# A generalized mathematical model for the commercial bank

Rumyantsev, Mikhail I.

Zakhidnodonbaskiy Private Institute of Economics and Management

30 December 2006

УДК 336:004.942:519.710.34

# Обобщенная математическая модель коммерческого банка

М.И. Румянцев
Западнодонбасский институт экономики и управления, ул. Парковая, 1а, Павлоград, 51400, Украина
E-mail: renixa-1959@mail.ru

***Аннотация:***

*В статье отражена попытка построения формальной модели учреждения банка с использованием методов теории множеств и общей алгебры. Банк рассматривается как сложный динамический объект многомерного финансового пространства. Показано, что выбор адекватной алгебраической структуры для моделирования банковской деятельности непосредственно влияет на эффективность способов решения инженерно-экономических задач, возникающих в процессе проектирования и эксплуатации автоматизированных банковских систем.*

***Ключевые слова:*** *моделирование банковской деятельности, многослойная модель, модельный уровень, многомерное финансовое пространство, финансово-вероятностное пространство.*

## Введение

В связи с нарастающей глобальной тенденцией «интернетизации» и «виртуализации» банковской сферы, увеличением доли безлюдных банковских операций (не требующих участия персонала) возникает необходимость в разработке все более совершенных методов моделирования банковских бизнес-процессов – как инструмента эффективного реинжиниринга современного коммерческого банка (КБ) с учетом требований завтрашнего для по обеспечению финансово-кредитными услугами в любой точке и в любое время. Краеугольным камнем является положение о том, что процесс создания математической модели КБ не завершается реализацией некоей универсальной архисложной модели, охватывающей все аспекты функционирования банка – напротив, это многоэтапный процесс, обусловленный разветвленностью и иерархичностью организационной структуры современных банков, хаотичностью и непредсказуемостью возмущений со стороны внешней среды.

Указанные обстоятельства естественным образом предполагают переход к концепции *многослойного моделирования* деятельности банковского учреждения. В данном контексте этот термин означает поэтапное (сверху вниз) построение совокупности базовых моделей функционирования конкретного банка – причем каждый модельный слой предполагает свой уровень абстракции для соответствующих моделей конкретных точек принятия решений. Таким образом, совокупность всех моделей конкретного КБ образует модельный граф (дерево), сформированный как с учетом территориально-организационной структуры банка, так и детализации сверху вниз алгоритмов оказываемых банком услуг (и соответствующих информационных потоков).

## Постановка задачи

Как известно, исходной точкой при исследовании определенной предметной области является выделение множеств важнейших объектов, операций над ними и отношений – с последующим изучением их характеристик. Такие исследователи, как Н.П. Бусленко, В.М. Глушков, А.И. Кухтенко, Г.Е. Цейтлин, Р. Акофф, Р. Аллен, М. Месарович, Р. Калман, П. Фалб и другие показали в своих работах представимость конкретных математических моделей в виде соответствующих алгебраических структур.

Применительно к предмету настоящего исследования представляется рациональным и плодотворным применение на высшей (первичной) стадии абстрагирования аппарата алгебраической теории линейных систем [1] или иного аналогичного высокоуровневого инструментария (например, [2]). Удачный выбор соответствующего множества объектов и определение операций над ними на этапе построения верхнего слоя формальной модели учреждения КБ позволяет в перспективе построить некоторое семейство алгебр, описывающих различные стороны жизнедеятельности банка. Выражаясь формально, необходимо сконструировать подходящую для построения адекватной модели КБ тройку $<\Phi, \Omega_\Phi, \Omega_\Pi>$ ($\Phi$ – множество основных объектов КБ-системы; $\Omega_\Phi$ – множество операций, определенных на $\Phi$; $\Omega_\Pi$ – множество предикатов, заданных на множестве $\Phi$). В рамках данной работы автором была поставлена цель построения некоторой алгебраической структуры, опирающейся на теоретико-множественный аппарат и отражающей основные аспекты жизнедеятельности финансов-кредитного учреждения (в частности, коммерческого банка) – как дальнейшее развитие идей, отраженных в [3-5].

**Построение модели КБ**

Рассмотрим национальную банковскую систему как совокупность некоторого конечного числа банков $B_0, B_1,..., B_M$, функционирующих в непрерывном времени. При необходимости анализа любого из объектов $B_i$ в дискретном времени можно ограничиться рассмотрением вместо интервала времени $[0, \infty)$ его дискретного подмножества $\{t_0, t_1, t_2,...\} \subset [0, \infty)$.

Каждый из $B_i$ рассматривается как система, образованная подсистемами-филиалами, для которой системообразующим фактором по Анохину является получение прибыли. При этом, будучи сложной кибернетической системой, каждый из КБ самостоятельно решает вопросы оптимального распределения ресурсов, направляемых на реализацию функций самосохранения, саморазвития и самовоспроизведения себя как целостной системы (управляющие воздействия со стороны Национального банка в данном случае нас пока не интересуют).

На самом верхнем уровне абстрактно-формальной модели КБ находится тройка $<\Phi, \Omega_\Phi, \Omega_\Pi>$. Каждый из коммерческих банков $B_i$ на этом модельном уровне в любой произвольный дискретный момент времени $t_i \in \mathbf{N} = \{0,1,...,N\}$ можно охарактеризовать с помощью некоторого обобщенного показателя результативности $D_t$, который рассматривается как состояние КБ в некоем $k\times n$-мерном финансовом пространстве $\mathbf{D}^{k\times n}$ (где $k$ – число учитываемых экономических показателей, $n$ – количество территориально-обособленных подразделений банка). Векторы $D_t$ образуются из конечного числа показателей $d_i^t \in \mathbf{R}_+$ (где $i \in I = \{1,2,...,k\}$, а $\mathbf{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел). Заметим, что для компьютерного представления $\mathbf{D}^{k\times n}$ может быть применен гиперкуб (хранилище) данных.

Строго говоря, для векторного пространства $\mathbf{D}^{k\times n}$ необходимо определить как операцию сложения векторов, так и операцию умножения вектора на число (и придать им соответствующий экономический смысл). Например, можно рассматривать сумму векторов $D_i$, $D_j$, $D_l$ как вектор, характеризующий результаты работы какого-либо регионального управления банка по какому-либо направлению работы (кредитованию, привлечению свободных средств населения и т.д.). Операция умножения вектора на число может иметь смысл при пересчете баланса банка и т.п. из одной валюты в другую, изменении курса национальной валюты по отношению к доллару и т.д.

Поскольку в банковском деле применяется хотя и большое, но конечное количество показателей (да и число филиалов КБ также ограничено), логично предположить, что $\mathbf{D}^{k\times n}$ является линейным эвклидовым пространством, в котором определена норма $\|D_t\|$. Соответственно, в качестве ортонормированного базиса для пространства $\mathbf{D}^{k\times n}$ можно использовать совокупность плановых показателей на 1 работника КБ: $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2,..., \boldsymbol{d}_k$ (где $k$ –

число учитываемых экономических показателей), образующих единичную сферу. Ввести очевидным и естественным образом скалярное произведение, имеющее некий экономический смысл, достаточно затруднительно. На наш взгляд, в первом приближении можно принять в качестве результата такой операции введенный нами ранее обобщенный показатель результативности $D_t$.

С другой стороны, если рассматривать пространство $\mathbf{D}^{k\times n}$ в качестве борелевского поля событий, можно задать финансово-вероятностное пространство для КБ-системы как тройку $<\Omega, \mathbf{D}^{k\times n}, P>$ (где $\Omega$ – множество элементарных событий; $P$ – вероятность, заданная на $\mathbf{D}^{k\times n}$). Несложно выделить в этом пространстве как невероятные события, так и события, которые неминуемо должны наступить; более того, нет проблем при необходимости определить как события, приводящие к возрастанию показателя результативности $D_t$, так и его снижению.

Укажем в пространстве $\mathbf{D}^{k\times n}$ некоторый морфизм самого общего вида, отображающий закон управления КБ как конечномерной динамической системой:

$$\mu:\ \mathbf{D}^{k\times n} \times \mathbf{D}^{k\times n} \to \mathbf{D}^{k\times n}.$$

Подразумевая ассоциативность введенной операции $\mu$, существование единицы и обратного элемента для $\forall\ D_t \in \mathbf{D}^{k\times n}$, мы предполагаем наличие у алгебры $<\mathbf{D}^{k\times n}, \mu>$ всех свойств группы. Правомочность этих допущений базируется на парадигме {*прибыль*, *убыток*} как неотъемлемом свойстве любой реальной коммерческой деятельности.

Конкретизируя $<\mathbf{D}^{k\times n}, \mu>$, зададим следующую алгебраическую структуру:

$$\boldsymbol{\Phi} = \{R, A, P, O, G, C, W, \Psi\},$$

где $R$ – множество денежных ресурсов банка; $A$ – множество активных операций; $P$ – множество пассивных операций; $O$ – множество прочих операций (посреднических и т.п.); $G$ – множество операций внутрикорпоративного менеджмента; $C$ – множество клиентов; $W$ – множество сотрудников КБ; $\Psi$ – множество случайных величин (внешних возмущений и внутренних факторов неопределенности).

Множество $R$ – линейное пространство над полем вещественных чисел (соответственно, множества привлеченных и размещенных ресурсов по $n$ филиалам банка – $R_1', R_2', \ldots, R_n'$ и $R_1'', R_2'', \ldots, R_n''$ – являются линейными подпространствами пространства $R$).

Множества $C$ и $W$ – конечные множества переменного состава, задаваемые перечислением своих элементов: $C = \{c_1, \ldots, c_l\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_q\}$.

Множества $A$, $P$, $O$ и $G$ вводятся в модель как множества метаопераций – что позволяет производить некоторые операции-примитивы над элементами этих множеств: создавать элементы (метаоперации), удалять, изменять их атрибуты, обращаться к ним (выполнять метаоперации) и т.д. Такой подход самым естественным образом соответствует реальным процессам формирования номенклатуры услуг и продуктов, предоставляемых банком своим клиентам.

Множество случайных величин $\Psi$ представляет собой конечное множество разнообразных стохастических факторов (колебаний конъюнктуры рынка банковских услуг, инфляционных процессов, изменений нормативно-правовой базы банковской деятельности и т.д.). В общем случае каждый из этих факторов зависит от времени и имеет собственную функцию распределения: $\Psi = \{\psi_1(t), \ldots, \psi_r(t)\}$. Отметим, что предположение о конечности множества $\Psi$ допустимо только в той мере, в какой удается выделить совокупность наиболее существенных для нормального функционирования КБ случайных воздействий.

В общем виде множества метаопераций могут быть формально заданы как порождающие процедуры:

$$A := \{a \mid a := f_a\}, \qquad f_a := R \times C \to R'';$$
$$P := \{p \mid p := f_p\}, \qquad f_p := R' \times C \to R;$$
$$O := \{o \mid o := f_o\}, \qquad f_o := R''' \times C \to R;$$
$$G := \{g \mid g := f_g\}, \qquad f_g := W \times C \to W.$$

Здесь: $R'$ – привлеченные ресурсы, $R''$ – размещенные ресурсы, $R'''$ – доход КБ от посреднических операций; $R = R' \cup R'' \cup R'''$ (без учета затрат на оказание банковских услуг и административные нужды КБ); $f_a$, $f_p$, $f_o$ и $f_g$ выступают в роли внешних законов композиции для соответствующих объектов множеств (операндов). Конкретный вид порождающих процедур зависит от номенклатуры и особенностей технологических процессов, практикуемых в том или ином банке. В частности, процедура $f_g$ должна учитывать существование определенного антагонизма между краткосрочными и долгосрочными целями КБ.

Для каждой из метаопераций $a_i$, $p_i$, $o_i$ и $g_j$ можно задать семейство характеристик:

$$\mathbf{Z} = \{S, L_S, U, L_U, T\},$$

где $S$ – множество состояний КБ-системы (в которые она переходит вследствие выполнения операций-примитивов); $L_S$ – множество ограничений на состояния; $U$ – множество управляющих воздействий со стороны персонала КБ; $L_U$ – множество ограничений на управляющие воздействия; $T$ – логические условия перехода из состояния в состояние (в предикатной форме). $L_S$, $L_U$ и $T$ можно рассматривать как параметры КБ-системы (поскольку они отражают экономические, технологические, социально-психологические и законодательные факторы, влияющие на жизнедеятельность банка).

По завершении (пусть даже в самых общих чертах) формализации модели КБ верхнего уровня можно спуститься на более низкий уровень абстрагирования – от теоретико-множественных и алгебраических моделей к их «овеществленным» воплощениям в виде моделей системной динамики по Дж. Форрестеру. Важнейшая и сложнейшая задача этого этапа – поиск и обнаружение аналогий между алгебраическими структурами {***объекты***, ***операции***} и форрестеровскими структурами {***фонды***, ***потоки***}. Введя соответствующие входные и промежуточные переменные для каждого фонда и его потоков, можно приступать к параметризации имитационных моделей подсистем КБ – составлению уравнений темпов. Это позволяет формализовать цепочки обратных связей, существующих в КБ.

Для выявления основных обратных связей необходимо учитывать уже упоминавшийся нами постулат о прибыли как системообразующем факторе (если рассматривать получение прибыли как главнейший результат деятельности банка). Необходимо определить те выходные индикаторы КБ-системы, которые четко и недвусмысленно позволяют оценивать ее успешность в реализации функций самосохранения, саморазвития и самовоспроизведения (т.е. наполнить экономическим содержанием введенный нами выше обобщенный показатель результативности). В частности, оценивание прибыльности КБ осуществляется при помощи совокупности таких показателей, как прибыльность банковских активов (*ROA*), прибыльность акционерного капитала (*ROE*), процентная маржа (*SPRED*). Т.о., участниками положительных обратных цепей для прибыли являются процентные доходы и объем активов, а отрицательных – процентные расходы и объем пассивов.

Разумеется, и на более нижних модельных уровнях не возбраняется при необходимости продолжать пользоваться теоретико-множественным инструментарием. К примеру, для моделирования процессов предоставления кредитов можно ввести следующую структуру:

$$\boldsymbol{L} = \{R, C, O, P, S\},$$

где $R$ – множество кредитных ресурсов; $C$ – множество клиентов-заемщиков; $O$ – множество технологических операций по кредитованию; $P$ – множество ограничений; $S$ – множество допустимых состояний КБ. В этом случае область «безопасного» (с низким уровнем риска) кредитования будет выглядеть как декартово произведение $R \times C \times O \times P \times S$. Т.о., запрос на выдачу кредита может быть представлен как кортеж $q = \{r, c, o, s\}$, где $r \in R$, $c \in C$, $o \in O$, $s \in S$. Кредит выдается в том случае, если запрос $q$ полностью заключен в соответствующее подпространство пространства $\boldsymbol{L}$ (т.е. множество $S$ образует группоид относительно операции композиции $S \times S \to S$; композиция в данном случае – совокупность соответствующих технологических операций-примитивов по кредитованию).

**Выводы**

Получение базовых алгебраических структур, пригодных для построения укрупненной модели деятельности коммерческого банка, позволяет на последующих этапах произвести детализацию до уровня моделей системной динамики основных бизнес-процессов. Для ряда подсистем КБ возможно применение и достаточно хорошо изученных моделей теории массового обслуживания – как совокупностей обслуживающих центров, заявок и очередей. Это позволяет в конечном итоге перейти к проведению компьютерных экспериментов с имитационнными моделями подсистем коммерческого банка: в виде программ для дискретно-событийного моделирования в среде GPSS World, моделирования в рамках методов системной динамики с помощью VenSim, либо агентного моделирования в среде AnyLogic.

**Литература**

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки математической теории систем: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М: Наука, 1970. – 392 с.
3. Румянцев М.И. Построение математической модели финансово-кредитного учреждения // Дні науки: Зб. тез доповідей: В 3-х тт. / Гуманітарний університет "ЗІДМУ", 27-28 жовтня 2005 р.; Ред. кол. В.М. Огаренко та ін. – Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2005. – Т. 1. – с. 248-250.
4. Румянцев М.И. Об одной концепции построения математической модели коммерческого банка // Информационные технологии моделирования и управления. – 2006. – № 3 (28). – с. 353-360.
5. Румянцев М.И. Информационные системы и технологии финансово-кредитных учреждений: Учебное пособие для вузов. – Днепропетровск: ИМА-пресс, 2006. – 482 с.

**Article received**: 2006-09-02