# Operational Risk: A Bayesian Approach

Venegas-Martínez, Francisco

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

28 March 2014

# Operational Risk: A Bayesian Approach

Francisco Venegas-Martínez
*Escuela Superior de Economía*
*Instituto Politécnico Nacional*

**Abstract**

This paper focuses on the analysis of operational risk events, that is, events that lead to economic losses due to failures in the administrative systems and in the inner procedures, as well as human errors, on purpose or not. The different kinds of operational risk events can be studied in terms of their frequency (the number of events per unit of time) and their severity (the impact on monetary terms). This research presents, under certain assumptions, a set of probability distributions on the frequency and severity of such losses. The estimation of the parameters of the distributions is carried out through the Bayes theorem where the *prior* density of the parameter of interest is combined with the likelihood function to obtain a *posterior* density of such a parameter. Subsequently, the *posterior* density is used to make inferences about the parameter of concern.

**Clasificación JEL** : G2, D8

**Keywords**: Financial institutions, operational risk.

# Riesgo operacional: Un enfoque Bayesiano

Francisco Venegas-Martínez

*Escuela Superior de Economía*

*Instituto Politécnico Nacional*

**Resumen**

Este trabajo de investigación se concentra en el análisis de eventos de riesgo operacional, es decir, eventos que conducen a pérdidas económicas por fallas en los sistemas administrativos y en los procedimientos internos, así como por errores humanos, intencionales o no. Los diferentes tipos de eventos de riesgo operacional pueden ser estudiados en términos de su frecuencia (el número de eventos por unidad de tiempo) y su severidad (el impacto en términos monetarios). Este trabajo presenta, bajo ciertos supuestos, un conjunto de distribuciones de probabilidad sobre la frecuencia y severidad de dichas pérdidas. La estimación de los parámetros de dichas distribuciones se lleva a cabo mediante el teorema de Bayes en donde se combinan la densidad *a priori* del parámetro de interés con la función de verosimilitud para obtener una densidad *a posteriori* sobre dicho parámetro. Subsecuentemente, la distribución *a posteriori* se utiliza para hacer inferencias sobre el parámetro en cuestión.

**JEL Classification**: G2, D8.

**Palabras clave**: Instituciones financieras, riesgo operativo

## 1. Introdución

El riesgo operativo, también llamado riesgo operacional, se puede definir como el riesgo de que se presenten pérdidas por fallas en los sistemas administrativos y procedimientos internos, así como por errores humanos, intencionales o no. Ejemplos de eventos de riesgo operativo son: fallas en sistemas y equipos de cómputo y de telecomunicaciones; errores de captura, ejecución y mantenimiento de transacciones; fallas en sistemas de seguridad; pérdida parcial o total de bases de datos sobre operaciones con clientes; fraudes internos (*v.g.* créditos mal documentados); fraudes externos (*v.g.* pagos por cheques falsos); robo; daños a los activos fijos (por vandalismo, terrorismo, desastres naturales, etc.); reembolsos no programados a clientes y pagos de penalización; restricciones legales que pudieran fomentar el incumplimiento de las obligaciones de clientes (riesgo legal); documentación incompleta de clientes; restricciones impuestas por las autoridades financieras para participar en ciertos mercados o segmentos de mercado, etc. Este trabajo de investigación se concentra, fundamentalmente, en el análisis de la frecuencia y severidad de eventos de riesgo operativo (véase tambien Cruz (2002)). Los diferentes eventos de riesgo operacional pueden ser estudiados en términos de su frecuencia (el número de eventos que producen pérdidas en un cierto intervalo de tiempo) y su severidad (el impacto de un evento en términos monetarios).

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el transcurso de la siguiente sección se estudian las distribuciones de frecuencia de eventos de riesgo operativo. En la sección 3 se introducen algunas distribuciones de severidad de la pérdida de eventos de riesgo operativo. A través de la sección 4 se analiza el caso de distribuciones de severidad extrema. En la sección 5, bajo el enfoque Bayesiano, se modela la severidad de la pérdida. En las secciones 6-10 se modela la frecuencia de las pérdidas en el marco de la estadística Bayesiana. Por último, en la sección 11 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

## 2. Distribuciones de frecuencia de eventos de riesgo operativo

En el modelado de riesgos operativos existe un número importante de distribuciones de frecuencia de las fallas en sistemas y procedimientos. Una distribución de frecuencias, de uso muy común, es la distribución binomial $b(n,p)$, donde $n$ representa el número total de eventos que son susceptibles a una pérdida de tipo operacional durante un periodo de tiempo preestablecido, usualmente un año, y $p$ es la probabilidad de que se presente un evento de pérdida. Si $X$ es la variable aleatoria que representa el número de eventos de riesgo en un año y se supone que los eventos son independientes, entonces la probabilidad de que se presente un número $x$ de eventos de riesgo operativo está dada por:

$$\mathbb{P}\{X=x\} = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que en esta distribución se requiere especificar, de antemano, el número de eventos, $n$, en un año, lo que representa una limitación del modelo. Otra desventaja del modelo anterior es que la probabilidad de que se presente un evento de pérdida se mantiene constante e igual a $p$. No obstante, si $p$ es pequeña y $n$ es grande, la distribución $b(n,p)$ se puede aproximar, con base en la ley de los grandes números, a una distribución Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$. Así, si $X$ es la variable aleatoria que representa el número de eventos de riesgo en un año, se tiene que:

$$\mathbb{P}\{X=x\} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta distribución contempla un solo parámetro $\lambda$, llamado parámetro de intensidad, el cual determina el número medio de eventos de pérdida por unidad de tiempo. Cuando el riesgo operacional es de baja frecuencia, el número de eventos de pérdida puede ser modelado mediante una distribución Poisson, en cuyo caso el parámetro $n$ desaparece. Existen, por supuesto, muchas otras formas funcionales para las distribuciones de frecuencia del riesgo operacional que se pueden utilizar bajo ciertas condiciones; véanse, por ejemplo, Venegas-Martínez (2004), (2005) y (2006).

## 3. Distribuciones de severidad de la pérdida de eventos de riesgo operativo

En la literatura de riesgos operativos una distribución, muy popular, sobre la severidad del monto de la pérdida es la distribución lognormal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x > 0,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son los parámetros de la distribución. En este caso, se puede verificar que si $X$ es una variable aleatoria lognormal con la densidad anteriormente establecida, entonces

$$\mathrm{E}[X] = \exp\left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Var}[X] = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Algunas distribuciones de severidad presentan leptocurtosis y un sesgo considerable, en cuyo caso se utiliza la distribución Gamma de parámetros $\alpha$ y $\beta$, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Esta distribución de severidad tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, \quad x > 0,$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma. En este caso, también es común utilizar la función de densidad hiperbólica dada por

$$f(x) = \frac{\exp\left\{-\alpha\sqrt{\beta^2 + x^2}\right\}}{2\beta K(\alpha\beta)}, \quad x > 0,$$

donde $K(\cdot)$ representa la función de Bessel.

## 4. Distribuciones de severidad extrema

Los eventos de riesgo operativo de severidad extrema no son eventos que se presenten todos los días, más bien se presentan ocasionalmente. No todos los días los sistemas presentan fallas ni todos los días se presentan errores humanos de severidad considerable. En caso de que la severidad sea de magnitud excepcional, se utilizan distribuciones de valores extremos. Una distribución de severidad extrema para riesgos operativos de uso muy común es la distribución de Fréchet con parámetros $\alpha > 0$, $\nu > 0$ y $\kappa > 0$. En este caso, la función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \nu, \\ \exp\left\{ -\left(\frac{x-\nu}{\kappa}\right)^{-\alpha} \right\}, & x \geq \nu. \end{cases} \tag{1}$$

La función de densidad correspondiente satisface:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\kappa} F(x) \left(\frac{x-\nu}{\kappa}\right)^{-(1+\alpha)}, \qquad x \geq \nu. \tag{2}$$

Se puede de mostrar fácilmente que si $X$ es una variable aleatoria Fréchet y $\alpha > 2$, entonces

$$\mathrm{E}[X] = \nu + \kappa\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

y

$$\mathrm{Var}[X] = \kappa^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma. Existen otras distribuciones de valores extremos de uso frecuente como las del tipo Gumbel.

## 5. Estimación Bayesiana de la severidad de la pérdida

La estimación Bayesiana considera fundamentalmente dos fuentes de información, la función de densidad *a priori* del parámetro de interés, $\pi(\theta)$, la cual refleja información inicial o conocimiento previo sobre dicho parámetro y la función de verosimilitud que proviene de un modelo muestral que considera al parámetro en cuestión, $f(x|\theta)$. El teorema de Bayes combina estas dos fuentes de información para obtener una densidad *a posteriori* sobre el parámetro dada por

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta). \tag{3}$$

La distribución *a posteriori* $f(\theta|x)$ se utiliza para hacer inferencias sobre $\theta$ (véase Zellner (1971)).

## 6. Caso binomial con densidad *a priori* uniforme

Si se supone que la distribución de frecuencias de las pérdidas sigue una distribución binomial, $b(n,p)$, la frecuencia esperada está dada por $np$, siendo $n$ el número de eventos que son susceptibles a pérdidas de tipo operacional y, por supuesto, $p$ es la probabilidad de que el evento de pérdida se presente. A continuación se discute cómo se pueden hacer inferencias sobre $p$ utilizando el enfoque Bayesiano. El estimador que se obtiene, $\widehat{p}$, se utiliza para estimar la frecuencia esperada $n\widehat{p}$. Suponga que la distribución *a priori* de $p$ es uniforme, *i.e.,* $p \sim \mathcal{U}[0,1]$. Observe primero que

$$f(x,p) = f(x|p)\pi(p)$$

y del mismo modo

$$f(x,p) = f(p|x)f(x),$$

entonces

$$f(p|x)f(x) = f(x,p) = f(x|p)\pi(p).$$

Por lo tanto, se sigue que

$$f(p|x) = \frac{f(x|p)\pi(p)}{f(x)}.$$

En este caso, se tiene

$$f(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

$$\pi(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$f(x) = \int_0^1 f(x,p)\mathrm{d}p = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p.$$

Observe que $f(x)$ es la constante de normalización que asegura que la densidad *a posteriori*, $f(p|x)$, sea efectivamente una densidad. De esta manera,

$$f(x) = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p = \binom{n}{x}\int_0^1 p^x(1-p)^{n-x}\mathrm{d}p$$
$$= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(x+1+n-x+1)} = \frac{1}{n+1},$$

ya que

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\mathrm{d}p.$$

Una vez determinada la constante de normalización, se calcula la distribución *a posteriori* con el teorema de Bayes, de tal forma que

$$f(p|x) = \begin{cases} (n+1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } \ p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con la distribución *a posteriori* se estima[1] el valor de $p$ a través de $\mathrm{E}[p|x]$. Es decir,

$$\begin{aligned} \widehat{p} =& \mathrm{E}[p|x] = \int_0^1 pf(p|x)\mathrm{d}p \\ =&(n+1)\binom{n}{x}\int_0^1 p^{x+1}(1-p)^{n-x}\mathrm{d}p \\ =&(n+1)\binom{n}{x}\frac{\Gamma(x+2)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+3)} \\ =&\frac{(n+1)n!(x+1)!(n-x)!}{x!(n-x)!(n+2)!} \\ =&\frac{x+1}{n+2}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$. Así pues, la frecuencia esperada se estima mediante $n\widehat{p}$. Una forma alternativa de obtener el resultado anterior consiste en observar que si $f(x)$ es una constante de normalización, entonces se puede escribir

$$f(p|x) \propto f(x|p)\pi(p).$$

[1] Si se determina $\widehat{p}$ de tal manera que se minimice $\int(p-\widehat{p})^2 f(p|x)dp$, entonces $\widehat{p}=E[p|x]$.

En consecuencia, se puede omitir todo lo que no dependa de $p$ y después incorporarlo a través de la constante de normalización, esto es,

$$f(p|x) \propto \begin{cases} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La única posibilidad para que $f(p|x)$ sea una densidad es que

$$f(p|x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

## 7. Caso binomial con $m$ observaciones y densidad *a priori* uniforme

A continuación se extiende el resultado de la sección anterior a una muestra de observaciones. Considere ahora una muestra aleatoria (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) $X_1, X_2, ..., X_m$ de una distribución $X \sim b(n,p)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|p) = f(x_1, x_2, ..., x_m|p) \propto p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})},$$

donde $\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i/m$. Si

$$\pi(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

entonces

$$f(p|\mathbf{x}) \propto \begin{cases} p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f(p|\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(mn+2)}{\Gamma(m\bar{x}+1)\Gamma(m(n-\bar{x})+1)} p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Recuerde que una variable aleatoria tiene distribución Beta con parámetros $\alpha$ y $\beta$, $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$, si su densidad es de la forma

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \qquad y, \; \alpha, \; \beta > 0.$$

La media de esta distribución está dada por

$$\mathrm{E}[y] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

En consecuencia,

$$\widehat{p} = \mathrm{E}[p|\mathbf{x}] = \frac{m\bar{x} + 1}{mn + 2}.$$

## 8. Caso binomial con densidad *a priori* Beta

En esta sección se examina otra posibilidad para la distribución *a priori* de $p$. Considere una variable aleatoria $X \sim b(n,p)$ y suponga que la distribución *a priori* de $p$ es Beta, $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$, *i.e.*,

$$\pi(p) = B(\alpha, \beta)^{-1} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}.$$

La media de esta distribución está dada por

$$\mathrm{E}[p] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Ahora bien, por definición

$$f(x) = \int_0^1 f(x,p)\mathrm{d}p = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p.$$

Observe que, en este caso,

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)} \int_0^1 p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}\mathrm{d}p \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Una vez determinada la constante de normalización, se calcula la distribución *a posteriori* mediante la fórmula de Bayes

$$f(p|x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)} p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}, & \text{si } \ p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con esta distribución *a posteriori* se estima el valor de $p$ a través de $\mathrm{E}[p|x]$. Es decir,

$$\begin{aligned}\widehat{p} =&\mathrm{E}[p|x] = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}\int_0^1 p^{x+\alpha}(1-p)^{n-x+\beta-1}\mathrm{d}p\\ =&\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\\ =&\frac{x+\alpha}{n+\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Otra forma de obtener el mismo resultado consiste en observar que

$$f(p|x) \propto \begin{cases} p^x(1-p)^{n-x}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}, & \text{si } \ p\in[0,1],\\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

La única posibilidad para que $f(p|x)$ sea una densidad es

$$f(p|x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}, & \text{si } \ p\in[0,1],\\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

## 9. Caso binomial con $m$ observaciones y densidad *a priori* Beta

A continuación se generaliza el resultado de la sección anterior a una muestra de observaciones. Considere una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_m$ de una distribución $X \sim b(n,p)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|p) = f(x_1,x_2,...,x_m|p) \propto p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}.$$

Si

$$\pi(p) \propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1},$$

entonces

$$f(p|\mathbf{x}) \propto p^{m\bar{x}+\alpha-1}(1-p)^{m(n-\bar{x})+\beta-1}.$$

En consecuencia,

$$f(p|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(mn+\alpha+\beta)}{\Gamma(m\bar{x}+\alpha)\Gamma(m(n-\bar{x})+\beta)}p^{m\bar{x}+\alpha-1}(1-p)^{m(n-\bar{x})+\beta-1},\ p\in[0,1].$$

Por lo tanto,

$$\widehat{p} = \mathrm{E}[p|\mathbf{x}] = \frac{m\bar{x}+\alpha}{mn+\alpha+\beta}.$$

## 10. Caso Poisson con *a priori* Gamma

Cuando se utiliza la distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, para modelar la probabilidad de que se presenten eventos de riesgo operativo, el enfoque Bayesiano proporciona un estimador de $\lambda$. Considere ahora una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de una distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|\lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} \propto e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}.$$

Suponga que la distribución *a priori* sobre $\lambda$ es $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, *i.e.*,

$$f(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \lambda > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Si se utiliza el teorema de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned} f(\lambda|\mathbf{x}) &\propto e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda\beta} \\ &= e^{-\lambda(n+\beta)}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$f(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{e^{-\lambda(n+\beta)}(n+\beta)^{n\bar{x}+\alpha}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}}{\Gamma(n\bar{x}+\alpha)}.$$

Por lo tanto,

$$\widehat{\lambda} = \mathrm{E}[\lambda|\mathbf{x}] = \frac{n\bar{x}+\alpha}{n+\beta}.$$

## 11. Conclusiones

Se desarrollarón varias distribuciones para el análisis de eventos de riesgo operacional ya sea en términos de su frecuencia (binomial, binomial negativa, Poisson, etc.) o de su severidad (log-normal, Gamma, hiperbólica, Fréchet, Gumbel, etc.). La estimación de los parámetros de dichas distribuciones se llevó a cabo mediante inferencia Bayesiana. En este caso, en el teorema de Bayes se combinan la densidad *a priori* del parámetro de interés con la función de verosimilitud para obtener una densidad *a posteriori* sobre dicho parámetro. Justamente, la distribución *a posteriori* se utilizó para hacer inferencias sobre el parámetro en cuestión. Existen, por supuesto, muchas otras formas funcionales para las distribuciones de frecuencia y severidad del riesgo operacional que se pueden utilizar bajo ciertas condiciones y que son tema para futuras investigaciones.

## Bibliografia

Cruz, M. G. (2002). Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk. John Wiley & Sons.

Venegas-Martínez, F. (2004). On Information Measures and Prior Distributions: A Synthesis. *Revista Morfismos*, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, IPN, Vol. 8, No. 2, pp. 27-51.

Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.

Venegas-Martínez, F. (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, International Thomson Editors.

Zellner, A. (1971). An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York: Wiley.