127	0,015748	–16,1	BEEFSAN	127	0,031496	–10,0
ALCHEMIA	127	0,062992	–21,3	BEST	3	0	–11,1
ALUMAST	50	0,04	–41,7	BETACOM	118	0	–13,0
AMBRA	117	0	79,4	BĘDZIN	12	0	–13,8
AMICA	127	0	–3,1	BIOTON	127	0,015748	18,2
AMPLI	127	0,007874	61,0	BIPROMET	127	0,007874	–10,6
AMREST	127	0,023622	22,2	BLUETAX	111	0,063063	–35,7
ANTI	0	0	0,6	BLUPREIPO	41	0,073171	–28,6
APATOR	125	0,024	67,7	BMPAG	127	0,007874	8,0
APLISENS	0	0	–2,1	BOMI	127	0,023622	24,0
APS	0	0	–5,8	BORYSZEW	127	0,023622	18,9
ARCUS	87	0,022989	–19,7	BOS	76	0,026316	–8,3
ARMATURA	127	0,015748	35,4	BRE	127	0	–17,6
ARTERIA	124	0,008065	135,9	BUDIMEX	127	0,007874	34,8
ARTMAN	74	0,337838	–1,9	BUDOPOL	127	0,03937	22,8
ARTNEWMED	26	0,038462	–48,9	BUDVARCEN	105	0,009524	7,2
ASBIS	62	0,032258	3,1	BUMECH	0	0	–37,2
ASSECOBS	94	0,042553	25,1	BYTOM	127	0,023622	–26,1
ASSECOPOL	127	0,007874	13,9	BZWBK	127	0,015748	–22,7
ASSECOSLO	103	0,029126	75,3	CAMMEDIA	118	0,135593	–33,0
ASTARTA	124	0,008065	79,5	CAPITAL	127	0	58,0
ATLANTA	81	0,012346	48,6	CARBON	15	0	42,9
ATLANTIS	127	0,023622	18,2	CASHFLOW	102	0,029412	–30,7

(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
CCC	108	0,027778	5,7	EFICOM	60	0,033333	2,0
CCINT	111	0,054054	32,8	EKOPOL	22	0	3,1
CEDC	117	0	26,2	ELBUDOWA	112	0,008929	0,0
CENSTALGD	127	0,015748	43,8	ELEKTROTI	121	0,008264	45,7
CENTKLIMA	60	0,116667	73,5	ELKOP	124	0,330645	0,0
CENTROZAP	63	0,047619	37,1	ELSTAROIL	127	0	37,5
CERSANIT	127	0,007874	–24,1	ELZAB	93	0,010753	–7,3
CEZ	127	0	16,5	EMCINSMED	49	0	–10,4
CHEMOS	15	0	–5,9	EMLAB	100	0,05	24,4
CIECH	127	0,015748	10,4	EMONT	0	0	–62,4
CITYINTER	121	0,082645	–50,9	EMPERIA	121	0	3,3
COGNOR	127	0,015748	43,8	EMUZYKA	79	0,012658	1,0
COMARCH	127	0	–1,6	ENAP	118	0,033898	34,2
COMP	127	0,007874	55,1	ENEA	0	0	54,1
COMPLEX	111	0,009009	14,9	ENERGOINS	121	0,008264	111,6
COMPRESS	38	0,263158	–24,7	ENERGOPLD	127	0	61,8
CORMAY	12	0,083333	75,8	ENERGOPN	108	0,018519	62,0
CPENERGIA	127	0,007874	17,3	ENERGOPOL	127	0,015748	7,1
CYFRPLSAT	127	0,007874	9,1	EPIGON	106	0,018868	–23,1
DECORA	127	0,023622	98,2	ERBUD	127	0,015748	67,4
DĘBICA	127	0,047244	42,9	ERG	127	0,007874	118,4
DFP	74	0,108108	–34,2	ERGIS	98	0,020408	108,5
DGA	127	0,007874	68,4	ESSYSTEM	127	0,015748	3,1
DIGITAL	90	0,022222	27,7	EUIMPLANT	118	0,025424	5,5
DIVICOM	105	0,019048	–34,6	EUROCASH	127	0,007874	0,1
DOMDEV	127	0,015748	93,1	EUROFAKTR	124	0,008065	64,7
DOMEXBUD	11	0	11,5	EUROMARK	48	0	47,8
DOMZDROW	1	1	–16,7	EUROTEL	127	0,015748	3,0
DORADCY24	100	0,06	–46,2	FABRDIET	0	0	–11,8
DRĄGOWSKI	46	0	316,1	FAM	127	0	0,9
DREWEX	30	0,033333	35,0	FAMUR	127	0,007874	57,9
DROP	64	0,3125	12,1	FARMACOL	99	0,010101	10,7
DROZAPOL	127	0	–4,5	FASING	124	0,008065	55,5
DUDA	127	0	–9,1	FASTFIN	57	0,105263	–18,4
DZPOLSKA	0	0	47,8	FERRUM	127	0,015748	–31,3
ECARD	127	0,023622	–7,4	FON	127	0,322835	6400,0
ECHO	127	0,007874	26,0	FORTE	121	0,016529	112,5
ECMSA	81	0,037037	3,4	FORTISPL	82	0,012195	46,8
EFEKT	108	0,009259	14,7	FOTA	122	0,008197	45,2
EFH	127	0,023622	–6,5	GANT	127	0,007874	87,5

cd. tab. 4.4

(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
GETIN	127	0	22,8	INTEGERPL	127	0,023622	67,8
GFPREMIUM	99	0,060606	11,2	INTELIWIS	120	0,066667	–19,2
GINOROSSI	127	0,015748	–14,7	INTERCARS	127	0,007874	82,4
GOADVISER	0	0	–20,6	INTERFERI	90	0,033333	–3,8
GPPI	76	0,065789	4,1	INTERNITY	1	1	–23,1
GRAAL	127	0,023622	–15,4	INTERSPPL	87	0,034483	–6,9
GRAJEWO	127	0,007874	43,1	INTROL	118	0,033898	56,5
GRKOŚCIU	102	0,039216	–20,6	INWESTCNN	42	0,047619	–14,5
GROCLIN	127	0,023622	120,0	INWESTCON	124	0,024194	–14,4
GRUPAPSW	10	0,5	–57,1	IPOPEMA	0	0	15,7
GTC	127	0,015748	40,0	IQP	81	0	67,5
HANDLOWY	127	0	0,0	IRENA	118	0,025424	–33,2
HARDEX	105	0,047619	–42,4	IVMX	84	0,011905	52,9
HAVE	127	0,015748	44,5	IZNS	0	0	253,8
HBPOLSKA	127	0,015748	–13,0	IZOLACJA	103	0,009709	124,8
HBWŁOCŁAW	127	0,015748	–13,0	JAGO	127	0,007874	12,4
HELIO	75	0,04	20,9	JUPITER	127	0,015748	9,3
HERMAN	51	0	23,5	JUTRZENKA	127	0,03937	59,7
HOLPLANET	66	0,030303	14,3	JWCONSTR	127	0	141,0
HOOP	102	0,117647	–19,0	K2INTERNT	112	0,214286	–15,5
HOTBLOK	0	0	–6,4	KABLE	125	0,008	30,4
HTLSTREFA	127	0,023622	70,8	KAREN	121	0,008264	54,8
HURTIMEX	26	0,038462	–6,7	KERNEL	124	0,024194	151,8
HUTMEN	127	0,007874	96,1	KĘTY	127	0,007874	25,8
HYDRAPRES	0	0	–14,0	KGHM	127	0	167,2
HYDROTOR	127	0,023622	–3,5	KOELNER	127	0	58,4
HYGIENIKA	127	0,031496	127,7	KOFOLA	102	0,117647	–19,0
HYPERION	127	0,015748	103,8	KOGENERA	127	0,023622	50,5
IDMSA	127	0,007874	17,5	KOLASTYNA	127	0	0,0
IGROUP	124	0,008065	7,4	KOMPAP	127	0,015748	–11,2
IMMOEAST	124	0,032258	224,6	KOMPUTRON	124	0,024194	–7,5
IMPEL	127	0,047244	59,0	KONSSTALI	116	0,017241	1,1
IMPEXMET	127	0,007874	21,4	KOPEX	127	0	61,1
INBOOK	0	0	–16,7	KPPD	94	0,031915	39,4
INDEXCOP	121	0,049587	6,1	KRAKCHEM	105	0,009524	120,9
INDYKPOL	127	0	43,0	KREC	114	0,035088	–6,3
INFOSYS	53	0,018868	–39,5	KREDYTB	127	0	–45,3
INGBSK	127	0,023622	–20,7	KREDYTIN	127	0,023622	–18,8
INSTAL	114	0,008772	22,0	KREZUS	127	0,047244	–5,7
INSTALKRK	123	0,01626	64,0	KROSNO	127	0,007874	–45,2

(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
KRUSZWICA	115	0	9,9	MOSTALPLC	118	0	–4,9
LCCORP	127	0,023622	106,6	MOSTALWAR	127	0,023622	16,5
LENA	127	0,015748	7,0	MOSTALZAB	127	0,007874	55,4
LENTEX	127	0,023622	176,4	MUZA	121	0,033058	16,6
LIBERTY	91	0,032967	7,9	MWTRADE	98	0,030612	–12,6
LOTOS	127	0,015748	62,4	NAFTA	116	0,025862	–23,7
LPP	124	0,008065	–2,1	NEPENTES	127	0,007874	41,2
LSISOFT	121	0,024793	–33,4	NETIA	127	0,055118	43,7
LUBAWA	127	0,007874	12,2	NETMEDIA	124	0,032258	6,5
LUG	62	0	26,0	NEWWORLDR	127	0	23,2
LUSATIA	79	0,139241	–67,1	NFIEMF	127	0,015748	–0,2
LZPS	127	0,007874	29,9	NICOGAMES	71	0,028169	–50,3
MAGELLAN	58	0,017241	89,1	NOBLEBANK	127	0,015748	16,6
MAKARONPL	127	0,023622	95,4	NORDEABP	8	0,125	–5,3
MAKOLAB	127	0,03937	53,6	NORTCOAST	124	0,008065	40,2
MAKRUM	79	0,012658	–8,3	NOVITA	127	0	137,9
MARKETEO	0	0	–9,1	NOVITUS	108	0,018519	14,1
MARSOFT	127	0,023622	47,9	NOWAGALA	127	0,03937	0,0
MARVIPOL	60	0,1	–16,5	NTTSYSTEM	127	0,023622	66,0
MASTERS	127	0,204724	57,1	ODLEWNIE	127	0,015748	–36,5
MAXIPIZZA	73	0	109,3	OLYMPIC	65	0,107692	13,0
MCI	127	0,007874	31,8	ONE2ONE	127	0,007874	51,4
MCLOGIC	125	0,032	75,7	OPONEO	127	0,015748	–30,0
MEDIATEL	121	0,008264	–21,7	OPONEO-PL	127	0,015748	–30,0
MENNICA	92	0,021739	6,6	OPTIMUS	127	0,007874	9,5
MERA	115	0,034783	167,0	OPTOPOL	127	0,015748	18,8
MERCOR	65	0,015385	–8,2	ORBIS	127	0,007874	13,9
MEWA	122	0,590164	0,0	ORCOGROUP	124	0,008065	–18,1
MIDAS	127	0,062992	103,3	ORGANIC	12	0	–46,9
MIESZKO	127	0,015748	19,7	ORIONINV	0	0	–37,5
MILKPOL	6	0	27,3	ORZBIAŁY	127	0,007874	47,0
MILLENNIUM	127	0,015748	2,5	ORZEŁ	127	0,244094	0,0
MINERAL	31	0,096774	72,8	ORZLOPONY	22	0	–30,6
MINI	127	0,047244	40,8	PAGED	127	0,007874	169,0
MIRBUD	0	0	–17,8	PAMAPOL	125	0,008	17,1
MISPOL	118	0,008475	38,9	PANOVA	54	0	–1,5
MMPPL	127	0,047244	–9,7	PBG	127	0,007874	14,6
MOJ	104	0,019231	22,5	PCGUARD	127	0,362205	0,0
MOL	105	0	29,3	PEGAS	115	0	70,7
MONNARI	127	0,007874	–65,1	PEKAES	121	0,016529	11,1
MOSTALEXP	127	0	30,5	PEKAO	127	0,007874	–15,1

cd. tab. 4.4

(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
PEMUG	127	0,055118	–5,7	PUŁAWY	127	0,007874	49,1
PEP	127	0	30,4	PWRMEDIA	74	0,027027	21,8
PEPEES	124	0,008065	43,8	QUANTUM	97	0,041237	12,5
PERFECT	45	0,088889	–80,3	QUERCUS	64	0,0625	42,9
PERMEDIA	113	0,017699	–21,1	QUMAKSEK	102	0,019608	–4,6
PETROLINV	127	0,023622	–2,1	RADPOL	127	0,015748	–10,2
PGF	127	0	5,7	RAFAKO	127	0,007874	165,9
PGNIG	127	0,015748	8,6	RAFAMET	127	0,023622	28,6
PGSSOFT	31	0,032258	76,0	RAINBOW	121	0,016529	–38,4
PHARMENA	22	0,136364	–20,4	RCUNION	66	0,015152	–2,9
PHOTON	17	0,058824	11,0	READGENE	0	0	55,6
PKNORLEN	127	0	–2,6	REDAN	127	0,023622	5,2
PKOBP	127	0	–30,2	REINHOLD	61	0	88,9
PLASTBOX	127	0,023622	73,0	RELPOL	127	0,007874	0,0
PLAZACNTR	127	0	50,0	REMAK	114	0,026316	114,0
POINTGROUP	127	0,023622	–4,3	RESBUD	74	0,013514	33,5
POLAQUA	127	0,007874	26,6	ROCCA	6	0,166667	–26,9
POLCOLOR	124	0	131,3	RODAN	92	0,054348	–8,8
POLCOLORIT	124	0	131,3	RONSON	124	0,008065	78,0
POLICE	127	0	32,5	ROPCZYCE	127	0,023622	53,5
POLIMEXMS	127	0,007874	12,3	RUCH	127	0,023622	0,0
POLLENAE	28	0,035714	–17,5	RUCHCHORZ	11	0	–13,0
POLMAN	29	0,034483	53,8	S4E	82	0,02439	–4,3
POLNA	122	0	38,4	SAKANA	27	0,185185	–50,5
POLNORD	127	0,015748	3,5	SANOK	118	0,016949	32,5
POLREST	124	0,040323	–40,9	SANWIL	127	0,23622	–33,3
PONARFEH	127	0,015748	–13,9	SECOGROUP	101	0,108911	8,5
POSITIVE	1	0	–36,1	SEKO	117	0,068376	46,2
POZBUD	59	0,033898	34,5	SELENAFM	127	0,047244	78,2
PÓŁNOCNR	60	0,1	29,0	SFINKS	124	0,016129	37,6
PPWK	127	0,007874	46,1	SILVANO	69	0,028986	–19,2
PRAGMAINK	65	0,076923	35,6	SIMPLE	104	0,019231	–24,0
PREMFOOD	0	0	–27,6	SKOK	106	0,132075	0,0
PRIMAMODA	109	0,027523	–18,8	SKOTAN	127	0,015748	20,5
PROCAD	127	0,007874	67,1	SKYEUROPE	127	0,015748	–13,3
PROCHEM	119	0,02521	38,9	SKYLINE	127	0,023622	–18,1
PROJPRZEM	127	0,015748	–6,2	SOBIESKI	56	0,017857	60,9
PRONOX	127	0,007874	–18,2	SONEL	11	0,090909	–19,5
PROSPER	124	0,016129	45,2	SPRAY	118	0	30,0
PRÓCHNIK	127	0,007874	–2,0	SSI	124	0,008065	47,8
PTI	0	0	51,3	STALEXP	127	0,007874	–22,0

(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(B)	(C)	(D)
STALPROD	124	0,024194	49,5	UNIMA	67	0,044776	25,4
STALPROFI	127	0,007874	45,5	URLOPYPL	66	0,030303	14,3
STAPORKOW	61	0	–2,6	VARIANT	127	0,015748	25,9
STARKDEV	114	0,166667	50,0	VEDIA	1	0	–8,5
STORMM	127	0,007874	10,2	VENO	108	0,203704	466,7
SUNTECH	39	0,076923	11,9	VERBICOM	45	0	–14,9
SUWARY	90	0,022222	22,0	VIAGUARA	124	0,032258	–5,3
SWARZĘDZ	127	0,015748	–30,8	VICTORIA	63	0,126984	–12,8
SWISSMED	127	0,007874	71,2	VINDEXUS	0	0	–29,9
SYGNITY	127	0,007874	–35,0	VISION	39	0,076923	–54,2
SYMBIO	0	0	–20,2	VISTULA	127	0,023622	13,6
SYNTHOS	127	0	145,5	WADEX	50	0,36	11,8
ŚNIEŻKA	121	0,016529	17,2	WANDALEX	127	0,023622	–18,1
ŚRUBEX	24	0	–12,2	WARFAMA	113	0,026549	71,7
ŚWIECIE	127	0,007874	18,5	WARIMPEX	127	0,015748	58,7
T2INVEST	52	0,076923	16,0	WAŚKO	127	0,015748	–34,8
TALEX	127	0,023622	–21,3	WAWEL	96	0,020833	27,3
TECHMEX	123	0	–21,0	WBAY	0	0	174,3
TECHPARK2	52	0,076923	16,0	WDMSA	127	0,03937	–8,3
TELESTR	38	0,052632	19,5	WIELTON	127	0	64,5
TELL	127	0	34,0	WIKANA	127	0,204724	57,1
TERESA	54	0,222222	–27,9	WILBO	127	0,015748	40,5
TETA	127	0,015748	–14,8	WISTIL	11	0,181818	–34,4
TFONE	127	0,023622	80,9	WOJAS	100	0,03	–3,4
TIM	127	0,007874	28,4	WOLAINFO	109	0,009174	–3,0
TORFARM	127	0,07874	42,8	WSIP	127	0,03937	8,2
TPSA	127	0	–25,0	XPLUS	118	0,228814	55,6
TRAKCJA	127	0,007874	–16,7	YAWAL	123	0,01626	20,3
TRANSPOL	17	0,176471	–5,1	ZAKUPY	79	0,012658	–57,7
TRASINTUR	127	0	108,0	ZASTAL	125	0,024	13,3
TRAVELPL	127	0,023622	–60,1	ZEG	76	0,065789	–9,9
TRION	127	0	108,0	ZELMER	127	0,007874	16,7
TRITON	127	0,015748	84,2	ZETKAMA	101	0,029703	44,6
TSCAPITAL	79	0,139241	–67,1	ZNTKŁAPY	127	0,023622	–72,1
TUEUROPA	11	0,090909	–16,2	ZPUE	113	0,035398	–23,9
TUP	127	0,015748	–18,5	ZREMB	36	0	20,2
TVN	127	0,015748	–27,9	ZTSERG	127	0,007874	118,4
ULMA	103	0,009709	–8,1	ŻURAWIE	127	0,023622	6,4
UNIBEP	116	0,025862	8,2	ŻYWIEC	113	0,00885	1,6
UNICREDIT	121	0,016529	8,5	WIG			7,4

Ź r ó d ł o : Opracowanie własne na podstawie: Piasecki i Ziomek [2011].

W tabeli 4.4 dla każdej spółki notowanej na GPW w Warszawie przedstawiono krotność obserwacji tej spółki w drugim półroczu 2008 roku, stopień efektywności oraz półroczną stopę zwrotu *ex post* wyznaczoną w pierwszym półroczu 2009 roku.

Kierując się postulatem reprezentatywności badań, jako pierwsze kryterium wyboru przyjęto kryterium maksymalizacji krotności obserwacji. W celu spełnienia tego kryterium odrzucono w przybliżeniu połowę spółek charakteryzujących się niższą krotnością obserwacji. Odrzucono wszystkie te spółki, których krotność obserwacji była mniejsza niż 124. Pozostało 246 spółek, które charakteryzowały się nie tylko większą reprezentatywnością, ale także większą płynnością finansową. Z punktu widzenia potrzeb inwestora giełdowego płynność finansowa jest bardzo pożądaną cechą akcji.

Jako drugie kryterium wyboru przyjęto kryterium maksymalizacji stopnia efektywności. W celu spełnienia tego kryterium odrzucono w przybliżeniu połowę spółek charakteryzujących się niższym stopniem efektywności. Odrzucono wszystkie te spółki, których stopień efektywności był mniejszy od 0,01575. W ten sposób odrzucono 114 spółek. Ostatecznie po tym wyborze pozostały 132 spółki. Są to te spółki, które będą rekomendowane jako cele inwestycyjne w pierwszym półroczu 2009 roku:

01NFI	DOMDEV	INWESTCON	NFIEMF
06MAGNA	ECARD	JUPITER	NOBLEBANK
14ZACH	EFH	JUTRZENKA	NOWAGALA
AGORA	ELKOP	KERNEL	NTTSYSTEM
ALCHEMIA	ENERGOPOL	KOGENERA	ODLEWNIE
AMREST	ERBUD	KOMPAP	OPONEO
APATOR	ESSYSTEM	KOMPUTRON	OPONEO-PL
ARMATURA	EUROTEL	KREDYTIN	OPTOPOL
ATLANTIS	FERRUM	KREZUS	ORZEŁ
ATONHT	FON	LCCORP	PCGUARD
BAKALLAND	GINOROSSI	LENA	PEMUG
BANKIERPL	GRAAL	LENTEX	PETROLINV
BARLINEK	GROCLIN	LOTOS	PGNIG
BBIDEVNFI	GTC	MAKARONPL	PLASTBOX
BEEFSAN	HAVE	MAKOLAB	POINTGROUP
BIOTON	HBPOLSKA	MARSOFT	POLNORD
BOMI	HBWŁOCŁAW	MASTERS	POLREST
BORYSZEW	HTLSTREFA	MCLOGIC	PONARFEH
BUDOPOL	HYDROTOR	MIDAS	PROJPRZEM
BYTOM	HYGIENIKA	MIESZKO	PROSPER
BZWBK	HYPERION	MILLENNIUM	RADPOL
CENSTALGD	IBSYSTEM	MINI	RAFAMET
CIECH	IMMOEAST	MMPPL	REDAN
COGNOR	IMPEL	MOSTALWAR	ROPCZYCE
DECORA	INGBSK	NETIA	RUCH
DĘBICA	INTEGERPL	NETMEDIA	SANWIL

SELENAFM	TETA	VARIANT	WILBO
SFINKS	TFONE	VIAGUARA	WSIP
SKOTAN	TORFARM	VISTULA	ZASTAL
SKYEUROPE	TRAVE	WANDALEX	ZNTKŁAPY
SKYLINE	LPL	WARIMPEX	ŻURAWIE
STALPROD	TRITON	WAŚKO	
SWARZĘDZ	TUP	WDMSA	
TALEX	TVN	WIKANA	

Do oceny przydatności tej rekomendacji wykorzystamy wyniki uzyskiwane z zastosowaniem pasywnej strategii inwestowania. Polega ona na lokowaniu identycznej wartości posiadanego kapitału w każdym podstawowym instrumencie finansowym pochodzącym z pewnego podzbioru papierów wartościowych notowanych na danej giełdzie. Uzyskany tą drogą portfel nazywamy portfelem pasywnym. W literaturze przedmiotu wyniki finansowe uzyskiwane przez portfel pasywny są punktem odniesienia do nowo proponowanych metod optymalizacji portfela.

W rozpatrywanym przypadku badanie portfela pasywnego było ograniczone do spółek równocześnie notowanych na warszawskiej GPW w drugim półroczu 2008 roku i pierwszym półroczu 2009 roku. Półroczna stopa zwrotu z portfela pasywnego złożonego ze wszystkich notowanych w ten sposób akcji w pierwszym półroczu 2009 roku wynosiła 34,73%. Gdybyśmy portfel pasywny ograniczyli jedynie do podstawowych instrumentów finansowych rekomendowanych jako efektywne w pierwszym półroczu 2009 roku, wówczas półroczna stopa zwrotu z takiego portfela w pierwszym półroczu 2009 roku wyniosłaby 68,97%. Korzyści z zastosowania proponowanej rekomendacji są w tym wypadku ewidentne.

Piasecki i Ziomek w swojej pracy z 2010 roku powtórzyli obliczenia zaprezentowane w ich pracy z 2011 roku[9] dla każdego półrocza w latach 2000–2008. Dodatkowe opracowanie tych obliczeń wykazało, że w każdym przypadku zastosowanie rekomendacji wyznaczonej za pomocą opisanej powyżej metody powoduje wzrost półrocznej stopy zwrotu z portfela pasywnego. Można więc uznać, że przydatność zaproponowanej metody wyboru rekomendowanych papierów została zweryfikowana pozytywnie.

4.2.5 Wybór efektywnych instrumentów finansowych za pomocą modelu CAPM

W dwóch poprzednich podrozdziałach zaproponowano pewne ekonometryczne metody wyznaczania funkcji przynależności rozmytego podzbioru efektywnych

[9] Praca [Piasecki i Ziomek 2011] została napisana przed pracą [Piasecki i Ziomek 2010]. Zmiana kolejności publikacji jest zasługą wydawców.

instrumentów finansowych. Wykorzystano tam adaptację pochodzącej od Markowitza klasycznej definicji efektywnego instrumentu finansowego. W ten sposób można było wyznaczyć względną ocenę efektywności poszczególnych instrumentów finansowych. Jej względność wynikała z tego, że była tutaj oceniana jedynie efektywność w odniesieniu do wybranego zbioru obserwowanych instrumentów finansowych. Podejście to dobrze służy badaniu przydatności nowo wprowadzanych metod optymalizacji portfela.

W tym podrozdziale zostanie zaproponowana kolejna ekonometryczna metoda wyznaczania rozmytego podzbioru efektywnych instrumentów finansowych. Tym razem wykorzystamy znaną relację pomiędzy efektywnością instrumentu finansowego a istnieniem modelu CAPM opisującego zmienność oczekiwanej stopy zwrotu z tego instrumentu.

W tej sytuacji jednak, w pierwszym rzędzie należy zbudować uniwersalną metodę wyróżniania efektywnych instrumentów finansowych. Formalną podstawą takiej metody może być uniwersalne twierdzenie:

Jeśli dany instrument finansowy jest efektywny, to istnieje model CAPM opisujący zmienność stopy zwrotu z tego instrumentu[10].

Wnioskujemy z tego, że:

Jeśli nie istnieje model CAPM opisujący zmienność stopy zwrotu z danego instrumentu finansowego, to ten instrument nie jest efektywny.

Dzięki wykorzystaniu tych uniwersalnych twierdzeń matematycznych zaproponowana poniżej metoda oceny efektywności instrumentów finansowych nabiera waloru bezwzględnej oceny efektywności.

Rozważmy dowolny instrument finansowy $\breve{Y} \in \mathbb{X}$. Każdemu momentowi czasowemu $T_k \in \Theta$ przypisujemy szeregi czasowe obserwowanych: stopy zwrotu r_Y z badanego instrumentu finansowego, rynkowej stopy zwrotu r_M i stopy zwrotu wolnej od ryzyka r_0. Szeregi te posłużą nam do weryfikacji hipotezy zerowej:

$$\mathcal{H}_0^{(k)}\text{: Różnica } r_\Pi - r_0 \text{ nie jest liniowo skorelowana z różnicą } r_M - r_0, \quad (4.21)$$

której przeciwstawiamy hipotezę alternatywną:

$$\mathcal{H}_1^{(k)}\text{: Różnica } r_\Pi - r_0 \text{ jest liniowo skorelowana z różnicą } r_M - r_0.$$

[10] To twierdzenie wraz z dowodem można znaleźć na przykład w pracy Piaseckiego [2007, s. 332].

Każdorazowy brak podstaw do odrzucenie hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej jest identyczny ze stwierdzeniem, że nie istnieje model CAPM. W tej sytuacji wartość logiczną $\mu_M(\breve{Y})$ zdania:

Instrument finansowy $\breve{Y}$ jest efektywny

identyfikujemy z częstotliwością f_Y odrzucania hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej, co zapisujemy

$$\mu_M(\breve{Y}) = f_Y.$$

Opisane powyżej badanie można powtórzyć dla kolejnych instrumentów finansowych. Przebieg każdego z tych badań będzie niezależny od oceny efektywności pozostałych instrumentów finansowych. Uzyskana w ten sposób funkcja przynależności $\mu_M : \mathbb{Y} \to [0, 1]$ określa rozmyty zbiór efektywnych instrumentów finansowych o potwierdzonej efektywności. Wartości tej funkcji mogą być wskazówką dla inwestora poszukującego swoich celów inwestycyjnych.

Ilustracją dla przedstawionej powyżej metody oceny efektywności będzie powtórne zbadanie efektywności metod optymalizacji portfela opisanych w studium przypadku zaprezentowanym w podrozdziale 4.2.3. Taki sam będzie horyzont czasowy tego badania oraz podział przedziału na okres hossy, stagnacji i bessy.

Odmiennie niż w podrozdziale 4.2.3 badania poprowadzono dla jednodniowych stóp zwrotu. Początkowi każdego miesiąca przyporządkowywano szeregi czasowe stóp zwrotu, które obejmują dwa poprzedzające miesiące. Dzięki temu w każdym obserwowanym szeregu czasowym odnotowywano więcej niż trzydzieści obserwacji. Ta właściwość prowadzonych obserwacji poprawiała właściwości asymptotyczne stosowanych testów statystycznych. Jako stopy zwrotu r_M z portfela rynkowego przyjęto stopy zwrotu z WIG. Stopę zwrotu r_0 z instrumentu wolnego od ryzyka ustalano na podstawie stopy depozytowej NBP.

Hipotezę zerową (4.21) weryfikowano, badając współczynnik korelacji Pearsona. Współczynnik ten oceniano, stosując test *t*-Studenta dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$. Rezultaty tych testów przedstawiono w tabeli 4.5. Kolejne wiersze odpowiadają wyróżnionym w trakcie trwania poszczególnych rodzajów trendu kolejnym terminom modyfikacji portfela. Łatwo można tam dostrzec duże trudności w znalezieniu efektywnych instrumentów finansowych. Potwierdzona efektywność metody M_6 wynika z przyjęcia założenia, że portfel o strukturze odpowiadającej strukturze indeksu WIG jest portfelem rynkowym[11].

[11] W definicji portfela rynkowego jest zawarte założenie, że jest to portfel efektywny [Piasecki 2007, s. 247 i dalsze].

Tabela 4.5. Wyniki testów CAPM efektywności

Trend rynku																	
Bessa						Stagnacja						Hossa					
Metoda						Metoda						Metoda					
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
		■	■		■			■			■		■		■		■
					■		■	■	■	■	■		■	■		■	■
					■			■			■	■		■	■	■	■
		■			■				■		■			■	■	■	■
		■			■			■			■			■	■	■	■
	■				■			■			■			■		■	■
					■	■		■	■	■	■		■	■			■
					■			■	■		■		■	■	■		■
					■			■			■			■			■
		■			■					■	■		■				■
		■			■				■		■			■			■
					■		■		■		■		■			■	■
		■		■	■	×	×	×	×	×	×			■			■
		■	■		■	×	×	×	×	×	×		■			■	■
		■			■	×	×	×	×	×	×			■	■		■
	■	■			■	×	×	×	×	×	×						■
	■				■	×	×	×	×	×	×					■	■
		■			■	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
				■	■	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Legenda: × – brak obserwacji, ■ – metoda optymalizacji portfela została zaliczona do optimum Pareto.

Źródło: Opracowanie własne

Funkcje przynależności rozmytych zbiorów instrumentów finansowych o potwierdzonej efektywności przedstawiono w tabeli 4.6. Zachowano tutaj taki sam układ jak w tabeli 4.3.

Tabela 4.6. Funkcje przynależności rozmytego zbioru instrumentów finansowych o potwierdzonej rentowności

Trend rynku	Metody						Miara energetyczna	Miara entropii
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6		
Bessa	0,00	0,14	0,57	0,10	0,10	1,00	0,65	0,51
Stagnacja	0,08	0,17	0,67	0,50	0,25	1,00	0,73	0,57
Hossa	0,06	0,41	0,65	0,35	0,47	1,00	0,75	0,62
Razem	0,04	0,25	0,65	0,29	0,27	1,00	0,60	0,55

Źródło: Obliczenia własne.

Porównanie z wynikami badań przedstawionymi w tabeli 4.3 wskazuje na wyraźny optymizm rezultatów uzyskanych w podrozdziale 4.2.3. Niemniej nadal najbardziej korzystnie jest oceniana metoda M_3 minimalizacji wariancji, gdyż ujawniona w tabeli 4.6 dominacja metody M_6 inwestowania w portfel WIG jest efektem przyjęcia tego portfela jako portfela rynkowego.

4.3. Kryteria zarządzania portfelem

Zarządzanie portfelem instrumentów finansowych w ogólnym przypadku polega na zbywaniu pewnych instrumentów finansowych i następnie na przeznaczeniu uzyskanych tą drogą środków na zakup innych aktywów finansowych. W szczególnym przypadku jednym z rozpatrywanych aktywów może być gotówka. Działanie te są podejmowane dla zwiększenia zysku lub zmniejszenia ryzyka. Mają one charakter podejmowania decyzji inwestorskich odnoszących się do wyselekcjonowanych instrumentów finansowych. W szczególnym przypadku instrumentami takimi mogą być podstawowe instrumenty finansowe lub jednostki portfeli tworzonych przez fundusze inwestycyjne.

Podejmowanie tych decyzji wymaga określenia kryteriów oceny wymienionych powyżej aktywów finansowych. Weźmy pod uwagę dowolny instrument finansowy $\breve{Y} \in \mathbb{X}$. Instrument ten może być reprezentowany przez parę $(\overline{r}, \sigma^2)$, gdzie:

- $\overline{r}$ – oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}$,
- σ^2 – wariancja oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}$.

Kryterium podejmowania decyzji o zbyciu lub nabyciu instrumentu finansowego $\breve{Y}$ może być wtedy przedstawione jako porównanie wartości $g(\overline{r})$ i $\hat{G}$ określonych w następujący sposób:

- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – funkcja rosnąca o postaci uzasadnionej merytorycznie,
- $\hat{G}$ – uzasadniona merytorycznie wartość graniczna.

Przykładami takich kryteriów są omówione dalej kryteria Sharpe'a, Jensena i Treynora. Funkcję $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy miernikiem zysku. Wartości miernika zysku przyporządkowane poszczególnym instrumentom finansowym wyznaczają pewne uporządkowanie tych instrumentów finansowych.

Stosowanie tych kryteriów pozwala na przyporządkowanie każdemu instrumentowi finansowemu rekomendacji zakupu lub sprzedaży. Rekomendacje te pochodzą ze zbioru następujących komend

$$\mathbb{K} = \{\mathit{KUPUJ}; \mathit{PRZEWAŻAJ}; \mathit{TRZYMAJ}; \mathit{NIE\ DOWAŻAJ}; \mathit{SPRZEDAJ}\} = \\ = \{K_\nu : \nu = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Poszczególnym rekomendacjom przypisano tutaj następujące wykładnie:

- K_1 = *KUPUJ* – niezwłocznie zakup założoną ilość instrumentu finansowego $\breve{Y}$,

– K_2 = *PRZEWAŻAJ* – ostrożnie rozpocznij rozłożone w czasie nabywanie instrumentu finansowego $\breve{Y}$,
– K_3 = *TRZYMAJ* – instrument finansowy $\breve{Y}$ zachowaj w portfelu w niezmienionej ilości,
– K_4 = *NIE DOWAŻAJ* – ostrożnie rozpocznij rozłożone w czasie zbywanie instrumentu finansowego $\breve{Y}$,
– K_5 = *SPRZEDAJ* – niezwłocznie sprzedaj całą posiadaną ilość instrumentu finansowego $\breve{Y}$.

Procedury rekomendacyjne są określone przez opisane niżej relacje.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\overline{r}) > \hat{G}, \tag{4.22}$$

to instrument finansowy $\breve{Y}$ jest niedowartościowany. Instrumentowi temu przypisujemy rekomendację *KUPUJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\overline{r}) \geq \hat{G}, \tag{4.23}$$

to instrument finansowy $\breve{Y}$ jest słabo niedowartościowany. Instrumentowi temu przypisujemy rekomendację *PRZEWAŻAJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\overline{r}) = \hat{G}, \tag{4.24}$$

to instrument finansowy $\breve{Y}$ jest w cenie równowagi finansowej. Instrumentowi temu przypisujemy rekomendację *TRZYMAJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\overline{r}) \leq \hat{G}, \tag{4.25}$$

to instrument finansowy $\breve{Y}$ jest słabo przewartościowany. Instrumentowi temu przypisujemy rekomendację *NIE DOWAŻAJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\overline{r}) < \hat{G}, \tag{4.26}$$

to instrument finansowy $\breve{Y}$ jest przewartościowany. Instrumentowi temu przypisujemy rekomendację *SPRZEDAJ*.

Podstawą do wydania takich rekomendacji są rezultaty analizy technicznej. Analizując powyższy system rekomendacji inwestycyjnych, łatwo dostrzec brak zdecydowanej granicy pomiędzy rekomendacjami *KUPUJ* i *PRZEWAŻAJ* oraz pomiędzy rekomendacjami *SPRZEDAJ* i *NIE DOWAŻAJ*. Uzasadnienia rozróżnienia tych rekomendacji można szukać na gruncie analizy fundamentalnej oraz pomiędzy behawioralnymi aspektami procesu inwestowania.

W rozdziale 3 pokazano, jak behawioralne przesłanki oceny procesu inwestycyjnego prowadzą do określenia oczekiwanej stopy zwrotu rozpatrywanego instrumentu finansowego $\breve{Y} \in \mathbb{Y}$ jako oszacowania nieprecyzyjnego $\tilde{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ nazywanego dalej przybliżoną rentownością. Przybliżona rentowność $\tilde{R}$ jest reprezentowana przez swoją funkcję przynależności $\rho \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ nazywaną również rozkładem oczekiwań rentowności. Instrument finansowy $\breve{Y}$ jest wtedy reprezentowany przez parę $(\tilde{R}, \sigma^2)$. Tym razem ryzyko nieprecyzji jest oznaczone jedynie *implicite* poprzez przebieg zmienności rozkładu oczekiwań $\rho \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$. Jeżeli przybliżona rentowność $\tilde{R}$ jest oszacowaniem nieprecyzyjnym, oszacowaniem nieprecyzyjnym jest także wartość miernika zysku $g(\tilde{R}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Wartość ta będzie w jednoznaczny sposób reprezentowana przez swą funkcję przynależności $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ określoną zgodnie z (2.19) przez tożsamość

$$\gamma(x) = \rho(g^{-1}(x)).$$

Wobec powyższego, warunki (4.22)–(4.26) określające poszczególne rekomendacje stają się relacjami rozmytymi opisanymi w podrozdziale 2.1.4. Wtedy procedury rekomendacyjne są określone przez poniższe relacje.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\tilde{R}) \succ \hat{G}, \tag{4.27}$$

to instrumentowi finansowemu $\breve{Y}$ przypisujemy rekomendację *KUPUJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\tilde{R}) \succcurlyeq \hat{G}, \tag{4.28}$$

to instrumentowi finansowemu $\breve{Y}$ przypisujemy rekomendację *PRZEWAŻAJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\tilde{R}) \approx \hat{G}, \tag{4.29}$$

to instrumentowi finansowemu $\breve{Y}$ przypisujemy rekomendację *TRZYMAJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\tilde{R}) \preccurlyeq \hat{G}, \tag{4.30}$$

to instrumentowi finansowemu $\breve{Y}$ przypisujemy rekomendację *NIE DOWAŻAJ*.

Jeśli jest spełniony warunek

$$g(\tilde{R}) \prec \hat{G}, \tag{4.31}$$

to instrumentowi finansowemu $\breve{Y}$ przypisujemy rekomendację *SPRZEDAJ*.

Zgodnie z (2.23), wartość logiczną zdania (4.28) wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\lambda(K_2) = \sup\left\{\gamma(x) : x \geq \hat{G}\right\} = \sup\left\{\rho(y) : y \geq g^{-1}(\hat{G})\right\}. \tag{4.32}$$

W ten sam sposób wartość logiczną zdania (4.30) wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\lambda(K_4) = \sup\left\{\gamma(x) : x \leq \hat{G}\right\} = \sup\left\{\rho(y) : y \leq g^{-1}(\hat{G})\right\}. \tag{4.33}$$

Zgodnie z (2.24), wartość logiczną zdania (4.27) wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\lambda(K_1) = \min\left\{\lambda(K_2), 1 - \lambda(K_4)\right\}. \tag{4.34}$$

Zgodnie z (2.26), wartość logiczną zdania (4.29) wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\lambda(K_3) = \min\left\{\lambda(K_2), \lambda(K_4)\right\}. \tag{4.35}$$

Zgodnie z (2.24), wartość logiczną zdania (4.31) wyznaczamy, korzystając z zależności

$$\lambda(K_5) = \min\left\{1 - \lambda(K_2), \lambda(K_4)\right\}. \tag{4.36}$$

W ten sposób wyznaczyliśmy funkcję przynależności $\lambda : \mathbb{K} \to [0, 1]$ wyznaczającą zbiór rozmyty $\tilde{K} \in \mathcal{F}(\mathbb{K})$. Zbiór ten nazywamy nieprecyzyjną rekomendacją. Wartość funkcji przynależności $\lambda(K_v)$ interpretujemy tutaj jako wagę rekomendacji K_v. Jeśli inwestor korzysta z rekomendacji nieprecyzyjnej, to uzyskuje szereg alternatywnych rekomendacji o zróżnicowanych wagach. Ostateczna decyzja inwestycyjna w nieunikniony sposób należy wtedy do inwestora.

Zauważmy na koniec tej części rozważań, że przedstawienie oczekiwanej stopy zwrotu jako oszacowania nieprecyzyjnego pozwoliło na zróżnicowanie wag pomiędzy rekomendacjami *KUPUJ* i *PRZEWAŻAJ* oraz pomiędzy rekomendacjami *SPRZEDAJ* i *NIE DOWAŻAJ*. Z drugiej strony nieprecyzyjne oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu było tutaj konsekwencją uwzględnienia behawioralnych aspektów procesów inwestowania. Zatem pokazaliśmy, że behawioralne przesłanki mogą w kontrolowany sposób wpłynąć na wagi poszczególnych rekomendacji.

Nieprecyzyjnie oszacowane wartości miernika zysku mogą stanowić podstawę do wyznaczenia uporządkowania ocenianych instrumentów finansowych. Stosowane są wtedy rozmyte relacje opisane w podrozdziale 2.1.4.

Jako przykłady sformułowanej powyżej procedury zarządzania nieprecyzyjnymi rekomendacjami przedstawimy teraz uogólnienia dobrze znanych z literatury przedmiotu kryteriów zarządzania portfelem inwestycyjnym.

4.3.1. Kryterium Sharpe'a

Zakładamy, że istnieje instrument dłużny $\breve{Y}_0$ reprezentowany przez parę $(r_0, 0)$ oraz portfel rynkowy $\breve{M}$ reprezentowany przez parę (r_M, σ_M^2). Oceniany instrument finansowy $\breve{Y}$ jest reprezentowany przez parę $(\tilde{R}, \sigma^2)$, gdzie $\tilde{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest reprezentowane przez funkcję przynależności $\rho \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$. Uogólnienie miernika zysku Sharpe'a [1966] przyjmuje tutaj postać

$$g(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R} - r_0}{\sigma}.$$

Miernik zysku Sharpe'a ocenia wysokość premii jednostkowej za ryzyko ogólne. Wartość graniczna $\hat{G}$ kryterium Sharpe'a jest równa jednostkowej premii za ryzyko portfela rynkowego. Mamy tutaj

$$\hat{G} = \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}.$$

Zgodnie z (4.32), waga rekomendacji *PRZEWAŻAJ* jest określona przez zależność

$$\lambda(K_2) = \sup\left\{\rho(y) : y \geq \frac{\sigma \cdot (r_M - r_0)}{\sigma_M} + r_0\right\}.$$

Zgodnie z (4.33), waga rekomendacji *NIE DOWAŻAJ* jest określona przez zależność

$$\lambda(K_4) = \sup\left\{\rho(y) : y \leq \frac{\sigma \cdot (r_M - r_0)}{\sigma_M} + r_0\right\}.$$

Wagi rekomendacji *KUPUJ*, *TRZYMAJ* i *SPRZEDAJ* są określone odpowiednio poprzez zależności (4.34), (4.35) i (4.36).

4.3.2. Kryterium Jensena

Na rynku kapitałowym obserwujemy wolną od ryzyka stopę zwrotu r_0 oraz oczekiwaną stopę zwrotu r_M z portfela rynkowego $\breve{M}$. Oceniany efektywny instrument finansowy $\breve{Y}$ jest reprezentowanym przez parę $(\tilde{R}, \beta)$, gdzie β jest współczynnikiem kierunkowym modelu CAPM przypisanym temu instrumentowi. Uogólnienie miernika zysku Jensena [1969] przyjmuje tutaj postać

$$g(\tilde{R}) = \tilde{R} - \beta \cdot (r_M\, r_0).$$

Miernik zysku Jensena ocenia wartość premii za ryzyko stopy rynkowej. Wartość graniczna $\hat{G}$ kryterium Jensena jest równa stopie zwrotu wolnej od ryzyka. Mamy tutaj

$$\hat{G} = r_0.$$

Zgodnie z (4.32), waga rekomendacji *PRZEWAŻAJ* jest określona przez zależność

$$\lambda(K_2) = \sup\{\rho(y) : y \geq r_0 + \beta \cdot (r_M - r_0)\}.$$

Zgodnie z (4.33), waga rekomendacji *NIE DOWAŻAJ* jest określona przez zależność

$$\lambda(K_4) = \sup\{\rho(y) : y \leq r_0 + \beta \cdot (r_M - r_0)\}.$$

Wagi rekomendacji *KUPUJ*, *TRZYMAJ* i *SPRZEDAJ* są określone odpowiednio poprzez zależności (4.34), (4.35) i (4.36).

4.3.3. Kryterium Treynora

Na rynku kapitałowym obserwujemy wolną od ryzyka stopę zwrotu r_0 oraz oczekiwaną stopę zwrotu r_M z portfela rynkowego $\breve{M}$. Rozważamy tutaj jedynie te efektywne instrumenty finansowe, które wykorzystują pozytywny efekt hossy. Oceniany efektywny instrument finansowy $\breve{Y}$ jest reprezentowany przez parę $(\tilde{R}, \beta)$, gdzie β jest współczynnikiem kierunkowym modelu CAPM przypisanym temu instrumentowi. Uogólnienie miernika zysku Treynora [1965] przyjmuje tutaj postać

$$g(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R} - r_0}{\beta}.$$

Miernik zysku Treynora ocenia wartość premii jednostkowej za ryzyko stopy rynkowej. Wartość graniczna $\hat{G}$ kryterium Treynora jest równa premii za ryzyko stopy rynkowej. Mamy tutaj

$$\hat{G} = r_M - r_0.$$

Zgodnie z (4.32), waga rekomendacji *PRZEWAŻAJ* jest określona przez zależność

$$\lambda(K_2) = \sup\left\{\rho(y) : y \geq r_0 + \beta \cdot (r_M - r_0)\right\}.$$

Zgodnie z (4.33), waga rekomendacji *NIE DOWAŻAJ* jest określona przez zależność

$$\lambda(K_4) = \sup\left\{\rho(y) : y \leq r_0 + \beta \cdot (r_M - r_0)\right\}.$$

Wagi rekomendacji *KUPUJ*, *TRZYMAJ* i *SPRZEDAJ* są określone odpowiednio poprzez zależności (4.34), (4.35) i (4.36).

Nieprecyzyjna rekomendacja przygotowana za pomocą kryterium Treynora jest identyczna z nieprecyzyjną rekomendacją przygotowaną za pomocą kryterium Jensena

4.4. Kryteria prymatu bezpieczeństwa

Zbiór $\Omega = \{\omega\}$ jest zbiorem przyszłych elementarnych stanów rynku finansowego. W tym kontekście rozważamy instrument finansowy $\breve{Y} \in \mathbb{Y}$. Zysk z tego instrumentu jest zależny od mającego miejsce w przyszłości stanu $\omega \in \Omega$ otoczenia finansowego. Zysk ten jest charakteryzowany za pomocą stopy zwrotu $r: \Omega \to \mathbb{R}$ danej przez zależność

$$r_Y(\omega) = \frac{C(\omega) - C_0}{C_0},$$

gdzie:

- C_0 – bieżąca obserwowana cena rynkowa instrumentu finansowego $\breve{Y}$,
- $C(\omega)$ – spodziewana przyszła cena instrumentu finansowego $\breve{Y}$.

Opisana stopa zwrotu jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym za pomocą wyznaczonej *ex ante* dystrybuanty $F_Y: \mathbb{R} \to [0, 1]$ danej przez tożsamość

$$F_Y(x) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : r_Y(\omega) < x\right\}\right).$$

W tej sytuacji właściwości zbioru przyszłych stanów rynku finansowego są scharakteryzowane przez precyzyjnie określoną przestrzeń probabilistyczną (Ω, σ, P_Y), gdzie:

- $\sigma \subset \mathcal{B}(\Omega)$ – przeliczalne ciało zdarzeń losowych;
- $P_Y: \sigma \to [0, 1]$ – miara prawdopodobieństwa wyznaczona przez dystrybuantę F_Y.

Z innej jednak strony inwestor w swej ocenie instrumentu finansowego $\breve{Y}$ kieruje się przybliżeniem stopy zwrotu danym jako zbiór Hiroto[12] $\overset{\frown}{R}_Y \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Zbiór ten jest opisany przez swą funkcję przynależności $\overset{\frown}{\rho}_Y : \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$. Przykład takiego obrazu stopy zwrotu został obszernie omówiony w podrozdziale 3.1. Wskazano tam też na behawioralne przesłanki prowadzące do takiego przedstawienia stopy zwrotu.

W tej sytuacji uogólnienie warunku Roya [1952] jest dane w postaci

$$\overset{\frown}{P}_Y\left(\left\{\omega \in \Omega : \overset{\frown}{R}_Y \prec L\right\}\right) = \varepsilon, \tag{4.37}$$

gdzie:
- $\overset{\frown}{P}_Y$ – określone przez (2.28) rozszerzenie miary $P_Y : \sigma \to [0, 1]$,
- $\prec$ – rozmyta relacja „mniejsze niż” określona w podrozdziale 2.1.4,
- L – minimalny dopuszczalny poziom stopy zwrotu,
- ε – prawdopodobieństwo uzyskania stopy zwrotu niższej od minimalnej stopy dopuszczalnej.

Uzyskanie stopy zwrotu niższej od minimalnej dopuszczalnej identyfikujemy ze stratą. Dlatego zmienna ε oznacza prawdopodobieństwo straty.

Rozszerzenie miary prawdopodobieństwa jest konieczne, gdyż zdarzenie losowe oceniane w warunku (4.37) jest zbiorem rozmytym

$$\tilde{V}_Y(L) = \left\{\omega \in \Omega : \overset{\frown}{R}_Y \prec L\right\} \in \mathcal{F}(\Omega)$$

określonym przez swą funkcję przynależności $\eta_Y(\cdot \,|\, L) : \Omega \to [0, 1]$. Zgodnie z (2.2) i (2.24), funkcja ta jest określona przez tożsamość

$$\eta_Y(\omega \,|\, L) = \min\left\{\sup\left\{\overset{\frown}{\rho}_Y(x, \omega) : x \le L\right\}, 1 - \sup\left\{\overset{\frown}{\rho}_Y(x, \omega) : x \ge L\right\}\right\}.$$

Obrazem zdarzenia losowego $\tilde{V}_Y(L)$ po przekształceniu przez stopę zwrotu $r : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zbiór $r\left(\tilde{V}_Y(L)\right) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Funkcja przynależności $\varsigma_Y(\cdot \,|\, L) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tego zbioru jest dana przez tożsamość

$$\varsigma_Y(x \,|\, L) = \max\left\{0, \sup\left\{\eta_Y(x \,|\, L) : x = \mathcal{X}(\omega)\right\}\right\}.$$

Ostatecznie, zgodnie z (2.28), warunek możemy zapisać w postaci

$$\tilde{P}_Y\left(\{\omega \in \Omega : \overset{\frown}{R}_Y \prec L\}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Y(x \,|\, L)\, dF_Y(x) = \varepsilon.$$

[12] Zbiory Hiroto w wystarczający sposób opisano w podrozdziale 2.2.

Warunek ten stanowi dogodny punkt wyjścia do określenia kryteriów porównania dowolnych instrumentów finansowych. Przy każdym z tych porównań główny nacisk będzie kładziony na bezpieczeństwo inwestowanych środków finansowych.

4.4.1. Kryterium Roya

Rozważamy parę instrumentów finansowych $(\breve{Y}, \breve{Z}) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$. Stopa zwrotu r_Y z instrumentu finansowego $\breve{Y}$ ma rozkład określony przez dystrybuantę F_Y, rozkład zaś stopy zwrotu r_Z z instrumentu finansowego $\breve{Z}$ jest opisany za pomocą dystrybuanty F_Z.

Inwestor ocenia instrument finansowy $\breve{Y}$ jako nie gorszy od instrumentu finansowego $\breve{Z}$, jeśli przy ustalonym minimalnym dopuszczalnym poziomie stopy zwrotu prawdopodobieństwo straty z instrumentu finansowego $\breve{Y}$ jest nie większe od prawdopodobieństwa straty z instrumentu finansowego $\breve{Z}$.

W ten sposób, na zbiorze instrumentów finansowych $\mathbb{Y}$ został utworzony preporządek $\sqsupseteq_R$ opisany za pomocą równoważności

$$\breve{Y} \sqsupseteq_R \breve{Z} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Y(x \mid L)\, dF_Y(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Z(x \mid L)\, dF_Z(x). \tag{4.38}$$

Dla różnych wartości minimalnej dopuszczalnej straty możemy uzyskać różne uporządkowania (4.38) zbioru instrumentów finansowych. Zdefiniowane powyżej kryterium Roya minimalizuje prawdopodobieństwo straty.

4.4.2. Kryterium Kataoki

Rozważamy parę instrumentów finansowych $(\breve{Y}, \breve{Z}) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$. Stopa zwrotu r_Y z instrumentu finansowego $\breve{Y}$ ma rozkład określony przez dystrybuantę F_Y, rozkład zaś stopy zwrotu r_Z z instrumentu finansowego $\breve{Z}$ jest opisany za pomocą dystrybuanty F_Z.

Inwestor ocenia instrument finansowy $\breve{Y}$ jako nie gorszy od instrumentu finansowego $\breve{Z}$, jeśli przy ustalonym prawdopodobieństwie straty minimalny dopuszczalny poziom stopy zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}$ jest nie mniejszy od minimalnego dopuszczalnego poziomu stopy zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Z}$.

W ten sposób, na zbiorze instrumentów finansowych $\mathbb{Y}$ został utworzony preporządek $\sqsupseteq_K$ opisany za pomocą równoważności

$$\breve{Y} \sqsupseteq_R \breve{Z} \Leftrightarrow \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Y(x \mid L_Y)\, dF_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Z(x \mid L_Z) dF_Z(x) = \varepsilon \Rightarrow L_Y \geq L_Z \right\}. \tag{4.39}$$

Dla różnych wartości prawdopodobieństwa straty możemy uzyskać różne uporządkowania (4.39) zbioru instrumentów finansowych. Zdefiniowane powyżej kryterium Kataoki minimalizuje wielkość prawdopodobnych strat.

Uporządkowania wyznaczone przez kryteria Roya i Kataoki są precyzyjnie określonymi preporządkami.

4.4.3. Kryterium Telsera

Rozważamy parę instrumentów finansowych $(\breve{Y}, \breve{Z}) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$. Stopa zwrotu r_Y z instrumentu finansowego $\breve{Y}$ ma rozkład określony przez dystrybuantę F_Y, rozkład zaś stopy zwrotu r_Z z instrumentu finansowego $\breve{Z}$ jest opisany za pomocą dystrybuanty F_Z. Przyjmujemy teraz ustaloną wartość ε prawdopodobieństwa straty polegającej na uzyskaniu stopy zwrotu mniejszej od założonego minimalnego dopuszczalnego poziomu L. Para (L, ε) określa wymagane warunki bezpieczeństwa. O instrumencie finansowym $\breve{Y}$ mówimy, że jest bezpieczny, jeśli spełnia warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Y(x \mid L)\, dF_Y(x) \le \varepsilon.$$

Zbiór wszystkich bezpiecznych instrumentów finansowych oznaczamy symbolem

$$\mathbb{Y}(L, \varepsilon) = \left\{ \breve{Y} \in \mathbb{Y} : \int_{-\infty}^{+\infty} \varsigma_Y(x \mid L)\, dF_Y(x) \le \varepsilon \right\}.$$

Zdarzyć się tutaj może, że dla danej pary (L, ε) nie istnieją bezpieczne instrumenty finansowe. Na ogół nie wszystkie instrumenty finansowe są bezpieczne.

Inwestor ocenia bezpieczny instrument finansowy $\breve{Y}$ jako nie gorszy od bezpiecznego instrumentu finansowego $\breve{Z}$, jeśli oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu finansowego $\breve{Y}$ jest nie mniejsza od oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu $\breve{Z}$.

Jak już wspomnieliśmy, inwestor w swej ocenie instrumentu finansowego $\breve{Y}$ kieruje się przybliżeniem stopy zwrotu danym jako zbiór Hiroto $\widetilde{\widetilde{R}}_Y \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Zbiór ten jest opisany przez swą funkcję przynależności $\widetilde{\rho}_Y : \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$. Wtedy oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu $\breve{Y}$ jest reprezentowana przez przybliżoną rentowność $\tilde{R}_Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Zgodnie z (2.29), ta przybliżona rentowność jest reprezentowana przez swą funkcję przynależności $\rho_Y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ określoną następująco

$$\rho_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_Y(x, y)\, dF_Y(y),$$

gdzie

$$\xi_Y(x,y) = \max\left\{0, \sup\left\{\widetilde{\rho}_Y(x,\omega) : y = r_Y(\omega)\right\}\right\}.$$

W analogiczny sposób wyznaczamy przybliżoną rentowność $\tilde{R}_Z$ bezpiecznego instrumentu finansowego $\breve{Z}$.

W ten sposób, na zbiorze $\mathbb{Y}(L, \varepsilon)$ bezpiecznych instrumentów finansowych został utworzony preporządek $\sqsupseteq_T$ opisany za pomocą równoważności

$$\breve{Y} \sqsupseteq_T \breve{Z} \Leftrightarrow \tilde{R}_Y \succcurlyeq \tilde{R}_Z.$$

W ogólnym przypadku kryterium Telsera maksymalizuje stopę zwrotu z inwestycji bezpiecznej. Kryterium Telsera jest rozmytym preporządkiem określonym za pomocą zależności (2.32).

Literatura

Franke J., Härdle W.K., Hafner Ch.M., 2011, *Statistics of financial markets. An introduction. Universitext*, Springer, Berlin.

Jensen M.C., 1969, *Risk and pricing of capital assets, and the evaluation of investments portfolios,* Journal of Business, April.

Juraszek R., Sikora W., 2002, *Czy długoterminowo można wygrać z rynkiem*, w: Tarczyński W. (red.), *Rynek kapitałowy, skuteczne inwestowanie*, cz. I, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.

Markowitz H.S.M., 1952, *Portfolio selection*, Journal of Finance, December.

Piasecki K., 1988, *Fuzzy P-measures and their application and decision making*, w: Kacprzyk J., Fedrizzi M. (red.), *Combining Fuzzy Imprecision with Probabilistic Uncertainty*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 310, Springer Verlag, Berlin.

Piasecki K., 1990, *Decyzje i wiarygodne prognozy,* Zeszyty Naukowe S. I, Prace doktorskie i habilitacyjne, z. 106, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Piasecki K., 2007, *Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Piasecki K., 2009, *O sposobie poszukiwania dobrej metody inwestowania na giełdzie*, w: Hozer J. (red.), *Metody ilościowe w ekonomii*, Uniwersytet Szczeciński, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 11, Szczecin.

Piasecki K., Serafin M., Świątczak Ł., 2006, *Analiza porównawcza strategii inwestowania na GPW w Warszawie*, w: Smoluk A. (red.), *Dydaktyka matematyki*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1117, Wrocław.

Piasecki K., Ziomek R., 2010, *Zbiory intuicyjne w prognozowaniu rynku finansowego*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia nr 28, Szczecin.

Piasecki K., Ziomek R., 2011, *Intuitionistic sets in financial market analysis – case study*, European Finance eJournal no. 1.

Roy A.D., 1952, *Safety-first and the holding of assets*, Econometrics 20.

Sharpe W.F., 1966, *Mutual fund performance*, Journal of Business 19.

Serafin M., 2005, *Weryfikacja metodologii budowy optymalnego portfela papierów wartościowych*, praca magisterska, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.

Treynor J., 1965, *How to rate management of investment fund*, Harvard Business Review January–February.

Rozdział 5

RYZYKO NIEPRECYZJI W RACHUNKU AKTUARIALNYM

Przedmiotem ubezpieczenia jest rekompensata za przyszłe szkody wywołane przez opisane w polisie ryzyko. W tej sytuacji odpowiedzialność finansowa przyjęta przez ubezpieczyciela w związku ze sprzedażą polisy ubezpieczeniowej jest obarczona ryzykiem. Mechanizmy popytowo-podażowe rynku ubezpieczeniowego nie pozwalają na neutralizację tego ryzyka poprzez dowolny wzrost ceny polisy. Określenie właściwych relacji pomiędzy wielkością wypłacanych rekompensat a przychodem uzyskanym ze sprzedaży polis jest przedmiotem rachunku aktuarialnego. Jego podstawą jest przyjęcie założenia, że ryzyko wywołania szkody jest mierzalnym ryzykiem niepewności. W związku z tym ocena ryzyka wywołania szkody jest oceną obiektywną. Głównym narzędziem służącym tej ocenie jest rachunek prawdopodobieństwa. Ocena ryzyka wywołania szkody jest zawsze dokonywana *ex ante*. W swym klasycznym podejściu rachunek aktuarialny identyfikuje całe ryzyko obciążające ubezpieczyciela z ryzykiem wywołania szkody.

Obiektywne ryzyko wywołania szkody nie jest jednak jedynym ryzykiem ponoszonym przez ubezpieczyciela. Istotnym źródłem ryzyka jest hazard uprawiany przez osoby narażone na szkody wywołane przez ubezpieczane ryzyko. W wypadku osób już ubezpieczonych hazard ten jest wywołany świadomością ochrony ubezpieczeniowej, co objawia się mniejszą starannością i dbałością o obiekt ubezpieczony i obojętnością wobec zagrożeń [Kowalczyk, Poprawska i Ronka-Chmielowiec 2006, s. 12]. W wypadku dowolnej osoby narażonej na to ryzyko szkody hazard ten przejawia się poprzez podjęcie decyzji o ubezpieczeniu lub nieubezpieczeniu tego ryzyka. Opisane tutaj przypadki hazardu reprezentują behawioralne przesłanki określające proces ubezpieczenia wyróżnionego ryzyka.

Kolejnym źródłem subiektywnego ryzyka jest metoda badawcza zastosowana wobec obiektywnego ryzyka wywołania szkody. Wiąże się to z tym, że stosowane metody klasycznego rachunku aktuarialnego pozwalają często jedynie na zawężenie pola ostatecznej oceny. Ostateczny wybór właściwej oceny należy wtedy do aktuariusza. Wybór ten przynajmniej w jakiejś swojej części jest subiektywny. Oznacza to, że behawioralnych przesłanek całkowitego ryzyka obarczającego ubezpieczyciela można też się dopatrywać w stosowanej metodzie badawczej. Jest to swoisty hazard poznawczy nieunikniony wobec konieczności jednoznacznego rozwiązania postawionego problemu.

Działalność finansowa ubezpieczyciela powinna być bezpieczna dla ubezpieczyciela i ubezpieczonego. Stąd jednym z głównych celów zarządzania finansami ubezpieczyciela powinna być marginalizacja obarczającego ogólnego ryzyka. Celowi temu na pewno służy rzetelny opis wszystkich rodzajów ryzyka grożących ubezpieczycielowi. Ograniczanie się do ryzyka wywołania szkody grozi niedoszacowaniem zagrożeń pojawiających się wobec ubezpieczyciela.

W tym rozdziale zostaną przedstawione możliwości wykorzystania zbiorów Hiroto do opisu kombinacji obiektywnego ryzyka wywołania szkody i behawioralnego ryzyka hazardu.

5.1. Model reprezentacji ruiny ubezpieczyciela

Przyjmowana przez ubezpieczyciela odpowiedzialność jest związana ze zdarzeniami przyszłymi. Nakłada to na ubezpieczyciela obowiązek szczególnej troski o swoją przyszłą wypłacalność. Pełna wypłacalność może być gwarantowana jedynie przez dobrą przyszłą kondycję finansową ubezpieczyciela. Na tę przyszłą kondycję mają wpływ dwa czynniki: wartość wypłacanych w przyszłości odszkodowań oraz wartość zebranych w przyszłości składek ubezpieczeniowych.

Wartość przyszłych odszkodowań jest uwarunkowana następującymi przesłankami:

- obiektywnym ryzykiem wystąpienia szkody,
- hazardem moralnym, przez który się rozumie zespół warunków podmiotowych danego ubezpieczającego wyrażających się w negatywnych tendencjach charakterologicznych, takich jak nieuczciwość, skłonność do defraudacji i wyłudzeń,
- hazardem motywacyjnym będącym subiektywną reakcją ubezpieczonego, która jest wywołana świadomością istnienia ochrony ubezpieczeniowej, co się objawia mniejszą starannością i dbałością o obiekt ubezpieczony i obojętnością wobec zagrożeń [Kowalewski 1994; Kowalczyk, Poprawska i Ronka-Chmielowiec 2006, s. 12].

Skutki hazardu moralnego ubezpieczyciel neutralizuje na drodze prawnej. Efekty wywołane przez obiektywne ryzyko wystąpienia szkody w zdecydowany sposób dominuje nad efektami wywołanymi przez hazard motywacyjny. Kwerenda empirycznych danych o wydarzeniach ubezpieczeniowych nie rozróżnia tych dwóch źródeł ryzyka. Umożliwia to aktuariuszowi traktować splot tych zagrożeń jako jedno mierzalne źródło ryzyka. Zgromadzona przez aktuariusza wiedza pozwala przedstawić wartość wszystkich wypłaconych odszkodowań jako zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Przyszłe wartości zebranej składki ubezpieczeniowej można prognozować na podstawie przewidywanych danych makro- i mikroekonomicznych. Wspomniane przesłanki prognostyczne są danymi szacunkowymi i w tej sytuacji przewidywana składka powinna być przedstawiona jako wspominana w podrozdziale 2.1.3 liczba interwałowa. Taka prognoza zebranej składki jest jednak obciążona efektami hazardu popytowego. Hazard ten jest uprawiany przez osoby narażone na ryzyko analizowanej szkody. Przejawia się poprzez w dużej mierze subiektywny wybór decyzji: ubezpieczać czy też nie ubezpieczać. Jest to typowy behawioralny czynnik mający wpływ na ostateczną wartość prognozowanej składki. Wpływ tego czynnika można wycenić jedynie w sposób subiektywny. Jego oddziaływanie na prognozę jest jednak ograniczone, gdyż w mniejszym stopniu spodziewamy się tutaj większych odchyleń od prognozy. Konsekwencją takiego podejścia jest brak precyzji w prognozowaniu zebranej składki ubezpieczeniowej [Barberis, Shleifer i Vishny 1998]. Uwzględnienie tej nieprecyzji prowadzi do przedstawienia przewidywanej zebranej składki ubezpieczeniowej jako rozmytego podzbioru w zbiorze liczb rzeczywistych. Dyskutowane powyżej właściwości tej prognozy pozwalają na uściślenie jej postaci jako opisanej w podrozdziale 2.1.3 liczby rozmytej.

Na podstawie prognoz wypłaconych odszkodowań i zebranej składki ubezpieczeniowej prognozuje się wartości przyszłych stanów rezerwy finansowej ubezpieczyciela. Formalnym obrazem takich prognoz są zbiory Hiroto opisane w podrozdziale 2.2. Stwierdzenie to jest konsekwencją naszych spostrzeżeń co do różnorodnych postaci formalnych prognozy wypłaconych odszkodowań i prognozy zebranej składki. Poniżej zostanie przedstawiona pewna koncepcja opisu problemu ruiny obciążającej proces rezerw finansowych ubezpieczyciela prognozowanych w powyższy sposób.

Rozważmy pewien zbiór przyszłych momentów czasowych $\Theta \subset \mathbb{R}^+$ nazywany dalej zbiorem momentów predykcji. W wyróżnionych momentach predykcji analizujemy przyszłą działalność finansową ubezpieczyciela.

Zakładamy, że wartość bieżących rezerw finansowych zgromadzonych przez ubezpieczyciela wynosi $U_0 > 0$.

Niech będzie dany zbiór Ω elementarnych zdarzeń opisujących przyszłe wydarzenia powiązane z ryzykiem opisanym w polisie ubezpieczeniowej. Każdemu momentowi predykcji $t \in \Theta$ i każdemu elementarnemu zdarzeniu $\omega \in \Omega$ przypisujemy wartość $S(t, \omega)$ wszystkich odszkodowań wypłaconych w przedziale czasowym $]0, t]$. W każdym momencie predykcji $t \in \Theta$ funkcja $S(t, \cdot)$ jest zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wiedza aktuariusza o rozkładzie ryzyka jest reprezentowana przez rozkład prawdopodobieństwa $P\colon \sigma \to [0, 1]$

określony dla pewnego ciała zdarzeń losowych $\sigma \subset \mathcal{B}(\Omega)$. Wtedy rozkład każdej zmiennej losowej $S(t,\cdot):\Omega \to \mathbb{R}$ opisujemy za pomocą dystrybuanty F_t: $\mathbb{R} \to [0, 1]$ wyznaczonej przez tożsamość

$$F_t(x) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : S(t, \omega) < x\right\}\right).$$

Z drugiej strony każdemu momentowi predykcji $t \in \Theta$ przypisujemy przewidywaną wartość $Z(t)$ całkowitych składek zebranych w przedziale czasowym $]0, t]$. Jako punkt wyjścia do dalszych rozważań rozpatrzmy teraz przypadek, w którym wartość $Z(t) \in \mathbb{R}^+$ tych składek została oszacowana precyzyjnie. Wtedy proces rezerw finansowych ubezpieczyciela jest reprezentowany przez proces losowy $U: \Theta \times \Omega \to \mathbb{R}$ określony przez tożsamość

$$U(t, \omega) = U_0 + Z(t) - S(t, \omega).$$

Ruinę ubezpieczyciela identyfikujemy z osiągnięciem przez proces rezerw finansowych wartości ujemnej. Zbiór wszystkich potencjalnych momentów czasowych ruiny jest określony jako zbiór

$$D(\omega) = \left\{t \in \Theta : U(t, \omega) < 0\right\}$$

Ostateczna ruina ubezpieczyciela ma miejsce w okresie Θ wtedy i tylko wtedy, gdy w tym okresie ujawni się takie zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$, dla którego $D(\omega) \neq \emptyset$. Warunek ten jest równoważny dobrze znanemu z literatury przedmiotu warunkowi ruiny [Ronka-Chmielowiec 2000]

$$\sup\left\{S(t, \omega) - Z(t); t \in \Theta\right\} > U_0.$$

Prawdopodobieństwo zajścia ruiny jest identyfikowane z prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia losowego

$$D = \left\{\omega \in \Omega : D(\omega) \neq \emptyset\right\}.$$

W tej sytuacji prawdopodobieństwo zajścia takiej ruiny jest określone jako funkcja $Pr: \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ przypisująca każdej wartości $U_0 \in \mathbb{R}^+$ bieżących rezerw finansowych prawdopodobieństwo

$$Pr(U_0) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup\left\{S(t, \omega) - Z(t); t \in \Theta\right\} > U_0\right\}\right) =$$

$$= \frac{\int_\Theta \int_D dP(\omega)\, dt}{\int_\Theta dt} = \frac{\int_\Theta \int_{U_0+Z(t)}^{+\infty} dF_t(s)\, dt}{\int_\Theta dt} = \frac{\int_\Theta 1 - F_t\left(U_0 + Z(t)\right) dt}{\int_\Theta dt}. \tag{5.1}$$

W kolejnym kroku naszych rozważań uwzględnimy fakt szacunkowego reprezentowania prognozy zebranej składki oraz obciążające tę prognozę efekty hazardu popytowego. W tej sytuacji każdemu momentowi predykcji $t \in \Theta$ przypisujemy nieprecyzyjnie oszacowaną przewidywaną wartość $\tilde{Z}(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ całkowitych składek zebranych w przedziale czasowym $]0, t]$. Wartość tych składek jest reprezentowana przez funkcję przynależności $\zeta(\cdot|t): \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ spełniającą warunek

$$\zeta(Z(t)|t) = 1. \tag{5.2}$$

Powyższy warunek oznacza, że nieprecyzyjnie oszacowana wartość $\tilde{Z}(t)$ składki zebranej jest przybliżeniem precyzyjnie określonej wartości Z(t). Proces rezerw finansowych ubezpieczyciela jest wtedy wyznaczony za pomocą zależności

$$\tilde{U}(t, \omega) = U_0 \oplus \tilde{Z}(t) \ominus S(t, \omega),$$

gdzie symbole $\oplus$ i $\ominus$ oznaczają odpowiednio uogólnienie do przypadku liczb rozmytych działań dodawania i odejmowania określonych na zbiorze liczb rzeczywistych. Zasada tworzenia tych uogólnień została przedstawiona w podrozdziale 2.1.3. Wtedy w momencie predykcji $t \in \Theta$ przewidywana wartość rezerwy finansowej $\tilde{U}(t)$ jest zbiorem Hiroto reprezentowanym przez funkcję przynależności $\eta(\cdot|t): \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$ określonym za pomocą tożsamości

$$\eta(x, \omega | t) = \zeta\left(x + S(t, \omega) - U_0 | t\right).$$

Zauważmy, że dzięki (5.2) mamy tutaj między innymi

$$\lambda(t, \omega) = \sup\left\{\eta(x, \omega | t): x \le 0\right\} = \begin{cases} 1, & U_0 + Z(t) - S(t, \omega) \le 0, \\ \zeta\left(S(t, \omega) - U_0 | t\right), & U_0 + Z(t) - S(t, \omega) > 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Wynik ten zostanie wykorzystany na dalszych etapach naszych rozważań.

Ruinę ubezpieczyciela identyfikujemy z osiągnięciem przez proces rezerw finansowych wartości ujemnej. Dla ustalonego zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$, zbiór wszystkich potencjalnych momentów czasowych ruiny określamy jako rozmyty zbiór

$$\tilde{D}(\omega) = \left\{t \in \Theta: \tilde{U}(t, \omega) \prec 0\right\}.$$

Rodzina rozmytych zbiorów

$$\tilde{\tilde{D}} = \left\{D(\omega): \omega \in \Omega\right\}$$

tworzy zbiór Hiroto reprezentujący losowe zdarzenie polegające na wystąpieniu ruiny ubezpieczyciela. Zgodnie z (2.25), zbiór ten jest reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\mu_D : \Theta \times \Omega \to [0, 1]$ określoną za pomocą tożsamości

$$\mu_D(t,\omega) = \min\left\{\sup\left\{\eta(x,\omega \mid t) : x \le 0\right\}, 1-\sup\left\{\eta(x,\omega \mid t) : x \le 0\right\}\right\},$$

co ostatecznie razem z (5.3) daje

$$\mu_D(t,\omega) =$$
$$= \begin{cases} 1, & U_0 + Z(t) - S(t,\omega) < 0, \\ \min\left\{\zeta\left(S(t,\omega) - U_0 \mid t\right), 1-\zeta\left(S(t,\omega) - U_0 \mid t\right)\right\}, & U_0 + Z(t) - S(t,\omega) \ge 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Prawdopodobieństwo zajścia ruiny jest równe prawdopodobieństwu zajścia zdarzenia losowego $\overleftrightarrow{D}$. W tej sytuacji prawdopodobieństwo zajścia takiej ruiny jest określone jako funkcja $\overline{\overline{Pr}} : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ przypisująca, zgodnie z (2.28), każdej wartości $U_0 \in \mathbb{R}^+$ bieżących rezerw finansowych prawdopodobieństwo

$$\overline{\overline{Pr}}(U_0) = \frac{\int\int_{\Theta\times\Omega} \mu_D(t,\omega)\, dP(\omega)\, dt}{\int_\Theta dt} = \frac{\int_\Theta\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_D(t,x)\, dF_t(x)\, dt}{\int_\Theta dt}.$$

Dalej, korzystając dodatkowo z (5.4), otrzymujemy

$$\overline{\overline{Pr}}(U_0) = \frac{\int_\Theta \int_{-\infty}^{U_0+Z(t)} \min\left\{\zeta\left(x - U_0 \mid t\right), 1-\zeta\left(x - U_0 \mid t\right)\right\} dF_t(x)\, dt + \int_\Theta \int_{U_0+Z(t)}^{+\infty} dF_t(x)\, dt}{\int_\Theta dt} =$$

$$= \frac{\int_\Theta \int_{-\infty}^{Z(t)} \min\left\{\zeta(y \mid t), 1-\zeta(y \mid t)\right\} dF_t(y+U_0)\, dt + \int_\Theta 1 - F_t\left(U_0 + Z(t)\right) dt}{\int_\Theta dt},$$

co po porównaniu z (5.1) daje

$$\overline{\overline{Pr}}(U_0) = \frac{\int_\Theta \int_{-\infty}^{Z(t)} \min\left\{\zeta(y \mid t), 1-\zeta(y \mid t)\right\} dF_t(y+U_0)\, dt}{\int_\Theta dt} + Pr(U_0). \tag{5.5}$$

Oznacza to, że w razie nieprecyzyjnego oszacowania zebranej składki prawdopodobieństwo ruiny wzrasta. Dokładna analiza pierwszego składnika sumy (5.5) wskazuje, że przyrost prawdopodobieństwa ruiny wzrasta wraz ze wzrostem nieprecyzji dolnego oszacowania wartości zebranej składki $Z(t)$. Porównanie tego składnika z zależnościami (2.11) i (2.15) wskazuje, że ten przyrost prawdopodobieństwa ruiny zależy jedynie od niewyrazistości wskazanego oszacowania i nie zależy od niejednoznaczności tego oszacowania.

Powyżej przedyskutowano wpływ nieprecyzyjnego oszacowania zebranej składki na postać procesu rezerwy finansowej ubezpieczyciela. Po krótkiej analizie proces ten przedstawiono jako proces losowy przyporządkowujący poszczególnym momentom predykcji rozmyte zbiory probabilistyczne. Pomimo tej modernizacji, w zaproponowanym modelu można wykorzystać bez zmian całą wiedzę aktuarialną zebraną na temat rozkładów wypłacanych odszkodowań. Wobec znacznej zasobności informacyjnej zgromadzonej wiedzy aktuarialnej, jest to wysoce korzystna cecha zaproponowanego modelu.

Przy ocenie poszczególnych portfeli ubezpieczeniowych, prawdopodobieństwa ruiny uzyskane za pomocą zaproponowanej metody (5.5) nie mogą być porównywane z prawdopodobieństwami ruiny uzyskiwanymi za pomocą „klasycznej" metody (5.1). Ograniczenie to w oczywisty sposób wynika ze zróżnicowania metodologicznych przesłanek leżących u podstaw każdej z tych metod. Prawdopodobieństwo ruiny może być traktowane jako kryterium jakości portfela ubezpieczeniowego. Zaproponowana metoda szacowania prawdopodobieństwa generuje oryginalne kryterium porównania jakości ocenianych portfeli ubezpieczeniowych. Szczególna przydatność zaproponowanej metody wynika z tego, że deprecjonuje takie portfele ubezpieczeniowe, w których przesadnie optymistycznie oszacowano zebraną składkę ubezpieczeniową.

5.2. Nieprecyzyjny opis porządku zatrzymania straty

Ryzyko ubezpieczeniowe obejmujące szkody spowodowane danym wydarzeniem losowym może być skonstruowane na wiele sposobów. Wtedy jednym z podstawowych problemów rachunku ubezpieczeniowego jest wybór ryzyka optymalnego. Do oceny każdego ryzyka ubezpieczeniowego może być stosowany porządek zatrzymanej straty. Porządek ten często nie jest liniowy, co uniemożliwia jednoznaczne uporządkowanie ocenianego ryzyka. Ostateczny wybór zalecanego do stosowania porządku należy wtedy do aktuariusza. Działanie takie jest powiązane z hazardem poznawczym. Pewnym sposobem ujawnienia *explicite* tego hazardu jest zastosowanie tutaj rozmytych preporządków. Możliwość taka będzie badana w tym podrozdziale.

Niech będzie dany zbiór $\Omega = \{\omega\}$ elementarnych zdarzeń opisujących przyszłe stany przedmiotu ubezpieczenia. Ryzyko ubezpieczeniowe utożsamiamy z wartością wypłaty rekompensaty za szkodę wywołaną przez wydarzenie elementarne. W tej sytuacji dowolne ryzyko ubezpieczeniowe można przedstawić jako funkcję $\mathcal{X}\colon \Omega \to [0, +\infty[\, = \mathbb{R}^{\boxplus}$. Niech będzie dany zbiór rodzajów ryzyka ubezpieczeniowego $\mathcal{H} \subset [R^{\boxplus}]^{\Omega}$. Każde ryzyko może być reasekurowane. Poziomem retencji nazywamy maksymalną kwotę, do jakiej odszkodowanie pokrywa ubezpieczyciel. Całą nadwyżkę ponad tę kwotę pokrywa reasekurator. Nadwyżka wypłacona przez reasekuratora stanowi stratę zatrzymaną dla ubezpieczyciela.

Rozważmy dowolny rodzaj ryzyka $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$. Rozkład ryzyka $\mathcal{X}$ jest określony za pomocą dystrybuanty $F_{\mathcal{X}}\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$. Wtedy dla ustalonej wysokości retencji $d \geq 0$ wyznaczamy wartość zatrzymanej straty daną za pomocą tożsamości

$$\left(\mathcal{X}(\omega) - d\right)_{+} = \max\left\{\mathcal{X}(\omega) - d, 0\right\}.$$

Dla wyznaczenia wartości oczekiwanej reasekuracyjnej umowy nadwyżki szkody $h_{\mathcal{X}}(d)$ wykorzystujemy tutaj zależność

$$h_{\mathcal{X}}(x) = E(\mathcal{X} - d)_{+} = \int_{d}^{+\infty} 1 - F_{\mathcal{X}}(x)\, dx. \tag{5.6}$$

W ten sposób dla dowolnego ryzyka $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$ i dowolnego poziomu reasekuracji $d \in R^{\boxplus}$ określamy transformatę zatrzymania straty $h_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{H} \times R^{\boxplus} \to R^{\boxplus}$.

Ryzyko charakteryzujące się niższymi wartościami oczekiwanymi reasekuracyjnej umowy nadwyżki szkody jest obarczane niższą opłatą reasekuracyjną stanowiącą koszt ubezpieczyciela. Z tego oczywistego względu jest ono preferowane. Sugestia ta prowadzi do określenia na zbiorze $\mathcal{H}$ relacji preferencji zdefiniowanej dla dowolnej pary $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{H}^2$ w następujący sposób

$$\mathcal{X} \trianglelefteq \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall d \in R^{\boxplus} : h_{\mathcal{X}}(d) \leq h_{\mathcal{Y}}(d). \tag{5.7}$$

Zapis $\mathcal{X} \trianglelefteq \mathcal{Y}$ czytamy:

Ryzyko $\mathcal{X}$ jest preferowane w porównaniu z ryzykiem $\mathcal{Y}$. (5.8)

Uzyskana w ten sposób relacja preferencji jest zwrotna, quasi-asymetryczna i przechodnia. Zatem jest relacją częściowego porządku. W literaturze przedmiotu [Ronka-Chmielowiec 2000] porządek ten jest nazywany porządkiem zatrzymanej straty. Dla każdorazowo jednoznacznego wyboru najbardziej preferowanego ryzyka wymagana jest liniowość porządku. Odpowiedzią na pytanie o spełnienie przez porządek zatrzymanej straty wymogu liniowości jest poniższy przykład.

Przykład: Rozważmy dwa rodzaje ryzyka $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \in \mathcal{H}$. Rozkład ryzyka $\mathcal{X}$ jest określony za pomocą dystrybuanty

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{16} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Wtedy transformata zatrzymanej straty tego ryzyka jest dana za pomocą tożsamości

$$h_{\mathcal{X}}(d) = \frac{4}{3} - d + \frac{d^2}{4} - \frac{d^3}{48}.$$

Rozkład ryzyka $\mathcal{Y}$ jest określony za pomocą dystrybuanty

$$F_{\mathcal{Y}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Wtedy transformata zatrzymanej straty tego ryzyka jest dana za pomocą tożsamości

$$h_{\mathcal{Y}}(d) = 2 - d + \frac{d^3}{27}.$$

Porównując obie transformaty, otrzymujemy

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{X}}(d) < h_{\mathcal{Y}}(d) &\Leftrightarrow d \in [0,\ 2{,}55421[, \\ h_{\mathcal{X}}(d) = h_{\mathcal{Y}}(d) &\Leftrightarrow d \in \{2{,}55421\} \cup [4,\ +\infty[, \\ h_{\mathcal{X}}(d) > h_{\mathcal{Y}}(d) &\Leftrightarrow d \in]2{,}55421,\ 4[. \end{aligned}$$

Oznacza to, że rozważanej pary ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$) nie można uporządkować za pomocą porządku zatrzymanej straty[1].

W ten sposób wykazano, że w ogólnym przypadku porządek zatrzymanej straty nie jest porządkiem liniowym. Ponadto, zgodnie z równoważnością (5.7), użyteczność wartości oczekiwanej reasekuracyjnej umowy nadwyżki szkody jest funkcją malejącą tej transformaty. Jeśli teraz dla dowolnego ustalonego ryzyka $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$ za-

[1] Do przeprowadzenia obliczeń zastosowano program Mathematica, numer licencji L4719-1731.

stosujemy zasadę *ceteris paribus*, to dzięki (5.6) stwierdzamy, że użyteczność wysokości retencji rośnie wraz ze wzrostem tej wysokości.

Zgodnie z wnioskami płynącym z przykładu, istnieją takie pary ryzyka, których porównanie za pomocą porządku zatrzymanej straty jest niejednoznaczne. Wynika to z faktu, że nierówność (5.7) jest spełniana jedynie dla części poziomów retencji. Przeanalizujmy teraz wartość logiczną zdania (5.8) w świetle logiki wielowartościowej. Wydaje się, że prawdziwość tego zdania wzrasta wraz liczbą tych poziomów retencji, dla których jest spełniona nierówność (5.7). Zgodnie z tą sugestią, do opisu takiego uporządkowania należy wykorzystać opisane w podrozdziale 2.1.4 nieprecyzyjne preferencje.

W tym celu preporządek $\trianglelefteq \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dany równoważnością (5.7) rozszerzamy do rozmytego preporządku $\ltimes \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Preporządek $\ltimes \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ jest opisany za pomocą funkcji przynależności $\varrho_{\ltimes}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$. Wspomniana funkcja przynależności powinna być zdefiniowana w taki sposób, aby w ujęciu logiki wielowartościowej wartość $\varrho_{\ltimes}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ mogła być interpretowana jako wartość logiczna zdania (5.8). Dlatego wydaje się właściwe, aby dla dowolnej pary $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ wartość $\varrho_{\ltimes}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ określała, ile wartości wysokości retencji $d \geq 0$ jest preferencyjnych, to jest spełnia nierówność występującą w równoważności (5.7). Niestety, nie można uzyskać tej wartości w wyniku porównania miary zbioru preferencyjnych wysokości retencji z miarą zbioru dopuszczalnych wysokości retencji, gdyż obie miary są na ogół nieskończone. Rozwiązanie tego problemu można znaleźć na drodze określenia takiego izomorfizmu, który przekształci zbiór dopuszczalnych wysokości retencji na zbiór charakteryzujący się miarą skończoną. Izomorfizmem takim może być użyteczność $u: \mathrm{R}^{\boxplus} \rightarrow [0, 1]$ wysokości poziomu retencji. W bogatej literaturze przedmiotu dyskutowanych jest wiele słabszych lub silniejszych założeń o przebiegu zmienności funkcji użyteczności. Wykazano już powyżej, że użyteczność poziomu retencji jest funkcją rosnąca. W naszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, w którym funkcja użyteczności jest funkcją ciągłą. Dodatkowo będziemy tutaj korzystać z tezy zawartej w pracy Piaseckiego [1991], w której wskazano na pewne analogie pomiędzy wielowartościowymi logikami Łukasiewicza a teorią użyteczności. Zgodnie z tą sugestią wartość $u(d)$ funkcji użyteczności będziemy interpretować jako wartość logiczną zdania „poziom retencji d jest użyteczny". Wtedy funkcja użyteczności spełnia dodatkowo warunki

$$u(0) = 0,$$

$$\lim_{d \to +\infty} u(d) = 1,$$

gdyż przedział [0, 1] jest teraz otoczeniem wypukłym zbioru wartości funkcji użyteczności. Wszystko to oznacza, że proponowana tutaj funkcja użyteczności jest bijekcją półprostej $\mathrm{R}^{\boxplus}$ na odcinek [0, 1]. Warunek ten jest szczególnym przypadkiem postulatu głoszącego, że funkcja użyteczności jest funkcją ograniczoną. Wszystko to pozwala na zdefiniowanie dla dowolnego ryzyka $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$ funkcji $f_{\mathcal{X}} = h_{\mathcal{X}} \circ u^{-1}$ określającej wpływ użyteczności wysokości retencji na wartość zatrzymanej straty. Mamy wtedy

$$\forall d \in \mathbb{R}^{\boxplus} : h_{\mathcal{X}}(d) \leq h_{\mathcal{Y}}(d) \Leftrightarrow f_{\mathcal{X}}\big(u(d)\big) \leq f_{\mathcal{Y}}\big(u(d)\big).$$

Dzięki temu, dla dowolnej pary $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ określamy wtedy zbiór preferencyjny

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \left\{ x \in [0,1] : f_{\mathcal{X}}(x) \leq f_{\mathcal{Y}}(x) \right\}$$

zawierający preferencyjne użyteczności, to jest użyteczności preferencyjnych wysokości retencji. Ponadto, chcąc uniknąć wyróżniania *a priori* pewnych wartości wysokości retencji, zakładamy, że nad dowolną rodziną zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}^{\boxplus}$ jest rozpięta jedynie miara Lebesque.

Funkcję przynależności $\varrho_{\ltimes}$: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to [0, 1]$ określamy wtedy jako miarę zbioru preferencyjnego, gdyż miara zbioru wszystkich dopuszczalnych wartości użyteczności jest równa jeden. W ten sposób otrzymujemy tożsamość

$$\varrho_{\ltimes}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \int_{\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} dx. \tag{5.9}$$

Jeśli jest spełniony warunek $\mathcal{X} \trianglelefteq \mathcal{Y}$, to mamy $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = [0, 1]$. Oznacza to, że wyznaczona za pomocą tożsamości (5.9) rozmyta preferencja $\ltimes \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ jest rozszerzeniem preporządku $\trianglelefteq \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Łatwo można też wykazać, że ta preferencja jest rozmytym preporządkiem. Wszystko to pozwala nazwać preferencję $\ltimes \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ rozmytym porządkiem zatrzymanej straty. Warto tutaj też zwrócić uwagę na to, że określając dodatkowe właściwości funkcji użyteczności, możemy określać wagi poszczególnych wartości wysokości retencji. Na przykład, jeśli założymy, że funkcja użyteczności uwzględnia awersję do ryzyka, to większą wagę przypisujemy mniejszym wartościom wysokości retencji.

Rozmyty porządek zatrzymanej straty $\ltimes$ wyznacza w zbiorze $\mathcal{H}$ rozmyty podzbiór $\tilde{Q}(\ltimes) \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ ryzyk niezdominowanych. Zbiór ten wyznacza ryzyko optymalne. Zgodnie z zależnością (2.27), ryzyko optymalne jest reprezentowane za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_{\mathcal{Q}(\ltimes)}$: $\mathcal{H} \to [0, 1]$ danej przez tożsamość

$$\mu_{\mathcal{Q}(\ltimes)}(\mathcal{X}) = \inf\left\{ \max\left\{ \varrho_{\ltimes}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}),\ 1 - \varrho_{\ltimes}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \right\} : \mathcal{Y} \in \mathcal{H} \right\}.$$

Wyznaczone w ten sposób ryzyko optymalne jest zbiorem Hiroto danym jako indeksowana przez stany przedmiotu ubezpieczenia $\omega \in \Omega$ rodzina nieprecyzyjnych wartości optymalnego ryzyka $\left\{ \tilde{H}(\omega) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{\boxplus}) : \omega \in \Omega \right\}$. Każda taka nieprecyzyjna wartość $\tilde{H}(\omega)$ jest reprezentowana przez swą funkcję przynależności $\mu_H(\cdot, \omega): \mathbb{R}^{\boxplus} \to [0, 1]$ zdefiniowaną za pomocą tożsamości

$$\mu_H(x, \omega) = \sup\left\{0, \varrho_{Q(\ltimes)}(\mathcal{X}): \mathcal{X} \in \mathcal{H}, x = \mathcal{X}(\omega)\right\}.$$

Stopień przynależenia dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}^{\boxplus}$ do oszacowania wartości optymalnego ryzyka określamy wtedy jako zmienną losową $\mu_H(x, \cdot): \Omega \to [0, 1]$.

Brak liniowości porządku zatrzymanej straty prowadzi do niejednoznacznego uporządkowania typów ryzyka ubezpieczeniowego. Ta niejednoznaczność jest obrazem hazardu poznawczego będącego odzwierciedleniem behawioralnych aspektów ich porządkowania. W pracy założono, że niejednoznaczność ta będzie opisana za pomocą rozmytego preporządku. Wówczas uzyskany obraz optymalnego ryzyka jest zbiorem Hiroto. W ten sposób po raz kolejny wykazano przydatność zbiorów Hiroto do modelowania behawioralnych aspektów zarządzania finansami ubezpieczyciela. Fakty te pozwalają spojrzeć na bogate instrumentarium oferowane przez teorię zbiorów Hiroto jako na obiecujące narzędzie analizy matematyki ubezpieczeniowej.

Literatura

Barberis N., Shleifer A., Vishny R., 1998, *A model of investor sentiment*, Journal of Financial Economics 49.

Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W., 2006, *Metody aktuarialne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Kowalewski E., 1994, *Wprowadzenie do teorii ryzyka ubezpieczeniowego*, w: Wąsiewicz A. (red.), *Ubezpieczenia w gospodarce rynkowej*, Oficyna Branta, Bydgoszcz.

Piasecki K., 1991, *Funkcja oczekiwanych korzyści w świetle teorii logik wielowartościowych Łukasiewicza*, Zeszyty Naukowe nr 189, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Ronka-Chmielowiec W. (red.), 2000, *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.