In search of a primary source: remaking the paper (1975) where at the first time a definition of lattice (Vorob'ev) expectation of a random set was given

Vorobyev, Oleg Yu.

Siberian Federal University, Institute of Mathematics

27 April 2013

In search of a primary source:

remaking the paper (1975) where at the first time a definition of *lattice (Vorob'ev) expectation* of a random set was given

Oleg Yu. Vorobyev
Siberian Federal University
Institute of Mathematics and Computer Science
Trade-Economic Institute
Krasnoyarsk
oleg.yu.vorobyev@gmail.com

Abstract. *Remaking the primary source of an old good idea of the "lattice expectation", published by me in 1975 [1, 2] at the first time and subsequently, especially in the western literature on stochastic geometry and the theory of random sets, named from a light hand of Dietrich Stoyan [3, 1994] "Vorob'ev expectation"*[1]*; had an only historical and methodic value for eventology and probability theory once more reminding how and "...from what rubbish flowers grow, not knowing shame".*

Keywords. *Probability theory, random set, mean measure set, lattice expectation, Vorob'ev expectation, eventology.*

1 Forward to the original source

You might not know from what rubbish flowers grow, not knowing shame.

Anna Akhmatova, 1940.

Any new finds itself on the old-fashioned way — always on its own. Any invention isn't someone clever fiction, but the discovery of previously hidden, cut off as unnecessary, deliverance from captivity oblivion, and release for public viewing.

New in mathematics is no exception. Strong mathematical definitions given so much that they are more than enough for all the sciences together. But only a rare few of them are definitions of new mathematical concepts. The remaining dissolved completely and forever lost in the maze of mathematical thought.

Why is it, and not otherwise, no one knows. Where, among a rubbish look for something new, that is, being open times will last forever? That can not be avoided? What can not be squeamish?

No answer.

You can only try once more to climb, step by step to recover as it was; to climb again by the same footpath, forward to the source.

2 Remake and/и Римейк[2]

2.1 *Estimating mean contours of forest fire from the probability model of fire spread* [2, 1, 1975]

In our study [4, 5, 1973] the probabilistic model of fire spread on a large forest which consists of the separate sites located in units of a *plane square lattice* was considered. This probabilistic model, *Random Spread Process (RSP)*, is defined as the set of discrete random variables

$$U = \{u_{rt}, r \in R_2, t \in T\}, \tag{2.2.1}$$

where $R_2 \subset \mathbb{R}^2$ is a plane lattice, T is a space of time parameter, u_{rt} is a discrete random variable with possible values:

$$u_{rt} = \begin{cases} 1, & \text{if the site } r \text{ burns during the moment } t; \\ 0, & \text{if the site } r \text{ didn't burn till the moment } t; \\ -1, & \text{if the site } r \text{ has burned down by the moment } t. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Besides it is supposedly, that joint probabilistic distribution of random variables u_{rt} for all $t \in T$ is completely defined by the field

$$p = \{p(r)\}_{r \in R_2}, \tag{2.2.3}$$

of so called *spread probabilities*, where

$$p(r) = [p_1(r); p_2(r); p_3(r); p_4(r)] \tag{2.2.3$'$}$$

is the *vector of spread probabilities* from the unit r and $p_k(r)$ corresponds to the spread probability from the unit r to the k-th *adjacent*[3] unit.

Oleg Vorobyev (ed.), Proc. XII FAMES'2013, Krasnoyarsk: SFU

[1] I always tried to name this notion so that the name hints at its sense a little, in the beginning (1975) as the *"lattice expectation" of a random finite set* to emphasize the finiteness of situation (which has allowed for the first time to open it), and then (1984) as the *"mean measure set" of a random (measurable, closed, compact) set.* But probably "against the nature you will not trample", and now I'd remember English variant "Vorob'ev expectation" though a special desire to become an eponym behind itself I did not notice.

[2] The following is the text of paper (1975) (first in the original Russian, then in English translation), which has become the primary source of the idea of *expectation of a random set.* Being the only stylistic changes that facilitate perception, but no loss of *train* of thought; including one of its branches erroneous.

[3] Rules of *neighbourhood* on R_2 is stipulated specially.

In the study a more general definition of RSP was offered which will allows enough room for simple and effective estimation of mean contours of forest fire.

From the definition (2.2.1) and (2.2.2) it follows that a state of RSP during the moment t can be defined by allocating such two subsets of units K_t^1 and K_t^2 of the square lattice R_2, that

$$\begin{cases} K_t^1 = \{r : t \in R_2, u_{rt} \neq 0\}, \\ K_t^2 = \{r : t \in R_2, u_{rt} = -1\}. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

It is clear, that $K_t^2 \subseteq K_t^1$ and

$$K_t^1 \setminus K_t^2 = \{r : t \in R_2, u_{rt} = 1\}. \tag{2.2.5}$$

Thus the RSP can be considered as a sequence of pairs $[K_t^1, K_t^2]$ for all $t \in T$. It is necessary to note, that subsets K_t^1 and K_t^2 have, generally speaking, a *random form*[4] with probabilistic characteristics which are defined by the field p of spread probabilities (2.2.3).

The more general definition of RSP based on this approach, demands an introduction of strictly concept corresponding to our intuitive representation about *"random subset of units"* of a lattice.

It is a question about a *random set* which is possible to consider as a generalization of a discrete random variable and "values" of which are not (unlike a discrete random variable) real numbers, but subsets of units of a lattice.

In this research we'll be limited to only elementary equivalent of a random set definition.

Definition. The *random set* K is no more than countable set of pairs $(B_i, p_i)_{i\in I}$, where $B_i \subseteq R_2$ is some finite subset of units of a lattice, and p_i is the probability of concurrence of random set K with the subset B_i:

$$p_i = \mathbf{P}(K = B_i). \tag{2.2.6}$$

Besides it is required, that

$$\sum_{i\in I} p_i = 1. \tag{2.2.7}$$

A *random vector-set* is the ordered set of random sets.

$$\overline{K} = [K^1, K^2, \ldots, K^n]. \tag{2.2.8}$$

The concept of a random set allows to define a *lattice random process* as a sequence of random sets. The Random Spread Process is defined as a special case of the lattice random process in which random sets of the lattice process should be satisfied to (2.2.4). And as we already marked, probabilistic distribution of random variables u_{rt} is completely defined by a field of spread probabilities p and the RSP is completely defined by this field.

[4]on the square lattice R_2.

The basic practical result of the given paper is the offered method of an estimation of a mean contour of forest fire from probabilistic model of its spread, or (that the same) a method of estimation "mean values" of the random sets forming RSP.

Let $\overline{K} = \{\overline{K}_t, t \in T\}$ be a random spread process where $\overline{K}_t = [K_t^1, K_t^2]$ is a random vector-set. We'll put the problem of definition of "mean value" of random sets from $\overline{K}_t$ for any $t \in T$.

Abundantly clear, that the problem put thus, is incorrect, as the concept of a "mean value" of a random set the solution of the problem will be essentially depended on a choice of this definition will be not certain yet.

Hence, first of all it is necessary to agree what subset of units of a lattice will be considered as "mean value" of a random set. It would be desirable also that the concept of the "mean value" in a certain sense was similar to the concept of an expectation of a discrete random variable.

First we'll notice, that if $|K|$ is a number of units in random set K, i.e. $|K|$ is a discrete random variable with the given distribution, it is possible to speak about its "mean value", an expectation $\mathbf{E}|K|$.

Definition. The *lattice expectation of random set* K is the subset $\mathcal{E}K \subseteq R_2$, satisfying to two conditions:

$$\Big|\mathbf{E}|K| - |\mathcal{E}K|\Big| = \min_{B\subseteq R_2} \Big|\mathbf{E}|K| - |B|\Big|, \tag{2.2, A}$$

$$\mathbf{E}|K \Delta \mathcal{E}K| = \min_{B\subseteq R_2} \mathbf{E}|K \Delta B|, \tag{2.2, B}$$

which order to choose from all subsets which satisfy to a condition A such subset which on the mean least evades from the random set K, i.e. satisfies to a condition B.

Certain thus the *lattice expectation of a random set* possesses a number of the properties similar to properties of an *expectation of a random variable.*[5]

Let's stop on the most important characteristic property which allows to find the *lattice expectation of random set.*

Let's enter into consideration probability

$$\pi(r) = \mathbf{P}(r \in K). \tag{2.2.11}$$

It appears, that **in the lattice expectation $\mathcal{E}K$ enter for those, in round figures, $\mathbf{E}|K|$ units of a lattice,**

[5] For example, for a random variable ξ and its expectation $\mathbf{E}\xi$ it is always fair

$$\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi) = 0. \tag{2.2.9}$$

Similar property was carried out for any random set K and its lattice expectation $\mathcal{E}K$:

$$\mathbf{E}|K \setminus \mathcal{E}K| = \mathbf{E}|\mathcal{E}K \setminus K|. \tag{2.2.10}$$

This analogy and the formula (2.2.10) have appeared erroneous and consequently a remake were omitted in a footnote.

for which probabilities $\pi(r)$ would accept more values than for other units.

This important characteristic property allows to develop algorithm and the computer program "M-222" which calculate estimations for the *lattice expectation of a random set.*

The same algorithm is applied to an estimation of lattices expectations of random sets forming Random Spread Process.

Modelling RSP, defined by various *vectors of spread probabilities*

$$p(r) = [p_1; p_2; p_3; p_4], \tag{2.2.3''}$$

is lead which are assumed by constants for all $r \in R_2$, and for each of them lattice expectations of random sets forming this ПСР $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ are estimated.

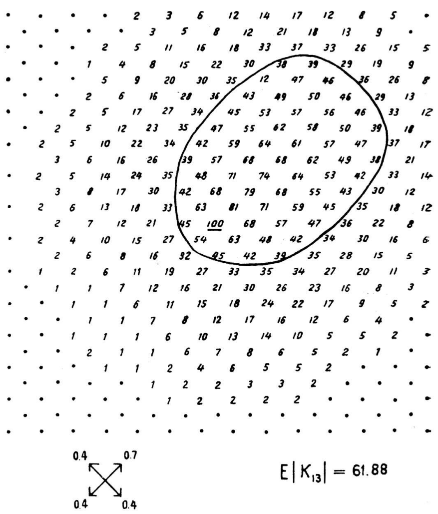

Рис. 1: The part of a square lattice R_2 on which the random set $K_{13} \subset \mathfrak{X}$, set-condition of the RSP(0.4; 0.4; 0.4; 0.7) during the moment $t = 13$, is statistically modeled. For each unit of the lattice $r \in \mathfrak{X}$ the quantity of realizations of random set from 100 lead, in which $r \in K_{13}$ is shown; the contour contains the *lattice expectation* $\mathcal{E}K_{13}$ of *random set* K_{13}. — Часть квадратной решетки R_2, на которой статистически моделируется случайное множество $K_{13} \subset \mathfrak{X}$ — сет-состояние ПСР(0.4; 0.4; 0.4; 0.7) в момент $t = 13$. Для каждого узла решетки $r \in \mathfrak{X}$ показано количество реализаций случайного множества из 100 проведенных, в которых $r \in K_{13}$; контур содержит *решетчатое ожидание* $\mathcal{E}K_{13}$ *случайного множества* K_{13}.

In fig. 1 the part of a lattice R_2 on which the RSP is modelling, the aspect shown in print by COMPUTER. On a place of each unit $r \in R_2$ the quantity $n(r)$ realizations from 100 in which the unit r belongs to the random set K_t at $t = 13$ settles down, and the estimation $\mathbf{P}(r \in K_{13})$, probabilities of that $r \in K_{13}$, — looks like: $\pi(r) \approx n(r)/100$. The contour on a plane $\mathbb{R}^2$, containing the lattice expectation $\mathcal{E}K_{13}$ of the random set K_{13} was spent **manually** on the basis of an estimation of the mean $\mathbf{E}|K_{13}|$ of the random variable $|K_{13}|$, calculated using COMPUTER.

In fig. 2 a number of *lattice expectations of random sets*

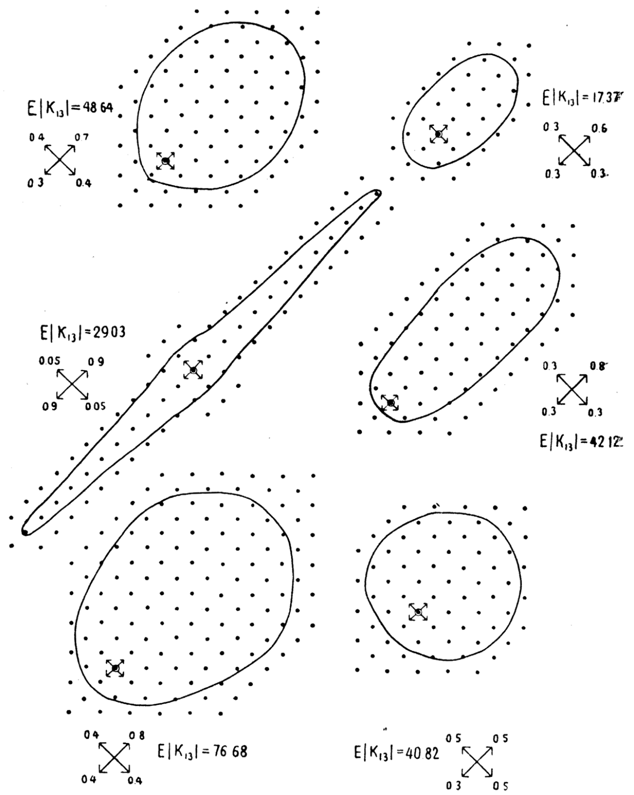

Рис. 2: *Lattice expectations* $\mathcal{E}K_{13}$ of the *random set* K_{13} for various RSPs. — *Решетчатые ожидания* $\mathcal{E}K_{13}$ *случайного множества* K_{13} для различных ПСР.

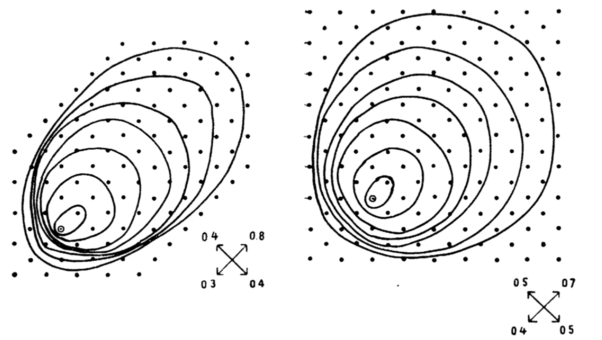

Рис. 3: Two embedded sequences $\{\mathcal{E}K_t,\ t = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ of *lattice expectations of random sets* for the RSP(0.3; 0.4; 0.4; 0.8) and the RSP(0.4; 0.5; 0.5; 0.7). — Две вложенные последовательности $\{\mathcal{E}K_t,\ t = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ *решетчатых ожиданий случайных множеств* для ПСР(0.3; 0.4; 0.4; 0.8) и ПСР(0.4; 0.5; 0.5; 0.7).

for various RSPs were shown.

While in fig. 3 two sequences of lattice expectations of random sets $\{\mathcal{E}K_t, t = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ for two RSPs were observed.

In summary we'll consider possible applications of the offered method for an estimation of mean contours of forest fire.

An available program on expert estimations[6] of fields of spread probabilities of fire for concrete wood territories and the program on statistical estimations *lattice expectations of random sets*, forming RSP, allow to model mean contours of a fire and their development in time for various wood conditions. Thus, it enables us to solve the problems of identifications of probabilistic models of forest fires in questions (i.e. definitions and specifications of their parameters). First of all probabilities and speeds of spread of a fire on a large forest mean.

Therefore there is no need to speak of the importance of this problem since there were no satisfactory methods for calculating dependent parameters models for forest fires from all varieties of existing wood conditions.

2.2 *Оценка средних контуров лесного пожара по вероятностной модели его распространения* [1, 2, 1975]

В нашей работе [4, 5, 1973] рассматривалась вероятностная модель распространения пожара по лесному массиву, который состоит из отдельных участков, расположенных в узлах *плоской квадратной решетки*. Эта вероятностная модель — *процесс случайного распространения (ПСР)* — определяется как множество дискретных случайных величин

$$U = \{u_{rt}, r \in R_2, t \in T\}, \tag{2.1.1}$$

где $R_2 \subset \mathbb{R}^2$ — плоская решетка, T — пространство временного параметра, u_{rt} — дискретная случайная величина с возможными значениями:

$$u_{rt} = \begin{cases} 1, & \text{если участок } r \text{ горит в момент } t; \\ 0, & \text{если участок } r \text{ не горел до момента } t; \\ -1, & \text{если участок } r \text{ сгорел к моменту } t. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Кроме того, предполагается, что совместное вероятностное распределение случайных величин u_{rt} для всех $t \in T$ полностью определяется полем

$$p = \{p(r)\}_{r \in R_2}, \tag{2.1.3}$$

так называемых *вероятностей распространения*, где

$$p(r) = [p_1(r); p_2(r); p_3(r); p_4(r)] \tag{2.1.3$'$}$$

— *вектор вероятностей распространения* из узла r, а $p_k(r)$ соответствует вероятности распространения огня из участка r на k-тый *соседний*[7] с ним участок.

В настоящей работе предлагается более общее определение ПСР, которое позволит провести достаточно простую и эффективную оценку средних контуров лесного пожара.

[6]Look the first part of my paper [1, 2], not entered into this remake.

[7]Правила *соседства* на R_2 оговариваются специально.

Из определения (2.1.1) и (2.1.2) следует, что состояние ПСР в момент t можно задавать, выделяя два таких подмножества узлов K_t^1 и K_t^2 квадратной решетки R_2, что

$$\begin{cases} K_t^1 = \{r : t \in R_2, u_{rt} \neq 0\}, \\ K_t^2 = \{r : t \in R_2, u_{rt} = -1\}. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Ясно, что $K_t^2 \subseteq K_t^1$ и

$$K_t^1 \setminus K_t^2 = \{r : t \in R_2, u_{rt} = 1\}. \tag{2.1.5}$$

Таким образом, ПСР можно рассматривать как последовательность пар $[K_t^1, K_t^2]$ для всех $t \in T$. При этом необходимо отметить, что подмножества K_t^1 и K_t^2 имеют, вообще говоря, *случайную форму*[8], вероятностные характеристики которой определяются полем p вероятностей распространения (2.1.3).

Более общее определение ПСР, основанное на этом подходе, требует введения строгого понятия, соответствующего нашему интуитивному представлению о *“случайном подмножестве узлов”* решетки.

Речь идет о *случайном множестве*, которое можно считать обобщением дискретной случайной величины и “значениями” которого являются (в отличие от дискретной случайной величины) не действительные числа, а подмножества узлов решетки.

В этой работе мы ограничимся лишь элементарным эквивалентом определения случайного множества.

Определение. *Случайным множеством* K называется не более чем счетный набор пар $(B_i, p_i)_{i \in I}$, где $B_i \subseteq R_2$ — некоторое конечное подмножество узлов решетки, а p_i — вероятность совпадения случайного множества K с подмножеством B_i:

$$p_i = \mathbf{P}(K = B_i). \tag{2.1.6}$$

Кроме того, требуется, чтобы

$$\sum_{i \in I} p_i = 1. \tag{2.1.7}$$

Случайным вектор-множеством называется упорядоченный набор случайных множеств

$$\overline{K} = [K^1, K^2, \ldots, K^n]. \tag{2.1.8}$$

Понятие случайного множества позволяет определить *решетчатый случайный процесс*, как последовательность случайных множеств. Процесс же случайного распространения определяется как частный случай решетчатого случайного процесса, в котором случайные множества решетчатого процесса должны удовлетворять соотношению (2.1.4). А поскольку, как мы уже отмечали, вероятностное распределение случайных величин u_{rt} полностью определяется полем

[8]на квадратной решетке R_2.

вероятностей распространения p, то и ПСР полностью определяется этим полем.

Основным практическим результатом данной работы является предлагаемый метод оценки среднего контура лесного пожара по вероятностной модели его распространения, или (что то же самое) метод оценки "средних значений" случайных множеств, образующих ПСР.

Пусть $\overline{K} = \{\overline{K}_t, t \in T\}$ — процесс случайного распространения, где $\overline{K}_t = [K_t^1, K_t^2]$ — случайное вектор-множество. Поставим задачу определения "среднего значения" случайных множеств из $\overline{K}_t$ для произвольного $t \in T$.

Совершенно очевидно, что задача, поставленная таким образом, некорректна, поскольку пока не определено понятие "среднего значения" случайного множества решение задачи будет существенно зависеть от выбора этого определения.

Следовательно, прежде всего нам необходимо условиться о том, какое подмножество узлов решетки мы будем считать "средним значением" случайного множества. Хотелось бы также, чтобы вновь вводимое понятие "среднего значения" в определенном смысле было аналогично понятию математического ожидания дискретной случайной величины.

Сначала заметим, что если $|K|$ — число узлов в случайном множестве K, т.е. $|K|$ — дискретная случайная величина с заданным распределением, то можно говорить о его среднем значении — математическом ожидании $\mathbf{E}|K|$.

Определение. ***Решетчатым ожиданием случайного множества*** K **называется подмножество** $\mathcal{E}K \subseteq R_2$**, удовлетворяющее двум условиям:**

$$\Big|\mathbf{E}|K| - |\mathcal{E}K|\Big| = \min_{B \subseteq R_2} \Big|\mathbf{E}|K| - |B|\Big|, \qquad (2.1, A)$$

$$\mathbf{E}|K \Delta \mathcal{E}K| = \min_{B \subseteq R_2} \mathbf{E}|K \Delta B|, \qquad (2.1, B)$$

которые предписывают выбрать из всех подмножеств, которые удовлетворяют условию A**, такое подмножество, которое в среднем наименее уклоняется от случайного множества** K**, т.е. удовлетворяет условию** B.

Определенное таким образом *решетчатое ожидание случайного множества* обладает рядом свойств, аналогичных свойствам *математического ожидания случайной величины.*[9]

[9] Например, для случайной величины ξ и ее математического ожидания $\mathbf{E}\xi$ всегда справедливо

$$\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi) = 0. \qquad (2.1.9)$$

Аналогичное свойство выполняется и для произвольного случайного множества K и его решетчатого ожидания $\mathcal{E}K$

$$\mathbf{E}|K \setminus \mathcal{E}K| = \mathbf{E}|\mathcal{E}K \setminus K|. \qquad (2.1.10)$$

Эта аналогия и формула (2.1.10) оказались ошибочными и потому в римейке опущены в сноску.

Остановимся на самом важном характеристическом свойстве, которое позволяет найти *решетчатое ожидание случайного множества.*

Введем в рассмотрение вероятность

$$\pi(r) = \mathbf{P}(r \in K). \qquad (2.1.11)$$

Оказывается, что **в решетчатое ожидание** $\mathcal{E}K$ **входят те, округленно,** $\mathbf{E}|K|$ **узлов решетки, для которых вероятности** $\pi(r)$ **принимают значения бóльшие, чем у остальных узлов.**

Это важное характеристическое свойство позволяет разработать алгоритм и программу для ЭВМ "М-222", которые вычисляют оценки *решетчатого ожидания случайного множества.*

Этот же алгоритм применен для оценки решетчатых ожиданий случайных множеств, образующих процесс случайного распространения.

Проведено моделирование ПСР, определяемых различными *векторами вероятностей распространения*

$$p(r) = [p_1; p_2; p_3; p_4], \qquad (2.1.3'')$$

которые предполагаются постоянными для всех $r \in R_2$, и для каждого из них оценены *решетчатые ожидания случайных множеств*, образующих этот ПСР$(p_1; p_2; p_3; p_4)$.

На рис. 1 показана часть решетки R_2, на которой моделируется ПСР, в том виде, в котором его печатает ЭВМ. На месте каждого узла $r \in R_2$ располагается количество $n(r)$ реализаций из 100, в которых узел r принадлежит случайному множеству K_t при $t = 13$, а оценка $\mathbf{P}(r \in K_{13})$ — вероятности того, что $r \in K_{13}$, — имеет вид: $\pi(r) \approx n(r)/100$. Контур на плоскости $\mathbb{R}^2$, содержащий решетчатое ожидание $\mathcal{E}K_{13}$ случайного множества K_{13} проводился **вручную** на основе оценки среднего $\mathbf{E}|K_{13}|$ случайной величины $|K_{13}|$, вычисленной ЭВМ.

На рис. 2 показан ряд *решетчатых ожиданий случайных множеств* для различных ПСР.

На рис. 3 приведены две последовательности решетчатых ожиданий случайных множеств $\{\mathcal{E}K_t, t = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ для двух ПСР.

В заключение рассмотрим возможные применения предложенного метода оценки средних контуров лесного пожара.

Имеющаяся программа экспертных оценок[10] поля вероятностей распространения огня для конкретных лесных территорий и программа статистических оценок *решетчатых ожиданий случайных множеств*, образующих ПСР, позволяют моделировать

[10] См. первую часть моей работы [1, 2], не вошедшую в этот римейк.

средние контуры пожара и их развитие во времени для различных лесотаксационных условий. Это дает возможность решать задачи, касающиеся вопросов идентификации вероятностных моделей лесных пожаров (т.е. определения и уточнения их параметров). В первую очередь имеются в виду вероятности и скорости распространения пожара по лесному массиву.

Нет необходимости говорить о важности этой задачи, тем более, что до сих пор не существовало удовлетворительных методов расчета зависимости параметров моделей лесных пожаров от всего многообразия существующих лесотаксационных условий.

3 Back to the fuss

In the fuss of cities and in heavy traffic
Returning we have nowhere to go,
And climb down from the conquered peaks
Leaving the mountains
Leaving the mountains of the heart.

Vladimir Vysotsky, 1966.

They said that to be informed, is to be forearmed. Deeply rational thought. Suitable for anything, but not to the discovery of a new one. It's no secret that too much information sweeps clean all the way, besides the already well-worn ruts. Excessive? This is in excess of what? From what the pull down shipping costs to get rid of, to see no one has trodden the top, cling to it and hold it for a moment.

No answer.

⋆ ⋆ ⋆

Here you are on top. And where to now?

Back? Down? No lifts? Just walk down?

In the hustle and bustle? Nowhere else to go?

No, well, you can certainly look for more ... Higher.
No, but it is quite something to look for the latest ...

Yeah, well, look, of course, you can.
Yes, but then nothing will be found there?

...

Most have nowhere to go!

Or, as always, in the obscurity of a fuss
Or back to the top of the unknown.

⋆ ⋆ ⋆

4 Help: *mean probability event*

In [6, 7, 1984] as well as in [8, 9, 1999, стр. 644] you can find the definition of the *mean measure set*[11], which was first introduced in 1973 by me and published in [1, 2, 1975] and in [13, 14, 1977], as well as used by other authors, for example in [15, 16, 1985,1986], and in [3, 1994]. The *mean measure set* is the mean set characteristics of a random set whose values are measurable subsets of a measure space, playing for a random set of the same role played by the *expectation*, or the *mean value*, of a *random element* with the values of the linear space[12]. In eventology a notion of the mean set of events has long existed [17, 18]. This was the result of literal applying the definition of mean measure set for a *random set of events*. More recently in [19, 20] a general idea of the long-standing definition of mean measure set was again taken by me on the arms so much else to define another new concept for eventology called the *mean probability event*.

Definition (mean probability event for a finite set of events). Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ be the universal probability space. The mean probability event for a finite set of events $\mathfrak{X} \subset \mathcal{A}$ is defined as any universal event $\widehat{x}_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{A}$ satisfying the inclusions

$$\sum_{|X|>m} \mathsf{ter}(X /\!\!/ \mathfrak{X}) \subset \widehat{x}_{\mathfrak{X}} \subseteq \sum_{|X|\geqslant m} \mathsf{ter}(X /\!\!/ \mathfrak{X}), \tag{4.2}$$

which occurs with probability

$$\mathbf{P}(\widehat{x}_{\mathfrak{X}}) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x) \tag{4.3}$$

just in time of the events of $\mathfrak{X}$ occurs at least m events, where $m \in \{0, 1, \ldots, |\mathfrak{X}|\}$ satisfies

$$\sum_{|X|>m} p(X /\!\!/ \mathfrak{X}) < \mathbf{P}(\widehat{x}_{\mathfrak{X}}) \leq \sum_{|X|\geqslant m} p(X /\!\!/ \mathfrak{X}). \tag{4.4}$$

Remark. Of course, the *mean probability event* has known extreme properties, which are formulated in terms of probabilistic distance [19, 20].

Список литературы

[1] О. Ю. Воробьев. Определение вероятностей распространения горения и оценка развития средних контуров лесного пожара. *Охрана лесных ресурсов Сибири. Красноярск, ИЛиД СО АН СССР*, 1:43–67, 1975, URL: http://eventology-theory.com/0-lec/remake-1975-full-GSFR-43-67.pdf.

[2] O. Yu. Vorobyev. Definition of probabilities of fire spread and estimating mean forest fire spread sets. *The Guarding of Siberia Forest Resources. Krasnoyarsk, The Sukachev Institute of Forest and Wood, USSR AS, SB*, 1:43–67, 1975 (in Russian), URL: http://eventology-theory.com/0-lec/remake-1975-full-GSFR-43-67.pdf.

[3] D Stoyan and H. Stoyan. *Fractals, Random Shapes and Point Fields. Methods of Geometrical Statistics. XIV.* John Wiley & Sons, Chichester etc., 1994, 389p.

[11] Recently, examples of the use of the term multiplying in different areas of mathematics and applications, and in many Western works on the theory of random sets (see, for example, [10, 2012], [11, 2013], [12, 2005] etc.) it is usually called *Vorob'ev expectation* with a light hand Dietrich Stoyan [3, стр. 113-115, 1994] relying on outdated English transliteration of my name, which I'm writing now with slightly different.

[12] For example, the expectation of a random variable, of a random vector matrix, of a random functions, etc.

[4] О. Ю. Воробьев. Математическое описание процессов случайного распространения и управление ими. *Известия СО АН СССР*, 13(3):146–152, 1973.

[5] O. Yu. Vorobyev. Mathematical description of random spread processes and its control. *Izvestia of SB AS USSR*, 13(3):146–152, 1973 (in Russian).

[6] О. Ю. Воробьев. *Среднемерное моделирование*. Наука, Москва, 1984, 133с.

[7] O. Yu. Vorobyev. *Mean Measure Modeling*. Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).

[8] *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия.* Научное издательство Большая Российская Энциклопедия, Москва, 1999.

[9] *Probability and Mathematical Statistics. Encyclopedia.* Science publisher Great Russian Encyclopedia, Moscow, 1999 (in Russian).

[10] P. Heinrich, R. C. Stoica, and V. C. Tran. Level sets esimation and Vorob'ev expectation of random compact sets. *Spatial Statistics*, 2:47–61, December 2012.

[11] C. Chevalier, D. Ginsbourger, J. Bect, and Molchanov I. Estimating and Quantifying Uncertainties on Level Sets Using the Vorob'ev Expectation and Deviation with Gaussian Process Models. *Contributions to Statistics. Advances in Model-Oriented Design and Analysis — mODa 10. D. Uciński et al. (eds.)*, pages 35–43. Springer International Publishing, Switzerland, 2013.

[12] I. Molchanov. *Theory of Random Sets*. Springer-Verlag, London etc., 2005.

[13] О. Ю. Воробьев. О множественных характеристиках состояний распределенных вероятностных процессов. *Известия СО АН СССР*, 3(3):3–7, 1977.

[14] O. Yu. Vorobyev. On set characterictics of states of distributed probability prosesses. *Izvestia of SB AS USSR*, 3(3):3–7, 1977 (in Russian).

[15] С. А. Ковязин. О предельном поведении одного класса эмпирических средних случайного множества. *Теория вероятностей и ее применения*, 30(4):767–772, 1985.

[16] S. Kovyazin. On the limit behavior of a class of empirical means of a random set. *Theory of Probability and its Applications*, 30(4):814–820. Translated from Russian by J. Malek., 1986.

[17] О. Ю. Воробьев. *Эвентология*. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с., http://eventology-theory.ru/0-books/1-VorobyevOleg∼2007∼Eventology∼435p.pdf.

[18] O. Yu. Vorobyev. *Eventology*. Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia, 2007, 435p. (in Russian, abstract in English), http://eventology-theory.com/0-books/1-VorobyevOleg∼2007∼Eventology∼435p.pdf.

[19] О. Ю. Воробьев. Средневероятное событие для множества событий. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИП-ПБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):139–147, 2012.

[20] O. Yu. Vorobyev. A mean probability event for a set of events. In. *Proc. of the XI Intern. FAMES Conf. on Financial and Actuarial Mathematics and Eventology of Safety*, Krasnoyarsk, SFU (Oleg Vorobyev ed.):139–147, 2012 (in Russian, abstract in English).