Control in economic system with indefinite parameters. History lessons

Kharlamov, Mikhail

Volgograd Academy of Public Administration, Russian Academy of National Economy and Public Administration

1 September 2004

М. П. Харламов

УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ: ИЗВЛЕЧЕНИЕ УРОКОВ

Сравнивать реально существующую систему с неким умозрительным построением чрезвычайно рискованно.
Й. Шумпетер

Предложен математический алгоритм выработки управляющих воздействий в задаче, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей набор неизвестных, не поддающихся непосредственному измерению параметров, на основе учета результатов управления на предыдущем временном интервале.

Введение

Современный этап развития экономической науки характеризуется переходом от статики к динамике и от линейных моделей к нелинейным. Все большее распространение находит термин «нелинейное мышление». Уже считается доказанным, что равновесия в экономических системах не существует. Следовательно, любые выводы экономической статики неверны в принципе. Синергетика рассматривает мировую экономику как самоорганизующуюся систему, в которой имеют место практически все эффекты, обнаруженные ранее физиками и математиками в сложных радиофизических, механических, биологических системах: бифуркации, катастрофы, хаос. Хотя два последних слова и выглядят устрашающе, на самом деле это вполне естественные и хорошо классифицированные явления нелинейной динамики. В применении к экономике анализу подобных ситуаций посвящено так много работ, что сколько-нибудь серьезный их обзор в публикациях становится нереальной задачей. Для заинтересованных сошлемся на монографию В.-Б. Занга [1], мгновенно ставшую библиографической редкостью. В ней автор, будучи одновременно и экономистом и глубоко подготовленным математиком, собрал многочисленные результаты, связанные с моделями реальных экономических систем, основанными на использовании нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p), \quad x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

в которых фазовые переменные $x_1, ..., x_n$ отражают макропоказатели состояния системы, а $p_1, ..., p_k$ представляют собой экзогенные параметры. В книге описываются и трактуются явления, связанные с резким изменением характера эволюции системы при малых, но постепенно накапливающихся изменениях параметров. В некоторых комментариях В.-Б. Занг трактует параметры как управляющие и делает выводы о целесообразности управления экономической системой на том или ином уровне. Однако в целом задача управления не ставится и не рассматривается.

При построении модели управления экономической системой мы столкнемся с ситуацией, когда параметры будут распадаться на две группы: одни из них могут быть измерены хотя бы через определенные промежутки времени, значения других, существование и влияние которых заведомо установлено, не могут быть определены в принципе или на данном этапе развития эконометрики. В таком случае результаты применения традиционных методов решения задач оптимального или программного управления[1] становятся неадекватными или, в лучшем случае, сильно зависящими от исследователя.

В экономике, в отличие от физики и механики, нельзя многократно провести один и тот же эксперимент с желаемыми начальными условиями и разнообразными управлениями. Жизнь дает каждый свой урок один раз. Как извлечь выводы из этого урока? Ниже предлагается математический алгоритм, который, возможно, позволит учесть на каждом последующем этапе результаты принятия предыдущего решения.

[1] Под программным управлением понимается управление, имеющее целью вывод системы на некоторый желаемый режим эволюции [2].

Основные уравнения

Введем в систему (1) управляющие переменные $u = (u_1, ..., u_m)$. Обозначая, как принято, точкой дифференцирование по времени, запишем рассматриваемую модель в виде

$$x^{\bullet} = f(x, u, p), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{R}^k. \tag{2}$$

Здесь мы считаем, что известные постоянные характеристики системы уже учтены в самой вектор-функции f, а явно записанные параметры p на самом деле неизвестны. О них лишь предполагается, что они медленно меняются в окрестности некоторого фиксированного и измеренного векторного значения, которое простой заменой может быть принято за нулевое $p_* = 0$.

Управление u в уравнениях (2) введено так, что при его нулевом значении $u_* = 0$ и при нулевом значении параметров известно точное решение $x_*(t)$ на интервале управления:

$$x_*^{\bullet}(t) \equiv f(x_*(t), 0, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{3}$$

Фазовую траекторию $x_*(t)$ назовем программным режимом. Это будет идеал, которого мы хотим достигнуть. Более точно, пусть начальные и конечные условия программного режима (3) таковы:

$$x_*(0) = a_*, \; x_*(T) = b_*. \tag{4}$$

Считается заданной некоторая целевая функция, оценивающая отклонения Δx фазовых траекторий в точках x: $F(x, \Delta x) \geq 0$. Задача состоит в выборе управления $u = \text{const}$ на промежутке $[0, T]$, обеспечивающего наименьшую оценку отклонения в момент T от идеального значения b_*. Предполагая, что реальные отклонения все же окажутся невелики, можно положительно определенную целевую функцию заменить квадратичной формой

$$F(x, \Delta x) \approx (\Delta x)' K(x) \Delta x, \tag{5}$$

где $K(x)$ – положительно определенная симметричная $n \times n$-матрица, штрихом обозначено транспонирование.

Алгоритм выбора управления, минимизирующего форму (5) в конечной точке (4) для механических систем, параметры которых точно известны, можно найти, например, в [3]. Впрочем, в общем виде получить соответствующее решение задачи оптимизации, линеаризуя систему (2) без учета параметров, совсем просто.

Формула управления

Будем считать, что получение данных о состоянии системы возможно гораздо чаще, чем принятие решения о выборе управления. Таким образом, на прошлых этапах реальное движение $x(t)$ было вполне наблюдаемым, то есть известно практически для всех моментов времени. Однако давнюю историю не имеет смысла учитывать, поскольку за большой период параметры системы, хоть и изменяющиеся медленно, получили весьма значительный сдвиг. В то же время на двух следующих друг за другом промежутках управления (в течение каждого из которых управление нельзя изменить) эти неизвестные параметры с большой степенью точности можно считать постоянными и равными их значению в промежуточной точке переключения управления.

Представим себе, что на одном из предыдущих этапов управления $t \in [T_1, T_2], T_2 - T_1 = T$ управленческое решение u_0 перевело систему вдоль реальной траектории $x_-(t)$ из состояния $x_-(T_1) = a_0$ в состояние $x_-(T_2) = b_0$. Тем самым, для отдельно взятой точки – начального состояния a_0 и одного управления u_0 получены косвенные данные о реальных параметрах p, а именно: в силу автономности системы уравнений (2) вектор-функция $x_0(t) \equiv x_-(t + T_1)$ будет решением системы (2) на отрезке $[0, T]$, для которого

$$x_0(0) = a_0, \quad x_0(T) = b_0 \,. \tag{6}$$

Иными словами, если бы было возможно привести систему в момент $t = 0$ в то же самое состояние, в котором она находилась при $t = T_1$, то при выборе такого же управления u_0 и при сохранившихся внешних условиях она перешла бы в момент $t = T$ в состояние b_0.

Пусть фактическое состояние системы при $t = 0$ есть a_1 и выбрано пока еще произвольное управление u. Обозначим соответствующее решение системы (2) через $x(t)$. Имеем на отрезке $[0, T]$:

$$x_*^\bullet = f(x_*,0,0), \quad x_*(0)=a_*, x_*(T)=b_*;$$
$$x_0^\bullet = f(x_0,u_0,p), \quad x_0(0)=a_0, x_0(T)=b_0; \qquad (7)$$
$$x^\bullet = f(x,u,p), \quad x(0)=a_1.$$

Выпишем две системы первого приближения в окрестности программного режима:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_0-x_*) &= A_*(x_0-x_*)+B_*u_0+C_*p;\\ \frac{d}{dt}(x-x_*) &= A_*(x-x_*)+B_*u+C_*p.\end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь матрицы Якоби вычислены в точках заранее рассчитанного программного режима:

$$A_* = \frac{\partial f}{\partial x}(x_*(t),0,0), \quad B_* = \frac{\partial f}{\partial u}(x_*(t),0,0),$$
$$C_* = \frac{\partial f}{\partial p}(x_*(t),0,0). \qquad (9)$$

Поскольку и сам рассматриваемый промежуток управления (то есть промежуток, на котором управление не меняется) невелик, можно для простоты изложения считать матрицы (9) постоянными на отрезке $[0,T]$.

Вычитая первое матричное уравнение (8) из второго, получим систему (или уравнение в матричной форме), которую естественно назвать поправочной – она описывает не отклонение фактического решения от желаемого, а отклонение фактического решения от того, которое получено на предыдущем этапе в результате выбранных ранее управлений:

$$\frac{d}{dt}(x-x_0) = A_*(x-x_0)+B_*(u-u_0)\,. \qquad (10)$$

Как видим, уравнения (10) не содержат членов с неизвестными параметрами p. Дальнейший ход решения задачи нахождения управления $u=u_1$ почти очевиден. Функция $\varphi(t) = x_0^\bullet(t) - A_*x_0(t)$ нам известна из предыстории. В частности, в ней неявным образом учтены граничные условия (6). Обозначим

$$w = u-u_0\,. \qquad (11)$$

Перепишем уравнения (10) в виде

$$x^{\bullet} = A_* x + B_* w + \varphi(t) \,. \tag{12}$$

Решение системы (12) с начальными условиями, указанными в (7), находится методом вариации произвольных постоянных:

$$x(t) = e^{A_* t}[a_1 + A(t) B_* w + \Phi(t)] \,, \tag{13}$$

где

$$A(t) = \int_0^t e^{-A_* \tau} d\tau, \quad \Phi(t) = \int_0^t e^{-A_* \tau} \varphi(\tau) d\tau \,. \tag{14}$$

Из (13), (14) отклонение фазовой траектории от программного режима $\Delta x = x(T) - b_*$ в конце промежутка управления вычисляется в виде линейной функции поправки к управлению (11)

$$\Delta x = Vw + \psi \,, \tag{15}$$

где V – это $m \times n$-матрица

$$V = e^{A_* T} \left(\int_0^T e^{-A_* \tau} d\tau \right) B_* \,, \tag{16}$$

а ψ – n-мерный вектор

$$\psi = e^{A_* T} \left(a_1 + \int_0^T e^{-A_* \tau} \varphi(\tau) d\tau \right) - b_* \,. \tag{17}$$

Выражение вида (15), естественно, имеет место и без предположения постоянства матриц $A_*(t), B_*(t)$ в уравнениях (10), лишь вид оператора V и вектора ψ несколько усложняется, но они все равно рассчитываются с использованием лишь знания заданного программного режима.

Приходим к задаче квадратичной минимизации

$$w_1 = \operatorname{Arg\,min}\{(Vw + \psi)' K(b_*)(Vw + \psi)\} \quad / \quad w \in \mathbb{R}^m \,. \tag{18}$$

Ее решение определяется однозначно, если в исходной системе (2) управление u введено разумно, то есть все его компоненты независимы и ранг матрицы B_*, а следовательно, и матрицы V, максимален и равен m (количеству управлений). Приравнивая к нулю дифференциал минимизируемой функции из (18) по переменным w, разрешая полученные линейные уравнения и вспоминая обозначение (11), найдем

$$u_1 = u_0 - (V'KV)^{-1} (V'K) \psi \,. \tag{19}$$

Здесь $K = K(b_*)$, матрица V и вектор ψ вычисляются по формулам (16) и (17).

Заметим, что если управлений столько же, сколько и фазовых координат $m = n$, то все матрицы в выражении (19) обратимы, и, раскрывая скобки, получим

$$u_1 = u_0 - V^{-1}\psi ,$$

так что в силу (15) найденное управление в первом приближении дает нулевое отклонение от программного режима на конце отрезка управления.

Алгоритм управления и выводы

Пусть $[\alpha, \beta]$ – длительный промежуток времени, на котором осуществляются управления системой (2) и наблюдения за результатами. Разобьем весь этот промежуток на отрезки длины T, где T – так называемая дискрета управления, то есть минимальное время, за которое можно выработать и принять решение об изменении управления:

$$[\alpha, \beta] = [T_0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup \ldots$$

Тогда управление является кусочно-постоянной функцией

$$u(t) \equiv u_i, \quad t \in [T_{i-1}, T_i] .$$

На первом отрезке берем $u_0 = 0, x_0(t) = x_*(t)$ и находим по описанному выше правилу управление u_1. Отслеживаем реакцию системы на это управление $x_1(t), t \in [T_0, T_1]$. Для второго отрезка полагаем

$$u_0 = u_1, \quad x_0(t) = x_1(t - T)$$

и находим управление u_2 как поправку к u_1, и т.д.

Поскольку все приведенные выше формулы основаны на минимизации отклонения от желаемого программного режима в конце каждого промежутка постоянства управления, хотя и с использованием лишь линейных и квадратичных приближений, можно надеяться, что такое управление даст лучшие результаты, чем волюнтаристский выбор управляющих решений или отказ от управления вообще.

Вопрос об устойчивости предложенного алгоритма в общем случае, по-видимому, неразрешим. В частных случаях заведомо управляемых систем в окрестности программного режима качество алгоритма следует проверить на численных моделях. В то же время отметим, что, в отличие от механических систем, в экономике задачи исследования асимптотического поведения управляющих алгоритмов ставить бессмысленно. Речь может идти только об управляемости на конечных, притом относительно небольших интервалах времени.

Заметим также, что если значение параметров, выбранное за нулевое, является бифуркационным (то есть при малых p, отличных от нуля, могут возникать новые сильно притягивающие режимы – асимптотически устойчивые положения равновесия, предельные циклы, многомерные аттракторы), не стоит возлагать больших надежд на управления, выработанные на основе приближений конечного порядка.

1. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
2. *Галиуллин А. С. и др.* Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
3. *Харламов М. П.* Автоматическое управление программной ориентацией твердого тела // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 126-133.