

# MPRA

Munich Personal RePEc Archive

## **A Mathematical Model of the Economic System with Distributed Property Rights**

Kolesnik, Georgiy

15 May 2010

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/47680/>  
MPRA Paper No. 47680, posted 19 Jun 2013 19:24 UTC

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПРАВАМИ СОБСТВЕННОСТИ

Колесник Г.В.

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель экономической системы, права собственности на фирмы в которой распределены между несколькими агентами. Исследуется воздействие распределения прав собственности на эффективность управления фирмами с точки зрения их собственников.

**Abstract.** A model of the economic system with the property rights distributed among several agents is considered. The effect of property rights allocation on the economic efficiency of the management strategies is studied.

**Ключевые слова:** права собственности, владение, управление, эффективность, благосостояние, конкуренция, некооперативная игра, равновесие Нэша.

**Keywords:** property rights, ownership, control, efficiency, welfare, competition, non-cooperative game, Nash equilibrium.

## 1. Введение

В классических моделях фирмы критерий эффективности функционирования предполагается экзогенно заданным и не зависящим от структуры прав собственности на неё. Как правило, при рассмотрении краткосрочного периода в качестве такого критерия выступает прибыль фирмы, а в долгосрочном – ее стоимость (капитализация) (Тириоль, 2000).

Однако в условиях, когда на деятельность фирмы могут оказывать влияние сразу несколько участников<sup>1</sup>, такое предположение о её критерии эффективности становится небесспорным. В частности, при наличии нескольких собственников может возникать конфликт интересов, в результате которого будет выбираться неэффективный режим функционирования фирмы.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных анализу управления фирмой при несовпадающих интересах участников. Наиболее известной и широко освещенной в научной литературе проблемой стал конфликт интересов собственников и менеджеров, то есть групп участников, наделенных правами владения и управления (Jensen, Meckling, 1976; Morck et al., 1988; Shleifer, Vishny, 1986; Stulz, 1988).

Внутригрупповые конфликты собственников исследовались в работах Гроссмана, Харта и Мура (Grossman, Hart, 1986; Hart, Moore, 1990). В них фирма рассматривается как совокупность активов, а ее собственники – как владельцы этих активов, взаимодействующие на основе некоторого контракта и заинтересованные в максимизации отдачи от вложений в свой актив. Источником неэффективности управления

---

<sup>1</sup>Под *участниками фирмы* здесь понимаются любые экономические агенты и их группы, которые могут оказывать влияние на её деятельность (собственники, менеджеры, работники, потребители, власти, общественные организации и др.).

в этом случае является неполнота контракта между собственниками, приводящая к борьбе за перераспределение ренты.

В работе (Müller, Wärnebyd, 2001) исследован конфликт собственников за распределение прибыли фирмы и показано, что добавление внешних собственников приводит к снижению остроты этого конфликта.

В настоящей статье также рассматривается модель управления фирмой при несовпадающих интересах собственников. В отличие от известных моделей, несовпадение интересов в ней обусловлено не только конфликтом собственников за распределение прибыли, но и тем, что их благосостояние может определяться рядом сторонних факторов, состав которых индивидуален и которые могут находиться в сложных взаимоотношениях друг с другом. Например, институциональные инвесторы могут одновременно участвовать в нескольких конкурирующих между собой фирмах и быть заинтересованны в максимизации стоимости всей совокупности имеющихся у них долей, а не стоимости каждой из них в отдельности. Это может противоречить интересам акционеров, участвующих только в одной из данных фирм.

Другим важным частным случаем таких систем является совместная частно-государственная собственность, которая исследовалась, например, в статье (Колесник и др., 2008). Несовпадение критериев эффективности частного собственника и государства в этом случае может приводить к выбору стратегии управления, неэффективной как с точки зрения извлечения прибыли, так и с точки зрения общественной полезности.

В настоящей статье для достаточно общего случая показывается, что при наличии сторонних интересов распределение прав собственности между агентами оказывает существенное влияние на выбор результирующей стратегии управления фирмой. Преобладание сторонних интересов в целевых функциях владельцев фирмы может в отдельных случаях приводить к уменьшению получаемой ею прибыли и, в конечном счете, к снижению ее капитализации.

В этих условиях нетривиальной становится задача определения системы прав собственности, обеспечивающей эффективное управление фирмой. В статье эта задача решается для случая, когда сторонние интересы собственников представляют стоимость долей участия в других фирмах. Выявлена оптимальная структура прав собственности, позволяющая минимизировать влияние конфликта, вызванного наличием сторонних интересов.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. Во втором разделе описывается обобщенная модель управления системой фирм при распределенных правах собственности и формулируются утверждения об их оптимальной структуре. В третьем разделе рассматривается пример использования этой модели применительно к анализу функционирования дуополии Курно при различных распределениях прав собственности. В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

## 2. Описание модели

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из  $l$  фирм, права собственности на которые распределены между  $k$  агентами. Под «правом собственности» в рамках данной модели будем понимать совокупность прав владения, дающих агенту возможность получения соответствующей доли стоимости фирмы, и прав контроля, обеспечивающих возможность участия в управлении ею. Распределение прав собственности будем задавать матрицей  $\Theta$  размерности  $k \times l$ , элементы которой  $\theta_{ij}$

описывают долю участия  $i$ -го агента в собственном капитале  $j$ -й фирмы. Будем далее обозначать через  $\theta_{\bullet j} = (\theta_{1j}, \dots, \theta_{kj})$  распределение прав собственности на  $j$ -ю фирму, а через  $\theta_{i\bullet} = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{il})$  набор долей участия в фирмах, которыми обладает  $i$ -й агент.

Каждый собственник максимизирует свое благосостояние, представляющее собой суммарную стоимость долей участия, которыми он владеет:

$$W_i(\Theta, \mathbf{C}) = \sum_{j=1}^l \theta_{ij} C_j = \theta_{i\bullet}^T \mathbf{C}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_l)$  – вектор рыночных стоимостей фирм, верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования (все вектора будут рассматриваться далее как столбцы).

На практике оценка рыночной стоимости объектов экономики может осуществляться с использованием трех подходов, отражающих различные аспекты ее формирования: доходного, сравнительного и затратного (ФСО-1, 2007). Для измерения благосостояния собственника в данном случае наиболее подходящим представляется использование доходного подхода, согласно которому фирма рассматривается как актив, основной функцией которого является генерация дохода для своих владельцев. Величина потенциального дохода в каждый момент времени  $t$  определяется свободным денежным потоком фирмы  $\Phi_j(t, \tilde{a}_j, \mathbf{y})$ , зависящим от выбранной стратегии управления  $\tilde{a}_j$  и вектора внешних факторов  $\mathbf{y}$ , в том числе случайных. При этом рыночная стоимость фирмы отождествляется с чистой приведенной стоимостью генерируемого ею свободного денежного потока:

$$C_j(\tilde{a}_j, \mathbf{y}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_j^t \Phi_j(t, \tilde{a}_j, \mathbf{y}), \quad (2)$$

где  $\beta_j$  – коэффициент дисконтирования денежного потока, отражающий межвременное изменение стоимости денег.

На денежный поток фирмы, а следовательно, и на ее рыночную стоимость непосредственное влияние оказывают управленческие решения, принимаемые ее собственниками. Обозначим множество альтернатив по управлению  $j$ -й фирмой через  $A_j$ . Декартово произведение  $A = A_1 \otimes \dots \otimes A_l$  представляет множество всевозможных наборов стратегий управления всеми фирмами в данной системе. Каждый агент формирует оптимальную с точки зрения максимизации своего благосостояния  $W_i$  стратегию управления  $\mathbf{a}_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{il})$ . Набор стратегий всех агентов в системе образует матрицу управления  $\mathbf{A}$  размерности  $k \times l$ . Обозначим  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{A}$  через  $\mathbf{a}_{\bullet j} = (a_{1j}, \dots, a_{kj})$ . Он представляет собой профиль решений, предлагаемых всеми агентами для управления  $j$ -й фирмой. При этом выбор управленческого решения, которое будет реализовано, предполагает использование некоторой корпоративной процедуры, агрегирующей индивидуальные предложения владельцев  $a_{ij}$  в коллективное решение. Эта процедура может регламентироваться законодательством и уставными документами фирмы<sup>2</sup>. На практике широко используется голосование, при котором каждый собственник располагает числом голосов, пропорциональным его доле участия  $\theta_{ij}$ .

<sup>2</sup>В России основными нормативными правовыми актами, регламентирующими процедуры согласования решений собственников, являются Федеральные законы № 208-ФЗ от 26.12.1995 «Об акционерных обществах» и № 14-ФЗ от 08.02.1998 «Об обществах с ограниченной ответственностью».

Формально процедуру агрегирования предпочтений собственников можно представить в виде отображения, ставящего в соответствие профилю решений  $\mathbf{a}_{\bullet j}$  и распределению прав собственности на фирму  $\theta_{\bullet j}$  реализуемое управленческое решение  $\tilde{a}_j$ :

$$\tilde{a}_j = R_j(\theta_{\bullet j}, \mathbf{a}_{\bullet j}). \quad (3)$$

Помимо управленческого решения  $\tilde{a}_j$ , рыночная стоимость фирмы определяется также внешними факторами  $\mathbf{y}$ , в том числе деятельностью других фирм. Это воздействие осуществляется опосредовано, через изменение равновесий на рынках ресурсов и готовой продукции, на которых фирма присутствует в качестве продавца или покупателя.

В связи с этим среди воздействующих на денежный поток фирмы внешних факторов  $\mathbf{y}$  в выражении (2) могут быть выделены реализуемые решения по управлению другими фирмами. Запишем суммарное воздействие реализуемых управленческих решений  $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_l)$  на рыночные стоимости фирм в виде отображения  $\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{a}})$ . Тогда вектор критериев эффективности собственников (1) можно записать как функцию от реализуемых решений:

$$\mathbf{W}(\Theta, \tilde{\mathbf{a}}) = \Theta \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (4)$$

Таким образом, в рассматриваемой модели выделяются два типа взаимодействий: внутренняя конкуренция собственников в рамках каждой из фирм, параметры которой задаются отображениями  $R_j$ , и внешняя конкуренция фирм на рынке, описываемая отображениями  $C_j$ .

Соответственно, равновесие в этой системе может рассматриваться как суперпозиция равновесий во внутренней и внешней конкуренции. Определим суммарное воздействие системы прав собственности  $\Theta$  на свойства этих равновесий.

С учетом выражения (3) критерии эффективности (4) могут быть преобразованы к виду

$$\widehat{\mathbf{W}}(\Theta, \mathbf{A}) = \mathbf{W}(\Theta, \mathbf{R}(\Theta, \mathbf{A})) = \Theta \mathbf{C}(\mathbf{R}(\Theta, \mathbf{A})), \quad (5)$$

где  $\mathbf{R}(\Theta, \mathbf{A}) = (R_1(\theta_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 1}), \dots, R_l(\theta_{\bullet l}, \mathbf{a}_{\bullet l}))$ .

Выражения (5) определяют семейство некооперативных игр  $k$  лиц  $\Gamma(\Theta)$ , параметризованное распределением прав собственности  $\Theta$ . Каждый агент в этой игре оптимизирует свой критерий  $\widehat{W}_i(\Theta, \mathbf{A})$  по стратегии, представляющей собой вектор управленческих решений  $\mathbf{a}_{i\bullet} \in A$ .

Пусть  $\mathbf{A}_{-i}$  – набор стратегий всех агентов, кроме  $i$ -го. Обозначим наилучший ответ  $i$ -го агента на стратегии остальных при заданном распределении прав собственности  $\Theta$  через  $\mathbf{a}_{i\bullet}^*(\mathbf{A}_{-i}, \Theta)$ :

$$\mathbf{a}_{i\bullet}^*(\mathbf{A}_{-i}, \Theta) = \arg \max_{\mathbf{a}_{i\bullet} \in A} \widehat{W}_i(\Theta, \mathbf{A}).$$

В дальнейшем анализе будем предполагать, что отображения  $\mathbf{a}_{i\bullet}^*(\mathbf{A}_{-i}, \Theta)$  обладают свойствами, обеспечивающими существование и единственность в данной игре равновесия Нэша<sup>3</sup>  $\mathbf{A}^*(\Theta)$ .

---

<sup>3</sup>Требование единственности равновесной матрицы управления может представляться излишне ограничительным. В частности, если отображение  $\mathbf{R}$  таково, что реализуемое управленческое решение не зависит от действий некоторого агента, в системе существует множество равновесий, отличающихся только стратегией данного агента и эквивалентных с точки зрения управления фирмами и благосостояния всех сторон. Все изложенные результаты остаются справедливыми и в этом случае.

Тогда полное воздействие распределения прав собственности  $\Theta$  на реализуемые решения по управлению входящими в систему фирмами может быть описано отображением

$$\tilde{\mathbf{a}}(\Theta) = \mathbf{R}(\Theta, \mathbf{A}^*(\Theta)), \quad (6)$$

а на благосостояние агентов – отображением

$$\tilde{\mathbf{W}}(\Theta) = \widehat{\mathbf{W}}(\Theta, \mathbf{A}^*(\Theta)).$$

Теперь может быть дано формальное определение понятию эффективности распределения прав собственности.

Обозначим через  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)$  вектор суммарных долей в собственном капитале фирм, которыми владеют агенты в рассматриваемой системе:

$$x_j = \sum_{i=1}^k \theta_{ij}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (7)$$

Определим *коллективное благосостояние собственников* в данной системе как сумму критериев эффективности всех входящих в нее агентов:

$$\widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^k W_i(\Theta, \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (8)$$

Обозначим через  $\tilde{U}(\Theta)$  коллективное благосостояние собственников в равновесии  $\mathbf{A}^*(\Theta)$ , соответствующем распределению прав собственности  $\Theta$ :

$$\tilde{U}(\Theta) = \widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}(\Theta)) = \sum_{i=1}^k \tilde{W}_i(\Theta),$$

где  $\tilde{\mathbf{a}}(\Theta)$  задается выражением (6).

Будем говорить, что распределение прав собственности  $\Theta$  является *эффективным*, если оно максимизирует равновесное коллективное благосостояние собственников  $\tilde{U}(\Theta)$ .

Определенная таким образом эффективность показывает, насколько то или иное распределение прав собственности позволяет реализовать потенциал приращения стоимости, заложенный в рассматриваемой экономической системе.

Наличие внутренней или внешней конкуренции в системе снижает коллективное благосостояние собственников. Рыночная конкуренция между фирмами будет наиболее острой в ситуации «одна фирма – один собственник», когда владельцы фирм не имеют ни общих интересов, ни общих управляемых параметров. При этом внутренняя конкуренция собственников в рамках каждой фирмы отсутствует. Любое отклонение от данной ситуации приводит к возможности координации управления частью фирм, а следовательно к снижению конкуренции на рынке.

Воздействие изменений прав собственности на внутрифирменную конкуренцию не так однозначно: с одной стороны, появляется некоторое совпадение интересов собственников, с другой – возможности для участия в управлении конкурирующими фирмами. В результате, в зависимости от соотношения сторонних интересов владельцев и располагаемых ими прав контроля может складываться различный уровень внутрифирменной конкуренции.

Ситуация, при которой внутрифирменная конкуренция минимальна, возникает если критерии эффективности всех собственников  $W_i$  пропорциональны друг другу.

При этом все фирмы, входящие в рассматриваемую систему, управляются исходя из максимизации единого критерия, то есть минимизируется также и внешняя рыночная конкуренция.

Критерии собственников в рассматриваемой модели будут пропорциональны друг другу, если распределение прав собственности является *однородным*, то есть удовлетворяет условиям

$$\theta_{ij} = r_i \theta_{1j}, \quad \forall i = 2, \dots, k, \quad \forall j = 1, \dots, l, \quad (9)$$

где  $r_i > 0$  – коэффициент пропорциональности, не зависящий от номера фирмы.

При однородных правах собственности  $\Theta^0$  критерий эффективности  $i$ -го агента будет иметь вид:

$$\widehat{W}_i(\Theta^0, \mathbf{A}) = r_i \widehat{W}_1(\Theta^0, \mathbf{A}) \quad \forall i > 1,$$

в связи с чем все функции  $\widehat{W}_i(\Theta^0, \mathbf{A})$  будут достигать своего максимума на одной и той же матрице управления.

Из (9) следует, что любое однородное распределение прав собственности  $\Theta^0$  может быть задано  $(l + k - 1)$  параметрами: долями, которыми владеет первый агент  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)$  и коэффициентами пропорциональности  $(r_2, \dots, r_k)$ :

$$\Theta^0 = \mathbf{r}\theta^T, \quad (10)$$

где  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$  (для единообразия положим далее  $r_1 = 1$ ).

Справедливо следующее представление однородных распределений прав собственности:

$$\Theta^0 = \rho \mathbf{x}^T, \quad (11)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)$  – вектор суммарных долей собственного капитала фирм, которыми владеют агенты (7);  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$  – неотрицательные коэффициенты, такие, что  $\sum_{i=1}^k \rho_i = 1$ .

Действительно, рассмотрим произвольное однородное распределение прав собственности  $\Theta^0$  и сконструируем вектор  $\rho$  следующим образом:

$$\rho_i = \frac{r_i}{\sum_{m=1}^k r_m}.$$

Разложение (10) может быть записано в виде:

$$\Theta^0 = \left( \sum_{i=1}^k r_i \right) \rho \theta^T. \quad (12)$$

С другой стороны, из (9) следует, что для любого  $j$  на однородном распределении выполнено

$$x_j = \sum_{i=1}^k \theta_{ij} = \theta_j \sum_{i=1}^k r_i,$$

откуда

$$\theta = \frac{\mathbf{x}}{\sum_{i=1}^k r_i}. \quad (13)$$

Подставляя выражение (13) в (12), получаем разложение (11).

Экономический смысл разложения (11) состоит в том, что при однородных правах собственности соотношение долей участия в различных фирмах, которыми владеет каждый агент, совпадает с таковым для системы в целом. При этом критерии эффективности агентов будут пропорциональны не только друг другу, но и коллективному благосостоянию собственников  $\widehat{U}$ . Действительно, пользуясь видом функций  $\mathbf{W}(\Theta, \tilde{\mathbf{a}})$  (5) и  $\widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}})$  (8), а также разложением (11), получим, что для любого реализуемого управленческого решения  $\tilde{\mathbf{a}}$  справедливо:

$$\mathbf{W}(\Theta^0, \tilde{\mathbf{a}}) = \Theta^0 \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{a}}) = \rho \mathbf{x}^T \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{a}}) = \rho \widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (14)$$

При достаточно слабых ограничениях на правило принятия решений  $\mathbf{R}$  можно доказать, что однородные распределения прав собственности являются эффективными в рассматриваемой системе. Предположим, что отображение  $\mathbf{R}$  удовлетворяет условию единогласия: если все собственники предлагают одно и то же управленческое решение, то оно и будет реализовано<sup>4</sup>.

Рассмотрим управленческое решение  $\tilde{\mathbf{a}}^*$ , доставляющее максимум коллективному благосостоянию  $\widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}})$ . Сконструируем матрицу управления  $\mathbf{A}^*$  таким образом, что  $\mathbf{a}_{i\bullet} = \tilde{\mathbf{a}}, i = 1, \dots, k$ .

Тогда из условия единогласия

$$\tilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{R}(\Theta^0, \mathbf{A}^*).$$

Докажем, что при любых однородных правах собственности  $\Theta^0$  матрица управления  $\mathbf{A}^*$  представляет собой равновесие Нэша в игре  $\Gamma(\Theta^0)$ . Предположим, что  $i$ -й агент изменил свою стратегию таким образом, что новая матрица управления  $\mathbf{A}'$  приводит к вектору реализуемых управленческих решений  $\tilde{\mathbf{a}}'$ :

$$\tilde{\mathbf{a}}' = \mathbf{R}(\Theta^0, \mathbf{A}').$$

Тогда из (14) получим:

$$\widehat{W}_i(\Theta^0, \mathbf{A}^*) = W_i(\Theta^0, \tilde{\mathbf{a}}^*) = \rho_i \widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}^*) \geq \rho_i \widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}') = W_i(\Theta^0, \tilde{\mathbf{a}}') = \widehat{W}_i(\Theta^0, \mathbf{A}'),$$

то есть, действительно,  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(\Theta^0)$ .

Тогда из вида функции  $\tilde{U}(\Theta)$  следует, что

$$\tilde{U}(\Theta^0) = \max_{\Theta} \tilde{U}(\Theta), \quad (15)$$

то есть однородные права собственности максимизируют коллективное благосостояние собственников (8).

Выполнение условия (15) позволяет говорить об эффективности по Парето однородных распределений прав собственности в экономике чистого обмена, «инкапсулирующей» данную систему.

**Утверждение 1.** *Рассмотрим экономику чистого обмена, состоящую из  $k$  агентов с функциями полезности  $\widehat{W}_j(\Theta)$ , товарами в которой являются доли в правах собственности на  $l$  фирм. Однородные распределения прав собственности являются эффективными по Парето в такой экономике.*

<sup>4</sup>Условие единогласия может не выполняться, например, если рассматриваемые агенты обладают миноритарными пакетами акций. В этом случае реализуемое управленческое решение может определяться интересами мажоритарных акционеров.

**Доказательство** проведем от противного. Рассмотрим однородное распределение  $\Theta^0$  и предположим, что нашлось другое распределение  $\Theta$ , такое, что для любого агента  $i = 1, \dots, k$  выполнено

$$\widetilde{W}_i(\Theta) \geq \widetilde{W}_i(\Theta^0), \quad (16)$$

и хотя бы одно неравенство строгое.

Суммируя выражения (16) по всем агентам, получим

$$\widetilde{U}(\Theta) > \widetilde{U}(\Theta^0),$$

что противоречит условию (15). ■

С другой стороны, однородные распределения прав собственности слабо доминируют по Парето любое другое распределение. Действительно, пусть имеется некоторое начальное распределение прав собственности  $\Theta$ . Опишем структуру однородного распределения  $\Theta^0$ , дающего всем агентам в системе полезность, не меньшую чем  $\Theta$ .

Представим изменение равновесия в системе как результат действия двух процессов: перераспределения прав собственности при фиксированном реализуемом управленческом решении  $\tilde{\mathbf{a}}(\Theta^0)$  и изменения реализуемого управленческого решения при новых правах собственности  $\Theta^0$ .

На первом этапе для любого начального распределения прав собственности  $\Theta$  определим однородное распределение прав собственности  $\Theta^0$ , не изменяющее благосостояния агентов при фиксированном управленческом решении:

$$\mathbf{W}(\Theta^0, \tilde{\mathbf{a}}(\Theta)) = \widetilde{\mathbf{W}}(\Theta). \quad (17)$$

Воспользуемся для этого разложением однородных прав собственности (11). Так как суммарные доли участия агентов  $\mathbf{x}$  фиксированы, для нахождения вида  $\Theta^0$  достаточно определить вектор  $\rho$ . Пользуясь тождеством (14), получим:

$$\mathbf{W}(\Theta^0, \tilde{\mathbf{a}}(\Theta)) = \rho \widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}(\Theta)) = \rho \widetilde{U}(\Theta). \quad (18)$$

Из (17) и (18) нетрудно получить, что коэффициенты  $\rho$  в разложении (11) для распределения  $\Theta^0$  будут иметь вид

$$\rho = \frac{\widetilde{\mathbf{W}}(\Theta)}{\widetilde{U}(\Theta)}. \quad (19)$$

Далее покажем, что выбор агентами матрицы управления  $\mathbf{A}^*(\Theta^0)$  при распределении  $\Theta^0$  не уменьшает их благосостояния по сравнению с  $\widetilde{\mathbf{W}}(\Theta)$ .

Действительно, из (15), (17) и (18) следует, что для любого  $i$ :

$$\widetilde{W}_i(\Theta) = W_i(\Theta^0, \tilde{\mathbf{a}}(\Theta)) = \rho_i \widetilde{U}(\Theta) \leq \rho_i \widetilde{U}(\Theta^0) = \widetilde{W}_i(\Theta^0). \quad (20)$$

т.е. благосостояние любого агента  $i$  при однородных правах собственности  $\Theta^0$  будет не ниже, чем при начальном распределении  $\Theta$ .

Таким образом, доказан следующий результат.

**Утверждение 2.** *Для любого распределения прав собственности  $\Theta$  найдется слабо доминирующее его по Парето однородное распределение прав собственности.*

При строгой вогнутости функции коллективного благосостояния собственников  $\tilde{U}(\Theta)$  неравенство (20) выполняется как строгое, поэтому однородные права собственности будут являться единственными эффективными по Парето распределениями в данной экономике обмена.

Таким образом, однородные права собственности в наибольшей степени сглаживают конфликт интересов владельцев в рассматриваемой модели и обеспечивают эффективность режима управления системой фирм с точки зрения собственников. К сожалению, этот режим управления подразумевает функционирование всей системы фирм как единой монополии, что приводит к неэффективности соответствующих ему рыночных равновесий с точки зрения общества в целом.

### 3. Пример: анализ олигополии Курно

Проиллюстрируем применение изложенной выше модели к оценке эффективности деятельности фирм на олигополистическом рынке при перекрестном владении их долями.

Рассмотрим систему, состоящую из двух агентов и двух предприятий. Первый агент владеет 100% капитала первой фирмы и долей  $\theta$  в капитале второй фирмы, второй агент владеет долей  $(1 - \theta)$  в капитале второй фирмы, то есть матрица распределения прав собственности  $\Theta$  в данной системе имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 - \theta \end{pmatrix}.$$

Предположим, что фирмы конкурируют по Курно на рынке однородного товара. Для простоты будем считать, что предельные издержки фирм  $c$  одинаковы и постоянны. Функция спроса на продукцию фирм линейна:

$$P(\tilde{\mathbf{a}}) = 1 - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2,$$

где  $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$  – вектор управлений, представляющих объемы выпуска продукции первой и второй фирмами.

Функции прибыли производителей в этой модели имеют вид

$$\Pi_j(\tilde{\mathbf{a}}) = (P(\tilde{\mathbf{a}}) - c)\tilde{a}_j.$$

Решения об объемах выпуска  $\tilde{a}_j \geq 0$  принимаются собственниками фирм. Объем  $\tilde{a}_1$  определяется первым агентом единолично, т.е.

$$\tilde{a}_1 = a_{11}.$$

Величина  $\tilde{a}_2$  представляет собой средневзвешенное предложений собственников с весами, соответствующими располагаемым ими долям в капитале фирмы:

$$\tilde{a}_2 = \theta a_{12} + (1 - \theta)a_{22},$$

где  $a_{12}$  и  $a_{22}$  – предлагаемый первым и вторым собственником объем производства.

Пусть денежный поток владельцев фирмы  $j$   $\Phi_j(t, \tilde{\mathbf{a}})$  совпадает с чистой прибылью  $\Pi_j(\tilde{\mathbf{a}})$ . Предполагая стационарность потока прибыли во времени, из (2) получим, что стоимость фирмы  $j$  пропорциональна величине чистой прибыли:

$$C_j(\tilde{\mathbf{a}}) = \frac{\Pi_j(\tilde{\mathbf{a}})}{1 - \beta}.$$

В связи с этим критерии эффективности собственников (4) могут быть с точностью до положительного множителя представлены в виде

$$W_1(\Theta, \tilde{\mathbf{a}}) = \Pi_1(\tilde{\mathbf{a}}) + \theta\Pi_2(\tilde{\mathbf{a}}),$$

$$W_2(\Theta, \tilde{\mathbf{a}}) = (1 - \theta)\Pi_2(\tilde{\mathbf{a}}).$$

Изучим, каким образом будет изменяться режим функционирования фирм и рыночное равновесие в такой системе при изменении распределения прав собственности между агентами.

В ситуации «одна фирма – один собственник», соответствующей  $\theta = 0$ , получаем классическое равновесие Курно, матрица управления  $\mathbf{A}^*$  при котором имеет вид<sup>5</sup>:

$$a_{11}^* = a_{22}^* = \frac{1 - c}{3}, \quad (21)$$

а прибыль, получаемая каждой из фирм в равновесии, составит:

$$\Pi_j^* = \left(\frac{1 - c}{3}\right)^2 \quad j = 1, 2.$$

Другой крайний случай  $\theta = 1$  соответствует ситуации, когда обе фирмы имеют одного владельца, который будет вести себя как монополист, решая задачу:

$$W_1(\tilde{\mathbf{a}}) = \Pi_1(\tilde{\mathbf{a}}) + \Pi_2(\tilde{\mathbf{a}}) \rightarrow \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in A}.$$

Равновесием в этом случае будет матрица управления  $\mathbf{A}^*$ , такая, что

$$a_{11}^* + a_{22}^* = \frac{1 - c}{2}. \quad (22)$$

Теперь рассмотрим нетривиальные распределения прав собственности. Максимизируя функции  $W_1(\Theta, \tilde{\mathbf{a}})$  и  $W_2(\Theta, \tilde{\mathbf{a}})$  по стратегиям первого и второго агентов, соответственно, получим, что в равновесии при любом значении  $\theta < 1$  будет выполнено  $a_{12}^*(\Theta) = 0$ , то есть первый собственник пытается максимально снизить объем выпуска продукции второй фирмой, которая принадлежит ему не полностью. Значения остальных управляемых переменных задаются выражениями:

$$a_{11}^*(\Theta) = \frac{(1 - \theta)(1 - c)}{3 - \theta}, \quad (23)$$

$$a_{22}^*(\Theta) = \frac{1 - c}{(1 - \theta)(3 - \theta)}. \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что при  $\theta = 0$  объемы выпуска фирм совпадают с (21). При  $\theta \rightarrow 1$  величина  $\tilde{a}_1^*(\Theta) \rightarrow 0$ , а

$$\tilde{a}_2^*(\Theta) = (1 - \theta)a_{22}^*(\Theta) \rightarrow \frac{1 - c}{2},$$

т.е. к монопольному объему выпуска.

---

<sup>5</sup>Далее предполагается, что коэффициенты матрицы управления, значения которых не указаны, могут быть выбраны произвольным образом.

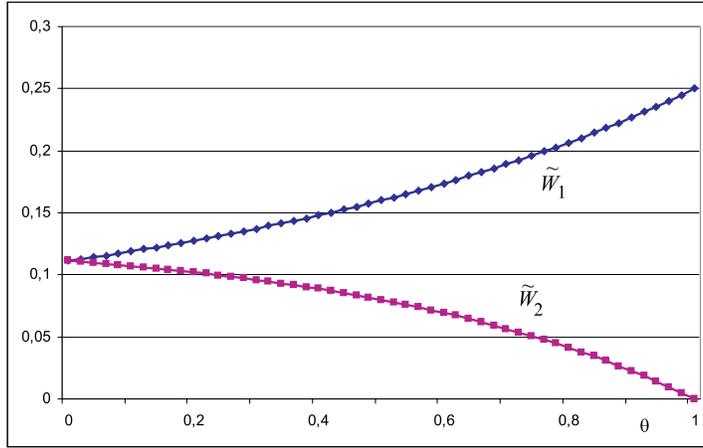


Рис. 1: Зависимость благосостояния агентов от распределения прав собственности

Прибыли фирм в равновесии составят

$$\tilde{\Pi}_1(\Theta) = \frac{(1-\theta)(1-c)^2}{(3-\theta)^2}, \quad \tilde{\Pi}_2(\Theta) = \left(\frac{1-c}{3-\theta}\right)^2, \quad (25)$$

а благосостояние собственников (рис. 1)

$$\tilde{W}_1(\Theta) = \left(\frac{1-c}{3-\theta}\right)^2, \quad \tilde{W}_2(\Theta) = \frac{(1-\theta)(1-c)^2}{(3-\theta)^2}.$$

Функция  $\tilde{W}_1$  выпукла по  $\theta$ , то есть с ростом доли первого агента во второй фирме его благосостояние увеличивается с возрастающим темпом. Дополнительный сверхлинейный прирост благосостояния обеспечивается ростом объема прав контроля первого агента, связанным с увеличением  $\theta$ , что дает ему возможность принимать более благоприятные для себя решения по управлению второй фирмой.

Для второго агента складывается обратная ситуация: принимаемые по мере роста  $\theta$  управленческие решения все в большей степени противоречат его интересам, в связи с чем  $\tilde{W}_2$  вогнута по  $\theta$ .

Суммарный объем выпуска фирм в данной системе составит

$$Q(\Theta) = \tilde{a}_1^*(\Theta) + \tilde{a}_2^*(\Theta) = \frac{(2-\theta)(1-c)}{(3-\theta)}.$$

Функция  $Q$  убывает с ростом  $\theta$  (рис. 2), то есть острота рыночной конкуренции между фирмами снижается, приближаясь к монопольной ситуации при  $\theta \rightarrow 1$ .

Таким образом при перераспределении прав собственности в рамках иерархической системы «собственники – фирмы – рынок» происходит перенос конкуренции с рыночного уровня на внутрикорпоративный, выражаясь уже не в борьбе фирм за рынок, а в борьбе их собственников за увеличение своего благосостояния. Мы будем называть это явление *вертикальным переносом конкуренции*.

Изучим далее вид однородных распределений прав собственности, минимизирующих внутрифирменную конкуренцию собственников. Рассмотрим произвольное

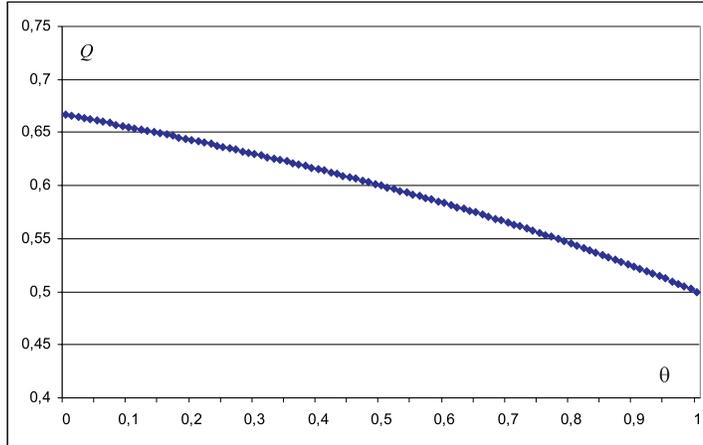


Рис. 2: Зависимость равновесного объема выпуска  $Q$  от распределения прав собственности

начальное распределение прав собственности  $\Theta$ . Применяя выражения (11), (19) и (25), можно получить однородное распределение прав собственности, эквивалентное  $\Theta^0$ :

$$\Theta^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-\theta} & \frac{1}{2-\theta} \\ \frac{1-\theta}{2-\theta} & \frac{1-\theta}{2-\theta} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, однородное распределение может быть получено путем обмена  $\left(\frac{1-\theta}{2-\theta}\right)$  доли в капитале фирмы 1, принадлежащей агенту 1, на  $\left(\frac{(1-\theta)^2}{2-\theta}\right)$  долю в капитале фирмы 2, принадлежащей агенту 2. Соотношение цен акций при таком обмене в точности равно соотношению равновесных прибылей фирм (25) и, соответственно, их рыночных стоимостей, то есть перераспределение будет справедливым с точки зрения обоих агентов.

При однородном распределении прав собственности  $\Theta^0$  решения будут приниматься агентами исходя из максимизации коллективного благосостояния:

$$\widehat{U}(\tilde{\mathbf{a}}) = \Pi_1(\tilde{\mathbf{a}}) + \Pi_2(\tilde{\mathbf{a}}).$$

Как было показано выше, точкой максимума в этом случае является назначение монопольного объема выпуска (22), при котором суммарная прибыль фирм составит  $\left(\frac{1-c}{2}\right)^2$ . Благосостояние агентов составит при этом

$$\widetilde{W}_1(\Theta^0) = \frac{1}{2-\theta} \left(\frac{1-c}{2}\right)^2, \quad \widetilde{W}_2(\Theta) = \frac{1-\theta}{2-\theta} \left(\frac{1-c}{2}\right)^2.$$

Видно, что после перераспределения прав собственности на объекты благосостояние агентов увеличилось по сравнению с исходной ситуацией (рис. 3). Рыночная конкуренция фирм при однородном распределении прав собственности отсутствует, вся рассматриваемая производственная система ведет себя на рынке как единый монополист.

#### 4. Заключение

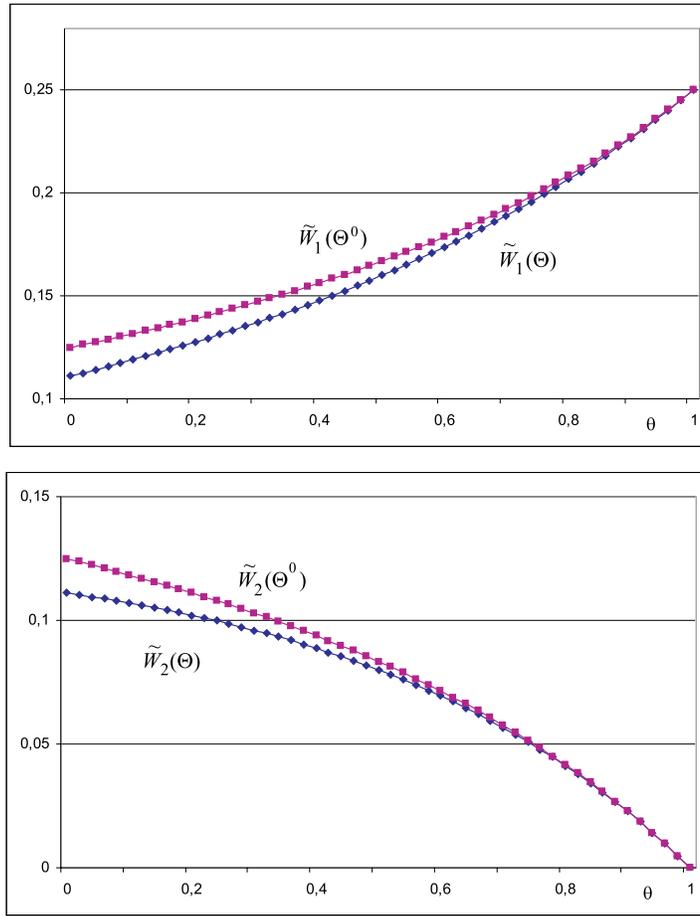


Рис. 3: Прирост благосостояния первого и второго агентов при переходе к однородному распределению прав собственности

Проведенное исследование показало, что в условиях, когда права собственности на фирму распределены между несколькими агентами с несовпадающими интересами, реализуемое управление ею не всегда определяется как решение задачи максимизации стоимости или прибыли, а представляет собой равновесный исход внутрифирменного конфликта собственников. Сформулированная в статье математическая модель экономической системы с распределенными правами собственности позволяет установить зависимость стратегий управления фирмами от структуры прав собственности и характера взаимоотношений между ними.

Для системы конкурирующих фирм показано, что формирование перекрестного владения ими сопровождается переносом конкуренции на внутрифирменный уровень, в результате чего происходит снижение эффективности рыночных равновесий. В работе определен вид однородных распределений прав собственности, минимизирующих внутрифирменную конкуренцию владельцев. Данные распределения эффективны по Парето в экономике обмена, товарами в которой являются доли в правах собственности на фирмы. В то же время они приводят к образованию моно-

полий на рынках производимых фирмами товаров.

Перспективным направлением дальнейших исследований экономических систем с распределенными правами собственности представляется анализ влияния организационных и экономических связей между фирмами на свойства стратегий управления ими. Полученные результаты могут найти применение при оценке эффективности создания интегрированных холдинговых структур в различных отраслях промышленности.

## Список литературы

- [1] Колесник Г.В., Волощук С.Д., Пономаренко А.И. Математическое моделирование воздействия структуры прав собственности на функционирование общественно-значимых объектов экономики // Вестник ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». – 2008. – № 1. – С. 77 – 86.
- [2] Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. В 2 т. Т. 1. – СПб.: Институт Экономическая школа, 2000.
- [3] Федеральный стандарт оценки «Общие понятия оценки, подходы к оценке и требования к проведению оценки (ФСО-1)». Утв. Приказом Минэкономразвития России от 20 июля 2007 г. № 256.
- [4] Grossman S., Hart O. The costs and benefits of ownership: a theory of vertical and lateral integration // J. of Political Economy. – 1986. – Vol. 94. – P. 691 – 719.
- [5] Hart O., Moore J. Property Rights and the Nature of the Firm // J. of Political Economy. – 1990. – Vol. 98. – No 6. – P. 1119 – 1158.
- [6] Jensen M., Meckling W. Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Cost, and Capital Structure // J. of Financial Economics. – 1976. – Vol. 3. – No 4. – P. 305 – 360.
- [7] Morck R., Shleifer A., Vishny R. Management Ownership and Market Valuation: an Empirical Analysis // J. of Financial Economics. – 1988. – Vol. 20. – No 1-2. – P. 293 – 315.
- [8] Müller H.M., Wärneryd K. Inside vs Outside Ownership: A Political Theory of the Firm // RAND J. of Economics. – 2001. – Vol. 32. – P. 527 – 541.
- [9] Shleifer A., Vishny R. Large Shareholders and Corporate Control // J. of Political Economy. – 1986. – Vol. 94. – No 3. – P. 461 – 488.
- [10] Stulz R. Managerial Control of Voting Rights: Financing Policies and the Market for Corporate Control // J. of Financial Economics. – 1988. – Vol. 20. – No 1-2. – P. 25 – 54.