Understanding Swaps Markets: A General Equilibrium Approach

Venegas-Martínez, Francisco

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

28 March 2014

Understanding Swaps Markets:
A General Equilibrium Approach

Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía

IPN

Abstract

This paper describes the different swaps markets and develops several pricing formulas on the assumptions of general equilibrium and absence of credit risk. Most of these contracts can be analyzed as the difference between two coupon-bearing bonds, one with fixed coupon rate and the other with floating coupon rate. Also, this research presents the bootstrapping method useful to estimate the curve of zeros associated with the coupon-bearing bond with fixed coupon rate. Finally, the paper discusses about the relation between swaps and forward contracts of interest rate.

JEL Classification: G1, G13

Keywords: Financial markets, asset pricing.

Entendiendo los mercados de swaps: Un enfoque de equilibrio general

Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía
IPN

Resumen

En esta investigación se describen los distintos mercados de swaps y se desarrollan varias fórmulas de valuación sobre los supuestos de equilibrio general y ausencia de riesgo crédito. La mayoría de estos contratos pueden analizarse como la diferencia entre dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y el otro de tasa cupón flotante. Asimismo, se presenta el método de "bootstrapping" útil para estimar la curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa cupón constante. Por último, se discute la relación entre swaps y contratos forward de tasa de interés.

JEL Classification: G1, G13
Palabras clave: Mercados financieros, valuación de activos

1. Introduction

Un "swap" (o permuta) es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en varias fechas futuras con base en una fórmula predeterminada. Un contrato forward puede ser visto como el ejemplo más simple de un swap, en donde el intercambio de flujos de efectivo se realiza en una sola fecha futura. Recíprocamente, un swap puede verse como la suma de varios contratos forward.

Para fijar ideas suponga que las empresas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ solicitan cada una de ellas un crédito, del mismo monto N, a los bancos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente. La empresa $\mathcal{E}_1$ tiene expectativas a la alza en las tasas de interés, mientras que la empresa $\mathcal{E}_2$ presenta expectativas contrarias. Por lo anterior, $\mathcal{E}_1$ desea que su crédito sea a tasa fija, R_K, mientras que $\mathcal{E}_2$ lo quiere a tasa variable. Por razones de calidad crediticia de estas empresas, $\mathcal{B}_1$ ha decidido, en contra de lo solicitado por $\mathcal{E}_1$, otorgar el crédito sólo si éste es a tasa variable y, al mismo tiempo, $\mathcal{B}_2$ ha decidido otorgar el crédito a $\mathcal{E}_2$ sólo si éste se pacta a tasa fija. Qué mala suerte para ambas empresas ¿Qué pueden hacer $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ ante tal situación? Una posible solución es que las empresas acuerden aceptar los créditos en las condiciones que los bancos han impuesto e intercambiar entre ellas las diferencias por intereses, en las fechas de pago. Así, si en una fecha de pago, la tasa de mercado es superior a R_K, entonces $\mathcal{E}_2$ le paga a $\mathcal{E}_1$ la diferencia de intereses del periodo en cuestión. En caso contrario $\mathcal{E}_1$ le paga a $\mathcal{E}_2$ dicha diferencia. Se acostumbra que una tercera parte, una institución financiera (intermediario financiero), a cambio de una comisión, le de seguimiento al intercambio de flujos. Usualmente, para asegurar el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por parte de las empresas, la institución financiera pide a las empresas garantías (colaterales) que quedan bajo su custodia.

La conclusión más importante del esquema anterior es que una de las empresas ha transformado un crédito de tasa variable en otro de tasa fija y viceversa. Así, una parte recibe a tasa flotante y paga a tasa fija (la posición larga) y la contraparte recibe tasa fija y paga tasa flotante (la posición corta).

El swap más común en el mercado es el de tasa de interés (o IRS por las iniciales en inglés de “Interest Rate Swap”). Este producto derivado de tasa de interés es muy popular en los mercados sobre mostrador. En este tipo de contratos, un agente acuerda pagar los flujos de efectivo que se generan al aplicar una tasa de interés fija a un principal preestablecido, en varias fechas futuras. A cambio, recibe los flujos de efectivo que se generan al aplicar una tasa de interés flotante sobre el mismo principal y en las mismas fechas futuras especificadas. El intercambio del principal, o nominal, no se lleva a cabo, siendo éste sólo una referencia en los términos del contrato. A la tasa de interés fija se le llama tasa swap. El valor de estos contratos al inicio y al vencimiento es cero. Por último, es importante destacar que estos contratos presentan un alto grado de liquidez en el mercado.

El otro tipo de swap, menos común, que se encuentra en el mercado es el de tipo de cambio (o CS por las iniciales en inglés de “Currency Swap”, en ocasiones también son llamados FXS “Foreign Exchange Swaps). En este tipo de contratos las partes intercambian el principal y los intereses en una divisa por el principal y los intereses en otra divisa. Se puede pensar que el contrato transforma un crédito en una divisa en un crédito en otra divisa. Usualmente, los principales se intercambian al final del contrato.

En ausencia de riesgo crédito, un swap se puede ver como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y el otro de tasa cupón flotante. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como “pata fija”y al bono cuponado de tasa cupón flotante como “pata flotante”. Por esta razón es importante hacer una revisión breve sobre la valuación de bonos cuponados y las curvas de ceros (curvas de rendimiento de bonos cupón cero) asociadas a dichos bonos.

2. Bonos cuponados con tasa cupón constante

En esta sección se valúa un bono que paga cupones con tasa cupón constante. Por simplicidad, se supone que sólo se efectúan tres pagos en periodos de igual magnitud.

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga cupones en tres fechas futuras, T_1, T_2 y T_3, igualmente espaciadas. Suponga que el principal, o nominal, es $N > 0$. Si en cada una de estas fechas los cupones se calculan como

$$C_1 = R_K T_1 N, \qquad C_2 = R_K(T_2 - T_1)N \qquad \text{y} \qquad C_3 = R_K(T_3 - T_2)N,$$

donde $R_K > 0$ es una tasa de interés anualizada y constante, entonces el precio del bono, utilizando interés simple para descontar, está dado por

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{C_1}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{C_2}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{C_3 + N}{1+\widetilde{R}_3}, \tag{1}$$

donde

$$\widetilde{R}_i = R(0,T_i)(T_i - 0) = R(0,T_i)T_i, \qquad i = 1,2,3.$$

Si, en virtud de que T_1, T_2 y T_3 están igualmente espaciados, se reescribe $\widetilde{R}_K = R_K \Delta T_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$, y $N = 1$, se sigue que

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K + 1}{1+\widetilde{R}_3}, \tag{2}$$

ó

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \widetilde{R}_K\left(B_1 + B_2 + B_3\right) + B_3, \tag{3}$$

donde $B_i = B(0,T_i) = 1/(1+\widetilde{R}_i),\ i = 1,2,3$. De esta manera, $R(0,T)$ puede verse como una curva de ceros, asociada al bono cuponado de tasa constante, B_i, la cual puede ser una estimación con base en precios de mercado o definirse mediante algún modelo teórico.

3. Bonos cuponados con tasa cupón flotante

En esta sección se valúa un bono cuponado con tasa cupón flotante (también llamado FRN por las iniciales en inglés de "Forward Rate Note").

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga tres cupones en las fechas futuras, T_1, T_2 y T_3. Suponga que el principal es $N > 0$. Si los cupones se calculan como

$$C_1 = \widetilde{R}_1 N, \qquad C_2 = \widetilde{f}_{12} N \qquad \text{y} \qquad C_3 = \widetilde{f}_{23} N,$$

donde

$$\widetilde{f}_{12} = f(0, T_1, T_2)(T_2 - T_1) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{f}_{23} = f(0, T_2, T_3)(T_3 - T_2)$$

son, respectivamente, las tasas forward en $[T_1, T_2]$ y $[T_2, T_3]$ aplicadas en sus correspondientes periodos, entonces el precio del bono satisface

$$B_{\text{flot}}^{(0)} = \frac{\widetilde{R}_1 N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1 + \widetilde{R}_2} + \frac{(\widetilde{f}_{23} + 1) N}{1 + \widetilde{R}_3}, \tag{4}$$

donde $R(0, T_i) = \widetilde{R}_i / T_i, i = 1, 2, 3$. En equilibrio, es decir, en ausencia de oportunidades de arbitraje, las tasas forward implícitas se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$(1 + \widetilde{R}_1)(1 + \widetilde{f}_{12}) = 1 + \widetilde{R}_2$$

y

$$(1 + \widetilde{R}_2)(1 + \widetilde{f}_{23}) = 1 + \widetilde{R}_3.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{f}_{12} = \frac{1 + \widetilde{R}_2}{1 + \widetilde{R}_1} - 1 \tag{5}$$

y

$$1 + \widetilde{f}_{23} = \frac{1 + \widetilde{R}_3}{1 + \widetilde{R}_2}. \tag{6}$$

Si se sustituyen (5) y (6) en (4), se sigue que

$$\begin{aligned} B_{\text{flot}}^{(0)} &= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_2}\left(\frac{1+\widetilde{R}_2}{1+\widetilde{R}_1} - 1\right) + \frac{N}{1+\widetilde{R}_3}\left(\frac{1+\widetilde{R}_3}{1+\widetilde{R}_2}\right) \\ &= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \left(\frac{N}{1+\widetilde{R}_1} - \frac{N}{1+\widetilde{R}_2}\right) + \frac{N}{1+\widetilde{R}_2} \\ &= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_1} \\ &= N. \end{aligned} \tag{7}$$

Es decir, un bono cuponado con tasa cupón flotante se negocia a la par. Observe que aunque el ejercicio anterior toma en cuenta tres periodos, el mismo resultado se obtiene para cualquier número de periodos. Evidentemente, si se valúa el bono inmediatamente después del primer pago y se conoce la curva de rendimiento $R(T_1, T)$, entonces el precio del bono es $B_{\text{flot}}^{(1)} = N$. Observe además que si se escribe $B_i = B(0, T_i) = 1/(1+\widetilde{R}_i),\ i = 1, 2, 3,$ y $N = 1$, entonces, a partir de (7), se tiene que

$$1 = \widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3 + B_3. \tag{8}$$

Así, $R(0, T)$ puede verse como una curva de ceros, B_i, asociada al bono cuponado de tasa flotante. Este resultado, será utilizado más adelante.

4. Estimación de una curva de rendimiento con base en la tasa forward

A continuación, bajo condiciones de equilibrio, se estima la curva de rendimiento de un bono cuponado, con tasa cupón flotante, cuando se conocen las tasas forward futuras.

Si se conocen $\widetilde{R}_1$ y $\widetilde{f}_{12}$, entonces se puede determinar la tasa $\widetilde{R}_2/T_2 = R(0, T_2)$ de plazo, T_2, asociada a un bono cupón cero mediante

$$\widetilde{f}_{12} = \frac{1+\widetilde{R}_2}{1+\widetilde{R}_1} - 1 \qquad \text{ó} \qquad \widetilde{R}_2 = (\widetilde{f}_{12}+1)(1+\widetilde{R}_1) - 1.$$

Si se conoce $\widetilde{f}_{23}$ y no hay oportunidades de arbitraje, entonces $\widetilde{R}_3$ puede estimarse como

$$\widetilde{f}_{23} = \frac{1+\widetilde{R}_3}{1+\widetilde{R}_2} - 1 \qquad \text{ó} \qquad \widetilde{R}_3 = (\widetilde{f}_{23}+1)(1+\widetilde{R}_2) - 1.$$

De esta manera, se puede proceder inductivamente.

5. Estimación de una curva de rendimiento con el método de alambrada

En esta sección se presenta el método de alambrada para estimar una curva de rendimiento. Suponga que se conocen $\widetilde{R}_1$ y $\widetilde{R}_3$ y se desea estimar la curva de rendimiento en tiempo intermedio, $\widetilde{R}_2$, entonces se puede calcular la tasa forward

$$\widetilde{f}_{13} = \frac{1+\widetilde{R}_3}{1+\widetilde{R}_1} - 1.$$

A continuación, se obtiene $\widetilde{f}_{12}$ con base en $\widetilde{f}_{13}$, de tal forma que

$$1+\widetilde{f}_{12} = \left(1+\widetilde{f}_{13}\right)^{(T_2-T_1)/(T_3-T_1)}. \tag{9}$$

Por último, a partir de la relación

$$(1+\widetilde{R}_1)(1+\widetilde{f}_{12}) = 1+\widetilde{R}_2,$$

lo cual implica que

$$\widetilde{R}_2 = (1+\widetilde{R}_1)(1+\widetilde{f}_{12}) - 1.$$

Lamentablemente, en esta ecuación son posibles las oportunidades de arbitraje.

6. Método Bootstrapping para estimar la curva de ceros asociada a un bono cuponado de tasa constante

En la sección anterior se estimó una curva de rendimiento con base en valores conocidos de la tasa forward. Sin embargo, no siempre se conocen las tasas forward. En este caso, el método Bootstrapping proporciona una alternativa para estimar la curva de rendimiento de un bono cupón cero asociada al bono cuponado. De acuerdo con (2), si $N=1$, se sigue que

$$B^{(0)}_{\text{fija}} = \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K+1}{1+\widetilde{R}_3}. \tag{10}$$

En lo que sigue, se supone que $B_{\text{fija}}^{(0)}$ y $\widetilde{R}_1$ son conocidos ¿Cómo se pueden estimar $\widetilde{R}_2$ y $\widetilde{R}_3$? Justamente, el método Bootstrapping resuelve este problema. En primer lugar recuerde que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, (x_0, y_0) y (x_1, y_1), está dada por la expresión $y - y_0 = (y_1 - y_0/x_1 - x_0)(x - x_0)$. Con base en esta ecuación, se puede escribir la siguiente interpolación lineal de $\widetilde{R}_2$ en términos de $\widetilde{R}_3$ y $\widetilde{R}_1$,

$$\widetilde{R}_2 - \widetilde{R}_1 = \frac{\widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1).$$

En este ejemplo, se ha elegido llevar a cabo interpolación lineal, pero cualquier otro método de aproximación que exprese $\widetilde{R}_2$ en términos de $\widetilde{R}_3$ y $\widetilde{R}_1$ podría ser utilizado, por ejemplo, el método de alambrada. Evidentemente, la interpolación lineal no elimina oportunidades de arbitraje. Si se despeja $\widetilde{R}_2$ de la expresión anterior, se obtiene que

$$\widetilde{R}_2 = \widetilde{R}_1 + \frac{\widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1). \tag{11}$$

Después de sustituir (11) en (10), se tiene

$$0 = -B_{\text{fija}}^{(0)} + \frac{\widetilde{R}_K}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K}{1 + \widetilde{R}_1 + \frac{\widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1)} + \frac{\widetilde{R}_K + 1}{1 + \widetilde{R}_3}. \tag{12}$$

Dado que $\widetilde{R}_1 = R_1^*$ es conocido, la ecuación anterior puede verse como $f(\widetilde{R}_3) = 0$, al resolverse se obtiene un valor R_3^*. El método de Newton-Raphson es utilizado con mucha frecuencia para encontrar dicha solución. Posteriormente, la solución R_3^* se sustituye en (11) para obtener el valor

$$R_2^* = \widetilde{R}_1 + \frac{R_3^* - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1). \tag{13}$$

De esta manera, R_1^*/T_1, R_2^*/T_2 y R_3^*/T_3 constituyen puntos sobre una curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa constante.

A continuación se presenta otro ejemplo de ilustración del método de Boostrapping. De hecho, el ejemplo que a continuación se desarrolla extiende el ejemplo anterior a seis periodos. Considere ahora un bono cuponado con tasa cupón constante, R_K, que paga cupones en seis fechas futuras T_i, $i = 1, 2, ..., 6$. Si el nominal es 1, entonces, de (2),

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_3} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_4} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_5} + \frac{\widetilde{R}_K+1}{1+\widetilde{R}_6}. \tag{14}$$

Si se utiliza la información obtenida en el ejemplo anterior para las primeras tres fechas de pago de cupones R_1^*, R_2^* y R_3^*, entonces se emplean las siguientes interpolacionales lineales para $\widetilde{R}_4$ y $\widetilde{R}_5$, en términos de R_3^* y $\widetilde{R}_6$,

$$\widetilde{R}_4 - R_3^* = \frac{\widetilde{R}_6 - R_3^*}{T_6 - T_3}(T_4 - T_3) \tag{15}$$

y

$$\widetilde{R}_5 - R_3^* = \frac{\widetilde{R}_6 - R_3^*}{T_6 - T_3}(T_5 - T_3). \tag{16}$$

Evidentemente, la elección de R_3^* en (15) y (16) se debe a su cercanía con $\widetilde{R}_4$ y $\widetilde{R}_5$. Si se despejan $\widetilde{R}_4$ y $\widetilde{R}_5$ de las ecuaciones anteriores y se sustituyen sus valores en la ecuación (14), la ecuación resultante queda en términos de R_1^*, R_2^* y R_3^*, y puede reescribirse como $g(\widetilde{R}_6) = 0$. La solución de esta ecuación se denota por R_6^*. Posteriormente, se utilizan las ecuaciones en (11) para obtener R_4 y R_5. Si el problema se extiende a 9 fechas de pago de cupones, entonces se utiliza la información obtenida en la etapa anterior: R_1^*, R_2^*, R_3^*, R_4^*, R_5^* y R_6^*. Después, se llevan a cabo interpolaciones lineales de $\widetilde{R}_7$ y $\widetilde{R}_8$ en términos de R_6^* y $\widetilde{R}_9$. Por supuesto, resolver de 3 en 3 periodos no es una regla. Para pasar de 3 a 4 periodos, se requiere un simple despeje. De 3 a 5 periodos, se utiliza

$$\widetilde{R}_4 - R_3^* = \frac{\widetilde{R}_5 - R_3^*}{T_5 - T_3}(T_4 - T_3) \tag{17}$$

y se obtiene una ecuación de la forma $f(\widetilde{R}_5) = 0$. La solución de esta ecuación se sustituye (17) para estimar $\widetilde{R}_4$.

7. Swaps de tasas de interés

Las tasas de interés flotante que se emplean en los contratos swaps son tasas de fondeo entre instituciones financieras (*v.g.* tasas interbancarias), por ejemplo, TIIE28, Libor91, u otras de la misma naturaleza. Estas tasas de referencia representan el costo de fondeo de las instituciones financieras. En términos generales, la duración de los contratos tipo swap oscila entre 2 y 20 años, siendo los de 5 y 9 años los más populares en el mercado. La frecuencia de los pagos puede ser mensual, trimestral, semestral o anual, y usualmente es un múltiplo de la tasa de fondeo de referencia.

En ausencia de riesgo crédito, un swap de tasa de interés se puede ver como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y otro de tasa cupón flotante, como ya se había mencionado antes. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como "pata fija"y al bono cuponado de tasa cupón flotante como "pata flotante". En este sentido, las curvas de ceros de los bonos, ya sea con tasa cupón fija o flotante, pueden pensarse como "equivalentes" a las "estructuras de plazo" de la tasa de fondeo de referencia.

El valor presente de las diferencias en intereses en un swap de tasa de interés está dado por

$$
\begin{aligned}
V_0 =& \frac{(\widetilde{R}_1 - \widetilde{R}_K)N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{(\widetilde{f}_{12} - \widetilde{R}_K)N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{(\widetilde{f}_{23} - \widetilde{R}_K)N}{1+\widetilde{R}_3} \\
=& \left(\frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{f}_{23} N}{1+\widetilde{R}_3} \right) - \left(\frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_3} \right) \\
=& \quad \left(\frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{f}_{23} N}{1+\widetilde{R}_3} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_3} \right) \\
&- \left(\frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_3} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_3} \right) \\
=& B^{(0)}_{\text{flot}} - B^{(0)}_{\text{fija}}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Observe que para escribir el valor presente de las diferencias en intereses en un swap como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa flotante y otro de tasa constante, se ha sumado y restado, en (18), la cantidad $N/(1+\widetilde{R}_3)$. Asimismo, si $V_0 = 0$, entonces

$$
0 = \left(\widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3 \right) - \widetilde{R}_K \left(B_1 + B_2 + B_3 \right), \tag{19}
$$

donde $B_i = B(0,T_i) = 1/(1+\widetilde{R}_i),\ i=1,\ 2,\ 3$. De esta manera, la tasa swap de equilibrio está dada por

$$\widetilde{R}_K = \frac{\widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3}{B_1+B_2+B_3} = \frac{1-B_3}{B_1+B_2+B_3}, \tag{20}$$

8. Valuación de un swap de tasa de interés

En el momento en que se pacta un swap, su precio es cero. Inmediatamente después, su precio ya no es cero, a menos que sea por pura casualidad. Observe que con respecto de la pata flotante, inmediatamente después de cualquier pago, el precio del bono con tasa cupón flotante es N. Por ejemplo, inmediatamente después del primer pago $B_{\text{flot}}^{(t)} = N$, $t = T_1 + \mathrm{d}T_1$ con $\mathrm{d}T_1 > 0$. Así,

$$V_t = N - \widetilde{R}_K N \left(\frac{1}{1+\widehat{R}_1} + \frac{1}{1+\widehat{R}_2} \right) - \frac{N}{1+\widehat{R}_2},$$

donde $\widehat{R}_i = R(t,T_{i+1})(T_{i+1}-t), \quad i=1,2$. Ahora bien, inmediatamente antes de T_1 se espera el pago del primer cupón, por esta razón la pata flotante vale $N+\widetilde{R}_1 N$. Para valuar el swap, es necesario traer $N+\widetilde{R}_1 N$ a valor presente y deducir los pagos a tasa fija, es decir,

$$V_t = (N+\widetilde{R}_1 N)\left(\frac{1}{1+\overline{R}_1}\right) - \widetilde{R}_K N \left(\frac{1}{1+\overline{R}_1} + \frac{1}{1+\overline{R}_2} + \frac{1}{1+\overline{R}_3} \right) - \frac{N}{1+\overline{R}_3},$$

donde $t = T_1 - \mathrm{d}T_1$ con $\mathrm{d}T_1 > 0$, y $\overline{R}_i = R(t,T_i)(T_i - t)$, $i=1,2,3$.

9. Método Bootstrapping para estimar los precios de un bono cupón cero asociado a la tasa swap

Si se conoce R_K para swaps con intercambios de flujos de efectivo a diferentes plazos, para lo cual es conveniente escribir $R_K(0,T)$, entonces, a partir de la ecuación (20), se pueden calcular los precios de los bonos cupón cero. En efecto, si se escribe

$$R_K(0,T_1)T_1 = \frac{1-B_1}{B_1},$$

se obtiene que

$$B_1^* = \frac{1}{1 + R_K(0, T_1)T_1}.$$

De la misma manera,

$$B_2^* = \frac{1 - B_1^*}{1 + R_K(0, T_2)T_2}.$$

En general, se tiene que

$$B_i^* = \frac{1 - B_1^* - B_2^* - \cdots - B_{i-1}^*}{1 + R_K(0, T_i)T_i} = \frac{1 - \sum_{j=1}^{i-1} B_i^*}{1 + R_K(0, T_i)T_i}.$$

10. Método Bootstrapping para estimar la curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa cupón constante en un swap

A continuación se presenta el método Bootstrapping para estimar la curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa cupón constante en un swap. En este caso, el precio del bono cuponado de tasa constante es la unidad. Dicha curva de ceros puede pensarse como "equivalente"a la "estructura de plazo"de la tasa de fondeo de referencia del swap. De acuerdo con la ecuación (18), se sigue que

$$\begin{aligned} V_0 = \quad & \left(\frac{\widetilde{R}_1 N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1 + \widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{f}_{23} N}{1 + \widetilde{R}_3} + \frac{N}{1 + \widetilde{R}_3} \right) \\ & - \left(\frac{\widetilde{R}_K N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1 + \widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1 + \widetilde{R}_3} + \frac{N}{1 + \widetilde{R}_3} \right). \end{aligned}$$

Dado que el primer sumando es N, se sigue que

$$1 = \frac{\widetilde{R}_K}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K}{1 + \widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K + 1}{1 + \widetilde{R}_3}.$$

De esta manera, el método que se introdujo en la sección 13.6 y que partía de (10), ahora parte de la ecuación anterior. En tal caso, lo único que se requiere es que sean conocidos $\widetilde{R}_1$ y $\widetilde{R}_K$.

11. Contratos forward de tasa de interés

En esta sección se revisa el concepto de contrato forward de tasa de interés (también llamado FRA por las iniciales en inglés de "Forward Rate Agreement"). Un contrato forward de tasa de interés es un acuerdo en el que una de las partes pagará, a la contraparte, la cantidad que se genere al aplicar una tasa de interés fija a un principal predeterminado en dos fechas futuras.

Suponga que el tiempo en que se establece el contrato forward de tasa de interés es $t = 0$, la tasa fija acordada es R_K, los tiempos futuros entre los que se aplica dicha tasa son T_1 y T_2 y el principal es N. Al tiempo T_2 una de las partes tiene que pagar $R_K(T_2 - T_1)N$. Si la tasa forward de mercado es $f(0, T_1, T_2)$, entonces el valor de dicho contrato forward, en $t = 0$, se calcula mediante

$$\mathcal{V}_0^{(12)} = \frac{(f(0, T_1, T_2) - R_K)(T_1 - T_2)N}{1 + R(0, T_2)(T_2 - t)}$$

ó, en la notación más breve,

$$\mathcal{V}_0^{(12)} = \frac{(\widetilde{f}_{12} - \widetilde{R}_K)N}{1 + \widetilde{R}_2}.$$

De esta manera, de acuerdo con (17), un contrato swap se puede escribir como

$$\begin{aligned} V_0 =& \frac{(\widetilde{R}_1 - \widetilde{R}_K)N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{(\widetilde{f}_{12} - \widetilde{R}_K)N}{1 + \widetilde{R}_2} + \frac{(\widetilde{f}_{23} - \widetilde{R}_K)N}{1 + \widetilde{R}_3} \\ =& \mathcal{V}_0^{(01)} + \mathcal{V}_0^{(12)} + \mathcal{V}_0^{(23)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Es decir, un contrato swap de tasa de interés es la suma de contratos forward de tasa de interés.

12. Swaps de tipo de cambio

Otro tipo de swap común en el mercado es el swap de tipo de cambio. En este tipo de contratos las partes intercambian el principal y los intereses en una divisa por el principal y los intereses en otra divisa. Usualmente, los principales se intercambian al final del contrato. En este caso las dos tasas son flotantes y, por simplicidad serán etiquetadas como doméstica y extranjera.

El precio de un swap de tipo de cambio con dos patas flotantes, en moneda doméstica está dado por

$$v_0 = B^{(0)}_{d,\mathrm{flot}} - S_0 B^{(0)}_{f,\mathrm{flot}},$$

donde $B^{(0)}_{d,\mathrm{flot}}$ es un bono cuponado con tasa cupón flotante en moneda doméstica, $B^{(0)}_{f,\mathrm{flot}}$ es un bono cuponado con tasa cupón flotante en moneda extranjera, S_0 es el tipo de cambio de contado, los nominales se calculan de tal manera que $N_d = S_T N_f$ donde S_T es una estimación del tipo de cambio, en términos de las tasa de interés doméstica y extranjera, en la fecha de vencimiento del contrato. Por supuesto, swaps con dos patas fijas o con una pata fija y la otra flotante se valúan de manera similar. Por último, es importante mencionar que en ocasiones también hay intercambio de principales al inicio del contrato.

13. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de equilibrio general para valuar diferentes tipos de contratos swaps en ausencia de riesgo crédito. Los contratos swaps se examinaron como la diferencia entre dos bonos cuponados, uno con tasa cupón fija y el otro con tasa cupón flotante, lo cual fue muy útil en el proceso de valuación. Se presentó el método "bootstrapping" para estimar curvas de ceros y se discutió sobre la relación entre swaps y contratos forward. Por último, se presentó el método de alambrada para estimar una curva de rendimiento, en el cual son posibles las oportunidades de arbitraje.

Bibliografia

Litzenberger, R. H. (1992). "Swaps: Plain and Fanciful". *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 3, pp. 831-850.

Turnbull, S. M. (1987). "Swaps: A Zero Sum Game". *Financial Management*, Vol. 16, No. 1, pp. 15-21.

Wall, L. D. and J. J. Pringle (1989). "Alternative Explanations of Interest Rate Swaps: A Theoretical and Empirical Analysis". *Financial Management*, Vol. 18, No. 2, pp. 59-73.