Characterization of the Price of a Zero-Coupon Bond in a General Equilibrium Model

Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

28 March 2014

Characterization of the Price of a Zero-Coupon Bond in a General Equilibrium Model

Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía

IPN

Abstract

This paper develops a general equilibrium model of a stochastic economy, populated by identical, competitive and risk-adverse consumer-investors. The model allows characterizing the price of a zero-coupon bond in the equilibrium. This characterization is carried out by means of the non-central chi-square distribution and Bessel functions.

JEL Classification: G1, G13

Keywords: Financial markets, asset pricing.

Caracterización del Precio de un Bono Cupón Cero en un Modelo de Equilibrio General

Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía

IPN

Resumen

En esta investigación se desarrolla un modelo de equilibrio general en una economía estocástica, poblada por consumidores-inversionistas idénticos, competitivos y adversos al riesgo. El modelo permite caracterizar el precio de un bono cupón cero en equilibrio. Dicha caracterización se lleva a cabo mediante las funciones de Bessel.

JEL Classification: G1, G13

Palabras clave: Mercados financieros, valuación de activos

1. Introduction

En este trabajo se desarrolla una fórmula de valuación de bonos cupón cero cuando la tasa corta sigue un movimiento geométrico Browniano y la función de utilidad tiene grado de aversión al riesgo constante. Debido a que la tasa de interés no es en sí misma un activo negociado, no se puede construir una cobertura que elimine la dependencia del proceso de valuación sobre las preferencias. En el modelo propuesto se utilizan fundamentos microeconómicos de maximización de una función de utilidad y de equilibrio general, o condiciones de arbitraje, en el contexto del modelo CAPM en tiempo continuo a fin de obtener una ecuación diferencial parcial cuya solución es el precio de un bono a descuento. Es importante destacar que el modelo propuesto extiende el modelo de Dothan (1978) en donde las preferencias sobre el consumo están asociadas con la función utilidad logarítmica.

El presente trabajo se encuentra organizado como sigue. En la próxima sección se establece la dinámica de la tasa corta de un bono cupón cero. En la sección 3 se plantea el problema de control óptimo estocástico de maximización de utilidad. En el transcurso de la sección 4 se proporciona la caracterización del precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta sigue un movimiento geométrico Browniano. Dicha caracterización se lleva a cabo mediante las funciones de Bessel[1].

2. Dinámica de la tasa corta de un bono cupón cero

En esta sección se especifica la dinamica de la tasa corta y se determina la ecuación diferencial parcial de segundo orden que determina el precio de un bono cupón cero. Para ello, se utilizan argumentos típicos de arbitraje. Se supone que el precio del bono, B, es

[1] Varias de las propiedades de las funciones de Bessel que se utilizan en esta investigación se encuentran detalladas en Watson (1966).

función de la tasa corta, r_t, y del tiempo, t es decir $B = B(r_t, t)$. Asimismo, se supone que la tasa instantánea de interés, r_t, al tiempo t cambia en forma continua y es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}r_t = \epsilon\ r_t \mathrm{d}t + \sigma r_t \mathrm{d}W_t, \tag{1}$$

donde ϵ y σ son constantes conocidas y $(W_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Observe que la tasa de interés tiene una distribución lognormal y, en particular, r_t es positiva y con probabilidad uno.

Si se aplica el lema de Itô a B, se tiene que

$$\mathrm{d}B = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \epsilon\ r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma r_t \mathrm{d}W_t. \tag{2}$$

Equivalentemente,

$$\mathrm{d}B = \mu_{_B} B \mathrm{d}t + \sigma_{_B} B \mathrm{d}W_t, \tag{3}$$

donde

$$\mu_{_B} = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \epsilon\ r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) \Big/ B. \tag{4}$$

y

$$\sigma_{_B} = \left(\frac{\partial B}{\partial r_t} \right) \frac{\sigma r_t}{B}. \tag{5}$$

3. Planteamiento del problema de control óptimo estocástico de maximización de utilidad

Debido a que la tasa de interés no es en sí misma un activo negociado, no se puede formar una cobertura que elimine la dependencia de la ecuación de valuación sobre las preferencias. Se muestra que esta dependencia puede ser identificada en el contexto de CAPM en tiempo continuo con utilidad logarítmica del consumo.

Suponga que un consumidor-inversionista tiene acceso a dos activos un bono y una acción. Sea a_t la riqueza real del individuo y suponga que la acumulación de a_t sigue una ecuación diferencial estocástica dada por

$$\mathrm{d}a_t = (1-\theta)a_t r_t \mathrm{d}t + \theta a_t \mathrm{d}R_S - c_t \mathrm{d}t \tag{6}$$

donde c_t es consumo, a es la proporción de la riqueza que asigna a la acción y $\mathrm{d}R_S$ es el rendimiento de la acción. Suponga también que el precio de las acciones es guiado por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \alpha \mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}U_t. \tag{7}$$

Evidentemente,

$$\mathrm{d}R_S = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \alpha \mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}U_t. \tag{8}$$

Se supone además que los Brownianos están correlacionados de tal forma que

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}U_t) = \rho \mathrm{d}t.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial estocástica de la riqueza está dada por

$$\mathrm{d}a_t = \left[a_t\left(\theta(\alpha - r_t) + r_t\right) - c_t\right]\mathrm{d}t + a_t\theta\beta\mathrm{d}U_t. \tag{9}$$

Ahora bien, el consumidor-inversionista desea determinar c_t y θ de tal manera que resuelvan el siguiente problema:

$$\begin{aligned} J(a_t,t) = \max_{c_t,\theta} \mathrm{E}&\left[\int_t^T c_t^\gamma e^{-\delta s}\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_0\right]; \\ &\text{sujeto a} \\ &\mathrm{d}a_t = \left[a_t\left(r_t + \theta(\alpha - r_t)\right) - c_t\right]\mathrm{d}t + a_t\theta\beta\mathrm{d}U_t, \\ &\mathrm{d}r_t = \sigma_t r_t \mathrm{d}W_t, \\ &\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_t, \mathrm{d}W_t) = 0. \end{aligned}$$

donde δ es la tasa subjetiva de descuento del individuo. Observe también que se ha tomado, en particular, $\epsilon = 0$. La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman de la programación dinámica estocástica en tiempo continuo está dada por:

$$0 = \max_{\theta, c_t} \left\{ c_t^\gamma e^{\delta s} + \frac{\partial J}{\partial t} + \left[a_t \left(r_t + \theta(\alpha - r_t) \right) - c_t \right] \frac{\partial J}{\partial a_t} + \tfrac{1}{2} a_t^2 \theta^2 \beta^2 \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} + \tfrac{1}{2} \sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 J}{\partial r_t^2} \right\}. \tag{10}$$

Las condiciones de primer orden están dadas por

$$\frac{\partial F}{\partial c_t} - \frac{\partial J}{\partial a_t} = 0, \tag{11}$$

donde $F(c_t, t) = c_t^\gamma e^{-\delta t}$, y

$$a_t(\alpha - r_t) \frac{\partial J}{\partial a_t} + a_t^2 \theta \beta^2 \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} = 0. \tag{12}$$

Observe también que

$$\gamma c_t^{\gamma - 1} e^{-\delta s} = \frac{\partial J}{\partial a_t}.$$

Se propone una solución de la forma

$$J(a_t, t) = A a_t^\gamma. \tag{13}$$

Por lo que

$$c_t^{\gamma - 1} e^{-\delta s} = A \gamma a_t^{\gamma - 1}.$$

En este caso, se tiene que

$$\frac{\partial J}{\partial a_t} = A \gamma a_t^{\gamma - 1}, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} = A \gamma (\gamma - 1) a_t^{\gamma - 2}. \tag{14}$$

Si se sustituyen estas parciales en la ecuación (12), se obtiene

$$\alpha - r_t = \theta \beta^2 (1 - \gamma). \tag{15}$$

De esta manera, si se denota a $\lambda = \theta \beta (1 - \gamma)$, entonces

$$\lambda = \frac{\alpha - r_t}{\beta}. \tag{16}$$

lo cual define el premio al riesgo, es decir λ es constante. Ahora bien, si no existen oportunidades de arbitraje todos los activos dependientes de r_t deben satisfacer una ecuación similar a (16) en donde se tienen que sustituir las correspondientes media y volatilidad de los rendimientos del activo en cuestión. Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{\mu_B - r_t}{\sigma_B}. \tag{17}$$

Si se sustituyen las definiciones de μ_B y σ_B en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - \lambda\sigma r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \tag{18}$$

lo que proporciona la ecuación diferencial parabólica y lineal que carateriza el precio de un bono cupón cero. Este resultado es comparable con el de Garman-Vasicek (1977).

Si se denota $\gamma = \lambda/\sigma$ y $\tau = T - t$ es el tiempo de vida del bono, entonces la ecuación (18) puede reescribirse como:

$$-\frac{\partial B}{\partial \tau} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \sigma^2\gamma r_t \frac{\partial B}{\partial r} - r_t B = 0. \tag{19}$$

con condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} &B(r_t, 0) = 1, \\ &B(0, \tau) = 1, \\ &B(\infty, \tau) = 0, \quad \text{para} \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

4. Caracterización del precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta sigue un movimiento geométrico Browniano

Suponga, en paricular, que $\gamma = 0$. De esta manera, $r_t = \alpha$. Considere los siguientes cambios de variable:

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2}, \quad s = \frac{\sigma^2\tau}{2} \quad \text{y} \quad B(r_t, \tau) = v(x_t, s), \tag{21}$$

entonces

$$r_t = \frac{\sigma^2 x_t}{2} \qquad \text{y} \qquad \tau = \frac{2s}{\sigma^2}.$$

En consecuencia, las derivadas parciales de B con respecto de r_t y τ están dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial r_t} &= \frac{\partial v}{\partial r_t} = \frac{\partial v}{\partial x_t}\frac{\partial x_t}{\partial r_t} = \frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x_t}\\
\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= \frac{\partial}{\partial r_t}\left(\frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right) = \frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2}\frac{\partial x_t}{\partial r_t} = \frac{4}{\sigma^4}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2}.\\
\frac{\partial B}{\partial \tau} &= \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial s}
\end{aligned}$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en la ecuación diferencial (19), se tiene que

$$x_t^2\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - x_t v - \frac{\partial v}{\partial s} = 0. \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
v(x_t, 0) &= 1,\\
v(0, s) &= 1, \qquad (23)\\
v(\infty, s) &= 0,
\end{aligned}$$

Si, además, se supone que $v(x_t, s) = w(x_t, s) + f(x_t)$, entonces la ecuación diferencial (22) se transforma en

$$x^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} + f''(x_t)\right) - x_t(w + f(x_t)) - \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \tag{24}$$

Después de agrupar términos de manera conveniente, se tiene que

$$\left(x_t^2 f''(x_t) - x_t f(x_t)\right) + \left(x_t^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} - x_t w - \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0. \tag{25}$$

Si v es solución de la ecuación (22), entonces f y w son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$x_t f''(x_t) - f(x_t) = 0. \tag{26}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
f(0) =& 1,\\
f(\infty) =& 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Así,

$$x_t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} - x_t w - \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \tag{28}$$

sujeto a:

$$w(x_t, 0) = v(x_t, 0) - f(x_t) = 1 - f(x_t), \tag{29}$$

$$w(0, s) = 0,$$

$$w(\infty, s) = 0.$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable

$$z_t = 2\sqrt{x_t}$$

y

$$f(x_t) = \frac{z_t h(z_t)}{2},$$

entonces la derivada de f se puede expresar como

$$\begin{aligned}
f'(x_t) =& \frac{\mathrm{d}f(z_t)}{\mathrm{d}z_t} \frac{\mathrm{d}z_t}{\mathrm{d}x_t} \\
=& \left[\frac{z_t}{2} h'(z_t) + \frac{1}{2} h(z_t) \right] x_t^{-\frac{1}{2}} \\
=& \left[\frac{z_t}{2} h'(z_t) + \frac{1}{2} h(z_t) \right] \frac{2}{z_t} \\
=& h'(z_t) + \frac{h(z_t)}{z_t}.
\end{aligned}$$

y la segunda derivada de f con respecto de x_t está dada por

$$\begin{aligned}
f''(x_t) &= \frac{\mathrm{d}h'(z_t)}{\mathrm{d}x_t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_t} \left(\frac{h(z_t)}{z_t} \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}h'(z_t)}{\mathrm{d}z_t} \frac{\mathrm{d}z_t}{\mathrm{d}x_t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_t} \left(\frac{h(z_t)}{z_t} \right) \frac{\mathrm{d}z_t}{\mathrm{d}x_t} \\
&= h''(z_t) x_t^{-1/2} + \left[\frac{z_t h'(z_t) - h(z_t)}{z_t^2} \right] x_t^{-1/2} \\
&= \frac{2}{z_t} h''(z_t) + \frac{2}{z_t^3} \left[z_t h'(z_t) - h(z_t) \right] \\
&= \frac{2}{z_t} h''(z_t) + \frac{2}{z_t^2} h'(z_t) - \frac{2}{z_t^3} h(z_t).
\end{aligned}$$

Si se sutituyen f y f'' en la ecuación (25), se tiene

$$\frac{z_t^2}{4}\left[\frac{2}{z_t}h''(z_t)+\frac{2}{z_t^2}h'(z_t)-\frac{2}{z_t^3}h(z_t)\right]-\frac{z_t}{2}h(z_t)=0,$$

Al simplificar la ecuación anterior, se obtiene

$$z_t^2h''(z_t)+z_th'(z_t)-(z_t^2+1)h(z_t)=0. \tag{30}$$

La solución de la ecuación diferencial anterior corresponde a la función modificada de Bessel de orden uno, la cual está dada por

$$K_1(z_t)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u^2}\exp\left\{-\frac{z_t}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right\}\mathrm{d}u.$$

Observe que

$$K_1(\infty)=0. \tag{31}$$

y

$$K_1(0)=\infty. \tag{32}$$

Asimismo,

$$\lim_{z_t\to\infty} z_tK_1(z_t)=0. \tag{33}$$

En efecto, observe que

$$z_tK_1(z_t)=\int_0^\infty \frac{z_t}{2u^2}\exp\left\{-\frac{z_t}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right\}\mathrm{d}u. \tag{34}$$

Escriba el integrando de (34) como

$$g_{z_t}(u)=\frac{z_t}{2u^2e^{vz_t}}, \tag{35}$$

donde

$$v=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right).$$

Si se aplica la regla de L'Hopital a (35) cuando $z_t\to\infty$, se sigue que

$$\lim_{z_t\to\infty}\frac{z_t}{e^{vz_t}}=\lim_{z_t\to\infty}\frac{z_t}{e^{vz_t}}=\lim_{z_t\to\infty}\frac{1}{ve^{vz_t}}=0.$$

Claramente,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(u) = \frac{n}{2u^2 e^{vn}} = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{z_t\to\infty} z_t K_1(z_t) = \lim_{n\to\infty} nK_1(n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} g_n(u)\mathrm{d}u = 0.$$

El límite (33) también se puede verificar a partir de la aproximación

$$z_t^{1/2} e^{z_t} K_1(z_t) = a_0 + a_1 \left(\frac{z_t}{2}\right) + a_2 \left(\frac{z_t}{2}\right)^2 + a_3 \left(\frac{z_t}{2}\right)^2 + \cdots$$

válida para $2 \le z_t < \infty$ y ciertas constantes $a_0, a_1, a_2, ...,$ se sigue que

$$z_t K_1(z_t) = a_0 z_t^{1/2} e^{-z_t} + a_1 z_t^{1/2} e^{-z_t} \left(\frac{z_t}{2}\right) + a_2 z_t^{1/2} e^{-z_t} \left(\frac{z_t}{2}\right)^2 + a_3 z_t^{1/2} e^{z_t} \left(\frac{z_t}{2}\right)^2 + \cdots$$

lo cual produce (33). Asimismo, dado que la aproximación

$$z_t K_1(z_t) = 1 + z_t \ln\left(\frac{z_t}{2}\right) I_1(z_t) + o\left(\frac{z_t}{2}\right) \tag{36}$$

válida para $0 < z_t < 2$, en donde la función $I_1(z_t)$ está dada por

$$I_1(z_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{z_t}{2}\right)^{2k+1}, \tag{37}$$

la cual satisface $\lim_{z_t\to\infty} I_1(z_t) = \infty$ y $\lim_{z_t\to 0} I_1(z_t) = 0$. De esta manera, a partir de (36), se obtiene

$$\lim_{z_t\to 0} z_t K_1(z_t) = 1. \tag{38}$$

En consecuencia, a fin de que se cumplan $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$, la solución de (27) está dada por

$$f(x_t) = z_t K_1(z_t) = 2\sqrt{x_t} K_1\left(2\sqrt{x_t}\right),$$

Considere ahora los siguientes cambios de variables:

$$z_t = 2\sqrt{x_t} \qquad \text{y} \qquad w(x_t, s) = \tfrac{1}{2} z_t h(z_t, s).$$

De esta manera, las derivadas parciales de w están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x_t} &= \frac{\partial w}{\partial z_t}\frac{\partial z_t}{\partial x_t} \\
&= x_t^{-1/2}\frac{\partial w}{\partial z_t} \\
&= x_t^{-1/2}\left(\frac{z_t}{2}\frac{\partial h}{\partial z_t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial z_t}\right) \\
&= \left(\frac{2}{z_t}\right)\left(\frac{z_t}{2}\frac{\partial h}{\partial z_t} + \tfrac{1}{2}h\right) \\
&= \frac{\partial h}{\partial z_t} + \frac{h}{z_t}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

La segunda derivada de $w(x_t, s)$ con respecto de x_t, está dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} &= \frac{\partial h}{\partial z_t \partial x_t} + \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{h}{z_t}\right) \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t^2}x_t^{-1/2} + \left[\frac{z_t(\partial h/\partial z_t)x_t^{-1/2} - hx_t^{-1/2}}{z_t^2}\right] \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t^2}\frac{2}{z_t} + \left[\frac{(\partial h/\partial z_t) - (h/z_t)}{z_t^2}\right] \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t^2}\frac{2}{z_t} + \frac{\partial h}{\partial z_t}\frac{2}{z_t^2} - 2\frac{h}{z_t^3}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Si se sustituyen (39) y (40) en (28), se tiene

$$
\frac{z_t^4}{16}\left[2\frac{h_{zz}}{z_t} + 2\frac{h_z}{z_t^2} - 2\frac{h}{z_t^3}\right] - \frac{z_t^2}{4}\left[\frac{z_t}{2}h\right] - \frac{z_t}{2}h_s = 0
$$

ó

$$
z_t^2 h_{zz} + z_t h_z - h - (z_t^2 + 1)h - 4h_s = 0. \tag{41}
$$

A partir de (29), la condición de frontera que se debe cumplir es

$$
\frac{z_t}{2}h(z_t, 0) = 1 - f(x_t) = 1 - z_t K_1(z_t),
$$

lo cual implica

$$
h(z_t, 0) = 2\left[\frac{1}{z} - K_1(z_t)\right]. \tag{42}
$$

Si se separan variables en $h(z_t, s)$, se tiene que

$$h(z_t, s) = \int_0^\infty \phi(\mu) K_{i\mu}(z_t) e^{-(1+\mu^2)s/4} \mathrm{d}\mu, \tag{43}$$

donde el parámetro de separacion es $-(1+\mu^2)$ y la función $\phi(\mu)$ se determina a partir de la condición de frontera (42), la cual está dada por

$$\phi(\mu) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\mu \mathrm{senh}\,(\pi\mu/2)}{1+\mu^2}\right), \tag{44}$$

donde

$$\mathrm{senh}(\pi\mu/2) = \frac{e^{\pi\mu/2} - e^{-\pi\mu/2}}{2}.$$

Dado que

$$K_{i\mu}(z_t) = \csc\left(\frac{i\mu\pi}{2}\right)\int_0^\infty \mathrm{sen}(z_t\ \mathrm{senh}(\theta))\ \mathrm{senh}(i\mu\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} h(z_t, 0) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu \mathrm{senh}\,(\pi\mu/2)}{1+\mu^2} K_{i\mu}(z_t)\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{sen}(z_t\ \mathrm{senh}(\theta))\int_0^\infty \frac{\mu \mathrm{sen}(\mu\theta)}{1+\mu^2}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^\infty e^{-\theta}\mathrm{sen}(z_t\ \mathrm{senh}(\theta))\mathrm{d}\theta = 2\left(\frac{1}{z_t} - K_1(z_t)\right). \end{aligned} \tag{45}$$

Al comparar (43) con (45)

$$\begin{aligned} h(z_t, s) &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{sen}(z_t\ \mathrm{senh}(\theta))\int_0^\infty \frac{\mu \mathrm{sen}(\mu\theta)}{1+\mu^2} e^{-(1+\mu^2)s/4}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\infty \mathrm{sen}(z_t\ \mathrm{senh}(\theta))\left[e^{-\theta}\mathrm{erfc}\left(\frac{s-2\theta}{2\sqrt{s}}\right) - e^{\theta}\mathrm{erfc}\left(\frac{s+2\theta}{2\sqrt{s}}\right)\right]\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{46}$$

En virtud de que $B(t,T) = w(x_t, s) + f(x_t)$, se sigue que

$$\begin{aligned} B(t,T) = &\sqrt{x_t}\int_0^\infty \mathrm{sen}\left(2\sqrt{x_t}\mathrm{senh}(\theta)\right)\left[e^{-\theta}\mathrm{erfc}\left(\frac{s-2\theta}{2\sqrt{s}}\right) - e^{\theta}\mathrm{erfc}\left(\frac{s+2\theta}{2\sqrt{s}}\right)\right]\mathrm{d}\theta \\ &+ 2\sqrt{x_t}K_1\left(2\sqrt{x_t}\right) \end{aligned}, \tag{47}$$

donde

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2},$$

$$s = \frac{\tau\sigma^2}{2},$$

$$\tau = T - t$$

$$\operatorname{erfc}(a) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-q^2} \mathrm{d}q.$$

De manera similar, la solución para el caso con $\gamma \neq 0$, está dada por

$$\begin{aligned} B(t,T) = & \frac{1}{\pi^2} x_t^p \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(2\sqrt{x_t}\operatorname{senh}(\theta)\right) \int_0^\infty H(\mu)\operatorname{sen}(\mu\theta)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\theta \\ & + \frac{2}{\Gamma(2p)} x_t^p K_{2p}\left(2\sqrt{x_t}\right), \end{aligned} \tag{48}$$

donde

$$H(\mu) = e^{-(4p^2+\mu^2)s/4} \mu \cosh\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \left|\Gamma\left(-p + \frac{\mu i}{2}\right)\right|^2,$$

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2},$$

$$s = \frac{\tau\sigma^2}{2},$$

$$\tau = T - t$$

y

$$p = \frac{1}{2} + \gamma.$$

ó

$$\begin{aligned} B(t,T) = & \frac{1}{\pi^2} x_t^p \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(2\sqrt{x_t}\operatorname{senh}(\theta)\right) \int_0^\infty H(\mu)\operatorname{sen}(\mu\theta)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\theta \\ & + \frac{2}{\Gamma(2p)} x_t^p K_{2p}\left(2\sqrt{x_t}\right), \end{aligned} \tag{49}$$

donde

$$H(\mu) = \exp\left\{-\frac{(4p^2+\mu^2)\sigma^2(T-t)}{8}\right\} \mu \cosh\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \left|\Gamma\left(-p + \frac{\mu i}{2}\right)\right|^2$$

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2}$$

y

$$p = \frac{1}{2} + \gamma.$$

5. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de equilibrio general en una economía estocástica, poblada por consumidores-inversionistas adversos al riesgo. A través de la programación dinámica en tiempo continuo se ha caracterizado el precio de un bono cupón cero mediante las funciones de Bessel. El modelo se puede generalizar al incluir productos derivados sobre el activo subyacente o sobre la tasa de interés: siendo está la agenda futura de investigación.

Bibliografia

Dothan, L. U. (1978). "On the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, pp. 59-69.

Garman, M. B. (1977). A General Theory of Asset Valuation under Difussion State Processes. Working paper No. 50. January. Research Program in Finance. University of California, Berkeley.

Watson, G. N. (1966). A Treatise on the Theory of Bessel functions. Cambridge University Press.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics*. Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

Apéndice

En este apéndice se determina $B(t,T)$ cuando $\epsilon \neq 0$. Observe primero que si

$$K_a(z_t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u^{1+a}} \exp\left\{-\frac{z_t}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\right\} \mathrm{d}u,$$

entonces

$$K_1(z_t) = K_{-1}(z_t).$$

En efecto,

$$K_1(z_t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u^2} \exp\left\{-\frac{z_t}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\right\} \mathrm{d}u.$$

Considere el cambio de variable $v^{-1} = u$, entonces $\mathrm{d}u = -v^{-2}\mathrm{d}v$ y

$$\begin{aligned} K_1(z_t) =& -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} v^2 \exp\left\{-\frac{z_t}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\right\}\frac{\mathrm{d}v}{v^2} \\ =& \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z_t}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\right\}\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Suponga ahora que la tasa corta es conducida por

$$\mathrm{d}r_t = \epsilon\ r_t\mathrm{d}t + \sigma r_t \mathrm{d}W_t,$$

donde $\epsilon \neq 0$ y $\sigma > 0$ son constantes conocidas y $(W_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} B(t,T) =& \frac{1}{\pi^2}x_t^p \int_0^{\infty} \mathrm{sen}\left(2\sqrt{x_t}\mathrm{senh}(\theta)\right)\int_0^{\infty} H(\mu)\mathrm{sen}(\mu\theta)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\theta \\ &+ \frac{2}{\Gamma(2p)}x_t^p K_{2p}\left(2\sqrt{x_t}\right), \end{aligned}$$

donde

$$H(\mu) = \exp\left\{-\frac{(4p^2+\mu^2)\sigma^2(T-t)}{8}\right\}\mu\cosh\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\left|\Gamma\left(-p+\frac{\mu i}{2}\right)\right|^2,$$

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2}$$

y

$$p = \frac{1}{2} - \epsilon.$$