



Munich Personal RePEc Archive

## **Determinants of productivity and technical inefficiency in Colombia's manufacturing, 1992-2007**

Loaiza Quintero, Osmar Leandro and Franco Vásquez,  
Liliana Yaned

Universidad Nacional de Colombia

28 November 2012

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/47736/>  
MPRA Paper No. 47736, posted 16 Jul 2013 10:49 UTC

## Un estudio acerca de los determinantes de la productividad y la ineficiencia técnica en la industria colombiana, 1992-2007

*Osmar Leandro Loaiza Quintero y Liliana Yaned Franco Vásquez\**

**Resumen:** Este trabajo se propone estimar los determinantes del crecimiento de la productividad industrial en los departamentos de Colombia. En particular, siguiendo a Kumbhakar y Lovell (2000), se descompone la productividad total factorial en tres elementos: cambio técnico, economías de escala y eficiencia técnica. Con este fin, se estima un modelo de frontera estocástica siguiendo la propuesta de Battese y Coelli (1995). Este modelo permite, además, asociar la eficiencia técnica con un conjunto de variables explicativas. De esta forma, el modelo de Battese y Coelli (1995) permite ahondar en los determinantes de la PTF. Se encuentra que en el periodo 1992-1999 el aumento de la productividad puede ser atribuido principalmente al aumento en la eficiencia técnica, debido a la mayor exposición de la industria nacional a la competencia extranjera por la disminución de las barreras arancelarias. Por el contrario, en el periodo 2000-2007, el crecimiento de la productividad puede ser atribuido principalmente al cambio técnico, posiblemente asociado al incremento de la inversión extranjera y los incentivos tributarios a la importación de bienes de capital.

**Palabras Clave:** Frontera estocástica, productividad total factorial, eficiencia técnica, industria manufacturera. **Clasificación JEL:** D24, L60, C33.

*Determinants of productivity and technical inefficiency in Colombia's manufacturing, 1992-2007*

**Abstract:** The aim of this article is to estimate the determinants of industrial productivity growth in Colombia's regions. In this regard, we follow to Kumbhakar and Lovell (2000), who decompose total factor productivity growth into three sources: technical change, scale economies and technical efficiency. To this end, a stochastic frontier model, similar to that of Battese and Coelli (1995), is estimated. This model allow to associate technical efficiency to a set of explanatory variables. This way, the Battese and Coelli's model allows to get a deeper understanding of the causes of productivity growth. This article finds that throughout the period 1992-1999, productivity growth is mainly explained by an increase in technical efficiency, due to the softening of Colombia's foreign trade restrictions. However, throughout the period 2000-2007, productivity growth is mainly explained by technical change, which possibly related to the increase in foreign investment and to tax deductions to foster the imports of capital goods.

**Key words:** Stochastic frontier, total factor productivity, technical efficiency, manufacturing industry. **JEL Classification:** D24, L60, C33.

---

\* Osmar Loaiza: Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín; email: olloaizaq@unal.edu.co. Liliana Franco: Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín; email: lyfranco@unal.edu.co.

## **Un estudio acerca de los determinantes de la productividad y la ineficiencia técnica en la industria Colombiana, 1992-2007**

### **Introducción**

En los debates acerca del desempeño económico de las naciones o la competitividad de su industria, la productividad siempre es un ingrediente clave. La productividad se define como la razón entre el valor del producto y los insumos. Por tanto, el crecimiento de la productividad depende de la diferencia entre el aumento de la producción y el aumento de los insumos. De esta manera, la variación de la productividad es una cantidad residual (Fried, Lovell y Schmidt, 2008, p. 8), que Abramovitz (1956) caracterizó como “una medida de nuestro grado de ignorancia.” Durante algún tiempo fue una práctica común atribuir esta cantidad residual al progreso técnico, pero también puede ser atribuida a diferencias en la escala de producción o a diferencias en la eficiencia (OECD, 2001), donde la eficiencia hace referencia a la diferencia entre la producción observada y su nivel potencial (o de plena capacidad).

El objetivo principal de este trabajo consiste en estimar los determinantes del crecimiento de la productividad industrial en los departamentos de Colombia. Con este fin, se parte de la propuesta metodológica de Kumbhakar, Denny y Fuss (2000) y Kumbhakar y Lovell (2000), la cual permite estimar la influencia sobre la productividad de los tres componentes mencionados (el cambio técnico, las economías de escala, y la eficiencia técnica). Esta propuesta metodológica está fundamentada en un enfoque econométrico basado en modelos de frontera estocástica. En este respecto, el presente trabajo sigue la propuesta de Battese y Coelli (1995), quienes plantean un modelo de frontera estocástica en el cual es posible estimar el efecto de un conjunto de variables explicativas sobre la ineficiencia. Por lo tanto, este modelo, que aquí denominamos modelo de efectos de eficiencia, ofrece una ventaja adicional: no solo sirve como medio para implementar la propuesta de descomposición de la productividad de Kumbhakar, Denny y Fuss (2000); también permite conocer el efecto sobre la ineficiencia técnica de aquellos factores que se presume influyen en esta. En este sentido, un modelo de efectos de eficiencia proporciona información complementaria para el entendimiento del comportamiento de la productividad.

Este estudio está organizado como sigue: la primera sección expone el marco teórico, ofreciendo detalles sobre el problema del estudio de la productividad, la medición de la eficiencia en modelos de frontera estocástica y explicando la pertinencia del enfoque aquí adoptado con respecto a otros estudios relacionados, efectuados en el contexto colombiano. En la segunda sección se expone la metodología econométrica y la especificación del modelo empleados para implementar el ejercicio de estimación de los componentes que

inciden sobre el crecimiento de la productividad y el comportamiento de la ineficiencia técnica. La tercera sección presenta e interpreta los resultados de este ejercicio. Por último, se ofrecen algunos comentarios finales a manera de conclusión.

## 1. Marco Teórico

El estudio de la productividad es un tema recurrente en la literatura económica. Dos son las razones de su importancia: desde la perspectiva de la macroeconomía y la teoría del crecimiento la productividad es considerada un determinante clave del crecimiento económico; desde la perspectiva de la microeconomía y la teoría del productor su relevancia radica en que la productividad es un determinante de la rentabilidad y la competitividad de la firma.

Y es precisamente en el ámbito de la macroeconomía que el estudio de la productividad cobra impulso, con los trabajos pioneros de Abramovitz (1956) y Solow (1957), quienes sugerían que lo que hoy llamamos Productividad Total Factorial (PTF) explicaba cerca del 90% del crecimiento en Estados Unidos.<sup>1</sup> En el enfoque neoclásico empleado por Solow (1957), el crecimiento de la PTF era atribuido principalmente al cambio técnico. Siendo esta la posición generalizada por largo tiempo (ver, por ejemplo, Abramovitz, 1993).

Sin embargo, las diferencias en productividad pueden ser atribuidas a otros factores, como las economías de escala y la *eficiencia* (Abramovitz, 1993, p. 218; OECD, 2001, p. 11), sin contar otras diferencias exógenas presentes en el entorno (Fried, Lovell y Schmidt, 2008, p. 8). Conviene destacar que existen dos tipos de ineficiencia: técnica y asignativa. La ineficiencia técnica hace referencia al uso excesivo de los recursos, como ocurre cuando se utilizan más insumos de los precisados para producir cierta cantidad de *output*, mientras la eficiencia asignativa hace referencia a la asignación incorrecta de los recursos dados los precios de mercado (Greene, 2008, p. 102).

Con la revolución de los rendimientos crecientes y las nuevas teorías del crecimiento en la década de los ochenta se le prestó atención a las economías de escala como un determinante de la PTF. Sin embargo, finalizando la década de 1970 surgieron algunos aportes, más próximos al campo de la microeconomía, preocupados por la estimación de la ineficiencia. Se trata de Aigner, Lovell y Schmidt (1977), Meeusen y Van den Broeck (1977) y Charnes, Cooper y Rhodes (1978). Los dos primeros artículos sientan las bases del enfoque de los modelos de Frontera Estocástica (MFE), mientras el último desarrolla lo que se conoce como Análisis de Envoltente de Datos (AED). Estos aportes vieron su aplicación

---

<sup>1</sup> Los términos productividad y Productividad Total Factorial (PTF) en adelante se tratan como sinónimos.

principalmente durante la década de 1990, tras algunos desarrollos teóricos y econométricos que facilitaron su implementación.

Incluso, el trabajo ya citado de Solow (1957), empleando una función de producción neoclásica en un enfoque determinístico, reconoce indirectamente el papel de la ineficiencia en la determinación de la PTF. Afirma: “what belongs in a production function is capital in use, not capital in place (p. 314).” En otras palabras, reconoce la existencia de capacidad ociosa, la cual impide que las empresas operen sobre su frontera (no producen al máximo con los mínimos insumos). No obstante, en el enfoque neoclásico de mercados perfectos, rendimientos constantes de escala e información completa, las firmas no enfrentan obstáculo alguno para alcanzar la plena capacidad o *producción de frontera*. De esta manera, el enfoque neoclásico en su formulación más ortodoxa descarta de plano la posibilidad de analizar la ineficiencia como un determinante de la PTF.

### **1.1. Estimación de la PTF en Colombia**

Los estudios existentes en Colombia sobre la estimación de la PTF, aplicados a nivel sectorial y regional, se basan en el ajuste de funciones de producción neoclásica y el cálculo de números índice. Sin embargo, ambas aproximaciones parten de estructuras de mercado perfectamente competitivas, con las consecuencias recién mencionadas.

En el primer tipo de estudios, basados en la estimación de funciones de producción se destaca el análisis del Greco, en el Banco de la República de Colombia, grupo que en el marco de una función de producción Cobb-Douglass descompone las fuentes próximas del crecimiento durante el siglo XX para la economía colombiana. Asimismo, utilizando la metodología de la cointegración en datos de panel, Iregui, Melo y Ramírez (2006), también del Banco de la República, estiman la productividad total factorial para nueve áreas metropolitanas en Colombia, utilizando datos de la encuesta anual manufacturera. Sin embargo, no establecen sus determinantes, aunque constatan diferencias entre áreas. Además, como es usual desde la publicación de Solow (1957), estos estudios atribuyen la PTF al cambio técnico. Además, Medina, Meléndez y Seim (2003), tratan de analizar el efecto de la política tributaria y la política comercial sobre la productividad de la industria manufacturera colombiana. Aunque utilizan técnicas semiparamétricas para estimar la PTF, conservan algunos supuestos que pueden ser restrictivos, como el de competencia perfecta. Esto implica descartar por hipótesis el papel de la ineficiencia en el comportamiento de la PTF.

También hay un conjunto de estudios, como Echavarría (1991), Chica (1996), Pombo (1999) y Villamil (1999), que utilizan números índice para la medición de la productividad. Los índices más comunes para este efecto son el índice de Fisher y el índice de Tornqvist.

En teoría ambos son casos particulares del índice de productividad de Malmquist, el cual en la práctica constituye un ideal teórico a partir del cual otros índices son juzgados. No obstante, este enfoque enfrenta ciertas dificultades. La primera es de carácter operativo: exigen información acerca del precio de todos los insumos y los productos de las firmas o sectores en consideración (Fried, Lovell y Schmidt, 2008, p. 73). La segunda tiene que ver con los supuestos que rodean la construcción de estos índices: asumen que la producción debe ser eficiente asignativamente (Färe y Grosskopf, 1991, p. 160), ya que exigen mercados competitivos o agentes tomadores de precios (Diewert, 1993, p. 352; Fried, Lovell y Schmidt, 2008, pp. 66-68). Lo anterior es problemático porque descarta precisamente una de los posibles obstáculos al comportamiento optimizador y, por tanto, una de las fuentes que explican la ineficiencia.

Sin embargo, las anteriores consideraciones hacen necesario emplear un enfoque más propicio para la estimación de la productividad en la industria colombiana, habida cuenta de aquellos obstáculos a la optimización, como la incertidumbre o la competencia imperfecta, que impiden que las empresas produzcan sobre la frontera. En este sentido, los modelos de frontera estocástica ofrecen un marco teórico y metodológico sobre el cual se puede estimar el grado en el cual la producción observada se desvía de su potencial (o frontera) y, a través de la descomposición de la PTF propuesta por Kumbhakar, Denny y Fuss (2000) y Kumbhakar y Lovell (2000), estimar la contribución a la productividad de cuatro factores diferentes: el cambio técnico, las economías de escala, la eficiencia técnica y la eficiencia asignativa. Debido a las limitaciones de información señaladas más adelante, este trabajo se limita a estimar los tres primeros factores determinantes de la PTF.

Por lo pronto, a continuación se discute el problema de la estimación de la eficiencia técnica,<sup>2</sup> los rasgos fundamentales que definen los modelos de frontera estocástica y sus ventajas con respecto al análisis de envolvente de datos (AED) en la estimación de la eficiencia. Luego, se explica en qué consiste la metodología de descomposición del crecimiento en la PTF. Finalmente, se hace una revisión de las metodologías de estimación para un modelo de frontera estocástica.

## **1.2. La medición de la ineficiencia técnica**

La producción de frontera (o potencial) representa una situación ideal, en la cual se alcanza la máxima producción posible dado un conjunto de insumos. Es evidente que ningún agente económico puede sobrepasar este ideal. En este sentido, la ineficiencia mide el grado en el

---

<sup>2</sup> En lo que sigue se emplea el término eficiencia para referirse a la eficiencia técnica, salvo que se indique lo contrario.

cual la producción observada se desvía de ese ideal teórico (ver Greene, 2008, p. 93).<sup>3</sup> La motivación teórica y los fundamentos conceptuales para la medición de la ineficiencia surgen con las aportaciones de Debreu (1951) y Farrell (1957). Recogiendo estos aportes, en 1968 Aigner y Chu desarrollan un enfoque determinístico basado en la estimación de funciones de producción paramétricas para calcular la ineficiencia proponiendo técnicas de programación lineal y cuadrática. Sin embargo, este enfoque no vio aplicación hasta 1977, en un trabajo de Fosund y Jansen. Este método pronto entró en desuso debido a que fue rápidamente reemplazado por otro enfoque determinístico para las estimación de la ineficiencia. Se trata del análisis de envolvente de datos (AED) mencionado un par de párrafos atrás.

El AED es una metodología no paramétrica para la estimación de la función de producción de frontera, con respecto a la cual se juzga el grado en el cual la producción observada se aleja de su potencial. No obstante, la naturaleza determinística de este enfoque implica una debilidad fundamental: cualquier desviación de la producción observada con respecto a la frontera estimada es tratada como ineficiencia. De esta manera, el AED podría estar *sobreestimando* la ineficiencia al ignorar que las desviaciones con respecto a la producción de frontera también pueden explicarse por factores *fuera del control de las firmas*, como por ejemplo el clima (Greene, 2008, p. 114).

En contraposición a este enfoque determinístico, existe un enfoque estocástico para el cálculo de la ineficiencia basado en la estimación de una función de producción de frontera paramétrica. Esta es la metodología de los modelos de frontera estocástica. La naturaleza estocástica de esta metodología permite corregir el problema de sobreestimación de la ineficiencia que presenta el análisis de envolvente de datos. Para aclarar este punto, observemos lo siguiente. De acuerdo a un enfoque de frontera determinística (como el AED) la función de producción se definiría como:

$$y_{it} \leq f(\mathbf{x}_{it})$$

Donde  $y_{it}$  representa el valor de la producción de la firma  $i$  en el periodo  $t$ ,  $\mathbf{x}_{it}$  es un vector de insumos y  $f(\cdot)$  es la función de producción, la cual define la producción potencial o frontera. La anterior desigualdad débil puede reescribirse como una igualdad así:

$$y_{it} = f(\mathbf{x}_{it})TE_{it}$$

---

<sup>3</sup> De manera alternativa, podemos definir la eficiencia como el grado en el cual la producción observada se acerca a la producción de frontera. De esta forma, es indiferente hablar de *eficiencia* o *ineficiencia*, pues en ambos casos estos conceptos hacen referencia a la distancia entre la producción observada y potencial.

Donde  $TE_{it}$  mide la eficiencia (cercanía a la producción de frontera) o alternativamente  $1 - TE_{it}$  mide la ineficiencia (desviación con respecto a la producción de frontera). Por el contrario, en un enfoque de frontera estocástica la función de producción se define como:

$$y_{it} \leq f(x_{it})e^{v_{it}}$$

Donde  $v_{it}$  es una perturbación aleatoria que refleja aquellos factores por fuera del control de la firma que alteran su frontera productiva. Así,  $f(x_{it})e^{v_{it}}$  representa la función de producción de frontera. En este caso la eficiencia también es medida por  $TE_{it}$ , de manera que:

$$y_{it} = f(x_{it})TE_{it}e^{v_{it}} \quad (1)$$

Con esta aclaración, se observa que la estimación de la eficiencia tiende a ser inferior en un enfoque determinístico que en un enfoque estocástico. Teniendo en cuenta que la ineficiencia está dada por  $1 - TE_{it}$ , esto equivale a afirmar que el enfoque determinístico sobreestima la ineficiencia. Note que en ambos casos  $0 < TE_{it} < 1$ . Donde un valor de 1 indica que la producción está en la frontera, es decir, es plenamente eficiente o alternativamente que  $1 - TE_{it} = 0$ , es decir, no hay ineficiencia.

### *1.2.1 Estimación de la eficiencia en Colombia*

Existen algunos estudios en Colombia a nivel sectorial que utilizan la metodología de frontera estocástica, aplicados al sector bancario (Badel, 2002), la industria textil (Acevedo y Ramírez, 2005), el sector cafetero (Perdomo y Hueth, 2010) y el sector educativo (Iregui, Melo y Ramos, 2006). El interés de estos estudios se limita principalmente a estimar la ineficiencia; en ningún caso se hace una estimación de los determinantes de la PTF. La única excepción en este respecto es Gallón (2007).

Badel (2002) estima un modelo de frontera estocástica a través de un enfoque similar a los mínimos cuadrados modificados, donde las medidas resultantes de la eficiencia son regresadas contra el tamaño de los bancos (medido a través de sus activos) la calidad de la cartera (medida como cartera en mora sobre cartera bruta) y los indicadores ROE (utilidad/capital) y ROA (utilidad activos). Empero, como se mencionará en la sección 1.4.3, hay razones para dudar de la validez estadística de este enfoque bi-etápico.

Existen otros estudios que tratan de estudiar algunos determinantes de la eficiencia a nivel sectorial, como Acevedo y Ramírez (2005) o Iregui, Melo y Ramos (2006). Acevedo y Ramírez (2005) emplean un modelo de efectos de eficiencia aplicado a un panel que comprende la producción textil a nivel departamental para el periodo 1992-2001. Iregui, Melo y Ramos (2006) recurren a un modelo de efectos de eficiencia para estimar la

eficiencia de la educación primaria y secundaria en Colombia para el año 2002 (un corte transversal), utilizando una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes de escala, donde la variable dependiente es el logro educativo de los planteles que comprenden la muestra. Este es medido como la clasificación de cada plantel en la pruebas ICFES 2002. Por su parte, las variables que explican la eficiencia hacen referencia a factores del entorno del establecimiento educativo.

Perdomo y Hueth (2010) estiman un modelo de frontera estocástica con ineficiencia semi-normal para calcular la eficiencia técnica de las fincas cafeteras de Caldas, Quindío y Risaralda en 2004. De manera similar, Mutis (2006) emplea un modelo con ineficiencia semi-normal para evaluar el desempeño de 113 hospitales de nivel II en el año 2003.<sup>4</sup>

Gallón (2007) es el primer trabajo identificado que se aparta del enfoque sectorial que presentan los estudios mencionados. Gallón (2007) emplea un modelo con ineficiencia semi-normal tiempo variante para estimar la eficiencia técnica de la industria manufacturera colombiana con datos a nivel departamental para el periodo 1977-2002. Además, es el primer estudio que hace un ejercicio de descomposición de la PTF para Colombia siguiendo la metodología de Kumbhakar, Denny y Fuss (2000). Como se expone en la siguiente sección, el presente artículo utiliza un modelo de efectos de eficiencia para estimar la eficiencia técnica. En este aspecto difiere del trabajo Gallón (2007). Solo los trabajos de Acevedo y Ramírez (2005) e Iregui, Melo y Ramos (2006) utilizan esta metodología en el contexto colombiano. El presente trabajo difiere de estos dos en tanto la información proporcionada por el modelo de efectos de eficiencia es explotada para hacer un ejercicio de descomposición de la PTF.

### 1.3. Estimación y descomposición del crecimiento de la PTF

Como se mencionó anteriormente en Colombia se han hecho estudios que estiman la productividad recurriendo a enfoques convencionales, que utilizan funciones de producción neoclásica o números índice. Pero las limitaciones que presentan estos enfoques proporcionan algunos motivos por los cuales puede considerarse ventajoso adoptar el enfoque del análisis de frontera estocástica. La ecuación (1), presentada atrás, describe la forma general de una frontera estocástica. Para efectos de la estimación empírica se suele adoptar una transformación logarítmica del modelo.<sup>5</sup> De esta manera, tenemos:

$$\ln y_{it} = \ln f(x_{it}; t) + v_{it} - u_{it} \quad (2)$$

<sup>4</sup> En la sección 1.4 se dan detalles acerca de un modelo de frontera estocástica con ineficiencia semi-normal

<sup>5</sup> Aunque  $f(x_{it}; t)$  sea una función no lineal, generalmente  $\ln f(x_{it}; t)$  sí lo es. Por lo tanto, la transformación logarítmica facilita considerablemente el tratamiento de funciones no lineales.

Donde  $u_{it} \geq 0$  es la ineficiencia que aleja las firmas de su producción de frontera. Se incluye el tiempo como un argumento más de la función de producción para resaltar que esta puede cambiar de periodo a periodo. Además, note que  $u_{it} = -\ln TE_{it}$ . Por lo tanto, esta medida de la ineficiencia puede ser transformada en una medida de la eficiencia así:

$$TE_{it} = \exp(-u_{it}) \quad (3)$$

La PTF se define como el cociente entre el valor de la producción y el costo de los insumos o factores productivos (Lovell, Fried y Schmidt, 2008). Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la PTF se determina como la diferencia entre la tasa de crecimiento del valor de la producción y el valor de los insumos.

$$P\dot{T}F_{it} = \dot{y}_{it} - \sum_{j=1}^k S_{jit} \dot{x}_{jit}$$

Donde un punto sobre una variable indica su tasa de cambio en el tiempo,  $k$  es el número de insumos empleados, y  $S_{jit}$  representa la participación en el costo total del insumo  $j$ . El problema consiste en determinar las causas del cambio en la PTF. Diferenciando la ecuación (2), el comportamiento de la productividad para la firma  $i$  en el momento  $t$  se puede descomponer de la siguiente manera (se omiten los subíndices  $i$  y  $t$  para no recargar la presentación):

$$P\dot{T}F = TC - \frac{\partial u}{\partial t} + (\varepsilon - 1) \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^k \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon} - S_j \right) \dot{x}_j$$

Esta es la descomposición que plantean Kumbhakar y Lovell (2000, p. 283) y Kumbhakar, Denny y Fuss (2000, p. 428), donde  $TC = \frac{\partial \ln f(x_{it}; t)}{\partial t}$  mide el cambio tecnológico y  $-\frac{\partial u}{\partial t}$  el cambio en la eficiencia técnica.  $\varepsilon_j = \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(\cdot)}$  es la elasticidad de la producción con respecto al insumo  $j$ . Así, las economías de escala se pueden medir como  $\varepsilon = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j$ . De esta manera, si al aumentar los insumos, las elasticidades suman más que la unidad, se tiene un indicativo de que, en general, la producción crece más que proporcionalmente. Si el lector reemplaza en  $\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon}$  cada uno de los términos por sus definiciones, podrá comprobar que este cociente mide la que sería la participación en el gasto total del insumo  $j$  bajo condiciones de competencia perfecta. Por lo tanto, el término  $\sum_{j=1}^k \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon} - S_j \right) \dot{x}_j$  captura la desviación del precio de los insumos con respecto a sus productos marginales, proporcionando entonces una medida de la ineficiencia asignativa (Kumbhakar, Denny y Fuss, 2000, p.

429). Infortunadamente, la Encuesta Anual Manufacturera del Dane no proporciona información suficiente para calcular las participaciones factoriales a precios de mercado. Por esta razón, el componente de eficiencia asignativa no puede ser estimado. De esta manera, la anterior expresión para la descomposición de la PTF se reduce a:

$$PTF = TC - \frac{\partial u}{\partial t} + (\varepsilon - 1) \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon} \dot{x}_j \quad (4)$$

Note que, de acuerdo a la ecuación (4), la PTF puede ser atribuida enteramente al cambio técnico solo cuando la ineficiencia técnica es tiempo invariante, o cuando hay retornos constantes de escala.

#### 1.4. Técnicas de estimación

Para empezar, reescribamos el modelo en la ecuación (2) como sigue:

$$\ln y_{it} = \alpha + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_{it} + v_{it} - u_{it} \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{x}_{it}$  es un vector de funciones de los insumos y  $\boldsymbol{\beta}$  es un vector de parámetros. Donde  $\alpha + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_{it} + v_{it}$  es la frontera estocástica. Además, se asume en adelante que la perturbación  $v_{it}$  es  $iid(0, \sigma_v^2)$ .

En el contexto de datos de corte transversal ( $t = 1$ ) dos son los métodos utilizados para la estimación de modelos de frontera estocástica: máxima verosimilitud y mínimos cuadrados modificados. El estimador de máxima verosimilitud también es bastante utilizado en el contexto de datos de panel, por lo cual postergamos su discusión. En cuanto al segundo método, si hay evidencia de ineficiencia a partir de los datos utilizados, el método de los mínimos cuadrados (MCO) ofrece un estimador consistente para los parámetros de la función de producción, con excepción del intercepto. La razón es la siguiente: si hay ineficiencia los residuales MCO tienen un sesgo hacia la izquierda, lo que afecta al estimador del intercepto. Por lo tanto, es necesario corregir (modificar) el intercepto, teniendo en cuenta el sesgo que presentan los residuales, el cual puede ser estimado a partir de su tercer momento muestral.

En el contexto de datos de panel ( $t \geq 2$ ), además del método de la máxima verosimilitud, los modelos de frontera estocástica pueden ser estimados utilizando técnicas econométricas tradicionales, como el modelo de efectos fijos o el modelo de efectos aleatorios. El primero emplea el estimador de mínimos cuadrados ordinarios, mientras el segundo utiliza el

estimador de mínimos cuadrados generalizados. Cada técnica de estimación tiene sus ventajas y desventajas, las cuales el investigador debe sopesar de acuerdo a sus propósitos. El método de máxima verosimilitud requiere de supuestos distribucionales acerca del comportamiento del término de perturbación,  $v_{it}$ , y la ineficiencia,  $u_{it}$ . Sin embargo, estos supuestos son innecesarios en un modelo de efectos fijos o de efectos aleatorios. No obstante, esta información distribucional puede ser de ayuda para obtener estimaciones más precisas de la ineficiencia.

Cabe anotar que la información que proporciona la dimensión temporal de un panel permite considerar especificaciones en las cuales la ineficiencia varía en el tiempo. Sin embargo, con el ánimo de simplificar la exposición y hacer énfasis en los aspectos fundamentales de cada enfoque, por el momento se supone que la ineficiencia es tiempo invariante  $u_{it} = u_i$ .

#### 1.4.1. Modelos con ineficiencia tiempo invariante

*Efectos fijos:* Consideremos en primer lugar el modelo de efectos fijos. Este modelo no hace ningún supuesto distribucional sobre el término de perturbación ni sobre la ineficiencia. Como es usual exige que el término de perturbación  $v_{it}$  esté incorrelacionado con los regresores (supuesto de exogeneidad), pero el término de ineficiencia  $u_i$  puede estar correlacionado con el término de perturbación o con los regresores. Esto se debe a que el término de ineficiencia es tratado como un efecto fijo (Kumbhakar y Lovell, 2000, p. 98). De esta manera, la frontera estocástica puede ser estimada por mínimos cuadrados ordinarios, aplicados a la siguiente ecuación:

$$\ln y_{it} = \alpha_i + \beta' \mathbf{x}_{it} + v_{it}$$

Donde  $\alpha_i = \alpha_0 - u_i$ . Tras estimar el modelo, con el objeto de calcular la ineficiencia para cada productor se normaliza el intercepto de manera que  $\hat{\alpha}_0 = \max(\hat{\alpha}_i)$ . Por lo tanto, la ineficiencia se estima como  $\hat{u}_i = \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_i$ . Es decir, se asume que el productor con el mayor efecto fijo es 100% eficiente,<sup>6</sup> mientras el nivel de eficiencia de cada productor es medido con relación al productor más eficiente. Además, surgen una dificultad adicional: el modelo de efectos fijos no puede diferenciar la ineficiencia estimada de otras fuentes heterogeneidad entre los productores (Greene, 2008, p. 82; Greene, 2004; Kumbhakar y Lovell, 2000, p. 100).

*Efectos aleatorios:* El modelo de efectos aleatorios trata el término de ineficiencia  $u_i$  como una variable aleatoria no observada, la cual debe estar incorrelacionada con el término de perturbación y los regresores. Aunque estos supuestos pueden parecer un poco más

---

<sup>6</sup> Si  $\hat{u}_i$  es un estimador de la ineficiencia, luego la eficiencia se puede calcular como  $\widehat{TE}_i = \exp(-\hat{u}_i)$ . Note, por tanto, que si  $\widehat{TE}_i = 1$  (un productor 100% eficiente) entonces  $\hat{u}_i = 0$ .

restrictivos, confieren la posibilidad de incluir en el modelo regresores que son invariantes en el tiempo, lo cual no es posible en un modelo de efectos fijos. En este caso el modelo de frontera es estimado por mínimos cuadrados generalizados, aplicados a la siguiente ecuación:

$$\ln y_{it} = \alpha^* + \beta' \mathbf{x}_{it} + v_{it} - u_i^*$$

Donde  $\alpha^* = \alpha - E[u_i]$  y  $u_i^* = u_i - E[u_i]$ , siendo  $u_i^*$  el efecto aleatorio. Reescribir el modelo de esta manera permite que el error compuesto  $v_{it} - u_i^*$  tenga media cero y, por tanto, que el estimador para el intercepto también sea consistente. De esta manera, los efectos aleatorios pueden ser recuperados de los residuales como:

$$\hat{u}_i^* = \frac{1}{T} \sum_t (\ln y_{it} - \alpha^* - \beta' \mathbf{x}_{it})$$

Donde  $T$  es el número de periodos. Así, la ineficiencia se calcula como  $\hat{u}_i = \max(\hat{u}_i^*) - \hat{u}_i^*$ . Por lo tanto, este modelo también asume que hay al menos un productor 100% eficiente, mientras la ineficiencia de los demás productores es medida con respecto al productor eficiente. Y al igual que en el modelo de efectos fijos, las eficiencias estimadas están contaminadas por la heterogeneidad no observada presente en la muestra.

*Máxima Verosimilitud:* Para emplear el estimador de máxima verosimilitud en un modelo de frontera estocástica es necesario hacer supuestos distribucionales sobre el término de perturbación y la ineficiencia. El modelo a estimar se puede escribir como:

$$\ln y_{it} = \alpha + \beta' \mathbf{x}_{it} + e_{it} \quad (6)$$

Donde  $e_{it} = v_{it} - u_{it}$  es un término de perturbación compuesto. Tanto  $v_{it}$  como  $u_{it}$  se asumen idénticamente distribuidos e independientes. Por tanto, tienen media y varianza constantes. En particular, como  $u_{it} \geq 0$  se asume que el término de ineficiencia tiene una distribución asimétrica o truncada,  $f_u(\cdot)$ , con media  $\mu$  y varianza  $\sigma_u^2$ . Mientras, el término de perturbación sigue una distribución simétrica,  $f_v(\cdot)$ , con media 0 y varianza  $\sigma_v^2$ . Para estimar el modelo en la ecuación (6) aún hace falta conocer la distribución de  $e_{it}$ , con este fin se hace uso de los supuestos anteriores. Primero, se determina la distribución conjunta de  $u_{it}$  y  $v_{it}$ :

$$f_{v,u}(v_{it}, u_{it}) = f_v(v_{it})f_u(u_{it})$$

O re-expresada en términos del término de error compuesto  $e_{it}$ :

$$f_{e,u}(e_{it}, u_{it}) = f_v(e_{it} + u_{it})f_u(u_{it})$$

Luego, se obtiene la distribución marginal de  $e_{it}$ , para lo cual integramos la distribución conjunta con respecto a  $u_{it}$ :

$$f_e(e_{it}) = \int_0^{+\infty} f_{e,u}(e_{it}, u_{it}) d u_{it}$$

Así pues, la función de verosimilitud es:

$$\ln L = \sum_i \sum_t f_e(\ln y_{it} - \alpha - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_{it} | \sigma_v^2, \sigma_u^2)$$

Generalmente se supone que el término de perturbación simétrico sigue una distribución normal, es decir,  $v_{it} \sim \text{iid } N(0, \sigma_v^2)$ . Por lo tanto, las diferencias entre los diferentes modelos de frontera estocástica estimados por máxima verosimilitud residen en los supuestos distribucionales en torno al término de ineficiencia. En este respecto, las especificaciones más utilizadas en la literatura suponen que la ineficiencia sigue una distribución semi-normal o normal truncada (ver Coelli *et al.*, 2005; Greene, 2008). Otras especificaciones suponen que la ineficiencia sigue una distribución exponencial o una distribución gamma (ver Kumbhakar y Lovell, 2000).

Una vez estimado el modelo, el problema consiste en obtener estimaciones de las ineficiencias para cada observación. Para ello se extrae la información que los residuales  $e_{it}$  poseen sobre el término de ineficiencia  $u_{it}$ . Con tal propósito, se recurre a la media condicionada de  $u_{it}$  sobre  $e_{it}$  (ver Greene, 2008, p. 177; Coelli *et al.*, 2005, p. 254 y Jondrow *et al.*, 1982), la cual se obtiene a partir de la respectiva distribución condicionada:

$$f(u_{it}|e_{it}) = \frac{f_{e,u}(e_{it}, u_{it})}{f_e(e_{it})} = \frac{f_v(e_{it} + u_{it})f_u(u_{it})}{f_e(e_{it})}$$

De donde el estimador de la ineficiencia es:

$$\hat{u}_{it} = E(u_{it}|e_{it}) = \frac{\int_0^{\infty} u_{it} f_v(e_{it} + u_{it}) f_u(u_{it}) du_{it}}{\int_0^{\infty} f_v(e_{it} + u_{it}) f_u(u_{it}) du_{it}} \quad (7)$$

Note que en este caso las ineficiencias estimadas son absolutas, pues su estimador no requiere de normalización alguna como en los casos anteriores. Además, esto implica que el estimador de máxima verosimilitud no requiere el supuesto de que al menos un productor opera sobre la frontera. Finalmente, note que las ineficiencias pueden ser transformadas en una medida de la eficiencia utilizando la ecuación (3).

El estimador de máxima verosimilitud aquí descrito se puede aplicar fácilmente al caso de datos de corte transversal. En esta situación simplemente se tiene que  $t = 1$ , es decir, se cuenta con una sola observación en el tiempo para cada productor. Asimismo, en el contexto de datos de panel ( $t \geq 2$ ) existe la posibilidad de permitir que la ineficiencia cambie en el tiempo, o simplemente asumir que esta es constante (o sea,  $u_{it} = u_i$ ). La elección entre una u otra alternativa depende de la longitud de la dimensión temporal del panel de datos. Si esta es pequeña (por ejemplo, 5 años o menos) es justificable suponer que la eficiencia no varía en el tiempo (Greene, 2004). En este caso las especificaciones más comunes del modelo de frontera suponen que la ineficiencia sigue las ya señaladas distribuciones semi-normal o normal truncada. A la popularidad de estas especificaciones ha contribuido su implementación en *software* especializado.<sup>7</sup>

#### 1.4.2. Modelos con ineficiencia tiempo variante

*Efectos fijos y efectos aleatorios:* Paradójicamente, el estimador tiempo invariante de la ineficiencia en los modelos de efectos fijos y de efectos aleatorios es consistente en el tiempo, es decir, entre mayor sea la dimensión temporal del panel de datos, más preciso es el estimador de la ineficiencia  $\hat{u}_i$ . Sin embargo, al menos desde un punto de vista económico, entre más larga sea la dimensión temporal del panel de datos considerado, menos sostenible es la hipótesis de una ineficiencia tiempo invariante. En el modelo de efectos fijos, una manera de incorporar la ineficiencia tiempo variante es la siguiente:

$$\ln y_i = \alpha_{it} + \beta' \mathbf{x}_{it} + v_{ti}$$

Donde  $\alpha_{it} = \delta_{i1} + \delta_{i2}t + \delta_{i3}t^2$  es el intercepto para el productor  $i$  en el periodo  $t$ . En este caso la ineficiencia se estima como  $u_{it} = \max(\alpha_{it}) - \alpha_{it}$  (ver Cornwell, Schmidt, y Sickles, 1990; Greene, 2008). Por lo tanto, la ineficiencia sigue siendo medida de manera relativa, pero con la posibilidad de que el productor más eficiente cambie en cada periodo. En el caso del modelo de efectos aleatorios se sigue una estrategia similar, con la diferencia de que  $\alpha_{it}$  no es tratado como un intercepto, sino como una variable aleatoria que capta la heterogeneidad transversal y temporal presente en la muestra. En este caso, para calcular  $\alpha_{it}$  se obtienen los residuales del modelo y estos se regresan contra una constante,  $t$  y  $t^2$ , para obtener estimaciones de  $\delta_{i1}$ ,  $\delta_{i2}$ ,  $\delta_{i3}$  para cada productor. Y, al igual que en el modelo de efectos fijos, la ineficiencia se estima como  $u_{it} = \max(\alpha_{it}) - \alpha_{it}$  (ver Kumbhakar y Lovell, 2000, pp. 109-110).

Una alternativa más flexible de modelar el comportamiento de la ineficiencia consiste en expresar los efectos (fijos o aleatorios) como el producto entre una constante  $\alpha_i$  y un

<sup>7</sup> En particular, los modelos con ineficiencia semi-normal y normal truncada están pre-programados en *software* como Stata, Limdep, R y Frontier 4.1, lo cual facilita grandemente su uso en estudios empíricos.

conjunto de *dummies* temporales  $\theta_t$  (es decir,  $\alpha_{it} = \theta_t \alpha_i$ ). Cornwell y Schmidt (1993) presentan estimadores de efectos fijos y efectos aleatorios para esta especificación.

No obstante, los modelos de efectos fijos y efectos aleatorios enfrentan una importante limitación: en la práctica de estimar funciones de producción, el cambio técnico también suele ser aproximado a través de la inclusión del tiempo entre el conjunto de las regresoras. Por tanto, al menos en el caso del progreso técnico neutral, ambos modelos tienden a confundir los efectos del cambio técnico y del cambio en la ineficiencia.<sup>8</sup> O dicho de otro modo, aquella parte del comportamiento de la producción que es atribuida al cambio en la eficiencia, en la práctica podría ser también atribuida al cambio técnico.

*Máxima Verosimilitud:* El estimador máximo verosímil también permite abordar el problema de modelar una ineficiencia tiempo variante en el marco de una frontera estocástica. Básicamente el término de ineficiencia se define como:

$$u_{it} = g(t) * U_i$$

Donde  $g(t)$  es una función del tiempo y  $U_i \sim \text{iid } N^+(\mu, \sigma_u^2)$ , es decir,  $U_i$  es una variable aleatoria no negativa con función de probabilidad normal. O en otras palabras, sigue una distribución normal truncada, donde el punto de truncamiento es cero, esto es,  $U_i \geq 0$ . Los  $U_i$  pueden ser interpretados como el valor que toma la ineficiencia en el periodo inicial ( $t = 0$ ). Además, como recordará el lector, la frontera es un ideal teórico que ningún agente puede sobrepasar, pues la frontera define el máximo nivel de producción admisible dado un conjunto de insumos, razón por la cual  $u_{it} \geq 0$ . Por lo tanto, el anterior truncamiento garantiza que las ineficiencias estimadas  $\hat{u}_{it}$  sean no negativas.

Dos casos especiales del anterior modelo han sido considerados en la literatura. El primero, propuesto por Kumbhakar (1990), define  $g(t)$  de la siguiente manera:

$$g(t) = 1/(1 + \exp[\delta_1 t + \delta_2 t^2])$$

Si  $\delta_1, \delta_2 = 0$ , la ineficiencia es constante. El segundo caso, expuesto en Battese y Coelli (1992), define la función del tiempo como sigue:

$$g(t) = \exp(-\eta[t - T])$$

Donde  $T$  es el número de periodos cobijado por el panel de datos. Si  $\mu = 0$ , la distribución de  $U_i$  se simplifica a una semi-normal. Además si  $\eta = 0$  se regresa al caso de ineficiencias tiempo invariantes. Estas hipótesis pueden ser fácilmente testeadas. Empero, tanto el

---

<sup>8</sup> El cambio técnico neutral hace referencia a aquellos cambios en la tecnología que no alteran las proporciones en las cuales se emplean el capital y el trabajo en el proceso productivo. Por el contrario, el cambio técnico no neutral tiende a favorecer el empleo de alguno de estos factores.

enfoque de Kumbhakar (1990) como el de Battese y Coelli (1992) presentan una característica que puede ser una debilidad: si se construyese un ranking de productores de acuerdo a su grado de ineficiencia, este ranking no cambiaría (o presentaría pocos) durante el periodo que cubre el panel. La razón es que los parámetros que definen la función  $g(t)$  son los mismos para todos los productores (lo que significa que sus ineficiencias tienen una trayectoria temporal similar), mientras su ranking depende de la estimación que se haga de cada  $U_i$ .

Aunque en contraste con los modelos de efectos fijos y efectos aleatorios, la información distribucional utilizada por el estimador máximo verosímil abre la posibilidad de separar el cambio técnico (neutral) del cambio en la ineficiencia.

#### *1.4.3. Modelo de efectos de eficiencia*

Hasta el momento, el análisis precedente se ha concentrado en el problema de la estimación de la eficiencia a partir de modelos de frontera estocástica. Tarea relevante para el presente trabajo, dado el propósito de estimar y descomponer la PTF en sus factores determinantes, uno de los cuales es precisamente la ineficiencia técnica. Sin embargo, como lo señalan Lovell, Fried y Schmidt (2008, p. 38) además de estimar la ineficiencia, otro problema relevante consiste en incorporar sus posibles determinantes. Evidentemente, desde el punto de vista de los hacedores de política, esta información es relevante, pues si hay evidencia de que la industria nacional opera por debajo de su plena capacidad, la competitividad y la productividad de la misma puede ser mejorada atacando esos factores que la obstaculizan.

A primera vista, una manera aparentemente atractiva de incorporar los posibles determinantes de la eficiencia consistiría en un proceso de estimación bi-etápico. En la primera etapa, las eficiencias serían estimadas a partir de un modelo de frontera estocástica, mientras en la segunda etapa esas eficiencias estimadas serían regresadas contra un conjunto de variables que se presume explican su comportamiento (Lovell, Fried y Schmidt, 2008). Ahora bien, en la primera etapa la estimación de la eficiencia es efectuada bajo la hipótesis de que esta es idénticamente distribuida (es decir, tiene media única, como hemos supuesto hasta el momento en la presente exposición). Sin embargo, la segunda etapa involucra especificar un modelo de regresión para pronosticar la eficiencia, lo cual equivale a admitir que la eficiencia tiene múltiples medias (una para cada productor), violando la anterior hipótesis.

Ahora bien, como lo pone de manifiesto la discusión sobre la estimación de ineficiencias tiempo variantes, es posible modelar la ineficiencia como una función paramétrica del tiempo. Por lo tanto, surge la inquietud acerca de la posibilidad de especificar un modelo de frontera estocástica, donde simultáneamente la ineficiencia sea expresada como una función de otras variables adicionales al tiempo. Este modelo sería más flexible, en tanto

permitiría incorporar fuentes de heterogeneidad observada entre los distintos productores, que hacen que la eficiencia media de cada uno sea diferente. Esto permitiría explicar, por ejemplo, por qué en Colombia hay ciertos departamentos más eficientes (y productivos) que otros.

Basados en el trabajo de Huang y Liu (1994), Battese y Coelli (1995) proponen un modelo de tales características. El modelo de frontera estocástica a estimar es como en la ecuación (6), es decir:

$$\ln y_{it} = \alpha + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{it} + e_{it}$$

Como antes,  $e_{it} = v_{it} - u_{it}$  y como es usual  $v_{it} \sim \text{iid } N(0, \sigma_v^2)$ . La diferencia radica en los supuestos en torno a  $u_{it}$ . En particular, se asume que el término de ineficiencia sigue una distribución normal truncada con media  $\mu_{it}$  y varianza  $\sigma_u^2$ , donde el punto de truncamiento es cero (esto es,  $u_{it} \geq 0$ ). Así pues, el término de ineficiencia se asume independiente, pero no idénticamente distribuido, ya que su media,  $\mu_{it}$ , varía transversal y longitudinalmente. En particular, Battese y Coelli (1995) parametrizan la media del término de ineficiencia como sigue:

$$\mu_{it} = \mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta} \quad (8)$$

Donde  $\mathbf{z}_{it}$  es un vector de variables explicativas asociadas con la ineficiencia técnica (una de las cuales puede ser el tiempo,  $t$ ) y  $\boldsymbol{\delta}$  es el correspondiente vector de parámetros desconocidos. Si la primera variable  $\mathbf{z}_{it}$  tiene el valor de uno (representando el intercepto) y los coeficientes asociados a las demás variables en  $\mathbf{z}_{it}$  son cero, se retorna al caso de ineficiencia tiempo invariante e idénticamente distribuida. Asimismo, si todos los coeficientes en  $\boldsymbol{\delta}$  son cero, se tiene el caso de ineficiencias tiempo invariantes con distribución semi-normal. Por tanto, esta especificación es bastante flexible, ya que anida otras especificaciones comúnmente usadas en la literatura empírica.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la media de  $u_{it}$  está dada por la ecuación (8), entonces el modelo de ineficiencia se puede escribir como sigue:

$$u_{it} = \mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta} + W_{it} \quad (9)$$

Donde  $\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta}$  representa el componente determinístico de la ineficiencia, mientras  $W_{it}$  represente su componente aleatorio. O dicho de otro modo, el primer componente refleja el componente explicado de la ineficiencia, mientras el segundo representa el componente residual y no explicado de la misma. Por lo tanto,  $W_{it}$  es en esencia un término de error, el cual sigue una distribución normal truncada con media cero y varianza constante, cuyo

punto de truncamiento es  $-\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta}$ , es decir,  $W_{it} \geq -\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta}$ . La razón de este truncamiento es garantizar que el dominio de la ineficiencia comprenda el conjunto de los números reales no negativos (o sea,  $u_{it} \geq 0$ ).<sup>9</sup> Todo lo anterior puede ser resumido escribiendo que  $u_{it} \sim N^+(\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2)$ .

Los parámetros de la frontera estocástica en la ecuación (6) y del modelo de ineficiencia en la ecuación (9) pueden ser estimados simultáneamente (en una sola etapa) por el método de la máxima verosimilitud. Además, recordando la ecuación (3), la eficiencia técnica para el productor  $i$  en el periodo  $t$  se define como:

$$TE_{it} = \exp(-\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta} - W_{it}) \quad (10)$$

El modelo de frontera estocástica descrito en esta sección y definido por las ecuaciones (6) y (9) será referido en adelante como modelo de efectos de eficiencia. Cabe anotar que este modelo permite que la trayectoria temporal de la ineficiencia sea más flexible que en los modelos de ineficiencia tiempo variantes descritos en la sección precedente, ya que sus cambios están asociados al comportamiento de las variables explicativas incluidas en  $\mathbf{z}_{it}$ . Por lo tanto, si se construye un ranking de productores de acuerdo a su nivel de ineficiencia, este puede cambiar de periodo a periodo. Además, el modelo de efectos de eficiencia puede diferenciar el cambio técnico neutral del cambio en la eficiencia, cosa que no es posible en los modelos de efectos fijos y efectos aleatorios presentados más arriba.

## 2. Metodología

### 2.1. Descripción de los datos

El propósito de este trabajo consiste en estimar los determinantes de la productividad y la eficiencia en la industria manufacturera colombiana. Con esta intención se utiliza información acerca de la producción industrial departamental en Colombia, obtenida por medio de la Encuesta Anual Manufacturera (EAM) elaborada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), de la cual se dispone para el periodo 1992-2007. La EAM presenta la evolución del sector industrial, de acuerdo con las normas establecidas por la Clasificación Industrial Internacional Uniforme de las actividades económicas (CIIU) de la Oficina de Estadística de Naciones Unidas, por grupos a tres

---

<sup>9</sup> El lector podrá comprobar reemplazando en la ecuación (9), que en caso contrario (es decir, si  $W_{it} \leq -\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta}$ ) la ineficiencia toma valores negativos, lo cual implica que hay productores que sobrepasan su potencial productivo. Sin embargo, dado que la frontera representa la máxima producción alcanzable, esta situación es inviable.

dígitos y clases a cuatro dígitos, identificando aquellas actividades industriales homogéneas.

Entre 1992-1999 el DANE ordena la información consignada en la EAM según la clasificación CIIU revisión 2. Por el contrario, a partir del 2000, el DANE utiliza la revisión 3 de la clasificación CIIU. Por tanto, para compatibilizar la información que va de 2000 a 2007 con aquella que va desde 1992 hasta 1999, se utiliza la tabla de equivalencia (proporcionada por el DANE) para compatibilizar la revisión 3 de la clasificación CIIU con la revisión 2. Además, las variables nominales fueron deflactadas haciendo uso del índice de precios al productor, por agrupación industrial, proporcionado por el DANE (con año base 1990). A partir de este conjunto de datos se calculan las siguientes variables, que caracterizan la producción industrial departamental y son utilizadas para estimar la frontera estocástica: producción bruta ( $y_{it}$ ), número de trabajadores ( $L_{it}$ ), stock de capital ( $K_{it}$ ). Adicionalmente, se calculan las siguientes variables, para caracterizar otros aspectos del desempeño de la producción industrial en cada departamento: índice 4 de especialización ( $ie_{it}$ ), participación de las exportaciones de bienes manufacturados en la producción bruta ( $shx_{it}$ ), participación de las importaciones de bienes manufacturados en la producción bruta ( $shi_{it}$ ).

El número de trabajadores corresponde al personal ocupado permanente. Por su parte, el stock de capital fue calculado por el método del inventario perpetuo (ver Harberger, 1969 y 1978), que obtiene las series de stock a partir de la acumulación de los flujos pasados de la inversión bruta:

$$K_{it} = (1 - d)K_{it-1} + I_{it}$$

Donde  $I_{it}$  representa la inversión bruta para el departamento  $i$  en el año  $t$  y  $d$  es la tasa de depreciación (la cual se asume igual a 5% anual). El stock de capital inicial se calcula como  $K_{i0} = I_{i0}/(\eta_i + d)$  siendo  $\eta_i$  la tasa histórica de crecimiento del valor agregado para cada departamento (Nehru y Dhareshwar, 1993, p. 43; Harberger, 1969 y 1978).

En cuanto al índice 4 de especialización, se trata de un indicador que va de 0 a 1, donde un valor cercano a la unidad indica que el departamento considerado tiene una industria altamente especializada o dedicada a unos pocos sectores. Por el contrario, un valor cercano a cero indica una industria bastante diversificada. Este índice se calcula como en Cuervo y González (1997, pp. 393-396).

Los departamentos finalmente contemplados en el análisis son: Antioquia (5), Atlántico (8), Bogotá D.C (11), Bolívar (13), Boyacá (15), Caldas (17), Cauca (19), Cesar (20), Cundinamarca (25), Magdalena (47), Quindío (63), Risaralda (66), Santander (68), Tolima (73), Valle del Cauca (76) y Otros Departamentos (99). En Otros Departamentos están

incluidos Nariño, Huila, Norte de Santander, Córdoba, Chocó, Meta y Sucre. Los departamentos Huila, Norte de Santander y Nariño fueron incluidos en Otros Departamentos debido a que su información en algunos casos no es constante en el tiempo, sesgando así las tasas de crecimiento de las variables. Los departamentos restantes como Amazonas, La Guajira, Chocó, etc, se excluyen del análisis debido a que su industria manufacturera es incipiente o casi inexistente.<sup>10</sup>

## 2.2. Especificación del modelo econométrico

Con el ánimo de calcular la eficiencia, la PTF y sus factores determinantes se emplea el modelo de efectos de eficiencia de Battese y Coelli (1995) descrito previamente, ya que ofrece ciertas ventajas: 1) admite que la eficiencia varíe en el tiempo, 2) permite diferenciar el cambio en la eficiencia del cambio técnico, 3) permite que la ineficiencia media ( $\mu_{it}$ ) sea distinta para cada observación y 4) especifica la ineficiencia como función de un conjunto de variables explicativas, cuyos parámetros se estiman simultáneamente con la frontera estocástica. Además, con el fin de capturar la heterogeneidad no observada y evitar que esta contamine las eficiencias estimadas, se incluye un conjunto de *dummies* departamentales. Greene (2004 y 2005) denomina esta especificación de la frontera estocástica como modelo con verdaderos efectos fijos (*true fixed effects model*). Greene (2004 y 2005) llama la atención sobre el escaso uso de esta especificación del modelo de frontera en la literatura, a pesar de que es una modificación trivial del mismo.<sup>11</sup> Finalmente, para estimar la frontera estocástica se utiliza una función de producción translogarítmica. Esta es una forma funcional flexible que permite la presencia de economías variables de escala en la producción y anida, entre otras, la más restrictiva pero bastante conocida función de producción Cobb-Douglas. De esta manera, la frontera estocástica a estimar es la siguiente:

$$\begin{aligned} \ln y_{it} = & \alpha + \beta_l \ln L_{it} + \beta_k \ln K_{it} + 0.5\beta_{ll}(\ln L_{it})^2 + 0.5\beta_{kk}(\ln K_{it})^2 \\ & + \beta_{lk} \ln L_{it} \ln K_{it} + \beta_t t + 0.5\beta_{tt}t^2 + \beta_{lt}t \ln L_{it} + \beta_{kt}t \ln K_{it} \\ & + \sum_{i=2} \alpha_i D_{it} + v_{it} - u_{it} \end{aligned} \quad (11)$$

Donde  $D_{it}$  es una variable dicotómica que toma el valor de 1 si  $i = j$  y el valor de cero si  $i \neq j$ . Por tanto,  $D_{it}$  define el conjunto de *dummies* departamentales, mientras  $\alpha_i$  estima los efectos fijos asociados a cada departamento. Las variables restantes fueron definidas

<sup>10</sup> Recuerde que la EAM **solo** indaga por la actividad industrial, lo cual deja excluidas del análisis las actividades del sector primario, que seguramente son importantes en estos departamentos.

<sup>11</sup> Además, el problema de los parámetros incidentales solo es una preocupación si  $T$  (la dimensión temporal) es muy pequeño (usualmente, menor que 5 periodos). Este obviamente no es nuestro caso, pues la información disponible cubre el periodo 1992-2007.

previamente. Note que la interacción entre el tiempo  $t$  y los factores productivos ( $L_{it}$  y  $K_{it}$ ) estima el cambio técnico no neutral. En lo que concierne a la ineficiencia, esta viene definida por el siguiente modelo:

$$u_{it} = \delta_0 + \delta_1 ie_{it} + \delta_2 shi_{it} + \delta_3 shx_{it} + \delta_4 t + W_{it} \quad (12)$$

Como recordará el lector, el término de perturbación  $v_{it}$  tiene una distribución normal, en tanto que  $W_{it}$  es una variable normal truncada que recoge el componente no explicado de la ineficiencia. Asimismo, como se describe en el marco teórico, el modelo de efectos de eficiencia de Battese y Coelli (1995) se estima por el método de la máxima verosimilitud. La función de verosimilitud respectiva se presenta en el anexo 1 y está expresada en función de los parámetros de varianza  $\sigma^2 = \sigma_u + \sigma_v$  y  $\gamma = \sigma_u / (\sigma_u + \sigma_v)$  donde  $\sigma^2$  se puede interpretar como la varianza del término de error compuesto  $e_{it} = v_{it} - u_{it}$  y  $\gamma$  da una idea de la importancia de la ineficiencia en el modelo de frontera estocástica.

### 3. Resultados

La función de verosimilitud de este modelo es maximizada a través del algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell implementado en el paquete estadístico R utilizando la librería *frontier*. Se obtienen los resultados reportados en la tabla 1.<sup>12</sup> El parámetro de varianza  $\gamma$  es significativo y toma un valor de 0.99689, bastante cercano a uno, indicando la importancia de la ineficiencia en el análisis de la producción industrial departamental (este resultado es compatible con investigaciones previas; ver Lambarra, Serra y Gil, 2007; Coelli *et al.*, 2005; Battese y Coelli 1995). Para analizar la conveniencia del modelo estimado en la tabla 1, se contrastan un conjunto de hipótesis a través del test de razón de verosimilitud, cuyos resultados se reportan en la tabla 2.<sup>13</sup>

<sup>12</sup> Para no recargar la presentación y dado que no son el objeto central del presente análisis, en la tabla 1 no se muestran las *dummies* departamentales estimadas. Sin embargo, el lector interesado puede remitirse a la tabla A2.1 del Anexo 2, donde se presenta una tabla de resultados que incluye las *dummies*.

<sup>13</sup> El estadístico de prueba del test de razón de verosimilitud es  $\lambda = -2\{\ln L(H_0) - \ln L(H_1)\}$ . Bajo  $H_0$  cierta, dicho estadístico tiene una distribución *chi-cuadrado* con parámetro igual al número de coeficientes que se presume son iguales a cero.

Tabla 1. *Estimación de máxima verosimilitud de la frontera estocástica con efectos de eficiencia.*

Variable	Parámetro	Estimación	Desviación Estándar	
<b>Función de producción de frontera</b>				
Constante	$\alpha$	-9.157	1.150	***
$\ln L_{it}$	$\beta_l$	0.617	0.454	
$\ln K_{it}$	$\beta_k$	2.612	0.369	***
$(\ln L_{it})^2$	$\beta_{ll}$	0.004	0.068	
$(\ln K_{it})^2$	$\beta_{kk}$	-0.170	0.059	**
$\ln L_{it} * \ln K_{it}$	$\beta_{lk}$	-0.006	0.058	
$t$	$\beta_t$	-0.235	0.028	***
$t^2$	$\beta_{tt}$	0.007	0.001	***
$t * \ln L_{it}$	$\beta_{lt}$	-0.029	0.004	***
$t * \ln K_{it}$	$\beta_{kt}$	0.033	0.003	***
<b>Modelo de Ineficiencia</b>				
Constante	$\delta_0$	0.094	0.140	
$ie_{it}$	$\delta_1$	0.006	0.002	***
$shi_{it}$	$\delta_2$	-0.002	0.001	**
$shx_{it}$	$\delta_3$	-0.005	0.002	*
$t$	$\delta_4$	-0.024	0.011	*
<b>Parámetros de Varianza</b>				
	$\sigma^2$	0.070	0.008	***
	$\gamma$	0.99689	0.013	***
Log-verosimilitud		136.9512		

Códigos de significancia: ‘\*\*\*’  $p < 0.001$ ; ‘\*\*’  $p < 0.01$ ; ‘\*’  $p < 0.05$

El primer test evalúa si la producción industrial de los departamentos colombianos opera sobre la frontera, o dicho de otro modo, si el componente sistemático y el componente aleatorio de la ineficiencia técnica no son significativos. Si este es el caso el modelo se reduce a una función de respuesta media que puede ser estimada por mínimos cuadrados ordinarios (Puig-Junoy, 2001). Sin embargo, esta hipótesis se rechaza con un 95% de confianza. Por su parte, la hipótesis 2 especifica que el índice 4 de especialización, la participación de las importaciones, la participación de las exportaciones y el tiempo no explican la ineficiencia. O dicho de otro modo, evalúa si el componente sistemático de la ineficiencia es significativo. Si este no es el caso, el modelo se simplifica a uno con ineficiencia constante e idénticamente distribuida. Empero, la hipótesis 2 también se rechaza. Por tanto, el rechazo de las hipótesis 1 y 2 indica que la ineficiencia es claramente

estocástica y está relacionada con las variables mencionadas (ver Battese y Coelli, 1995, pp. 330-331), confirmando la pertinencia del modelo de efectos de eficiencia.

La tercera hipótesis indaga sobre la pertinencia de una especificación Cobb-Douglass de la función de producción, pero es rechazada con un 95% de confianza. Por tanto, se prefiere la especificación translogarítmica. En el cuarto test se rechaza la hipótesis nula sobre la ausencia de cambio técnico. Dado, que el cambio técnico está presente en el modelo, la hipótesis 5 evalúa si este es neutral. No obstante, esta hipótesis también se rechaza. De hecho, los resultados en la tabla 1 sugieren que el cambio técnico favoreció el empleo del capital en detrimento del trabajo ( $\beta_{lt}=-0.29<0$ ,  $\beta_{kt}=0.033>0$ ).

Tabla 2. *Tests de razón de verosimilitud*

<b>Tes t</b>	<b>Hipótesis nula (H<sub>0</sub>)</b>	<b>Estadístico- LR</b>	<b>Valor crítico</b>	<b>Grados de libertad</b>	<b>Decisión (95% de confianza )</b>
<b>1</b>	$\gamma = \delta_0 = \dots = \delta_4 = 0$	42.789	12.592	6	Rechazar H <sub>0</sub>
<b>2</b>	$\delta_1 = \dots = \delta_4 = 0$	25.575	9.488	4	Rechazar H <sub>0</sub>
<b>3</b>	$\beta_{ll} = \beta_{kk} = \beta_{lk} = \beta_{ll} = \beta_{lk} = 0$	31.287	11.071	5	Rechazar H <sub>0</sub>
<b>4</b>	$\beta_{lt} = \beta_{lt} = \beta_{lt} = \beta_{kt} = 0$	154.34	9.488	4	Rechazar H <sub>0</sub>
<b>5</b>	$\beta_{lt} = \beta_{kt} = 0$	44.497	5.991	2	Rechazar H <sub>0</sub>
<b>6</b>	$\alpha_2 = \dots = \alpha_{16} = 0$	195.83	24.996	15	Rechazar H <sub>0</sub>
<b>7</b>	$\beta_{lt} = \beta_{lt} = \beta_{lk}$	97.584	7.815	3	Rechazar H <sub>0</sub>

Además, siguiendo a Greene (2004 y 2005) en la especificación final del modelo se incluyeron un conjunto de *dummies* departamentales, a manera de efectos fijos para captar la heterogeneidad no observada. La hipótesis 6 verifica la significancia de este conjunto de *dummies*. Finalmente, dado que algunos parámetros asociados con la elasticidad de la producción al trabajo no son significativos individualmente, la hipótesis 7 investiga si estos parámetros tampoco lo son conjuntamente. Sin embargo, esta hipótesis se rechaza con un 95% de confianza. Por esta razón, se conservan dichos parámetros en la especificación final del modelo.

A partir de los parámetros estimados para la frontera estocástica en la tabla 1 se calculan las elasticidades de los factores (capital y trabajo) y los retornos a escala,<sup>14</sup> reportados en las tablas 3 y 4, junto con las eficiencias estimadas (calculadas a través de la ecuación (10)). En la tabla 3 se reportan promedios anuales (nacionales) de las elasticidades y las eficiencias. Como se observa allí, en el periodo 1992-2007 la elasticidad de la producción al trabajo ha disminuido, mientras la elasticidad del capital ha aumentado, evidenciando el fenómeno de cambio técnico no neutral ya notado.

Este fenómeno se puede atribuir a dos causas. En primer lugar, al proceso de apertura económica que acontece a principios de la década de 1990 durante el gobierno de César Gaviria. Dicho proceso aperturista repercutió en la disminución de las trabas aduaneras y arancelarias, favoreciendo la importación de bienes de capital. De esta manera, el proceso aperturista generó un proceso de cambio técnico exógeno (ya que la tecnología se importa) que favorece el empleo del capital a raíz del abaratamiento de este factor productivo. Y en segundo lugar, el gobierno colombiano, en aras de promover el crecimiento de la industria, ha adoptado medidas de promoción de la inversión que favorecen la adquisición de bienes de capital, a través de exenciones tributarias que abaratan su importación (como fue el caso durante la presidencia de Álvaro Uribe). Sin contar que el sistema tributario colombiano, embebido en este espíritu, ha tendido a imponer una mayor carga impositiva sobre el factor trabajo, que se refleja en unos altos costos laborales no salariales. De hecho, en el contexto latinoamericano Colombia es el tercer país con la mayor carga tributaria asociada al trabajo (Consejo Privado de Competitividad, 2012, pp. 93-99).

Asimismo, la tabla 3 muestra que en general la eficiencia técnica en Colombia ha aumentado con el paso del tiempo, pasando de un nivel de 0.692 en 1992 a un nivel de 0.841 en 2007. Es decir, en 2007, en promedio la producción industrial colombiana operaba a un 84.1% de su capacidad. Además, el análisis de la evolución de la eficiencia permite ver como su comportamiento está atado a factores coyunturales asociados con el ciclo económico. Es así como en 1999, coincidiendo con la mayor crisis enfrentada por la economía colombiana, se observa que la eficiencia media cae a un nivel de 0.747, desde un nivel de 0.815 en 1998, tras un aumento casi sostenido de esta variable desde 1992. Por el contrario, coincidiendo con el periodo de auge acontecido entre 2002 y 2006 debido al contexto internacional favorable (previo a la crisis internacional de 2008), la eficiencia media en Colombia alcanza un pico de 0.915, indicando que la industria colombiana operó muy cerca de su producción de frontera.

---

<sup>14</sup> La elasticidad del trabajo se calcula como  $\varepsilon_L = \partial \ln y_{it} / \partial \ln L_{it} = \beta_l + \beta_{ll} \ln L_{it} + \beta_{lk} \ln K_{it} + \beta_{lt} t$ . La elasticidad del capital se calcula de manera análoga.

Tabla 3. *Elasticidades factoriales, retornos a escala y eficiencias estimadas: Promedios anuales.*

<b>Año</b>	<b>Elasticidad trabajo</b>	<b>Elasticidad capital</b>	<b>Retornos a escala</b>	<b>Eficiencia Media</b>
<b>1992</b>	0.546	0.140	0.686	0.692
<b>1993</b>	0.517	0.165	0.682	0.681
<b>1994</b>	0.488	0.192	0.680	0.763
<b>1995</b>	0.459	0.218	0.678	0.811
<b>1996</b>	0.430	0.240	0.670	0.805
<b>1997</b>	0.401	0.269	0.670	0.812
<b>1998</b>	0.372	0.303	0.675	0.815
<b>1999</b>	0.343	0.335	0.678	0.747
<b>2000</b>	0.314	0.371	0.685	0.834
<b>2001</b>	0.285	0.411	0.696	0.780
<b>2002</b>	0.256	0.447	0.703	0.756
<b>2003</b>	0.227	0.487	0.714	0.797
<b>2004</b>	0.198	0.524	0.722	0.877
<b>2005</b>	0.170	0.570	0.740	0.915
<b>2006</b>	0.141	0.599	0.741	0.883
<b>2007</b>	0.113	0.628	0.741	0.841

La tabla 4 muestra las elasticidades y las eficiencias medias para cada departamento para el periodo 1992-2007. Adicionalmente, la última columna muestra el nivel promedio del índice 4 de especialización para ese mismo periodo. En general, la mayoría de los departamentos exhiben retornos decrecientes de escala, consistente con los resultados obtenidos por Gallón (2007), excepción hecha de Cesar, Magdalena y Quindío, departamentos que exhiben índices altos de especialización.<sup>15</sup> Incluso el coeficiente de correlación estimado entre los retornos a escala y el índice de especialización es de 0.699 para el periodo considerado (tabla 5).

<sup>15</sup> Cabe anotar que las elasticidades calculadas aquí no son directamente comparables con las de otros estudios de la productividad, como Greco (2002) o Iregui, Melo y Ramírez (2006), ya que estos se basan en funciones de producción neoclásicas con rendimientos constantes de escala y cubren muestras diferentes. Por el contrario, la función translogarítmica aquí estimada permite rendimientos variables de escala.

Tabla 4. *Elasticidades factoriales, retornos a escala y eficiencias estimadas: Promedios departamentales, 1992-2007.*

Departamento	Elasticidad trabajo	Elasticidad capital	Retornos a escala	Eficiencia Media	Índice 4 de especialización
Antioquia	0.328	0.036	0.364	0.904	0.248
Atlántico	0.327	0.217	0.544	0.859	0.279
Bogotá	0.329	0.011	0.340	0.878	0.211
Bolívar	0.325	0.314	0.639	0.876	0.587
Boyacá	0.323	0.279	0.602	0.615	0.708
Caldas	0.332	0.476	0.807	0.814	0.386
Cauca	0.321	0.239	0.560	0.738	0.724
Cesar	0.333	0.715	1.048	0.735	0.942
Cundinamarca	0.327	0.206	0.533	0.905	0.293
Magdalena	0.335	0.801	1.136	0.749	0.889
Quindío	0.332	0.785	1.117	0.743	0.673
Risaralda	0.331	0.441	0.772	0.788	0.451
Santander	0.330	0.390	0.719	0.765	0.437
Tolima	0.329	0.486	0.815	0.798	0.606
Valle	0.327	0.059	0.386	0.811	0.388
Otros	0.331	0.445	0.776	0.832	0.675
Media Nacional	0.329	0.369	0.697	0.801	0.531

Tabla 5. *Coefficiente de correlación del índice 4 de especialización.*

Índice 4 de especialización vs:	Correlación
Retornos a escala	0.699
Eficiencia	-0.320
Capital por trabajador	0.368

Sin embargo, entre los más eficientes encontramos a departamentos como Antioquia, Bogotá, Cundinamarca, Valle del Cauca y Atlántico, que poseen bajos retornos a escala pero son bastante diversificados (como refleja su bajo índice de especialización). De hecho, para el periodo considerado el coeficiente de correlación entre la eficiencia y el índice 4 de especialización es negativo (-0.320). Estos cinco departamentos, que se pueden considerar los más desarrollados del país,<sup>16</sup> se caracterizan por concentrar la actividad industrial

<sup>16</sup> Por ejemplo, de acuerdo al Censo 2005 del DANE, estos cinco departamentos tienen un NBI por debajo de la media nacional

nacional. Como lo muestra la tabla 6 Antioquia, Bogotá, Cundinamarca, Valle del Cauca y Atlántico son los que más contribuyen al valor agregado industrial nacional. Tomados en conjunto, estos departamentos generan el 81.07% del valor agregado industrial del país. Esto sugiere que la mayor diversificación productiva permite explotar mejor las externalidades y complementariedades existentes (Gallón, 2007). Por ejemplo, una economía diversificada puede explotar las externalidades pecuniarias que generan la presencia de diferentes sectores, para constituir un mayor mercado interno, que haga a la industria menos sensible a los vaivenes de la demanda internacional (es decir, a las fluctuaciones en las exportaciones). Asimismo, confiere otras ventajas como la cercanía a proveedores o clientes, disminuyendo los costos de transporte u otros costos logísticos.

Tabla 6. *Participación de los departamentos en el valor agregado industrial nacional, 2007.*

<b>Departamento</b>	<b>% del valor agregado nacional</b>
<b>Bogotá</b>	29.73%
<b>Antioquia</b>	20.84%
<b>Valle</b>	15.72%
<b>Cundinamarca</b>	8.76%
<b>Atlántico</b>	6.02%
<b>Bolívar</b>	3.59%
<b>Boyacá</b>	3.46%
<b>Cauca</b>	2.55%
<b>Santander</b>	2.16%
<b>Risaralda</b>	1.97%
<b>Caldas</b>	1.63%
<b>Otros</b>	1.56%
<b>Tolima</b>	1.28%
<b>Magdalena</b>	0.29%
<b>Cesar</b>	0.27%
<b>Quindío</b>	0.17%

Teniendo en cuenta el presente análisis, y dados los objetivos del presente trabajo, se procede analizar los resultados del modelo de ineficiencia. Luego, a partir de los parámetros del modelo de frontera se completará el ejercicio de descomposición de la PTF, para analizar los determinantes de la productividad.

### 3.1. Determinantes de la ineficiencia técnica

El modelo de efectos de eficiencia, cuyos resultados se reportan en la tabla 1, tiene dos componentes, los cuales se estiman de manera simultánea: la frontera estocástica y el modelo de ineficiencia. Los resultados relacionados con la función de producción de frontera se utilizaron en el análisis precedente para analizar la naturaleza y los efectos del cambio técnico (tabla 3), estimar las elasticidades factoriales y las economías de escala (tabla 4). Ahora se centra la atención en el segundo componente. Note el lector que la variable dependiente en esta parte del modelo es la ineficiencia, la cual puede transformarse en una medida de la eficiencia a través de las ecuaciones (9) y (10). De esta forma, un signo negativo de un parámetro en el modelo de ineficiencia significa que la variable asociada disminuye la ineficiencia o, lo que es lo mismo, aumenta la eficiencia.

De acuerdo a los resultados en la tabla 1 el tiempo  $t$  tiene un efecto negativo sobre la ineficiencia, lo que significa que entre 1992 y 2007 ella ha disminuido. O equivalentemente, la eficiencia ha mejorado a lo largo de ese periodo como se observa en la tabla 3. Por otro lado, la variable  $ie_{it}$  tiene un efecto positivo sobre la ineficiencia. Esto quiere decir que los departamentos más especializados tienden a ser más ineficientes (o menos eficientes). Tal resultado puede parecer sorprendente a primera vista, pero puede ser explicado por el hecho de que los departamentos más especializados poseen industrias con economías crecientes de escala (tabla 4), las cuales tienden a ser intensivas en capital, como lo evidencia que el coeficiente de correlación estimado entre el capital por trabajador y el índice de especialización es positivo e igual a 0.368 (tabla 5). Este tipo de industria puede ser más propensa a exhibir niveles persistentes de capacidad ociosa, debido a las indivisibilidades inherentes a ese tipo de procesos productivos. Además, como recién se mencionó, las economías diversificadas explotan mejor las externalidades y las complementariedades.

En la especificación del modelo de ineficiencia se incluyeron dos variables que reflejan la importancia del comercio internacional:  $shi_{it}$  (participación de las importaciones en la producción) y  $shx_{it}$  (participación de las exportaciones en la producción), ambas referidas a la importancia del comercio de bienes manufacturados en la industria nacional. La razón para incluir estas dos variables, en lugar de una medida global del grado de apertura del sector manufacturero es la siguiente: con respecto al efecto de las importaciones sobre la ineficiencia no hay duda, este debe ser negativo; no obstante, en lo que tiene que ver con las exportaciones el efecto sobre la ineficiencia no es tan claro. Hay espacio para presumir que el sector exportador podría tender a ser ineficiente por dos razones:

Una tiene que ver con el interés de larga data del gobierno nacional por promover el crecimiento de las llamadas exportaciones no tradicionales, las cuales involucran

principalmente productos manufacturados. Con este fin el gobierno colombiano ha estado dispuesto a ofrecer tratos preferenciales, como el otorgamiento de subsidios o créditos blandos (a través de Bancoldex) o los estímulos ya mencionados a la importación de bienes de capital. La otra está relacionada con la aparente dependencia del sector exportador en un tipo de cambio depreciado. Por estos motivos, hay razón para pensar que la competitividad real del sector exportador puede ser baja, dada su posible dependencia en apoyos gubernamentales o en una moneda doméstica subvaluada respecto al dólar (ver Greco, 2002, capítulo 4).

En lo que concierne a la variable  $shi_{it}$ , tiene un efecto pequeño pero negativo sobre la ineficiencia. Esto quiere decir que aquellos departamentos que enfrentan un mayor influjo de importaciones en relación a su producción industrial presentan industrias más eficientes, debido a que las importaciones constituyen una manera directa de exponer la industria local a la competencia internacional. Por otro lado,  $shx_{it}$  tiene un efecto negativo sobre la ineficiencia. Esto sugiere que:

- 1) el tipo de cambio no fue un factor tan importante como se podría presumir para determinar el éxito de las exportaciones no tradicionales. De hecho, el tipo de cambio real de las exportaciones no tradicionales disminuyó desde 1990 hasta 1997 como consecuencia de la apertura (Greco, 2002, capítulo 4), mientras el peso (moneda colombiana) ha experimentado una importante apreciación desde 2002. Por tanto, los exportadores se han tenido que acostumbrar a un tipo de cambio apreciado.
- 2) el apoyo gubernamental no generó efectos distorsionantes que viabilizaran el éxito exportador de firmas poco competitivas e ineficientes.

### **3.2. Determinantes de la productividad**

El crecimiento de la productividad (o PTF) depende de la diferencia entre el aumento de la producción y el aumento de los insumos. De esta manera, la variación de la productividad es una cantidad residual (Fried, Lovell y Schmidt, 2008, p. 8), que Abramovitz (1956) caracterizó como “una medida de nuestro grado de ignorancia.” Sin embargo, mucho se ha avanzado desde los trabajos pioneros de Abramovitz (1956) y Solow (1957). Como señalan Fried, Lovell y Schmidt (2008) los cambios en la productividad pueden ser atribuidos a diferencias en la tecnología, en la escala de producción o a diferencias en la eficiencia. A través de la metodología de descomposición de la PTF propuesta por Kumbhakar, Denny y Fuss (2000) y presentada en la ecuación (4) es posible estimar las contribuciones de estas tres fuentes a la productividad, utilizando como insumo los resultados de la estimación de un modelo de frontera estocástica. La tabla 7 presenta los resultados de este ejercicio.

En el panel intermedio y en el panel derecho de la tabla 7 se muestra la descomposición de la PTF para los subperiodos 1992-1999 y 2000-2007, respectivamente. Entre 1992-1999, en promedio el elemento que más contribuyó al crecimiento de la PTF fue el aumento en la eficiencia técnica, seguido del cambio técnico. Por el contrario, en el periodo 2000-2007, el principal factor detrás del crecimiento de la PTF es el cambio técnico, el cual evidencia una aceleración. Por tanto, el incremento de la PTF entre 1992 y 1999 podría atribuirse al efecto positivo de la apertura sobre la eficiencia vía una mayor exposición de la industria nacional al influjo de la competencia externa. En contraste, entre 2000 y 2007, el crecimiento de la PTF podría atribuirse al cambio técnico exógeno, introducido vía importación de bienes de capital y vía inversión extranjera. Como se mencionó algunas páginas atrás, el cambio técnico en Colombia ha tenido un sesgo en favor del capital. Y precisamente, entre 2002 y 2007 el gobierno central implementó estímulos a la adquisición e importación de bienes de capital. Asimismo, gracias al incremento de la seguridad en esos años, Colombia experimentó un gran incremento de la inversión extranjera, la cual no solo implica una entrada de recursos al país, sino también la entrada del conocimiento y la tecnología que poseen las multinacionales que hacen su entrada al mismo.

No obstante, en ambos periodos se observa que no son las economías más diversificadas y desarrolladas las que experimentan el mayor crecimiento de la PTF, aunque hay que reconocer que su desempeño en este respecto siempre excede la media nacional. En otras palabras, el crecimiento de la PTF en Antioquia, Bogotá, Cundinamarca, Valle del Cauca y Atlántico está por encima del promedio. Los departamentos cuya PTF experimenta el mayor crecimiento entre 1992-1999 y entre 2000-2007 son Boyacá y Bolívar, cuya producción industrial es bastante especializada. En el caso de Boyacá, el sector más importante dentro de la producción industrial es el metalúrgico (industrias del hierro y el acero), mientras en Bolívar el sector con más peso es el de la producción de sustancias químicas industriales. Ambos son sectores caracterizados por el uso intensivo de mano de obra calificada y tecnología de acuerdo a la clasificación CIIU del DANE. De hecho, en estos dos departamentos el cambio técnico es el componente cuya contribución tiene más peso en la determinación de la tasa de crecimiento de la PTF.

En cuanto a la contribución de las economías de escala, se observa que su contribución en general es muy pequeña, hallazgo que guarda cierta correspondencia con Gallón (2007), quien obtiene que la contribución de este elemento es negativa para la mayor parte de departamentos. Analizando el conjunto del periodo (panel izquierdo en la tabla 7) se observa que las economías de escala hacen su mayor contribución relativa en Bogotá, Antioquia, Atlántico y Valle. Como se mencionó párrafos atrás, estos departamentos concentran una parte desproporcionada de la industria nacional. De hecho, estos cuatro departamentos aportan en conjunto el 72.31% del valor agregado industrial del país (tabla

6). Por tanto, “el tamaño de la industria y su concentración acarrea un mejor aprovechamiento de economías de escala” (Gallón, 2007).

Finalmente, analizando el conjunto del periodo de análisis (1992-2007, tabla 7-panel izquierdo), en promedio, el elemento que más ha contribuido al crecimiento de la PTF es el cambio técnico (por su repunte entre 2000-2007), seguido de la eficiencia técnica (cuya contribución fue la más importante entre 1992-1999, pero sigue siendo clave entre 2000-2007). Por tanto, los departamentos que exhiben los mayores niveles de crecimiento de la PTF, son precisamente aquellos donde el cambio técnico hace la contribución más importante. Ese es el caso de Boyacá, Bolívar, Cauca y Cundinamarca. Sin embargo, hay un segundo grupo de departamentos, compuesto precisamente por aquellos que aglomeran el grueso de la industria nacional, donde la PTF crece apreciablemente (por encima del promedio), gracias a la contribución combinada de la eficiencia técnica y el cambio técnico. Ese es el caso de Antioquia, Bogotá, Bolívar y Atlántico. Con excepción de Bolívar, estos departamentos se caracterizan por su diversificación productiva, la cual está asociada positivamente con la eficiencia. Además, Antioquia, Atlántico y Bolívar tienen una gran vocación exportadora (también asociada positivamente con la eficiencia): en 2007 estos tres departamentos exportaban cerca de un tercio de su producción manufacturada.

Tabla 7. *Descomposición de las fuentes de crecimiento de la PTF*

Departamento	1992-2007				1992-1999				2000-2007			
	PTF	Cambio técnico	Efectos de Escala	Eficiencia técnica	PTF	Cambio técnico	Efectos de escala	Eficiencia técnica	PTF	Cambio técnico	Efectos de Escala	Eficiencia técnica
Antioquia	0.075	0.041	0.013	0.021	0.039	0.009	0.010	0.020	0.111	0.073	0.016	0.022
Atlántico	0.086	0.053	0.013	0.020	0.049	0.020	0.008	0.021	0.123	0.086	0.018	0.020
Bogotá	0.076	0.037	0.019	0.021	0.051	0.005	0.026	0.020	0.102	0.068	0.013	0.021
Bolívar	0.096	0.071	0.005	0.021	0.064	0.036	0.007	0.020	0.129	0.106	0.002	0.022
Boyacá	0.112	0.084	0.014	0.015	0.077	0.052	0.011	0.013	0.148	0.116	0.017	0.016
Caldas	0.052	0.031	0.002	0.019	0.007	-0.009	-0.001	0.017	0.098	0.070	0.006	0.022
Cauca	0.090	0.095	-0.022	0.017	0.060	0.079	-0.032	0.014	0.120	0.111	-0.012	0.021
Cesar	0.042	0.027	-0.002	0.017	0.010	-0.010	0.002	0.018	0.074	0.063	-0.006	0.017
Cundinamarca	0.071	0.051	-0.001	0.021	0.037	0.019	-0.003	0.021	0.104	0.082	0.000	0.022
Magdalena	0.039	0.016	0.005	0.018	0.018	-0.018	0.018	0.018	0.060	0.050	-0.007	0.018
Quindío	0.052	0.037	-0.003	0.018	0.015	-0.004	0.002	0.018	0.088	0.078	-0.007	0.018
Risaralda	0.058	0.033	0.006	0.019	0.017	-0.007	0.005	0.018	0.099	0.074	0.007	0.019
Santander	0.069	0.042	0.010	0.018	0.029	0.005	0.008	0.016	0.110	0.078	0.011	0.021
Tolima	0.065	0.045	0.002	0.019	0.005	-0.002	-0.011	0.018	0.125	0.091	0.015	0.019
Valle	0.081	0.050	0.012	0.019	0.039	0.017	0.003	0.019	0.123	0.083	0.020	0.019
Otros	0.053	0.032	0.001	0.020	0.012	-0.004	-0.002	0.019	0.094	0.069	0.004	0.020
Promedio	0.070	0.046	0.005	0.019	0.033	0.012	0.003	<b>0.018</b>	0.107	<b>0.081</b>	0.006	0.020

## Comentarios Finales

Como queda claro a partir de la disquisición teórico-metodológica de la primera sección, los estudios acerca de la productividad (PTF) en Colombia tienen algunas limitaciones, relacionadas con la estimación de funciones de producción neoclásicas y algunas hipótesis restrictivas que descartan las fricciones que experimentan los mercados reales, fricciones que impiden la materialización del ideal de mercados competitivos, en los cuales la economía siempre está sobre su potencial. Los modelos de frontera estocástica reconocen estas fricciones, y tratan de evaluar su magnitud a través de la medición de la ineficiencia (o grado en el cual la producción observada se aleja de su nivel óptimo). Aunque los modelos de frontera estocástica ya han sido aplicados en el contexto colombiano, aún no han sido asimilados en la literatura acerca de la medición de la productividad y sus determinantes, como lo evidencia el hecho de que solo existe un trabajo empírico en esta dirección (Gallón, 2007). El presente trabajo aporta a esta literatura.

Los resultados aquí obtenidos, utilizando un modelo de efectos de eficiencia (Battese y Coelli, 1995) evidencian la presencia de ineficiencia técnica en la industria manufacturera colombiana. Sin embargo, los resultados indican que la ineficiencia técnica ha disminuido entre 1992 y 2007 (o equivalentemente, la eficiencia ha aumentado). Incluso, en un primer momento, entre 1992 y 1999, el aumento de la eficiencia fue el principal factor detrás del crecimiento de la Productividad Total Factorial (PTF) apuntando a un efecto positivo de la apertura de 1990 en la industria colombiana, gracias al menor aislamiento con respecto a los mercados internacionales por el desmonte gradual de las barreras proteccionistas.

Por otro lado, entre 2000-2007, el cambio técnico es el componente que lidera el mejoramiento de la productividad, asociado probablemente al incremento de la inversión extranjera y las facilidades otorgadas por el gobierno a la importación de bienes de capital. Este hecho no opaca la importancia de la eficiencia en la explicación del comportamiento de la productividad, pues los departamentos más desarrollados y diversificados pueden atribuir una proporción apreciable del crecimiento de la PTF al aumento en la eficiencia. Es el caso de Antioquia, Bogotá, Bolívar y Atlántico. Por su parte, Boyacá y Bolívar, con industrias considerablemente especializadas, pueden atribuir el aumento de la productividad principalmente al cambio técnico. Sin embargo, el buen desempeño general de Antioquia, Bogotá, Cundinamarca, Bolívar y Atlántico sugiere que la productividad está asociada positivamente con economías diversificadas, con un importante peso de la actividad exportadora, ya que estos factores inciden positivamente en los niveles de eficiencia. En estos departamentos el cambio técnico sigue explicando una gran parte del crecimiento en la productividad, pero su aporte proporcional es bastante menor en comparación con otros.

## Bibliografía

- Abramovitz, Moses (1993). "The Search for the Sources of Growth: Areas of Ignorance, Old and New." *Journal of Economic History*, Vol. 53, No. 2, pp. 217-243.
- Abramovitz, Moses (1956). "Resource and Output Trends in the United States Since 1870." *American Economic Review*, Vol. 46, pp. 5-23.
- Acevedo, María y Ramírez, Jorge (2005). "Diferencias regionales en la eficiencia técnica del sector confecciones en Colombia: Una análisis de fronteras estocásticas." *Innovar*, Vol. 15, No. 26, pp. 90-105.
- Affuso, Ermanno (2010). "Spatial Autoregressive Stochastic Frontier Analysis: an applicatoin to an impact evaluation study." *Working Paper*, Auburn University.
- Aigner, J. y Chu, S. (1968). "On Estimating the Industry Production Function." *American Economic Review*, Vol. 58, No. 4, pp. 826-839.
- Aigner, J.; Lovell, K. y Schmidt, P. (1977). "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models." *Journal of Econometrics*, Vol. 6. No. 1, pp. 21-37
- Barrios, Erniel y Lavado, Rouselle (2010). "Spatial Stochastic Frontier Models." *Discussion Paper Series*, Philippine Institute for Development Studies.
- Badel, Alejandro (2002). "Sistema Bancario Colombiano: ¿Somos eficientes a nivel internacional?" *Archivos de Economía*, Departamento Nacional de Planeación.
- Battese, George y Coelli, Tim (1992). "Frontier production functions, technical efficiency and panel data: with application to paddy farmers in India." *The Journal of Productivity Analysis*, Vol. 3, pp. 153-169.
- Charnes, A.; Cooper, W. y Rhodes E. (1978). "Measuring the Efficiency of Decision-Making Units." *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, No. 6, pp. 429-444.
- Coelli, Tim y Henningsen, Arne (2011). *frontier: Stochastic Frontier Analysis*. R package version 0.997-2. <http://CRAN.R-project.org/package=frontier>
- Coelli, Timothy; Prasada, D.S.; O'Donnell, Crhistopher y Battese, George (2005). *An introduction to efficiency and productivity analysis*. Springer.
- Consejo Privado de Competitividad (2012). *Informe nacional de competitividad, 212-2013: Ruta a la prosperidad colectiva*. Zetta Comunicadores, Bogotá.

Cornwell, Christopher; Schmidt, Peter y Sickles, Robin (1990). "Production frontiers with cross-sectional and time-series variation in efficiency levels." *Journal of Econometrics*, Vol. 46, pp. 185-200.

Cornwell, Cristopher y Schmidt, Peter (1993). "Production Frontiers and Efficiency Measurement," *Working Paper*, No. 427e, Georgia, College of Business Administration, Department of Economics.

Cuervo, Luis y Josefina, González (1997). *Industria y ciudades en la era de la mundialización: un enfoque socio espacial*. CIDER y Tercer Mundo Editores, Bogotá.

Elhorst, Paul (2010). "Spatial Panel Data Models." En: Fisher, Manfred y Getis, Arthur (Eds.). *Handbook of Applied Spatial Analysis: Software Tools, Methods and Applications*. Springer.

Debreu, Gerard (1951). "The coefficient of resource utilization." *Econometrica*, Vol. 19, No. 3, pp. 273-292.

Diewert, Erwin (1993). "Fisher Ideal Output, Input and Productivity Indexes Revisited." En: Diewert y Nakamura (editors), *Essays in Index Number Theory, Volume I*. Elsevier Science Publishers.

Färe, Rolf y Grosskopf, Shawna (1992). "Malmquist Productivity Indexes and Fisher Ideal Indexes." *The Economic Journal*, Vol. 102, No. 410, pp. 158-160.

Farrel, M. J. (1957). "The measurement of productive efficiency." *Journal of the Royal Statistical Society, Serie A*, Vol. 120, No. 3, pp. 253-282.

Fisher, Manfred y Getis, Arthur (2010). *Handbook of Applied Spatial Analysis: Software Tools, Methods and Applications*. Springer.

Fried, Harold; Lovell, Knox y Schmidt, Shelton (2008). "Efficiency and Productivity." En: Fried, Harold; Lovell, Knox y Schmidt, Shelton (Eds.), *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*. Oxford University Press.

Franco, Liliana y Raymond, José Luis (2009). "Convergencia Económica Regional: el caso de los departamentos colombianos". *Ecos de Economía*, No.28. Universidad EAFIT

Gallón, Santiago (2007). "Crecimiento de la productividad total factorial de la industria regional colombiana: aplicación de modelos de frontera estocástica." En Lotero J. (Ed.), *Industria y Región en Colombia: Desarrollo espacial, productividad y competitividad comercial durante la apertura de los noventa*. Centro de Investigaciones Económicas, Universidad de Antioquia, Medellín.

Greene, William (2008). "The Econometric Approach to Efficiency Analysis." En: Fried, Harold; Lovell, Knox y Schmidt, Shelton (Eds.), *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*. Oxford University Press.

Greene, William (2004). "Distinguishing between heterogeneity and inefficiency: stochastic frontier analysis of the World Health Organization's Panel Data on National Health Care Systems." *Health Economics*, Vol. 13, pp. 959-980.

Grupo de Estudios del Crecimiento Económico-Greco (2002). *El crecimiento económico de colombiano en el siglo XX*. Banco de la República.

Harberger, Arnold (1978). "Perspectives on capital and technology in less developed countries." En M.J Artis y A.R Nobay (eds.), *Contemporary Economic Analysis*, Londres, Croom Helm.

Harberger, Arnold (1969). "La tasa de rendimiento del capital en Colombia." *Revista Planeación y Desarrollo*, Vol. 1, No. 3, pp. 13-42.

Huang, Cliff y Liu, Jin-Tan (1994). "Estimation of a non-neutral stochastic frontier production function." *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 5, pp. 171-180.

Iregui, María; Melo, Fernando y Ramírez, Teresa (2006). "Productividad Regional y Sectorial en Colombia: Análisis utilizando datos de panel." *Borradores de Economía*, No. 378, Banco de la República.

Iregui, María; Melo, Ligia y Ramos, Jorge (2007). "Análisis de la eficiencia de la educación en Colombia." *Revista de Economía del Rosario*, Vol. 10, No. 1, pp. 21-41.

Jondrow, James; Lovell, Knox; Materov, Ivan y Schmidt, Peter (1982) "On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model." *Journal of Econometrics*, Vol. 19, No. 2-3, pp. 233-238.

Kapoor, Mudit; Kelejian, Harry y Prucha, Ingmar (2007). "Panel data models with spatially correlated components." *Journal of Econometrics*, No. 140, pp. 97-130.

Kumbhakar, Subal y Lovell, Knox (2000). *Stochastic Frontier Analysis*. Cambridge University Press.

Kumbhakar, Subal; Denny, M. y Fuss, M. (2000). "Estimation and decomposition of productivity change when production is not efficient: a panel data approach." *Econometric Reviews*, Vol. 19, No. 9, pp. 425-460.

Kumbhakar, Subal (1990). "Production frontiers, panel data and time varying technical inefficiency." *Journal of Econometrics*, Vol. 46, pp. 201-211.

Lambarra F, Serra T. y Gil J.M. (2007). "Technical efficiency analysis and decomposition of productivity growth of Spanish olive farms." *Journal of Agricultural Research*, Vol.5, No. 3, pp. 259-270.

Meeusen, W. y Van den Broeck (1977). "Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error." *Internation Economic Review*, Vol. 18, No. 2, pp. 293-323.

Medina, Pablo; Meléndez, Marcela y Seim, Katja (2003). "Productivity Dynamics of the Colombian Manufacturing Sector." *Working Paper*, Universidad de los Andes.

Mutis, Hernando (2006). "Una aplicación del análisis de frontera estocástica: el caso de hospitales de nivel II en Colombia." *Lecturas Matemáticas*, Vol. 27, pp. 259-270.

Nehru, Virkam y Ashok, Dhareshwar (1993). "A new database on physical capital stock: sources, methodology and results." *Revista de Análisis Económico*, Vol. 8, No. 1, pp 37-59.

OECD (2001). *Measuring Productivity: Measurement of Aggregate and Industry-level Productivity Growth*.

Pavlyuk, Dmitry (2010). "Multi-tier spatial stochastic frontier model for competition and cooperation of european airports." *Transport and Telecommunication*, Vol. 11, No. 3, pp. 57-66.

Perdomo, Andrés y Hueth, Darrel (2010). "Funciones de producción y eficiencia técnica en el eje cafetero colombiano: una aproximación con frontera estocástica." *Documentos CEDE*, Universidad de los Andes.

Pires, Jorge O. y Garcia, Fernando (2004). "Productivity of Nations: a Stochastic Frontier Approach to Tfp Decomposition." *Textos para discussao*, No. 143, Escola de Economia de São Paulo, Getulio Vargas Foundation (Brasil).

Puig-Junoy, Jaume (2001). "Technical inefficiency and public capital in U.S. states: a stochastic frontier approach." *Journal of Regional Science*, Vol. 41, No. 1, pp. 75-96.

R Core Team (2012). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Solow, Robert (1957). "Technical Change and the Aggregate Production Function." *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, No. 3, pp. 312-320.

### Anexos

**Anexo 1.** *Función de verosimilitud del modelo de efectos de eficiencia (Battese y Coelli, 1995)*

Defina  $Y_{it} = \ln y_{it}$  y considere que el intercepto está contenido en el vector de parámetros  $\boldsymbol{\beta}$ , o lo que es lo mismo, el primer elemento del vector de funciones de los insumos  $\mathbf{x}_{it}$  es uno (1). Luego, podemos reescribir el modelo de frontera estocástica como:

$$Y_{it} = \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it} - u_{it}$$

Donde  $v_{it} \sim N(0, \sigma_v^2)$  y  $u_{it} \sim N(\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta}, \sigma_u^2)$ . Además, defina:

$$\sigma^2 = \sigma_u + \sigma_v$$

$$\gamma = \sigma_u / \sigma_u + \sigma_v$$

Luego el logaritmo de la función de verosimilitud de la frontera estocástica, en un panel balanceado, es:

$$\begin{aligned} \ln L = & -\frac{1}{2}NT[\ln 2\pi + \ln \sigma^2] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [(Y_{it} - \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta})^2 / \sigma^2] \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T [\ln \Phi(d_{it}) + \ln \Phi(d_{it}^*)] \end{aligned}$$

Donde  $\Phi(\cdot)$  representa la función de distribución de una variable normal estándar y además:

$$d_{it} = \mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta} / (\gamma\sigma^2)^{1/2}$$

$$d_{it}^* = \mu_{it}^* / [\gamma(1 - \gamma)\sigma^2]^{1/2}$$

$$\mu_{it}^* = (1 - \gamma)\mathbf{z}'_{it}\boldsymbol{\delta} - \gamma(Y_{it} - \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta})$$

## Anexo 2. Tabla de resultados.

Tabla A2.1. Modelo de efectos de eficiencia con dummies departamentales.

Variable	Estimación	Desviación Estándar	Valor crítico	P-valor	
<b>Función de Producción de Frontera</b>					
Constante	-9.157	1.150	-7.962	0.000	***
$\ln L_{it}$	0.617	0.454	1.359	0.174	
$\ln K_{it}$	2.612	0.369	7.083	0.000	***
$(\ln L_{it})^2$	0.004	0.068	0.064	0.949	
$(\ln K_{it})^2$	-0.170	0.059	-2.901	0.004	**
$\ln L_{it} * \ln K_{it}$	-0.006	0.058	-0.099	0.922	
$t$	-0.235	0.028	-8.356	< 2.2e-16	***
$t^2$	0.007	0.001	5.563	0.000	***
$t * \ln L_{it}$	-0.029	0.004	-7.887	0.000	***
$t * \ln K_{it}$	0.033	0.003	10.153	< 2.2e-16	***
<b>Dummies</b>					
departamento8	-0.451	0.170	-2.657	0.008	**
departamento11	0.166	0.056	2.947	0.003	**
departamento13	-0.302	0.239	-1.264	0.206	
departamento15	-0.726	0.250	-2.899	0.004	**
departamento17	-0.845	0.298	-2.835	0.005	**
departamento19	-1.085	0.223	-4.855	0.000	***
departamento20	-0.705	0.410	-1.718	0.086	.
departamento25	-0.435	0.159	-2.732	0.006	**
departamento47	-0.589	0.427	-1.380	0.168	
departamento63	-0.567	0.416	-1.365	0.172	
departamento66	-0.788	0.287	-2.743	0.006	**
departamento68	-0.834	0.267	-3.120	0.002	**
departamento73	-0.750	0.307	-2.446	0.014	*
departamento76	0.027	0.070	0.388	0.698	
departamento99	-0.695	0.286	-2.426	0.015	*
<b>Modelo de ineficiencia</b>					
Constante	0.094	0.140	0.674	0.501	
$Ie_{it}$	0.006	0.002	3.577	0.000	***
$shi_{it}$	-0.002	0.001	-2.684	0.007	**
$shx_{it}$	-0.005	0.002	-2.074	0.038	*
$t$	-0.024	0.011	-2.163	0.031	*
<b>Parámetros de Varianza</b>					
$\sigma^2$	0.070	0.008	8.343	< 2.2e-16	***
$\gamma$	0.997	0.013	75.125	< 2.2e-16	***
Log-verosimilitud	136.9512				

