Line City Model with Exogenous Stackelberg Competition

Torbenko, Alexander

11 May 2013

А. Торбенко

Модель линейного города с экзогенной конкуренцией по Штакельбергу

Препринт

№ 1

Александр Торбенко*
Alexander Torbenko

Модель линейного города с экзогенной конкуренцией по Штакельбергу

Line City Model with Exogenous Stackelberg Competition

Аннотация. В статье рассматривается модель линейного города с экзогенной конкуренцией по Штакельбергу между двумя фирмами. В данной модели при низких транспортных издержках фирмы в состоянии равновесия располагаются в одной точке в центре рынка, при этом прибыль фирмы-лидера в два раза больше прибыли фирмы-последователя, цена минимальна, а количество поставляемой продукции максимально в точке расположения фирм. При более высоких транспортных издержках фирмы дифференцируются, а рынок как бы распадется на два «субрынка»: фирма-лидер реализует основной объем продукции около своего местоположения, а фирма-последователь — около своего, при этом прибыль фирмы-лидера превосходит прибыль фирмы последователя менее чем в два раза, цена всегда минимальна в точке расположения фирмы-лидера. При увеличении транспортных издержек количества поставляемой фирмами продукции падает, а цена растет.

Ключевые слова: пространственная конкуренция, олигополия Штакельберга, модель линейного города Хотеллинга.

Abstract. The paper considers the line city model of spatial competition with the exogenous Stackelberg competition. With low transport costs, firms' equilibrium locations are in the center of the market. The leader profit is twice as big as the follower's profit, the price is minimum and the quantity is maximum in the center of the market. With high transport costs, firms are differentiated and the market splits into two submarkets. Both the leader and the follower sell the largest share of their goods near their location. The price is minimum in the leader's location. Then transport costs are rising, while the price is increasing and the quantity of goods is decreasing.

Keywords: spatial competition, Stackelberg oligopoly, Hotelling line city model.

JEL classification: C31, D43, L13.

*Кемеровский государственный университет / Kemerovo State University, alwe@ngs.ru

1. Мотивация и постановка задачи

Фирмы, уже находящиеся на рынке, зачастую проявляют способность предвидеть ответные действия других фирм, которые могут зайти на данный рынок. Первые планируют свои действия исходя из предсказанной реакции последних. Наиболее известная модель, в которой фирма-лидер предвидит реакцию последователя — модель дуополии Штакельберга [6].

Попытки применить предпосылку о предвидении фирмы-лидера к модели пространственной конкуренции сделали Э. Прескотт и М. Висчер [5], а также Дж. Бхадури, Р. Чандрасекаран и В. Падманабхан [2]. И в моделях, предложенных Прескоттом и Виссчером, и в модели Бхадури, Чандрасекарана и Падманабхана установлены сильные ограничения: в модели Бхадури-Чандрасекарана-Падманабхана фиксирована цена, в моделях Прескотта и Виссчера либо фиксирована цена, либо есть достаточно жесткие ограничения на местоположения. Наличие ограничений в этих моделях объясняется вычислительными трудностями.

С. Меза и М. Томбак построили модель линенйного города с эндогенно возникающей конкуренцией по Штакельбергу между двумя фирмами с экзогенно заданными издержками производства [4]. В модели Мезы и Томбака конкуренция по Штакельбергу возникает при средней разнице в издержках между фирмами (при большой разнице модель вырождается в монополию, при маленькой фирмы входят на рынок одновременно), при этом фирмы всегда дифференцированны.

Нам неизвестны модели линейного города, в которых бы рассматривалась элементарная конкуренция по Штакельбергу с минимальными ограничениями на местоположения фирм и экзогенным лидерством. Чтобы восполнить этот пробел, мы разработали такую модель. Основной воспрос, интересовавший нас при анализе — местоположение фирм в зависимости от уровня транспортных издержек. Мы использовали наиболее простую, линейную функцию транспортных издержек. При этом мы постарались накладывать как можно меньшие ограничения на местоположения фирм.

Алгоритм нахождения равновесия в модели линейного города с лидерством представляет собой синтез алгоритма нахождения равновесия в «беспространственной» дуополии Штакельберга (в смысле неодновременных действий конкурентов и предвидения лидером действий последователя) [1, с. 61-63] и алгоритма нахождения равновесия в модели линейного города с конкуренцией по Курно (в смысле действия фирм посредством выбора количества продукции) [3, p. 238-250].

Рассмотрим модифицированный алгоритм поиска равновесия в модели Штакельберга. Если в модели Штакельберга фирмы выбирают только количества предлагаемой продукции, в приводимом «синтетическом» алгоритме фирмы выбирают как количества продукции, так и свое местоположение. Предположим, что в первом раунде фирмы выбирают местоположение, во втором — количества; причем на всех раундах одна и та же фирма является лидером, таким образом алгоритм представляет собой «удвоенную игру Штакельберга». Применяя метод обратной индукции, на первом этапе алгоритма определяем равновесные количества товара, предлагаемые фирмами в каждой произвольной точке рынка: сначала строим функцию реакции по количеству фирмы-последователя, затем используем её для нахождения функции реакции по количеству фирмы-лидера. Используя полученные функции реакции, находим равновесные количества и равновесную прибыль каждой фирмы в произвольной точке рынка. На втором этапе алгоритма строим интегральную функцию прибыли каждой фирмы для всего рынка. Затем строим функцию реакции по местоположению, как фирмы-лидера, так и фирмы-последователя, учитывая предвидение лидером реакции последователя. Используя полученные функции реакции, рассчитываем равновесные местоположения. К сожалению, уже при вычислении интегральных функций прибыли вычислительные трудности весьма и весьма значительны. Именно этим объясняется то, что Прескотт и Виссчер и Бхадури, Чандрасекаран и Падманабхан используют в своих моделях ограничения на цены или местоположения.

2. Модель

2.1. Предположения

Пусть выполняются следующие предположения.

1. Рынок представляет собой отрезок длинной от 0 до 1 с равномерным распределением потребителей.
2. Фирма-лидер (фирма 1) расположена в точке x_1, а фирма-последователь (фирма 2) — в точке x_2, причем фирма 1 расположена «левее» фирмы 2, то есть,
$$x_1 \leqslant x_2. \tag{1}$$
3. Функция транспортных издержек линейна по x, то есть транспортные издержки по доставки единицы товара от местоположения фирмы в точку x определяются как
$$t|x - x_k|, \tag{2}$$
где t — транспортные издержки не перевозку единицы продукции.
4. Арбитраж потребителей и кооперативное поведение фирм отсутствуют.
5. В первом раунде фирмы выбирают местоположения, во втором раунде — количества предлагаемой продукции.
6. Фирма 1 является лидером в обоих раундах и предвидит реакцию фирмы 2, которая является последователем.
7. Издержки по производству обеих фирм равны нулю.
8. Фирмы сами оплачивают транспортные расходы по доставке товаров потребителю.

9. Каждая точка рынка представляет собой отдельный субрынок, на котором может установиться цена, отличная от цены на других субрынках, то есть может существовать ценовая дискриминация по местоположению.

Пусть функция спроса в точке x определяется как

$$p = 1 - Q, \tag{3}$$

где p — цена, Q — количество товара. Пусть

$$Q = q_2 + q_1, \tag{4}$$

где q_1 и q_2 — количества товара, поставляемого фирмами 1 и 2 соответственно.

2.2. Второй раунд

Определим прибыль фирмы-последователя в точке x.

$$\begin{multline}\pi_2\left(x_1, x_2, q_1, q_2\right) = \\ = q_2\,\left(1 - q_1 - q_2\right) - q_2\,t\,\left|x - x_2\right| = \\ = -q_2\,t\,\left|x_2 - x\right| - {q_2}^2 + \left(-q_1 + 1\right)\,q_2, \tag{5}\end{multline}$$

где π_1 — прибыль фирмы-лидера в точке x.

Определим прибыль фирмы-лидера в точке x.

$$\begin{multline}\pi_1\left(x_1, x_2, q_1, q_2\right) = \\ = q_1\,\left(1 - q_1 - q_2\right) - q_1\,t\,\left|x - x_1\right| = \\ = -q_1\,t\,\left|x_1 - x\right| - q_1\,q_2 - {q_1}^2 + q_1, \tag{6}\end{multline}$$

где π_1 — прибыль фирмы-лидера в точке x.

Найдем функцию реакции по количеству фирмы-последователя во втором раунде. Найдем производную (5) по q_2:

$$\partial\pi_2(x_1, x_2, q_1, q_2)/\partial q_2 = -t\,\left|x_2 - x\right| - 2\,q_2 - q_1 + 1. \tag{7}$$

Приравняем (7) к 0:

$$\partial\pi_2(x_1, x_2, q_1, q_2)/\partial q_2 = 0. \tag{8}$$

Решая (8) получаем функцию реакции по количеству фирмы 2 $q_2(q_1)$.

$$q_2(q_1) = -\frac{t\,\left|x_2 - x\right| + q_1 - 1}{2}. \tag{9}$$

Подставим функцию реакции фирмы-последователя (9) в функцию прибыли фирмы-лидера (6).

$$\begin{aligned}
&\pi_1\left(x_1,x_2,q_1,q_2\right)=\\
&\qquad=\left(-q_1\right)\,t\,\left|x_1-x\right|-q_1\,\frac{-\left(t\,\left|x_2-x\right|+q_1-1\right)}{2}-{q_1}^2+q_1=\\
&\qquad\qquad=\frac{q_1\,t\,\left|x_2-x\right|-2\,q_1\,t\,\left|x_1-x\right|-{q_1}^2+q_1}{2}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Найдем равновесные количества товара, предлагаемые фирмами в точке x. Найдем производную от (10) по q_1:

$$\partial\pi_1(x_1,x_2,q_1,q_2)/\partial q_1=\frac{t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|-2\,q_1+1}{2}. \qquad (11)$$

Приравнивая (11) и решая получившееся уравнение получаем:

$$q_1^*(x,x_1x_2)=\frac{t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|+1}{2}, \qquad (12)$$

где $q_1^*(x,x_1,x_2)$ — равновесное количество товара, поставляемое фирмой-лидером в точке x.

Подставляя в (9) (12) находим равновесное количество товара, поставляемое в точке x фирмой-последователем $q_2^*(x,x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned}
&q_2^*(x,x_1,x_2)=\\
&\qquad=\frac{-\frac{t\,|x_2-x|-2\,t\,|x_1-x|+1}{2}-t\,\left|x_2-x\right|+1}{2}=\\
&\qquad\qquad=-\frac{3\,t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|-1}{4}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Используя (3) и (4), найдем равновесную цену $p^*(x,x_1,x_2)$ в точке x.

$$\begin{aligned}
&p^*(x,x_1,x_2)=\\
&\quad=-\frac{t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|+1}{2}-\frac{-3\,t\,\left|x_2-x\right|+2\,t\,\left|x_1-x\right|+1}{4}+1=\\
&\qquad\qquad=\frac{t\,\left|x_2-x\right|+2\,t\,\left|x_1-x\right|+1}{4}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Подставляя в (6) и (5) равновесные значения $q_1^*(x,x_1x_2)$ и $q_2^*(x,x_1,x_2)$, найдем равновесную прибыль фирмы 1 π_1^* и равновесную прибыль π_2^* фирмы 2 в точке x.

$$\begin{aligned}
&\pi_2^*\left(x,x_1,x_2\right)=\\
&\qquad=\left(-\frac{-\left(3\,t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|-1\right)}{4}\right)\,t\,\left|x_2-x\right|+\\
&\qquad\qquad-\left(\frac{-\left(3\,t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|-1\right)}{4}\right)^2+\\
&\quad+\left(-\frac{t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|+1}{2}+1\right)\,\frac{-\left(3\,t\,\left|x_2-x\right|-2\,t\,\left|x_1-x\right|-1\right)}{4}=
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16}\Big(9\,t^2\,|x_2 - x|^2 + \big(-12\,t^2\;|x_1 - x| - 6\,t\big)\;|x_2 - x| + \\ + 4\,t^2\,|x_1 - x|^2 + 4\,t\;|x_1 - x| + 1\Big). \quad (15)$$

$$\pi_1^*\,(x, x_1, x_2) = \\ = \left(-\frac{t\;|x_2 - x| - 2\,t\;|x_1 - x| + 1}{2}\right)\,t\;|x_1 - x| + \\ - \frac{t\;|x_2 - x| - 2\,t\;|x_1 - x| + 1}{2} + \\ - \frac{(3\,t\;|x_2 - x| - 2\,t\;|x_1 - x| - 1)}{4} - \left(\frac{t\;|x_2 - x| - 2\,t\;|x_1 - x| + 1}{2}\right)^2 + \\ + \frac{t\;|x_2 - x| - 2\,t\;|x_1 - x| + 1}{2} = \\ = \frac{1}{8}\Big(t^2\,|x_2 - x|^2 + \big(-4\,t^2\;|x_1 - x| + 2\,t\big)\;|x_2 - x| + \\ + 4\,t^2\,|x_1 - x|^2 - 4\,t\;|x_1 - x| + 1\Big) \quad (16)$$

2.3. Первый раунд

Найдем интегральную функцию прибыли фирмы-последователя $\Pi_2(x_1, x_2)$. Под интегральной функцией будем понимать функцию, описывающую рынок в целом, а не одну точку на рынке.

$$\Pi_2(x_1, x_2) = \int_0^1 \pi_2^*(x, x_1, x_2)dx = \\ = \frac{1}{16}\int_0^1 \Big(\big(-12\,t^2\;|x_1 - x| - 6\,t\big)\;|x_2 - x| + 9\,t^2\,(x_2 - x)^2 + \\ + 4\,t\;|x_1 - x| + 4\,t^2\,(x_1 - x)^2 + 1\Big)dx. \quad (17)$$

Учитывая ограничения на взаимное расположение фирм, выражение (17) можно записать как

$$\Pi_2(x_1, x_2) = \int_0^1 \pi_2^*(x, x_1, x_2)dx = \\ = \int_0^{x_1} \pi_2^*(x, x_1, x_2)dx + \int_{x_1}^{x_2} \pi_2^*(x, x_1, x_2)dx + \int_{x_2}^{1} \pi_2^*(x, x_1, x_2)dx \quad (18)$$

Пусть

$$A(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \pi_2^*(x, x_1, x_2)dx. \quad (19)$$

Тогда

$$A\left(x_1,x_2\right)=\\ \frac{1}{48}\Big(27\,t^2\,x_1\,{x_2}^2+\left(-45\,t^2\,{x_1}^2-18\,t\,x_1\right)\,x_2+19\,t^2\,{x_1}^3+15\,t\,{x_1}^2+3\,x_1\Big). \quad (20)$$

Пусть

$$B(x_1,x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\pi_2^*(x,x_1,x_2)dx. \quad (21)$$

Тогда

$$B\left(x_1,x_2\right)=\\ =\frac{1}{48}\Big(7\,t^2\,{x_2}^3+\left(-21\,t^2\,x_1-3\,t\right)\,{x_2}^2+\\ +\left(21\,t^2\,{x_1}^2+6\,t\,x_1+3\right)\,x_2-7\,t^2\,{x_1}^3-3\,t\,{x_1}^2-3\,x_1\Big). \quad (22)$$

Пусть

$$C(x_1,x_2)=\int_{x_2}^{1}\pi_2^*(x,x_1,x_2)dx. \quad (23)$$

Тогда

$$C\left(x_1,x_2\right)=\\ =-\frac{1}{48}\Big(19\,t^2\,{x_2}^3+\left(-30\,t^2\,x_1-27\,t^2+15\,t\right)\,{x_2}^2+\\ +\left(12\,t^2\,{x_1}^2+\left(36\,t^2-12\,t\right)\,x_1+9\,t^2-18\,t+3\right)\,x_2+\\ -12\,t^2\,{x_1}^2+\left(12\,t-6\,t^2\right)\,x_1-t^2+3\,t-3\Big). \quad (24)$$

Подставим в (18) выражения (20), (22) и (24):

$$\Pi_2(x_1,x_2)=\\ =-\frac{1}{48}\Big(19\,t^2\,{x_2}^3+\left(-30\,t^2\,x_1-27\,t^2+15\,t\right)\,{x_2}^2+\\ +\left(12\,t^2\,{x_1}^2+\left(36\,t^2-12\,t\right)\,x_1+9\,t^2-18\,t+3\right)\,x_2-12\,t^2\,{x_1}^2+\\ +\left(12\,t-6\,t^2\right)\,x_1-t^2+3\,t-3\Big)+\\ +\frac{1}{48}\Big(7\,t^2\,{x_2}^3+\left(-21\,t^2\,x_1-3\,t\right)\,{x_2}^2+\\ +\left(21\,t^2\,{x_1}^2+6\,t\,x_1+3\right)\,x_2-7\,t^2\,{x_1}^3-3\,t\,{x_1}^2-3\,x_1\Big)+\\ +\frac{1}{48}\Big(27\,t^2\,x_1\,{x_2}^2+\left(-45\,t^2\,{x_1}^2-18\,t\,x_1\right)\,x_2+19\,t^2\,{x_1}^3+15\,t\,{x_1}^2+3\,x_1\Big)=\\ =-\frac{1}{48}\Big(12\,t^2\,{x_2}^3+\left(-36\,t^2\,x_1-27\,t^2+18\,t\right)\,{x_2}^2+\\ +\left(36\,t^2\,{x_1}^2+36\,t^2\,x_1+9\,t^2-18\,t\right)\,x_2+\\ -12\,t^2\,{x_1}^3+\left(-12\,t^2-12\,t\right)\,{x_1}^2+\left(12\,t-6\,t^2\right)\,x_1-t^2+3\,t-3\Big). \quad (25)$$

Построим функцию реакции по местоположению фирмы последователя $x_2(x_1)$. Найдем значение x_2, максимизирующее функцию реакции фирмы последователя. Найдем производную функции $\Pi_2(x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned}
&\partial \Pi_2(x_1,x_2)/\partial x_2 = \\
&\quad = -\frac{1}{48}\Big(36\,t^2\,{x_2}^2 + 2\,\left(-36\,t^2\,x_1 - 27\,t^2 + 18\,t\right)\,x_2 + \\
&\qquad + 36\,t^2\,{x_1}^2 + 36\,t^2\,x_1 + 9\,t^2 - 18\,t\Big) = \\
&\quad = -\frac{1}{16}\Big(12\,t^2\,{x_2}^2 + \left(-24\,t^2\,x_1 - 18\,t^2 + 12\,t\right)\,x_2 + \\
&\qquad + 12\,t^2\,{x_1}^2 + 12\,t^2\,x_1 + 3\,t^2 - 6\,t\Big).
\end{aligned} \tag{26}$$

Приравнивая (26) к 0 и решая получившееся уравнения, получаем:

$$x_2(x_1) = -\frac{\sqrt{\left(8\,t^2 - 16\,t\right)\,x_1 + 5\,t^2 - 4\,t + 4} - 4\,t\,x_1 - 3\,t + 2}{4\,t} \tag{27}$$

и

$$x_2(x_1) = \frac{\sqrt{\left(8\,t^2 - 16\,t\right)\,x_1 + 5\,t^2 - 4\,t + 4} + 4\,t\,x_1 + 3\,t - 2}{4\,t} \tag{28}$$

Найдем интегральную функцию прибыли фирмы-лидера $\Pi_1(x_1,x_2)$.

$$\begin{aligned}
&\Pi_1(x_1,x_2) = \int_0^1 \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx = \\
&\quad = \frac{1}{8}\int_0^1 \Big(\left(2\,t - 4\,t^2\,\left(x - x_1\right)\right)\,|x_2 - x| + t^2\,\left(x_2 - x\right)^2 + \\
&\qquad - 4\,t\,\left(x - x_1\right) + 4\,t^2\,\left(x - x_1\right)^2 + 1\Big)dx.
\end{aligned} \tag{29}$$

Запишем (29) как сумму:

$$\begin{aligned}
&\Pi_1(x_1,x_2) = \int_0^1 \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx = \\
&\quad = \int_0^{x_1} \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx + \int_{x_1}^{x_2} \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx + \int_{x_2}^{1} \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx.
\end{aligned} \tag{30}$$

Пусть

$$D(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx. \tag{31}$$

Тогда

$$D\left(x_1,x_2\right) = \frac{3\,t^2\,x_1\,{x_2}^2 + \left(6\,t\,x_1 - 9\,t^2\,{x_1}^2\right)\,x_2 + 7\,t^2\,{x_1}^3 - 9\,t\,{x_1}^2 + 3\,x_1}{24}. \tag{32}$$

Пусть

$$E(x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx. \tag{33}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &E\left(x_1,x_2\right) = \\ &= \frac{t^2\, {x_2}^3 + \left(-3\, t^2\, x_1 - t\right)\, {x_2}^2 + \left(3\, t^2\, {x_1}^2 + 2\, t\, x_1 + 1\right)\, x_2 - t^2\, {x_1}^3 - t\, {x_1}^2 - x_1}{8} \end{aligned} \tag{34}$$

Пусть

$$F(x_1,x_2) = \int_{x_2}^{1} \pi_1^*(x,x_1,x_2)dx. \tag{35}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &F\left(x_1,x_2\right) = \\ &= -\frac{1}{24}\Big(7\, t^2\, {x_2}^3 + \left(-18\, t^2\, x_1 - 3\, t^2 - 9\, t\right)\, {x_2}^2 + \\ &+ \left(12\, t^2\, {x_1}^2 + \left(12\, t^2 + 12\, t\right)\, x_1 - 3\, t^2 + 6\, t + 3\right)\, x_2 + \\ &- 12\, t^2\, {x_1}^2 + \left(6\, t^2 - 12\, t\right)\, x_1 - t^2 + 3\, t - 3\Big). \end{aligned} \tag{36}$$

В (30) подставим (32), (34) и (36).

$$\begin{aligned} &\Pi_1(x_1,x_2) = \\ &= -\frac{1}{24}\Big(7\, t^2\, {x_2}^3 + \left(-18\, t^2\, x_1 - 3\, t^2 - 9\, t\right)\, {x_2}^2 + \\ &+ \left(12\, t^2\, {x_1}^2 + \left(12\, t^2 + 12\, t\right)\, x_1 - 3\, t^2 + 6\, t + 3\right)\, x_2 + \\ &- 12\, t^2\, {x_1}^2 + \left(6\, t^2 - 12\, t\right)\, x_1 - t^2 + 3\, t - 3\Big) + \\ &+ \frac{1}{8}\Big(t^2\, {x_2}^3 + \left(-3\, t^2\, x_1 - t\right)\, {x_2}^2 + \\ &+ \left(3\, t^2\, {x_1}^2 + 2\, t\, x_1 + 1\right)\, x_2 - t^2\, {x_1}^3 - t\, {x_1}^2 - x_1\Big) + \\ &+ \frac{1}{24}\Big(3\, t^2\, x_1\, {x_2}^2 + \left(6\, t\, x_1 - 9\, t^2\, {x_1}^2\right)\, x_2 + 7\, t^2\, {x_1}^3 - 9\, t\, {x_1}^2 + 3\, x_1\Big) = \\ &= -\frac{1}{24}\Big(4\, t^2\, {x_2}^3 + \left(-12\, t^2\, x_1 - 3\, t^2 - 6\, t\right)\, {x_2}^2 + \\ &+ \left(12\, t^2\, {x_1}^2 + 12\, t^2\, x_1 - 3\, t^2 + 6\, t\right)\, x_2 + \\ &- 4\, t^2\, {x_1}^3 + \left(12\, t - 12\, t^2\right)\, {x_1}^2 + \left(6\, t^2 - 12\, t\right)\, x_1 - t^2 + 3\, t - 3\Big). \end{aligned} \tag{37}$$

Подставим функции реакции фирмы-последователя по местоположению (27) и (28) в интегральную функцию прибыли фирмы-лидера (37).

При подстановке (27) получаем:

$$\Pi_1(x_1) =$$
$$= -\Biggl(\frac{\left(-\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+4\,t\,x_1+3\,t-2\right)^3}{16\,t}+$$
$$+\frac{1}{16\,t^2}\left(-12\,t^2\,x_1-3\,t^2-6\,t\right)\times$$
$$\times\left(-\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+4\,t\,x_1+3\,t-2\right)^2+$$
$$+\frac{1}{4\,t}\left(12\,t^2\,{x_1}^2+12\,t^2\,x_1-3\,t^2+6\,t\right)\times$$
$$\times\left(-\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+4\,t\,x_1+3\,t-2\right)+$$
$$-4\,t^2\,{x_1}^3+\left(12\,t-12\,t^2\right)\,{x_1}^2+\left(6\,t^2-12\,t\right)\,x_1-t^2+3\,t-3\Biggr)/\,24 =$$
$$=\frac{1}{192\,t}\Bigl(\left(24\,t^3-48\,t^2\right)\,{x_1}^2+$$
$$+\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}\,\left(\left(16\,t^2-32\,t\right)\,x_1+t^2-20\,t+20\right)+$$
$$+\left(-84\,t^3+240\,t^2-144\,t\right)\,x_1+11\,t^3+6\,t^2-36\,t+40\Bigr). \quad (38)$$

При подстановке (28) получаем:

$$\Pi_1(x_1) =$$
$$= -\Biggl(\frac{\left(\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+4\,t\,x_1+3\,t-2\right)^3}{16\,t}+$$
$$+\frac{1}{16\,t^2}\left(-12\,t^2\,x_1-3\,t^2-6\,t\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+4\,t\,x_1+3\,t-2\right)^2+$$
$$+\frac{1}{4\,t}\left(12\,t^2\,{x_1}^2+12\,t^2\,x_1-3\,t^2+6\,t\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+4\,t\,x_1+3\,t-2\right)+$$
$$-4\,t^2\,{x_1}^3+\left(12\,t-12\,t^2\right)\,{x_1}^2+\left(6\,t^2-12\,t\right)\,x_1-t^2+3\,t-3\Biggr)/\,24 =$$
$$=-\frac{1}{192\,t}\Bigl(\left(48\,t^2-24\,t^3\right)\,{x_1}^2+$$
$$+\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}\,\left(\left(16\,t^2-32\,t\right)\,x_1+t^2-20\,t+20\right)+$$
$$+\left(84\,t^3-240\,t^2+144\,t\right)\,x_1-11\,t^3-6\,t^2+36\,t-40\Bigr). \quad (39)$$

Первый вариант. Найдем экстремумы функции (38). Продифференцируем функцию (38).

$$\partial\Pi_1(x_1)/\partial x_1 =$$
$$\frac{1}{192t}\Big(\left(16\,t^2-32\,t\right)\,\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+$$
$$+\frac{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,\left(\left(16\,t^2-32\,t\right)\,x_1+t^2-20\,t+20\right)}{2\,\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}}+$$
$$+2\,\left(24\,t^3-48\,t^2\right)\,x_1-84\,t^3+240\,t^2-144\,t\Big)=$$
$$=\frac{1}{16\,\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}}\times$$
$$\times\Big(\left(\left(4\,t^2-8\,t\right)\,x_1-7\,t^2+20\,t-12\right)\,\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+$$
$$+\left(16\,t^3-64\,t^2+64\,t\right)\,x_1+7\,t^3-26\,t^2+36\,t-24\Big). \quad (40)$$

Приравняем (40) к нулю и попытаемся решить получившееся уравнение. Получаем

$$x_1=\frac{\left(7\,t-6\right)\,\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}-7\,t^2+12\,t-12}{4\,t\,\sqrt{\left(8\,t^2-16\,t\right)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+16\,t^2-32\,t} \quad (41)$$

Решим (41) при помощи замены переменной. Пусть

$$w=\sqrt{(8\,t^2-16\,t)x_1+5\,t^2-4\,t+4} \quad (42)$$

и

$$w>0. \quad (43)$$

Тогда

$$x_1=\frac{w^2-5\,t^2+4\,t-4}{8\,t^2-16\,t} \quad (44)$$

Подставим (44) в (41) и решим это уравнение относительно w. Получаем

$$w=-\frac{\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+7\,t-10}{2}, \quad (45)$$

$$w=\frac{\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}-7\,t+10}{2} \quad (46)$$

и

$$w=3\,t-2. \quad (47)$$

В (44) поставим (45), (46) и (47). Получим

$$x_1=\frac{\left(7\,t-10\right)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+35\,t^2-132\,t+108}{16\,t^2-32\,t}, \quad (48)$$

$$x_1=-\frac{\left(7\,t-10\right)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}-35\,t^2+132\,t-108}{16\,t^2-32\,t} \quad (49)$$

и

$$x_1 = \frac{1}{2}. \tag{50}$$

Найдем соответствующие (48), (49) и (50) значения x_2. Для этого подставим (48), (49) и (50) в (27). Получаем

$$\begin{aligned} x_2 &= \\ &= -\frac{1}{2^{\frac{9}{2}}\, t^2 - 2^{\frac{11}{2}}\, t} \times \\ &\times \Bigg((4\,t-8)\,\sqrt{(7\,t-10)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+45\,t^2-140\,t+116} + \\ &+ \left(5\,2^{\frac{3}{2}} - 7\,\sqrt{2}\,t\right)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132} - 47\,\sqrt{2}\,t^2 + 41\,2^{\frac{5}{2}}\,t - 31\,2^{\frac{5}{2}}\Bigg), \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \\ &= -\frac{1}{2^{\frac{9}{2}}\, t^2 - 2^{\frac{11}{2}}\, t} \times \\ &\times \Bigg((4\,t-8)\,\sqrt{(10-7\,t)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+45\,t^2-140\,t+116} + \\ &+ \left(7\,\sqrt{2}\,t - 5\,2^{\frac{3}{2}}\right)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132} - 47\,\sqrt{2}\,t^2 + 41\,2^{\frac{5}{2}}\,t - 31\,2^{\frac{5}{2}}\Bigg) \end{aligned} \tag{52}$$

и

$$x_2 = \frac{1}{2}. \tag{53}$$

Второй вариант. Найдем экстремумы функции (39). Продифференцируем функцию (39).

$$\begin{aligned} &\partial \Pi_2(x_1)/\partial x_1 = \\ &= \frac{1}{192\,t}\Bigg(-\left(16\,t^2-32\,t\right)\,\sqrt{(8\,t^2-16\,t)\;x_1+5\,t^2-4\,t+4} + \\ &- \frac{(8\,t^2-16\,t)\;((16\,t^2-32\,t)\;x_1+t^2-20\,t+20)}{2\,\sqrt{(8\,t^2-16\,t)\;x_1+5\,t^2-4\,t+4}} + \\ &- 2\,\left(48\,t^2-24\,t^3\right)\,x_1 - 84\,t^3+240\,t^2-144\,t\Bigg) = \\ &= \frac{1}{16\,\sqrt{(8\,t^2-16\,t)\;x_1+5\,t^2-4\,t+4}} \times \\ &\times \Bigg(\left(\left(4\,t^2-8\,t\right)\,x_1 - 7\,t^2+20\,t-12\right)\,\sqrt{(8\,t^2-16\,t)\;x_1+5\,t^2-4\,t+4} + \\ &+ \left(-16\,t^3+64\,t^2-64\,t\right)\,x_1 - 7\,t^3+26\,t^2-36\,t+24\Bigg). \end{aligned} \tag{54}$$

Приравняем (54) к нулю и попытаемся решить получившееся уравнение. Получаем

$$x_1 = \frac{(7\,t-6)\,\sqrt{(8\,t^2-16\,t)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}+7\,t^2-12\,t+12}{4\,t\,\sqrt{(8\,t^2-16\,t)\,x_1+5\,t^2-4\,t+4}-16\,t^2+32\,t} \tag{55}$$

Решим (41) при помощи замены переменной. Пусть

$$u = \sqrt{(8\,t^2-16\,t)x_1+5\,t^2-4\,t+4} \tag{56}$$

и

$$u > 0. \tag{57}$$

Тогда

$$x_1 = \frac{u^2-5\,t^2+4\,t-4}{8\,t^2-16\,t}. \tag{58}$$

Подставим (58) в (55) и решим это уравнение относительно u. Получаем

$$u = -\frac{\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}-7\,t+10}{2}, \tag{59}$$

$$u = \frac{\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+7\,t-10}{2} \tag{60}$$

и

$$u = 2-3\,t \tag{61}$$

В (58) поставим (59), (60) и (61). Получим

$$x_1 = -\frac{(7\,t-10)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}-35\,t^2+132\,t-108}{16\,t^2-32\,t}, \tag{62}$$

$$x_1 = \frac{(7\,t-10)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+35\,t^2-132\,t+108}{16\,t^2-32\,t} \tag{63}$$

и

$$x_1 = \frac{1}{2}. \tag{64}$$

Найдем соответствующие (62), (63) и (64) значения x_2. Для этого подставим (62), (63) и (64) в (28). Получаем

$$\begin{aligned} x_2 = -\frac{1}{16\,t^2-32\,t}\times \\ \times\Big((4-2\,t)\,\left|\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}-7\,t+10\right|+ \\ +(7\,t-10)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}-47\,t^2+164\,t-124\Big), \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{1}{16\,t^2-32\,t}\times \\ \times\Big((2\,t-4)\,\left|\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+7\,t-10\right|+ \\ +(7\,t-10)\,\sqrt{41\,t^2-140\,t+132}+47\,t^2-164\,t+124\Big) \end{aligned} \tag{66}$$

и

$$x_2 = \frac{|3\,t - 2| + 5\,t - 2}{4\,t}. \tag{67}$$

Итак, мы имеем шесть возможных вариантов равновесного расположения. Дополнительно к этим шести следует проверить варианты с расположением фирмы-лидера в точках 1 и 0. Местоположение фирмы последователя определяется в этом случае из функции реакции фирмы-последователя (27) или (28). При $x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{5\,t^2 - 4\,t + 4} + 3\,t - 2}{4\,t} \tag{68}$$

или

$$x_2 = \frac{\sqrt{5\,t^2 - 4\,t + 4} + 3\,t - 2}{4\,t}. \tag{69}$$

При $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Найдем, какие из равновесных значений удовлетворяют условиям модели. Эти значения должны максимизировать интегральные функции прибыли, а также удовлетворять условиям $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$. Учитывая, что фирма-лидер предвидит действия последователя на обоих этапах, будем считать, что фирма-лидер выбирает из возможных равновесных расположений, то, которое максимизирует её прибыль, то есть равновесное расположение единственное.

Отметим, что значения выражений (25) и (37) всегда больше 0, в то время как значения выражений (12) и (13) не обладают таким свойством. Чтобы избежать странной ситуации, когда продажи в точке x отрицательны, а прибыль положительна, следует наложить некоторые ограничения на величину транспортных издержек:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t|x - x_2| - t|x - x_1| \geqslant 0 \tag{70}$$

и

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t|x - x_2| + \frac{1}{2}t|x - x_1| \geqslant 0. \tag{71}$$

Однозначно определить из (70) и (71) значение t нельзя. Например, при $x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $t \leqslant 1/3$. Отметим, что Комбес и соавторы, исследовавшие пространственную конкуренцию по Курно, показывают, что условие полного покрытия рынка однозначно определяется как $t \leqslant 1/2$ [3].

При помощи симуляции при различных значениях t с шагом 0.1 мы получили равновесные расположения фирм (таблица 1).

В таблице 1 приведены только «разрешенные» расположения фирм, при которых функция прибыли фирмы-лидера максимальна, но при этом весь рынок обслуживается. На рисунках 1, 2, 3, и 4, приведены изменения количества продукции, поставляемого каждой фирмой в зависимости от x, и изменения цены на продукцию в зависимости от x.

При более высоких транспортных издержках ($>$ 0.6), максимизирующее функцию прибыли фирмы-лидера расположения приводят к нарушению условий (70) и (71).

Таблица 1. Приближенные параметры равновесного по Нэшу размещения

t	x_1^*	x_2^*	Π_1^*	Π_2^*	Уравнения равновесного расположения
0.1	0.5	0.5	0.119	0.059	(64);(67)
0.2	0.5	0.5	0.113	0.056	(64);(67)
0.3	0.5	0.5	0.107	0.054	(64);(67)
0.4	0.451	0.541	0.102	0.051	(63);(66)
0.5	0.375	0.625	0.098	0.052	(63);(66)
0.6	0.338	0.697	0.099	0.055	(63);(66)

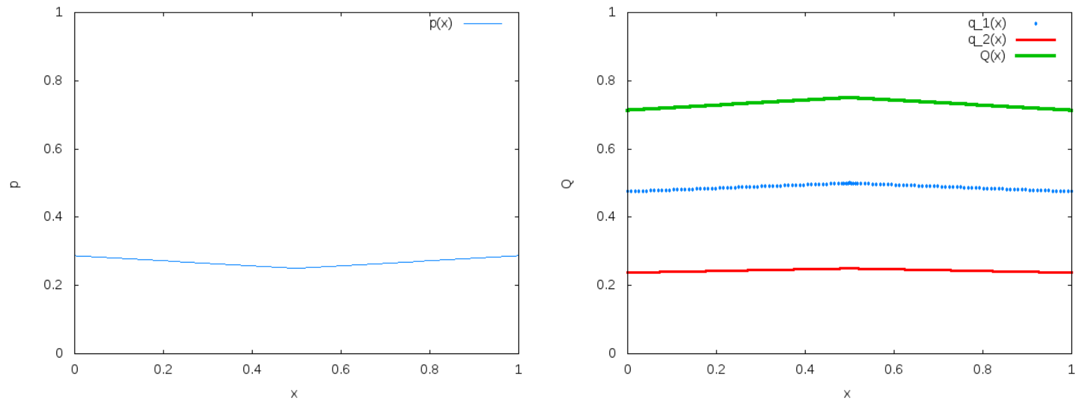

Рис. 1. Цена и количество товара в зависимости от x при $t = 0.1$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.5$

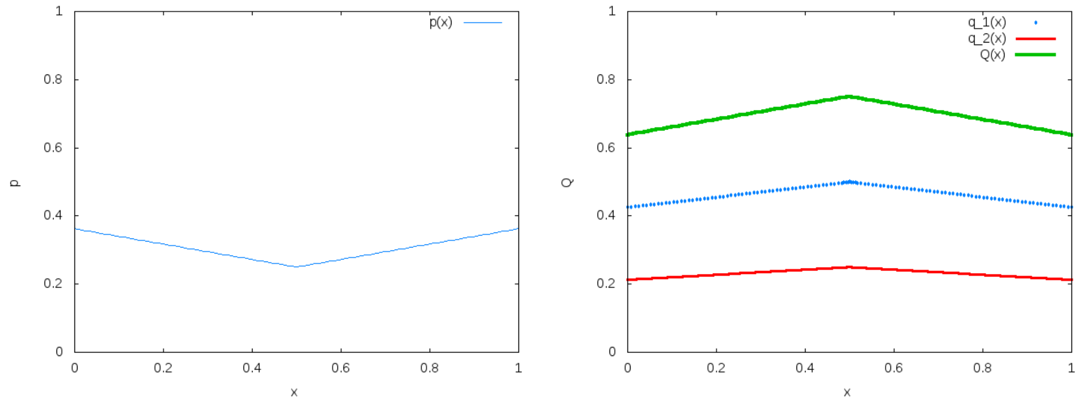

Рис. 2. Цена и количество товара в зависимости от x при $t = 0.3$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.5$

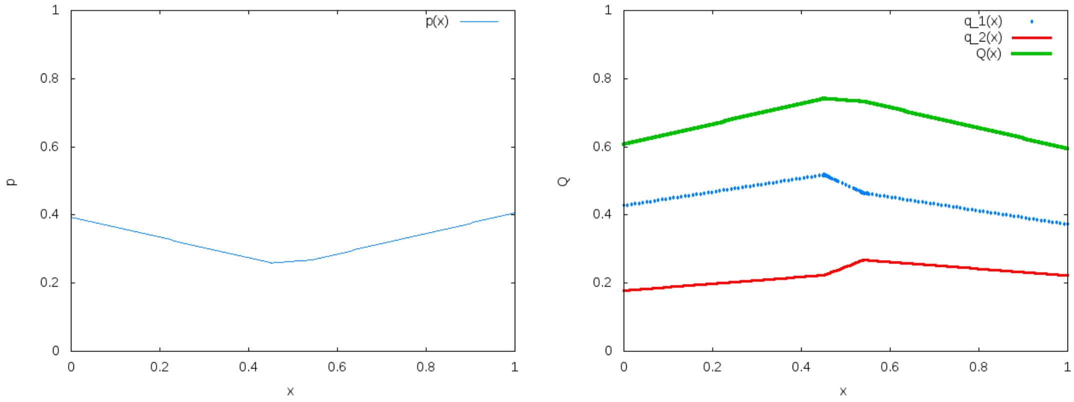

Рис. 3. Цена и количество товара в зависимости от x при $t = 0.4$, $x_1 = 0.451$, $x_2 = 0.541$

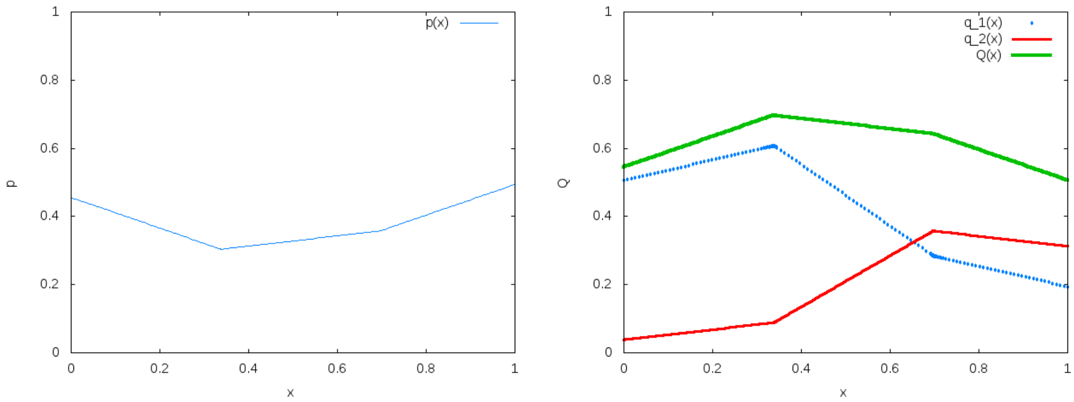

Рис. 4. Цена и количество товара в зависимости от x при $t = 0.6$, $x_1 = 0.338$, $x_2 = 0.697$

3. Выводы

Итак, сделаем выводы из приведенной модели.

- Равновесное расположение фирм зависит от транспортных издержек. При «разрешенных» значениях t при низких транспортных издержках фирмы недиффернцированны, при более высоких транспортных издержках фирмы дифференцируются.
- При «запрещенных» значениях t также существуют равновесные расположения, обеспечивающие неотрицательность поставок каждой фирмы в любой точке рынка. При таких значениях t фирмы как правило недифференцированны.
- При «разрешенных» значениях t цена минимальна в точке расположения фирмы-лидера x_1. При удалении от мест расположения фирм цена возрастает. Объемы товара, реализуемые отдельными фирмами, максимальны в точке их расположения.
- В случае минимальной дифференциации при низких транспортных издержках обе фирмы действуют как бы на одном рынке. Из таблицы 1 также видно, что в этом случае прибыль фирмы-лидера примерно в два раза больше, чем прибыль последователя, как и в «беспространственной» модели Штакельберга. Объемы реализации лидера также в два раза больше объема реализации последователя при любом значении x. Цена в этом случае линейно возрастает с увеличением x, а объемы реализации линейно снижаются. При более высоких транспортных издержках, когда фирмы дифференцированы, рынки как бы разделены: фирма-лидер реализует основной объем продукции около своего местоположения, фирма-последователь — около своего местоположения. При этом прибыль лидера превосходит прибыль последователя менее чем в два раза.
- При росте транспортных издержек (в «разрешенных» пределах) количества продукции, поставляемые фирмами на рынок уменьшаются, а цена возрастает.

Основным недостатком данной модели является то, что нам не удалось снять все ограничения по местоположению фирм в линейном городе. Ограничение на местоположение, вызванное необходимостью преодолеть вычислительные трудности, относительно мягкое (фирма-лидер находится левее фирмы-последователя), но, теме не менее, может значительно влиять на результаты модели.

Использования симуляции при рассмотрении результатов модели оправданно сложностью интерпретации полученных аналитических решений; к сожалению, при использовании симуляции нельзя исключить, что некоторые важные свойства модели не были рассмотрены. В частности, мы выяснили что граница разрешенных значений t находится между 0.6 и 2/3. Интерес, по нашему мнению, представляет не столько определение максимального уровня транспортных издержек, при котором максимизирующие прибыль расположения обеспечивают неотрицательность поставок, сколько изменения x_1^* и x_2^* в окрестностях некоторых значений t. Проведенная нами симуляция не дает ответа на вопрос, существуют ли такие значения t и, если да, как в их окрестностях изменяются x_1^* и x_2^*.

Несмотря на то, что исследование полученных аналитически значений x_1^* и x_2^* может показаться слишком трудоемким и нецелесообразным, сами модели линейного города с элементами предвидения и конкуренции по Штакельбергу остаются, по нашему мнению, перспективной областью для исследований. В частности, при помощи моделей линейного города с последовательным входом и предвидением можно изучать рыночные инновации (пример такой модели приведен в работе Пресскотта и Виссчера [5]). В этом случае пространство можно представить в виде луча, исходящего из точки ноль, при этом спрос в каждой точке луча должен представлять собой случайную функцию с различными значениями матожидания и дисперсии, причем при удалении от нуля дисперсия должна увеличиваться. Представляется, что модель с такой конфигурацией пространства и функцией спроса подходит для исследования решений фирм об освоении нового рынка (продуктовых инновациях) при различных уровнях «транспортных» издержек в условиях конкуренции, последовательного входа на рынок и предвидения реакции конкурента.

Список литературы

[1] Меньшиков И. С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М. : ООО «Контакт Плюс», 2010.

[2] Bhadury J., Chandrasekaran R., Padmanabhan V. Competitive Location and Entry Deterrence in Hotelling's Duopoly Model // Location Science. — 1994. — Vol. 2, no. 4. — P. 259–275.

[3] Combes P.-P., Mayer T., Thisse J.-F. Economic Geography. The Integration of Regions and Nations. — Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2008.

[4] Meza S., Tombak M. Endogenous Location Leadership // International Journal of Industrial Organization. — 2009. — Vol. 27. — P. 687–707.

[5] Prescott E. C., Visscher M. Sequential Location Among Firms with Foresight // Bell Journal of Economics. — 1977. — Vol. 8, no. 2. — P. 378–393.

[6] Stackelberg H. Marktform und Gleichgewicht. — Wien und Berlin : J. Springer, 1934.