



Munich Personal RePEc Archive

# **Stock crack detection using multifractal analysis (local and pointwise Hölder exponents): Stock Index of Mexico IPC and FX USD/MXN**

Rendón, Stephanie

UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México) Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración

6 January 2013

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/47699/>

MPRA Paper No. 47699, posted 27 Jun 2013 15:58 UTC

## **Detección de caídas en mercados financieros mediante análisis multifractal (exponentes locales y puntuales de Hölder): Índice accionario IPC y tipo de cambio USD/MXN**

El modelo multifractal ha demostrado medir bien la complejidad de los sistemas económicos porque puede describir una serie de tiempo financiera a través de su espectro multifractal; así este tipo de análisis ofrece la posibilidad de estudiar (entre otras características) la regularidad local de las series de tiempo la cual es útil en la detección a priori y a posteriori de las caídas fuertes en los mercados. La propuesta de este trabajo es mostrar que a través de la evolución de los exponentes de Hölder es posible estudiar la dinámica de los mercados financieros a través de la evolución de sus puntos irregulares. Para evaluar y probar lo anterior, se determinan los exponentes locales y puntuales de las series de tiempo históricas del índice IPC de México, y del tipo de cambio dólar americano/peso mexicano durante los periodos de cierres diarios de 1994-2013 y 1992-2013 respectivamente, y finalmente se muestra la posibilidad de anticipar y de detectar movimientos críticos en estas series de tiempo mediante la metodología propuesta.

Se obtuvo que la metodología aplicada a las series de tiempo estudiadas detecta efectivamente el comportamiento intrínseco de las series de tiempo y es capaz de detectar las caídas fuertes de los mercados estudiados, y que dicha metodología puede aplicarse previamente y posteriormente a una crisis. Esta herramienta resulta útil en el pronóstico de caídas en los mercados. Asimismo, se propone que el análisis con técnicas de análisis multifractal podría extenderse a otros mercados tales como monedas, bonos y otras bolsas, y coadyuvar en la detección previa y oportuna de caídas financieras, es decir, servir como herramienta de gestión de riesgo.

El presente documento se divide de la siguiente manera: Primero se resumen una sección de introducción, en la segunda parte se revisa la literatura actual, en la tercera sección se analiza detalladamente la metodología aplicada, en la cuarta parte se muestran y analizan los resultados obtenidos y finalmente la quinta sección resume las conclusiones. En la parte final se adjuntan los anexos y las referencias bibliográficas.

### **Introducción**

El objetivo principal de la presente investigación es evaluar y aplicar un indicador que predice puntos críticos de las series de tiempo financieras, con base en técnicas multifractales, la invención de este indicador se le atribuye a un grupo francés de investigación llamado "Groupe Fractales". Para el pronóstico de los cambios de precios agresivos, existe un algoritmo que calcula la regularidad de una serie de tiempo. Este algoritmo parte del supuesto de que antes de que ocurra un evento crítico la dinámica intrínseca de una serie de tiempo financiera cambia de forma radical. Este fenómeno es explicado cualitativamente como una reducción universal de horizontes de inversión al aproximarse el punto crítico, es decir los operadores o inversionistas con horizontes de tiempo de largo plazo, intentarán reducir sus posiciones lo más posible, para tener tiempo de cerrar su posición antes de que el mercado se vaya a pique, es decir, lleva a que el espectro de los horizontes se reduzca y como consecuencia se incrementa la regularidad de

la serie de tiempo. Si se calcula la regularidad de una serie de tiempo financiera determinada, se pueden pronosticar posibles puntos críticos en el futuro (Kuperin & Schastlivtsev).

Los modelos convencionales estadísticos financieros basados en supuestos de ergodicidad y estacionariedad no pueden analizar apropiadamente los “cracks” de mercados, precisamente porque las propiedades estadísticas de sus datos altamente no estacionarios son muy diferentes de las propiedades estadísticas de las estacionarias. Entonces, un modelo basado en datos obtenidos en tiempos estables y estacionarios no es de mucha utilidad al evaluar momentos de crisis.

Los sistemas complejos pueden ser divididos en dos categorías: los de equilibrio y los de no-equilibrio (Blackedge, 2008). Los sistemas complejos en equilibrio pueden conducir a estados críticos y mostrar estructuras fractales aleatorias en los que sus estadísticos poseen invariancia de escala. Por ejemplo, cuando los ferro magnetos son calentados y la temperatura se eleva, los spins de los electrones que contribuyen a ganar energía al campo magnético comienzan a cambiar de dirección. A cierta temperatura, los spins forman un campo de vector aleatorio, con media cero y ocurre una fase de transición en la que el campo magnético promedia cero. Pero el campo no sólo es aleatorio, es auto afín ya que su distribución estadística es la misma a diferentes escalas, sin importar las características de la distribución. Los sistemas complejos de no-equilibrio dan origen a estados críticos auto organizados, un ejemplo es el crecimiento de montículos de arena. Eventualmente, se generarán pequeñas avalanchas ocasionadas por la fuerza de gravedad. Los valores estadísticos espaciales y temporales de dichas avalanchas son invariantes de escala.

Los mercados financieros pueden ser considerados como sistemas de no-equilibrio (Blackedge, 2010) porque están constantemente siendo influenciados por transacciones que ocurren como resultado de la incorporación de información nueva sobre las empresas y el entorno. En los sistemas complejos, los elementos se adaptan al patrón que crean; en tanto los componentes reaccionan, el todo cambia, y en tanto el todo cambia los componentes reaccionan. Las transacciones de los mercados generalmente ocurren globalmente a una tasa de cientos o miles por segundo. Es la frecuencia y la naturaleza de estas transacciones las que dictan los índices de los mercados, de la misma forma que la frecuencia y la naturaleza de las partículas de la arena dictan la estadística de las avalanchas de las dunas de arena. Todos estos son ejemplos de fractales escalantes (Mandelbrot, 1971, Feder, 1988).

La relación entre los sistemas dinámicos, el caos y la economía es importante porque los sistemas dinámicos muestran que la aleatoriedad y el determinismo global pueden coexistir.

### **Revisión literaria**

De acuerdo al punto de vista académico de que los mercados son eficientes, sólo la información negativa relevante podría causar una crisis financiera (Samuelson 1965 y Fama (1970, 1991), sin embargo hasta ahora el paradigma lineal de la estructura de los mercados no puede explicar con exactitud los caídas que suceden con mucha frecuencia en los

mercados financieros. Los mercados han mostrado ser similares a sistemas dinámicos complejos (Johansen, Sornette & Ledoit, 2000). La idea de investigar y analizar a los mercados durante las épocas de crisis financieras está basada en la evidencia científica en física de que esos sistemas dinámicos complejos revelan sus propiedades mejor bajo condiciones de estrés que en circunstancias normales (Johansen *et als.*, 2000).

La investigación en los últimos treinta años ha dado diversos avances en cuanto a técnicas no lineales aplicadas a los mercados. En 1997 Mantegna y Stanley encontraron que las distribuciones financieras concuerdan con las distribuciones estables de Levi y que las colas de las distribuciones de las acciones en general describen comportamiento de leyes de potencia, es decir encontraron evidencia de escalamiento en sus investigaciones (Stanley y Mantegna 2001). También en 1997 Mandelbrot junto con otros autores desarrollaron un modelo multifractal de activos (Mandelbrot, Fisher y Calvet 1997); Peters (1991) y Hilborn (1994) también han publicado diversos libros y artículos de investigación con aplicaciones y modelos fractales y multifractales a las series de tiempo financieras.

Costa y Vasconcelos (2003) construyeron coeficientes de Hurst del mercado brasileño a partir de un modelo multifractal para pronosticar crisis en dicho mercado; Kuperin *et al.* utiliza los exponente de Hölder para analizar la crisis financiera de los Estados Unidos de 1987. Cornelis y Rossitsa (2004) analizan los patrones de los espectros multifractales de la crisis financiera de 1987 y concluyen que hay un cambio en la dinámica de los mercados antes de que ocurran las crisis.

Otros estudios como los de Sornette (2003) también demuestran las propiedades multifractales y su relación con los exponentes de Hölder. Johansen, Sornette & Ledoit (2000) encontraron que las oscilaciones log-periódicas aparecen en el precio de los activos justo antes de que ocurra una caída agresiva, esas oscilaciones se pueden detectar mediante análisis multifractal.

De acuerdo a Sornette, Johansen & Bouchaud (1998) la conducta de los mercados accionarios antes de una crisis se relaciona con la conducta volátil que precede a un conjunto de datos en estado de equilibrio. Esta observación habilita y hace posible la detección temprana (y de advertencia) de los cracks en los mercados financieros. Se sabe que un mercado financiero que funcione normalmente exhibe propiedades de un sistema dinámico complejo.

La siguiente Tabla 1 muestra las características y diferencias más notables entre la Hipótesis del Mercado Eficiente (HME) y la Hipótesis del Mercado Fractal (HMF)

Tabla 1: Diferencias más notables entre HME y HMF:

Hipótesis del Mercado Eficiente	Hipótesis del Mercado Fractal
Estadística Gaussiana- Retornos independientes normalmente distribuidos	Estadística No- Gaussiana. Los cambios en los precios no están distribuidos de forma normal. Pueden caer más rápido de lo que se elevan

Movimiento browniano: 0.50 o Raíz cuadrada	Movimiento fraccionario: Ley de potencia.
Procesos estacionarios	Procesos no estacionarios
No hay correlaciones históricas	Si hay correlaciones históricas
No hay memoria. Eventos pasados no influyen el presente o el futuro	Si exista memoria (los eventos están interconectados). Los inversionistas están influenciados por lo ocurrido. Sus expectativas están basadas en experiencias anteriores.
No se repiten los patrones a ninguna escala	Se repiten patrones en todas las escalas de tiempo (minutos, días, años)
Continuas y estables en todas las escalas	Se presentan discontinuidades en cualquier escala. (Por ej. Vuelos de Levy o eventos tipo cisnes negros)
Toda la información se refleja en los precios	Cada individuo interpreta la información de diferentes forma y en distintos momentos
Los inversionistas son aversos al riesgo, y son racionales	Los inversionistas pueden no actuar de forma racional, y pueden buscar riesgo cuando hay peligro de perder valor.

### **Análisis multifractal**

El análisis multifractal es relativamente reciente en el campo de estudio de las matemáticas (Feder, 1988). Al tener características universales sus aplicaciones no sólo son en las matemáticas o en la física, tiene aplicaciones en la lingüística, en la medicina, en la informática y por supuesto en la econofísica en el área de las finanzas.

Las crisis de los mercados sugieren que los cracks son precedidos por un incremento de susceptibilidad y señales precursoras similares a la inestabilidad crítica de la dinámica física de los fluidos, por eso el análisis de espectros multifractales puede revelar la existencia de un patrón precursor identificable.

### **Exponentes de Hölder**

Existen varias maneras de medir la regularidad de una función alrededor de un determinado punto. La más conocida es usando el exponente puntual de Hölder, pero existen otras como la del exponente local de Hölder.

Un exponente de Hölder da una medida de la regularidad de una señal y se usa para detectar la presencia de discontinuidad y cuándo ocurre dicha discontinuidad en una señal dinámica. Así, la regularidad de una señal está definida por el número de derivadas continuas que una señal posee. Primero, el origen del tiempo de variación del exponente de

Hölder se obtiene basándose en una transformada wavelet<sup>1</sup>. Como los puntos discontinuos no tienen derivadas continuas, estos puntos se identifican localizando puntos en el tiempo donde el valor de exponente de Hölder cae repentinamente. Luego, un indicador se desarrolla para cuantificar cuando los cambios en este exponente de Hölder son significativos (Sohn, Robertson & Farrar, 2002).

Los exponentes son una herramienta útil en procesamiento de señales e imágenes, además de tener aplicaciones en las finanzas. Adicionalmente, la distribución estadística de los exponentes de Hölder es usada para caracterizar señales naturales a través de análisis multifractal.

Las estructuras o sistemas complejos singulares e irregulares usualmente poseen información esencial en su señal; para caracterizar estas estructura singulares es necesario cuantificar la regularidad local de la señal  $f(t)$ .

## **Metodología**

Existen diversas técnicas que han sido desarrolladas para estimar los exponentes locales y puntuales de Hölder, pero no todos dan resultados satisfactorios. Estimar un indicador de irregularidad local sobre datos discretos es una tarea difícil. Una manera de obtener resultados robustos es utilizar una aproximación paramétrica. Los métodos no paramétricos (que son muchos) generalmente dan una estimación correcta sólo cuando algunas condiciones técnicas se cumplen. El método utilizado para los exponentes puntuales y locales en este trabajo están basados en la evaluación de las oscilaciones.

Para efectos de la presente investigación se utilizó el programa de MATLAB (fraclab) en la determinación de los exponentes locales y puntuales de Hölder. La metodología utilizada fue en base a las oscilaciones.

## **Exponente puntual**

La gran diferencia entre la estimación del exponente puntual y el local, es que el local no compara la oscilación con el tamaño de su alrededor, sino con la distancia entre dos puntos donde existe la oscilación, o dicho de otra manera, el exponente puntual caracteriza la regularidad de la función en un punto dado, y el exponente local se relaciona con la regularidad de una función determinada, alrededor de un punto dado

Un punto altamente irregular en una función está caracterizado por un valor bajo del exponente puntual de Hölder, mientras que las partes regulares y suavizadas de una función tiene valores más altos en sus exponentes, es decir, este exponente cuantifica la rugosidad de la función de una gráfica. Cuando el valor tiende a cero, es indicador de alta

---

<sup>1</sup> wavelet: es una función matemática que descompone una señal en sus partes, usando como base un grupo de otras funciones wavelets. Una wavelet da información de la señal analizada tanto en la frecuencia como en el dominio del tiempo, simultáneamente.

irregularidad en una señal, lo que se interpreta como un indicador de inestabilidad en los mercados financieros (Figliola, Rosenblatt & Serrano, 2012).

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  .. y...  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f$  no es diferenciable en  $x_0$ .

El exponente puntual de Hölder de  $f$  en  $x_0$  es el número real:

$$\alpha_p(x_0) = \liminf_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\log |f(x_0 + h) - f(x_0)|}{\log \|h\|} \quad (8)$$

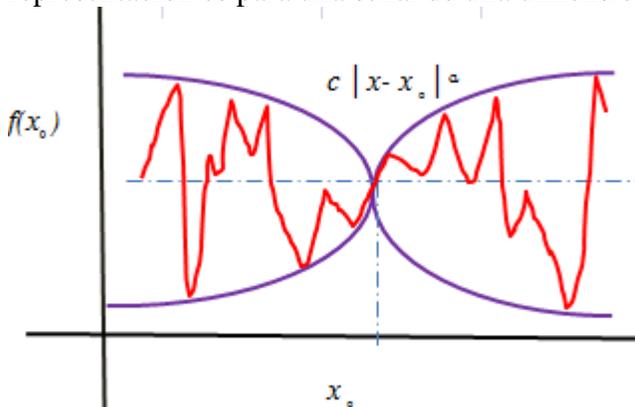
donde  $\| \cdot \|$  denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ . Esta definición se ilustra en la siguiente Figura 2 que establece que, para cualquier  $\mathcal{E} > 0$ , la gráfica de  $f$ , en una región suficientemente pequeña de  $x_0$ , está incluida en la ecuación:

$$\pm |x - x_0|^{\alpha_p(x_0) - \mathcal{E}} \quad (9)$$

Pero no en la ecuación:

$$\pm |x - x_0|^{\alpha_p(x_0) + \mathcal{E}} \quad (10)$$

Figura 1: Envolvimiento de Hölder en una señal no diferenciable  $f$  en un punto  $x_0$ . Esta representación es para una señal de una dimensión.



La ecuación 8 da un vínculo de la cantidad por la cual una señal varía, u oscila, alrededor de un punto  $x_0$  dentro de una región  $B(x_0, n)$ . A partir de la definición y la Figura 1, se puede ver que una pequeña  $\alpha$  cercana a 0 se traduce en una señal altamente variable, mientras que una  $\alpha$  cercana a uno, corresponde a una señal más suave.

La razón para la restricción:  $f$  que no es diferenciable en  $x_0$ , es la siguiente. Suponer que

$f(x) = ||x|| + ||x||$ , entonces la definición de arriba conduciría a un exponente igual a 1 en  $x_0 = 0$ . De cualquier forma, estamos interesados en la parte irregular de la función, esto es, el segundo término.

Para poder aplicar el exponente puntual de Hölder, se necesita tener métodos de estimaciones robustas y esto representa una tarea difícil, porque  $\alpha$  está definido por un límite que requeriría una resolución infinita para poder ser determinado perfectamente. Hay dos clases importantes de estimadores; el primero es el paramétrico. Mediante esta metodología se asumen ciertas cosas sobre la naturaleza de la señal. Probablemente el modelo paramétrico más popular es el del movimiento browniano multifraccionario y sus extensiones porque teóricamente describe adecuadamente los fenómenos, según Ayache, y Lévy (2004).

Y por otro lado, existen los modelos no paramétricos, dentro de los cuales se enmarca la presente investigación. Dentro de los modelos no paramétricos más conocidos utilizados para determinar exponentes de Hölder en series de tiempo, están los métodos basados en wavelets; sin embargo este tipo de estimadores usualmente arrojan resultados razonablemente buenos cuando las wavelets satisfacen ciertas propiedades de irregularidad específicas, y cuando la señal no es oscilatoria (Jaffard, 2004).

Según Trujillo, Legrand, Olague y Lévy-Vehel (2012) Un método acertado para estimar  $\alpha$  sería usar los incrementos y directamente aplicar la ecuación 8, explicada líneas arriba, sin embargo se deben hacer ajustes y reescribirla tomando en cuenta las oscilaciones. Sea la siguiente expresión la definición de oscilación:

La oscilación de  $f$  en una bola centrada en  $t$  es:

$$osc_{\tau}(t) = \sup_{||t-t'|| \leq \tau} f(t') - \inf_{||t-t'|| \leq \tau} f(t') \quad (11)$$

Se puede expresar el exponente de Hölder en términos de las oscilaciones (cuando es menor a 1).

Entonces, una definición alternativa del exponente de Hölder es:

$$\alpha_f(t) = \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log osc_{\tau}(t)}{\log \tau} \quad (12)$$

Para estimar  $\alpha_f(t)$  con esta fórmula, se asume la siguiente relación para una  $\tau$  suficientemente pequeña:

$$\log osc_{\tau}(t) = \alpha_f(t) \log \tau + k$$

donde  $k$  es una constante. Se estima  $\alpha_f(t)$  como la pendiente de la regresión de los mínimos cuadrados del logaritmo de la oscilación como función del logaritmo de tamaño  $\tau$ .

Los parámetros en este método basado en las oscilaciones son los tamaños mínimos y máximos de la región  $\tau$ , y la base de incremento  $\tau$  entre sus valores extremos.

### **Exponente local**

Para determinar el exponente local de Hölder, primero definimos (Agaev, Kuperin 2001):

$f(x)$  pertenece a la clase de funciones de Hölder del orden de  $\alpha$ , si se cumple:

$$|f(t+h) - f(t)| < consts \times h^\alpha ; t, h, \in \mathbb{R}; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1)$$

Una función de Hölder es aquella que asocia a cada punto un exponente de Hölder.

En el caso de que  $\alpha$  dependa de  $t$ , por ejemplo:  $\alpha \rightarrow \alpha(t)$ , entonces  $\alpha(t)$  es un exponente local de Hölder.

Cuando  $\alpha = 1$ , coincide con la clase diferenciables de funciones; cuando  $\alpha = 0$ , coincide con la clases de funciones de discontinuidad no removible, por lo tanto, la clase de funciones de Hölder está en un punto intermedio entre las funciones continuas y las no continuas y el exponente de Hölder es una medida de la función de irregularidad.

Para obtener un exponente local, se parte de información en una dimensión:

Sea  $Y(t)$  un precio, luego la medida asociada con las series de tiempo estudiadas puede ser definida:

$$X(t, \Delta t) = (\ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t))^2 \quad (2)$$

Luego se divide el intervalo de tiempo  $[0, T]$  entre  $N$  intervalos del tamaño de  $\Delta t$  y se define la suma:

$$Z_r(T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} |X(i \times \Delta t, \Delta t)|^r \quad (3)$$

En términos de una muestra, se puede definir la siguiente función de escala:

$$\tau(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln Z_r(T, \Delta t)}{\ln \Delta t} \quad (4)$$

El espectro de la dimensión fractal de los retornos logarítmicos cuadrados,  $X(t, I)$  se define como:

$$D_r = \frac{\tau(r)}{r-1} \quad (5)$$

Finalmente, para obtener el exponente local de Hölder se debe diferenciar  $\tau(r)$

$$\alpha = \frac{d \tau(r)}{dr} \quad (6)$$

Entonces se puede determinar si la serie de tiempo es multifractal o no. Si  $D_r \neq D_0$  para  $r$  real, entonces  $X(t,1)$  es multifractal. Para series de tiempo monofractales la función de escala  $\tau(r)$  sólo es lineal. Las series multifractales se pueden caracterizar por sus exponentes de Hölder locales:

$$\alpha(t) = X(t, \Delta t) \sim (\Delta t)^{\alpha(t)} \quad (7)$$

En el modelo clásico de precios de activos:  $\alpha(t) = 1$

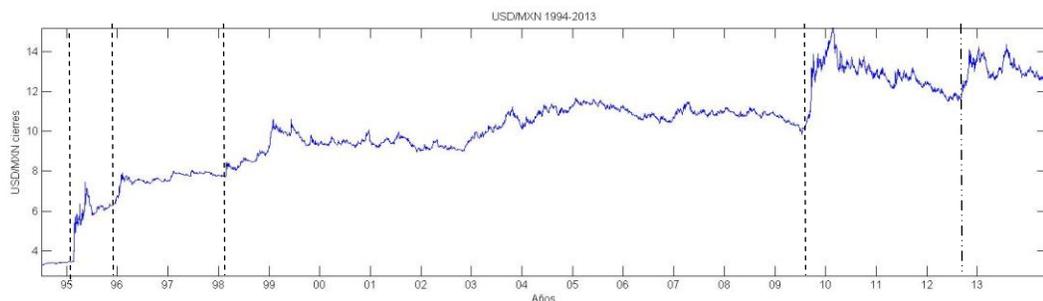
Un exponente local que resulte entre 0 y 1 significa que la señal es continua pero no diferenciable a un cierto punto. Adicionalmente, el valor más bajo del exponente significa mayor irregularidad en la señal.

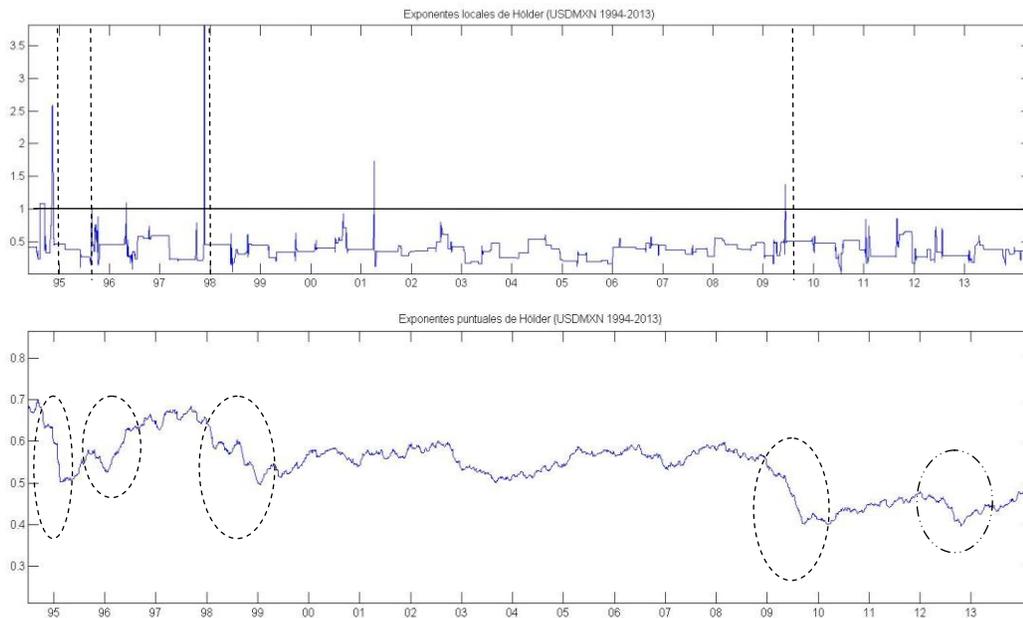
## Resultados

Se analizaron datos de cierres diarios obtenidos a través de la plataforma de Bloomberg, de los cierres oficiales diarios tanto del IPC como del tipo de cambios dólar/peso mexicano. Los periodos de tiempo analizados fueron 1992 al 28 de febrero de 2013. En estos resultados se muestra que existen patrones que dan una alerta de futura crisis y que dichos patrones han mostrado funcionar bien en los datos analizados.

Es interesante comparar los resultados obtenidos mediante el método oscilatorio mencionado arriba tanto los exponentes puntuales como los locales obtenidos para la serie de tiempo del IPC, y del tipo de cambio USD/MXN porque se observó que generalmente el exponente puntual resulta mucho menor que el local y varía más suavemente que el local.

Figura 2: Tipo de cambio USD/MXN por el periodo de 1994-2013, exponente locales de Hölder y exponentes puntuales de Hölder





La Figura 2, consta de tres gráficas, en ellas se señalan con líneas verticales punteadas continuas y discontinuas las épocas de crisis que fueron detectadas exitosamente con los exponentes locales y puntuales de Hölder. Las líneas y el círculo discontinuo son caídas detectadas por los exponentes puntuales, que no detectaron los exponentes locales.

La primer gráfica muestra los cierres cambiarios del tipo de cambio dólar/peso mexicano.

En la segunda gráfica se muestran los exponentes locales de Hölder correspondientes a cada periodo. Las líneas rectas punteadas continuas y discontinuas muestran el momento en el que se dio una crisis, o que se dieron cambios fuertes en la paridad dólar/peso mexicano.

En la tercera gráfica se muestran los exponentes puntuales que corresponden a cada periodo.

Cuando se obtienen exponentes locales y puntuales entre 0 y 1, significa que la señal es continua pero no diferenciable en un punto determinado; adicionalmente entre más pequeño sea el valor de un exponente significa que la señal es más irregular y entre más se aproxime a 1 es más regular. En los exponentes locales, se observan algunos puntos que superan el valor de 1, y precisamente estos puntos son indicadores de crisis. De acuerdo con la metodología de Agaev y Kuperin, las crisis se pueden detectar por la caracterización de períodos de muy alta regularidad seguidos de periodos prolongados de mucha irregularidad. Esto es, que las crisis o los cambios fuertes (ya sean hacia arriba o hacia abajo) ocurren después de encontrarse exponentes locales con valores por encima de 1 seguidos de exponentes con valores muy bajos cercanos a 0 por tiempos prolongados. Hay 6 puntos en la gráfica de los exponentes locales donde se supera el exponente con valor 1, sin embargo, sólo 4 de estos puntos son relevantes para el análisis, porque sólo 4 presentan exponentes mayores a 1 y luego exponentes prolongados cercanos a cero y que corresponden a caídas fuertes.

Como se puede observar, las líneas rectas punteadas de la gráfica de los exponentes locales aparecen después de que se detecta un patrón de crisis (un punto con exponentes local superior a 1 y luego exponentes cercanos a cero). De esta forma, los exponentes locales detectaron exitosamente 4 momentos de caídas fuertes, en 1994, 1995, en 1998 y en 2009-2010. Lo interesante de los exponentes es que muestran los cambios en la estructura de la señal o de la serie de tiempo, antes de que sucedieran.

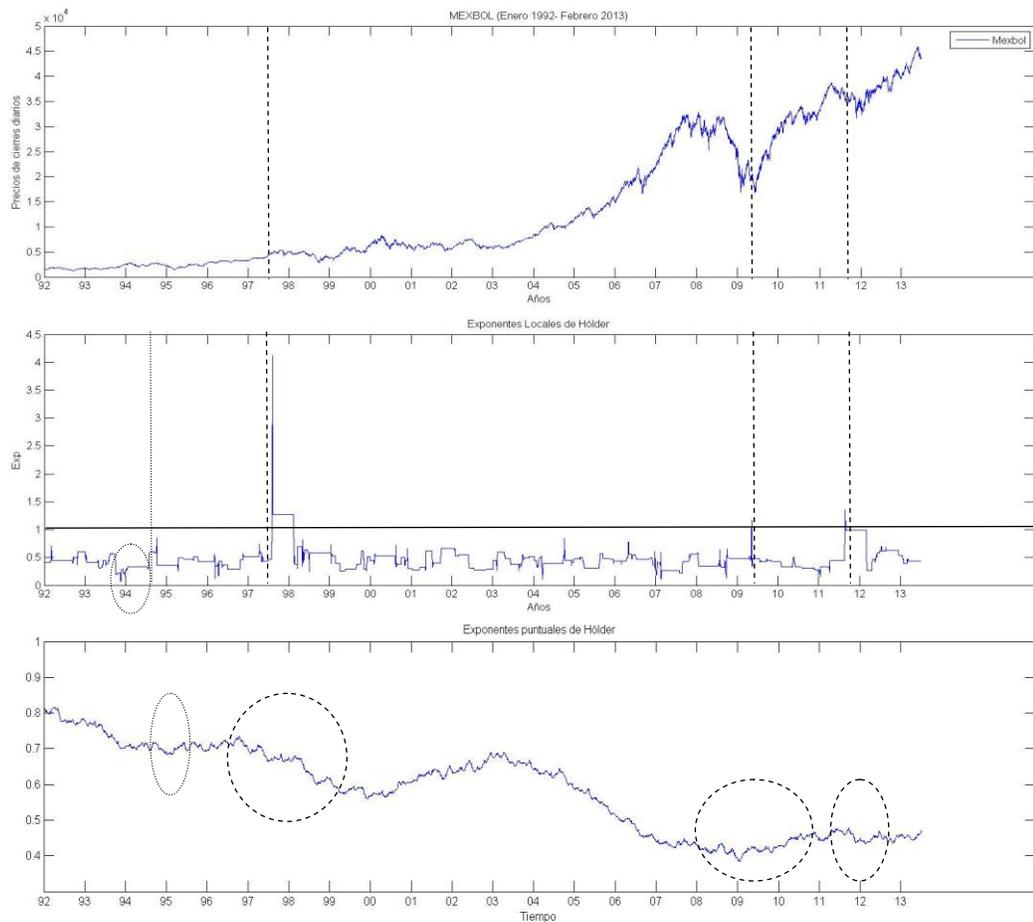
El primer y segundo patrón de crisis detectado fue a finales del año 1994 en el año 1995; coincide con la crisis mexicana denominada "Efecto Tequila" (Mussachio, 2012) y sus efectos cambiarios posteriores.

El segundo patrón detectado corresponde al año de 1998, el cual coincide con los efectos en América Latina de la crisis asiática. El peso continuó perdiendo valor frente al dólar durante todo ese año y el que siguió.

El tercer patrón detectado es en el año 2009, que coincide con la crisis mundial que azotó el mundo y los mercados en general, derivada de las crisis de otros países y que tuvo como consecuencia la desaceleración de Estados Unidos y la pérdida de valor del peso frente al dólar.

Para el caso de los exponentes puntuales las regiones circuladas muestran congruencia con los patrones de crisis encontrados en los exponentes locales, es decir, las regiones en las que el exponente puntual resultó muy cercano a cero, coinciden con los momentos en los que sucedieron las caídas detectadas en los años 1994, 1995, 1998, y 2009; sin embargo, los exponentes puntuales revelan otro patrón de caída que ocurre a mediados de 2012 y que no es detectado por los exponentes locales. En la primer gráfica de precios, se puede apreciar que la caída ocurre después de que el exponente puntual lo indica.

Figura 3: Índice de la Bolsa Mexicana de Valores: IPC 1992-2013, exponentes locales de Hölder y exponentes puntuales de Hölder.



La Figura 3, está dividida en tres gráficas; la primera muestra la serie de tiempo completa analizada, la segunda gráfica muestra los exponentes locales obtenidos y la tercera los exponentes puntuales obtenidos. Las líneas punteadas rectas muestran el periodo en el que se muestra una baja fuerte o crisis en el mercado y que fue detectada exitosamente por los exponentes de puntuales y locales de Hölder. Los círculos punteados muestran las caídas fuertes o crisis detectadas por los exponentes puntuales.

Se detectaron exitosamente 3 patrones de caídas en los exponentes locales. Los exponentes puntuales detectaron los mismos puntos, pero además los exponentes puntuales detectaron que la serie de tiempo a lo largo del tiempo se ha vuelto cada vez más irregular. Se detectaron caídas en 1997-1999, luego en el año 2009 y en el 2011.

En el año 1994 hay un exponente local que es muy alto, no llega al valor de 1 pero es muy alto, e indica un cambio en la dinámica del comportamiento de precios, lo que coincide con la crisis de finales 1994 en México, y este cambio es detectado antes de que ocurriera la crisis a finales de 1994 y 1995; otro detalle interesante es que en 1994 el exponente local llega al valor de cero, lo que muestra a la serie de tiempo como muy irregular durante ese año; los exponentes puntuales también detectan este cambio y aunque no llegan a ser muy

cercanos a cero, registran una disminución por el periodo de mediados de 1994 hasta mediados de 1995.

A partir de mediados del año 1997, los exponentes locales detectan un cambio drástico ya que el valor del exponente llega a ser hasta de 4, y luego se reduce a valores muy bajos, lo que representa un patrón de crisis. Este punto coincide con la crisis asiática de que se gestó en 1998. Los exponentes puntuales detectaron irregularidades desde el año de 1997, esto coincide con lo detectado por los exponentes locales.

Los exponentes locales detectaron otra caída fuerte en 2009, sin embargo en este caso la detectan casi cuando ocurre y no antes como en los casos anteriores. Los exponentes puntuales sí detectaron un poco antes la caída del 2008, mostrando su punto más bajo y más cercano a cero.

Los exponentes locales y puntuales detectaron otro patrón de caída en 2011 que coincide con una caída en el IPC.

## Conclusiones

En este estudio, se encontró que los exponentes locales y puntuales de Hölder pueden ser una herramienta útil para la detección de patrones de caídas ya que detectaron suficientemente bien ciertos eventos críticos en las series de tiempo del tipo de cambio dólar/peso mexicano y en el IPC. En este caso, los exponentes en general detectaron mejor y con antelación las caídas en la serie temporal del tipo de cambio que en el índice accionario.

Los exponentes de Hölder pueden aplicarse a diferentes mercados con distintas dinámicas como los mercados cambiarios y los accionarios y muy posiblemente serían útiles en otros mercados como de deuda y opciones.

La presente investigación concuerda con los resultados de investigaciones previas como las de Agaev y Kuperin (2005), Figliola, Rosenblatt y Serrano (2012) y Kuperin y Schastlivtev (2001) en las que aplican análisis multifractal utilizando los exponentes para detectar patrones de crisis en otros mercados.

El análisis multifractal realizado tanto a la serie de tiempo del índice de México IPC como al mercado cambiario de USD/MXN, en el periodo 1992- 2013 y 1994-2013, reveló que la variación temporal de los exponentes puntuales y locales de Hölder reflejan la evolución de las crisis y caídas, y detectaron los eventos históricos que se desarrollaron durante ese fenómeno, y esto a partir de los valores más cercanos a 0 de dichos exponentes.

La aproximación propuesta en este trabajo es pues, el estudio de la dinámica de los mercados financieros, a partir de la evolución de los exponentes locales y puntuales de Hölder, o de los puntos singulares de las series de tiempo de los diferentes mercados financieros. Más allá de identificar con éxito las caídas a posteriori, se propone el uso de los exponentes de Hölder para identificar patrones que puedan prevenir caídas en los mercados

financieros ya que casi en todos los casos de los puntos detectados, las caídas se detectaron antes de que sucedieran, al mostrar un patrón de un exponente local mayor o muy cercano a 1 para luego caer y mostrar valores muy cercanos a cero, es decir, estos periodos de caídas se caracterizaron por mostrar altos niveles de regularidad e inmediatamente mostraron niveles muy irregulares.

## Referencias

Agavev, I.A., Kuperin Yu. A. (2005), *Multifractal Analysis and Local Hölder Exponents Approach to Detecting Stock Market Crashes*”.

Ayache A., Lévy-Vehel, J. (2004), *On the identification of the pointwise holder exponent of the generalized multifractional Brownian motion*. Stochastic Processes and Their Applications, 111 (1), p. 119-156.

Blackedge, J. M., (2008) *Application of the fractal market hypothesis for macroeconomic time series analysis*. ISAST Transactions on Electronics and Signal Processing, Vol 1(2).

Blackedge J. M., (2010), *Systemic Risk Assessment using a Non-stationary Fractional Dynamic Stochastic Model for the Analysis of Economic Signals*, ISAST Transactions on Computers and Intelligent Systems, vol: 2, issue: 1, p: 76 - 94,

Costa R., Vasconcelos G. L. (2003) *Long range correlations and nonstationarity in the Brazilian stock market*. Physica A 329, pp. 231-248.

Fama E.F. (1970), *Efficient Capital Market: Review of Theory and Empirical Work*, The Journal of Finance, 25.

Fama E. F. (1991), *Efficient Capital Markets: II*, The Journal of Finance, 46(5).

Feder, J. (1988), *Fractals*, Plenum Press. New York, London, p. 254.

Figliola A., Rosenblatt M., Serrano, E.P. (2012), *Local regularity analysis of market index for the 2008 economical crisis*, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2012, Vol 19 (1), pp. 65-78.

Hilborn (1994) *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press.

Jaffard, S (2004). Wavelet techniques in multifractal analysis. In: Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 72. Pp. 91-151.

Johansen, A., Sornette D., Ledoit O. (2000) *Crashes as Critical Points*, International Journal for Theoretical & Applied Finance, 3(2), p. 219-255.

Kuperin Y.A, Schastlivtev R.R. (2001) *Modified Holder Exponents Approach to Prediction of the USA Stock Market Critical Points and Crashes*, Saint Petersburg State University, Russia.

Mandelbrot, B. (1970). *La Geometría fractal de la naturaleza*, España, Matemáticas, Tusquets Editores.

Mandelbrot B, Fisher A., Calvet L. (1997) *A Multifractal Model of Asset's Returns*. Cowles Foundation Discussion Paper, #1164.

Mantegna R., Stanley H (1997), *Physica A.*, 239

Mantegna R., Stanley H (2000), *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press.

Mussachio, A. (2012), *Mexico's financial crisis 1994-1995*, Working Paper 12-101, May 2012, Harvard Business School.

Peters, E.E. (1991). *Chaos, order in the capital markets*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Samuelson P.A. (1964), *Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*, *Industrial Management Review*, 6.

Sohn H., Robertson Amy N., Farrar C. R., (2002) *Singularity detection using Hölder exponent*, *Proceedings of the US-Korea Workshop on Smart Infrastructural Systems*, Pusan, South Korea, 2002.

Sornette, D. A., Johansen J., Bouchaud, P. (1996) *Stock Market Crasher, Precursors and Replicas*, *Journal of Physics in France*, 6, p. 167-175,

Sornette D. (2003) *Why Stock Market Crash*, *Physics Reports* v 378 p 1-100.

Trujillo L., Legrand, P., Olague G., Lévy-Véhel J., (2012), *Evolving estimators of the Pointwise Hölder Exponent with Genetic Programming*, *Information Sciences*, Elsevier. Vol. 209, p. 61-79.

