



Munich Personal RePEc Archive

# **Modeling the optimal level of the enrollment fee at Czech public universities**

Mazurek, Jiří

Silesian University in Opava

6 July 2014

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/57136/>  
MPRA Paper No. 57136, posted 07 Jul 2014 13:17 UTC

# Modelování optimální výše zápisného na české veřejné vysoké školy

Jiří Mazurek

**Abstrakt:** České veřejné vysoké školy se již řadu let potýkají s problémem podfinancování. Jednou z možností navýšení rozpočtu veřejných vysokých škol je zavedení zápisného, tedy nízkého administrativního poplatku za každý semestr studia. Cílem článku je ukázat, jak najít optimální výši zápisného na danou vysokou školu tak, aby se maximalizoval příjem vysoké školy za nastupující studenty, pomocí matematického modelu zahrnujícího parametry jako je maximální výše zápisného, citlivost uchazečů na výši zápisného, počet uchazečů, a další. Nesprávně nastavenou výši zápisného může vysoká škola přijít řádově o miliony až desítky milionů korun ročně. Stanovení optimální výše zápisného má tedy značný praktický význam, neboť umožní dané vysoké škole maximalizovat svůj kombinovaný příjem ze zápisného a za počet přijímaných studentů.

**Klíčová slova:** celkový příjem, Česká republika, matematické modelování, optimalizace, vysoká škola, zápisné.

## 1. Úvod

Jedním ze způsobů, jak zlepšit finanční situaci (veřejných) vysokých škol je spoluúčast studentů. Protože zavedení školného odporuje současné legislativě, přesunula se debata k problematice zápisného, které by mělo fungovat jako nízký administrativní poplatek za každý zapsaný semestr (zápisné se liší od školného tím, že školné by mělo odrážet reálné náklady na studium daného oboru, zatímco zápisné je pouze paušálním administrativním poplatkem za jeden semestr studia). Výše zápisného by byla v kompetenci jednotlivých škol, předpokládá se, že by mohla dosahovat 2500-3000 Kč za semestr<sup>1</sup>.

Nečasova vláda původně hodlala zavést zápisné již v akademickém roce 2012/2013<sup>2</sup>, vlivem politické krize z poloviny roku 2013 je však jisté, že zápisné nebude zavedeno dříve než v akademickém roce 2014/2015. K otázce zavedení či nezavedení zápisného však nepadá ani v akademickém prostředí jednotný názor. Konference rektorů z dubna 2012 nezaujala k zápisnému žádný postoj, zato varovala vládu, že další pokles veřejného financování vysokých škol v příštích dvou letech bude pro vysoké školy likvidační a povede ke snížení konkurenceschopnosti České republiky<sup>3</sup>. Dle názoru rektorů ani zápisné ve výši 3000 Kč nepokryje schodek ve financování vysokých škol. Studentské komory vysokých škol pak jakoukoli podobu zápisného vesměs odmítají a argumentují tím, že podobné poplatky za vysokoškolské studium ve Velké Británii se krátce po jejich zavedení několikanásobně zvýšily. V České republice by byla výše zápisného pravděpodobně omezena shora zákonem, a případné zvýšení maximálního zápisného by muselo nejprve projít parlamentem (což je přinejmenším zdouhavé).

Zavedení zápisného provází i řada nevyjasněných otázek, týkajících se především toho, zda mají zápisné platit všichni (i již studující) studenti, nebo jen studenti nastupující na vysokou školu v novém akademickém roce, nebo zda bude zápisné platit i pro zahraniční (tedy především slovenské) studenty, či nikoli. Například v Polsku platí zahraniční studenti jak školné ve výši 200 euro, tak zápisné ve stejné výši<sup>4</sup>, zatímco na Slovensku podobné poplatky neexistují. Některé politické strany navíc již delší dobu avizují, že pokud bude zápisné zavedeno a ony uspějí ve volbách, zápisné zase zruší.

<sup>1</sup> Ministr Fiala chce v lednu předložit novelu o zápisném na vysoké školy. VZ24. [online]. [cit. 2012-12-11]. Dostupné z: <http://www.vz24.cz/clanky/fiala-chce-v-lednu-predlozit-novelu-o-zapisnem-na-vysoke-skoly/>

<sup>2</sup> Tiskový brífink po koaličním jednání. [online]. [cit. 2012-12-11]. Dostupné z: <http://www.vlada.cz/scripts/detail.php?id=99363&tmplid=50>

<sup>3</sup> Další pokles financování vysokých škol bude likvidační. *České noviny* [online]. [cit. 2012-12-11]. Dostupné z: <http://www.ceskenoviny.cz/domov/zpravy/rektori-dalsi-pokles-financovani-vysokych-skol-bude-likvidacni/781375>

<sup>4</sup> Degrees and Diplomas, Poland: Studies in foreign languages. *Ministry of Science and Education*. 2007 [online]. [cit. 2012-12-11]. Dostupné z: [http://www.nauka.gov.pl/fileadmin/user\\_upload/files/Degrees\\_and\\_Diplomas.pdf](http://www.nauka.gov.pl/fileadmin/user_upload/files/Degrees_and_Diplomas.pdf).

Poměrně opomíjeným aspektem zápisného je, že jeho zavedení nemusí nutně znamenat vyšší finanční přínos pro danou vysokou školu, neboť dojde k přerozdělení zájemců o studium od škol s vysokým zápisným ke školám s nízkým (nulovým) zápisným. Některé studenty (především ze sociálně slabších vrstev) může vyšší zápisné od studia na vysoké škole odradit, a buď půjdou studovat na jinou vysokou školu s nižším zápisným, nebo raději nastoupí do zaměstnání. Proto se může stát, že vysoká škola po zavedení zápisného získá za studenty nastupující do prvního ročníku méně než bez zápisného, neboť se sníží jejich počet.

Problematicke zavedení školného či zápisného se v českém prostředí věnují například publikace [5] nebo [11], v USA pak například [1], [2], [3] nebo [7].

Cílem článku je proto optimalizovat výši zápisného na českých veřejných vysokých školách tak, aby vysoké školy získaly maximální příjem jak ze zápisného, tak z počtu studentů. K optimalizaci zápisného byl nově vytvořen jednoduchý matematický model, který odráží podmínky českého vysokého školství a zahrnuje parametry jako je maximální výše zápisného, citlivost uchazečů na výši zápisného, počet uchazečů hlásících se na danou vysokou školu, apod. Metoda modelování je v ekonomii poměrně běžná, viz například [5], [8], [9] nebo [12]. Stanovení optimální výše zápisného má značný praktický význam, neboť umožní dané vysoké škole maximalizovat svůj příjem ze zápisného a za počet přijímaných studentů.

## 2.1. Příjem vysoké školy bez zápisného

Financování veřejných vysokých škol v České republice upravuje § 18 zákona č. 111/1998 Sb. Veřejné vysoké školy mohou být financovány z těchto zdrojů:

- příspěvky ze státního rozpočtu na vzdělávací a vědeckou, výzkumnou, vývojovou, uměleckou nebo další tvůrčí činnost,
- dotacemi ze státního rozpočtu,
- poplatky spojenými se studiem,
- výnosy z majetku,
- jinými příjmy ze státního rozpočtu, ze státních fondů, z Národního fondu a z rozpočtů obcí a krajů,
- výnosy z doplňkové činnosti,
- příjmy z darů a dědictví.

Většinu příjmů veřejných vysokých škol tvoří příspěvek ze státního rozpočtu za počet studentů, kde jeden student je dotován určitou částkou (normativem), která v současnosti činí přibližně 28 000 Kč. Příjmy z ostatních výše jmenovaných zdrojů jsou u většiny vysokých škol nepříliš významné s výjimkou nejlepších univerzit, které navíc získávají značné částky na výzkum z domácích a zahraničních grantových agentur. Tyto příjmy však nijak nesouvisejí s případným zápisným (nejsou jím ovlivněny), a proto dále nebudou uvažovány.

Nechť  $n$  je počet přijatých uchazečů a  $k$  částka, kterou inkasuje vysoká škola za jednoho přijatého studenta za 1 rok. Bez zápisného je celkový příjem  $TR$  vysoké školy za všechny přijaté studenty za 1 rok roven následující částce:

$$TR = n \cdot k \quad (1)$$

Jakmile vysoká škola zavede zápisné, vztah (1) pro celkový příjem musí být nahrazen komplexnějším vztahem.

## 2.2. Příjem vysoké školy se zápisným

Příjem vysoké školy v případě zápisného se bude odvíjet od toho, zda uchazeči o vysokou školu (ne)budou výši zápisného odradit.

Předpokládejme, že s rostoucím zápisným klesá zájem studentů o studium na vysoké škole lineárně (obecně nelineární závislosti budou prozkoumány v Kapitole 5). Jestliže bez zápisného se na určitou vysokou školu hlásí  $N$  uchazečů, po zavedení zápisného bude tento počet nižší.

Úbytek zájemců o studium (počet od studia odrazených studentů) bude označován jako  $N \cdot \delta$ , kde  $\delta$  je „funkce citlivosti“ uchazečů na výši zápisného a v nejjednodušším případě může být definována následovně:

$$\delta = \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \quad (2)$$

Ve vztahu (2) se, jak již bylo zmíněno, předpokládá lineární závislost  $\delta$  na  $\varepsilon$ . Funkce  $\delta = \delta(\varepsilon)$  splňuje následující „okrajové“ podmínky:

$$\delta(0) = 0 \quad (3a)$$

$$\delta(\varepsilon_{\max}) = \gamma \quad (3b)$$

Podmínka (3a) znamená, že nulové zápisné odradí od studia nulový počet studentů.

Podmínka (3b) vyjadřuje, že pro maximální výši zápisného  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  bude od studia odraženo  $N \cdot \gamma$  uchazečů. Například  $\gamma = 0,4$  znamená, že při maximálním zápisném je od studia odraženo 40 % uchazečů, 60 % uchazečů se bude dál hlásit na vysokou školu (jedná se o uchazeče, které ani nejvyšší možné zápisné od studia neodradí).

Koeficient  $\gamma$  tedy charakterizuje citlivost uchazečů na výši zápisného, a čím vyšší je jeho hodnota, tím větší je úbytek uchazečů o studium. V praxi lze koeficient  $\gamma$  zjistit například dotazníkem u studentů maturitních ročníků nebo ze skutečného (pozorovaného) poklesu zájemců o studium poté, co zápisné vstoupí v platnost.

Nyní uvažujme, že vysoká škola zavede maximální možné zápisné  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ . Počet uchazečů o studium po zavedení maximálního zápisného bude:

$$(1 - \delta_{\max}) \cdot N \quad (4)$$

Pak mohou nastat tyto případy (scénáře) podle velikosti  $(1 - \delta_{\max}) \cdot N$  a  $n$ :

- A.  $(1 - \delta_{\max}) \cdot N \geq n$ : počet studentů, kteří mají zájem o studium po zavedení maximálního zápisného, je větší nebo roven počtu studentů, které hodlá vysoká škola přijmout. V tomto případě vysoká škola inkasuje:

$$TR = n \cdot (k + \varepsilon_{\max}) \quad (5)$$

- B.  $(1 - \delta_{\max}) \cdot N < n$ : počet studentů, kteří mají zájem o studium po zavedení maximálního zápisného, je menší než počet studentů, které hodlá vysoká škola přijmout. V tomto případě by vysoká škola inkasovala:

$$TR = (1 - \delta_{\max}) N \cdot (k + \varepsilon)$$

Tato částka by však v mnoha případech nebyla maximálním možným příjmem vysoké školy, neboť počet uchazečů by se mohl snížit natolik, že zavedení maximálního školného by vedlo k poklesu příjmu oproti situaci bez zápisného. V tomto případě tedy vysoká škola musí uvažovat o obecně nižším zápisném  $\varepsilon$  tak, aby byl následující příjem maximální:

$$TR = (1 - \delta) N \cdot (k + \varepsilon) = N \left( 1 - \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \right) (k + \varepsilon) \quad (6)$$

Ve vztahu (6) opět předpokládáme splnění podmínky  $(1 - \delta) \cdot N < n$ , v opačném případě by totiž bylo možné zápisné ještě zvýšit, aby počet uchazečů poklesl na  $n$  studentů. Pro počet přijatých studentů  $n_p$  platí:  $n_p \leq n$ .

Situace A není příliš zajímavá: daná vysoká škola sice ztratí část zájemců o studium, nicméně jí zůstane dostatečný počet uchazečů, aby nabrala plánovaných (a financovaných)  $n$  studentů. Tento případ pravděpodobně nastane u prestižních vysokých škol, jakou jsou Karlova univerzita nebo Masarykova univerzita, a atraktivních oborů, jako jsou právo, medicína, psychologie, apod. U těchto škol respektive oborů existuje velký převis poptávky o studium, a ani zápisné na tom nic podstatného nezmění. Tyto vysoké školy tedy mohou nastavit zápisné na maximální výši, a tím maximalizují svůj příjem.

Situace B je mnohem zajímavější, neboť v tomto případě klesá počet uchazečů pod plánovaný počet přijímaných studentů  $n$ . Každý přijatý uchazeč sice přináší vysoké škole větší příjem (o zápisné), ale počet uchazečů je menší než bez zápisného. V tomto případě má tedy smysl ptát se, jak nastavit výši zápisného, aby byl příjem vysoké školy daný vztahem (6) maximální. Proto dále bude pozornost věnována právě tomuto případu (V další kapitole si navíc ukážeme, že případ B v sobě skrývá ještě dvě varianty).

### 3. Model

Ke stanovení optimální výše zápisného pro situaci (scénář) B byl vytvořen model s následujícími (zjednodušujícími) předpoklady:

- Uchazeči o studium na vysoké škole si podávají jen jednu přihlášku na vysokou školu (každý uchazeč zahrnutý v počtu  $N$  má opravdu zájem studovat danou vysokou školu, na kterou se hlásí).
- Počet studentů se již během roku nemění (studenti například nepřestupují ze školy na školu).
- Citlivost uchazečů o studium na výši zápisného (počet uchazečů, které odradí od studia daná výše zápisného) lze vyjádřit pomocí spojitě neklesající (lineární) funkce.
- Existuje maximální výše (strop) zápisného závazná pro všechny vysoké školy.
- Všichni uchazeči platí stejné zápisné bez ohledu na to, jaký obor studují, zda ročník opakují, studují prezenčně nebo kombinovaně, nebo zda jde o zahraniční studenty.
- K určení optimálního zápisného je příjem vysoké školy modelován pouze jako příjem za nastupující studenty, předpokládá se tedy, že zápisné bude zavedeno pouze pro tyto studenty. Pokud by bylo zavedeno zápisné pro již studující studenty, pak by bylo nutno dále předpokládat, že počty již studujících se po zavedení zápisného nezmění (nesníží), čímž se tento příjem stane konstantním a neovlivní výsledky modelu.

Proměnné (vstupní a výstupní) modelu jsou uvedeny v Tabulce 1. Kromě označení a stručného popisu proměnných je v Tabulce 1 uveden i jejich definiční obor, který vesměs vyplývá z předpokladů modelů uvedených výše.

Tab. 1: Proměnné modelu.

<b>Vstupní proměnné modelu</b>	
$N$ ... počet uchazečů o studium na dané vysoké škole, $N \geq n$ ,	$\delta(\varepsilon)$ ...funkce citlivosti uchazečů na výši zápisného, $\delta \in \langle 0, \gamma \rangle$ . $N \cdot \delta$ je počet uchazečů o studium, které zápisné odradí od studia (funkce popisuje úbytek uchazečů),
$n$ ...maximální počet uchazečů, které hodlá vysoká škola přijmout (studenti „placení“ státem), $n > 0$ ,	$\varepsilon_{max}$ ...maximální možná (zákonem nebo vyhláškou stanovená) výše zápisného na 1 rok v Kč.
$k$ ...částka, kterou dostává od státu vysoká škola za 1 studenta za 1 rok v Kč (normativ),	<b>Výstupní proměnné modelu</b>
$\varepsilon$ ...výše zápisného za jeden rok (za dva semestry) v Kč, $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_{max} \rangle$	$\varepsilon_0$ ...optimální výše zápisného v Kč,
$\gamma$ ...„citlivost“ uchazečů na maximální výši zápisného, $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ ,	$n_p$ ...počet přijatých studentů za 1 rok při zavedení zápisného, $0 \leq n_p \leq n$
$\delta(\varepsilon)$ ...funkce citlivosti uchazečů na výši zápisného, $\delta \in \langle 0, \gamma \rangle$ . $N \cdot \delta$ je počet uchazečů o studium, které zápisné odradí od studia (funkce popisuje úbytek uchazečů),	$TR$ ...celkový příjem vysoké školy za nově přijaté studenty za 1 rok v Kč.

Extrémy funkce (6) najdeme pomocí první derivace:

$$\frac{dTR}{d\varepsilon} = N \left( 1 - \frac{k\gamma + 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \right) \quad (7)$$

$$\frac{dTR}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{k\gamma + 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \quad (8)$$

Odkud dostáváme stacionární bod  $\varepsilon_0$ :

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{\max} - k\gamma}{2\gamma} \quad (9)$$

Pomocí druhé derivace snadno ověříme, že bod  $\varepsilon_0$  ze vztahu (9) je maximum příjmu. Odpovídající maximální příjem  $TR_{\max}$  je pak dán následujícím vztahem, který obdržíme dosazením (9) do (6):

$$TR_{\max} = N \left( 1 - \gamma \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\max}} \right) (k + \varepsilon_0) = N \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\max} - k\gamma}{2\varepsilon_{\max}} \right) \left( k + \frac{\varepsilon_{\max} - k\gamma}{2\gamma} \right) \quad (10)$$

Hodnota optimálního zápisného a počet přijatých studentů jsou omezeny následujícími podmínkami:

$$0 \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{\max} \quad (11a)$$

$$0 \leq (1 - \delta) \cdot N = \left( 1 - \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \right) \cdot N \leq n \quad (11b)$$

Z hlediska matematické analýzy tedy hledáme maximum funkce (6) na kompaktní množině  $M$  vymezené podmínkami (11a) a (11b).

V řeči prezentovaného modelu podmínka optimalizace celkového příjmu  $TR$  znamená najít maximum výrazu (6) v závislosti na  $\varepsilon$  za daných hodnot  $\gamma$ ,  $k$ ,  $N$  a  $\varepsilon_{\max}$ , které reprezentují vstupní parametry modelu.

Ze vztahu (9) však může vyjít pro některé konfigurace parametrů hodnota  $\varepsilon_0$  nebo hodnota  $(1 - \delta) \cdot N$  nesplňující vztahy (11). To znamená, že lokální extrém (maximum) funkce (6) leží mimo vymezenou oblast  $M$ , na níž maximum hledáme. Protože je funkce (6) spojitá, lze v takovém případě využít Weierstrassovu větu: spojitá funkce na kompaktní množině na ní nabývá svého maxima a minima, viz např. [6] nebo [10]. Není-li tedy extrém funkce uvnitř množiny  $M$ , musí být na její hranici, a tedy maximum nastává pro jednu z krajních možností:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = 0, \varepsilon = \varepsilon_{\max}, \\ (1 - \delta) \cdot N = n, (1 - \delta) \cdot N = 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnost výše však nastat nemůže kvůli podmínce  $\gamma < 1$ .

Podrobnějším rozbořením (a ověřením, že se jedná opravdu o maximum) lze zjistit, že:

- Pokud vyjde ze vztahu (9)  $\varepsilon_0 < 0$ , pak maximum funkce (6) nastává pro  $\varepsilon_0 = 0$ .
- Pokud vyjde ze vztahu (9)  $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\max}$ , pak maximum funkce (6) nastává pro  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max}$ .
- Pokud není splněna podmínka (11b), konkrétně je  $(1 - \delta) \cdot N > n$ , pak optimální výše zápisného nastává pro takovou hodnotu  $\varepsilon_0 = \varepsilon_N$ , že je splněno:

$$\left(1 - \gamma \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{\max}}\right) \cdot N = n \quad (12)$$

*Citlivostní analýza* prezentovaného modelu, tedy zjištění vlivu změn výstupní proměnné v závislosti na změně vstupních proměnných, se redukuje na zjištění vlivu změny proměnné  $\varepsilon$  na změnu celkového příjmu  $TR$ , neboť se předpokládá, že ostatní parametry modelu budou v praxi (pro danou vysokou školu a daný semestr) známy a zafixovány. Dále ze vztahu (6) vyplývá, že funkční závislost  $TR$  na  $\varepsilon$  je kvadratická (a konkávní), a první derivace  $TR$  podle  $\varepsilon$ , viz vztah (7), pak poskytuje závislost změny  $TR$  na změně  $\varepsilon$ . Užití první (parciální) derivace je jedním z častých přístupů k citlivostní analýze v rámci metody OFAT (*one factor at a time*), viz např. [4].

Aby si čtenář mohl učinit konkrétní představu, jak se bude (respektive může) měnit celkový příjem v závislosti na různých hodnotách vstupních parametrů, především pak pro různé hodnoty citlivosti na výši zápisného, je užití modelu předvedeno v následující kapitole.

#### 4. Ilustrační příklady

V této kapitole je ilustrováno využití prezentovaného modelu na několika příkladech. Cílem všech příkladů je maximalizovat příjem vysoké školy stanovením optimální výše zápisného.

---

**Příklad 1.** Nechť jsou dány tyto vstupní hodnoty:  $N = 2000$ ,  $n = 1100$ ,  $\varepsilon_{\max} = 20000$  Kč,  $k = 28000$  Kč,  $\gamma = 0,4$ . Najděte výši zápisného, která maximalizuje příjem (6).

*Řešení:*

Nejprve ověříme, že se jedná o situaci B, pro kterou byl model zkonstruován: Při zavedení maximálního ročního zápisného se počet uchazečů sníží o 40 % ( $\gamma = 0,4$ ) na 1200, což je však stále více než  $n$ , a tedy není splněna podmínka  $(1 - \delta_{\max}) \cdot N < n$ . V tomto případě tedy vysoká škola nastaví maximální zápisné.

---

**Příklad 2.** Nechť jsou dány tyto vstupní hodnoty:  $N = 2000$ ,  $n = 1900$ ,  $\varepsilon_{\max} = 20000$  Kč,  $k = 28000$  Kč,  $\gamma = 0,5$ . Najděte výši zápisného, která maximalizuje příjem (6).

*Řešení:*

Nejprve ověříme, že se jedná o situaci B, pro kterou byl model zkonstruován: Při zavedení maximálního ročního zápisného se počet uchazečů sníží o 50 % ( $\gamma = 0,5$ ) na 1000, což je méně než  $n$ .

Roční příjem vysoké školy by činil bez zápisného 53,2 mil. Kč.

S maximálním zápisným (ale jen s 1000 přijatými studenty) by tento příjem činil 48 mil. Kč.

Vysoká škola tedy zavede nižší než maximální zápisné.

Ze vztahu (9) vypočteme optimální výši zápisného:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{\max} - k\gamma}{2\gamma} = \frac{20000 - 28000 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5} = 6000 \text{ Kč.}$$

Pro zápisné ve výši  $\varepsilon_0 = 6000$  Kč činí celkový příjem školy dle vztahu (10): 57,8 mil. Kč při počtu nastupujících studentů 1700. Nižší počet studentů je (více než) kompenzován vyšším příjmem na jednoho studenta.

Zavedení optimální výše zápisného v tomto konkrétním příkladu přináší škole navíc 4,6 milionu Kč ročně oproti stavu bez zápisného, a téměř 10 milionů oproti stavu s maximálním zápisným. V Tabulce 2 jsou pro srovnání uvedeny příjmy vysoké školy pro různé výše zápisného v tomto příkladu, a v Grafu 1 je znázorněna závislost celkového příjmu na parametru delta.

---

**Příklad 3.** Necht' jsou dány tyto vstupní hodnoty:  $N = 1400$ ,  $n = 1000$ ,  $\varepsilon_{\max} = 20000$  Kč,  $k = 28000$  Kč,  $\gamma = 0,5$ . Najděte výši zápisného, která maximalizuje příjem (6).

*Řešení:*

Opět ověříme, že se jedná o situaci B: Při zavedení maximálního ročního zápisného se počet uchazečů sníží o 50 % ( $\gamma = 0,5$ ) na 700, což je méně než  $n = 1000$ .

Roční příjem vysoké školy by činil bez zápisného 28 mil. Kč.

S maximálním zápisným (ale jen se 700 přijatými studenty) by tento příjem činil 33,6 mil. Kč.

Ze vztahu (9) vypočteme optimální výši zápisného:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{\max} - k\gamma}{2\gamma} = \frac{20000 - 28000 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5} = 6000 \text{ Kč.}$$

Výše zápisného je stejná jako v Příkladu 1. Avšak v tomto případě není splněna podmínka (11b):

$$\left(1 - \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}\right) \cdot N = \left(1 - 0,5 \frac{6000}{24000}\right) \cdot 1400 = 1225 > n = 1000.$$

Muselo by být totiž přijato více studentů (1225), než je povoleno (1000). Vypočtený lokální extrém tedy neleží v oblasti  $M$  vymezené podmínkami (11a,b).

Optimální výše zápisného však přesto může být stanovena, a to z podmínky (12). Budeme tedy hledat maximum na hranici oblasti  $M$ :

$$\varepsilon_N = \frac{\varepsilon_{\max}}{\gamma} \cdot \left(\frac{N - n}{N}\right) = 11428,6 \text{ Kč.}$$

Při této výši zápisného ( $N = 1000$ ) bude celkový příjem VŠ ze vztahu (10): 39,43 mil. Kč.

V Tabulce 3 jsou pro srovnání uvedeny příjmy vysoké školy pro různé výše zápisného v tomto příkladu.

---

**Příklad 4.** Necht' jsou dány tyto vstupní hodnoty:  $N = 1200$ ,  $n = 1000$ ,  $\varepsilon_{\max} = 10000$  Kč,  $k = 28000$  Kč,  $\gamma = 0,2$ . Najděte výši zápisného, která maximalizuje příjem (6).

*Řešení:*

Opět ověříme, že se jedná o situaci B: Při zavedení maximálního ročního zápisného se počet uchazečů sníží o 20 % na 960, což je méně než  $n = 1000$ . Nižší hodnota  $\gamma$  než v Příkladech 1 a 2 vyjadřuje nižší citlivost uchazečů na výši zápisného, se zvyšováním zápisného tedy nedochází k takovému úbytku zájemců o studium jako v předchozích případech.

Roční příjem vysoké školy by činil bez zápisného 28 mil. Kč, a s maximálním zápisným 36,48 mil. Kč.

Ze vztahu (9) vypočteme optimální výši zápisného:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{\max} - k\gamma}{2\gamma} = \frac{10000 - 28000 \cdot 0,2}{2 \cdot 0,2} = 11000 \text{ Kč.}$$

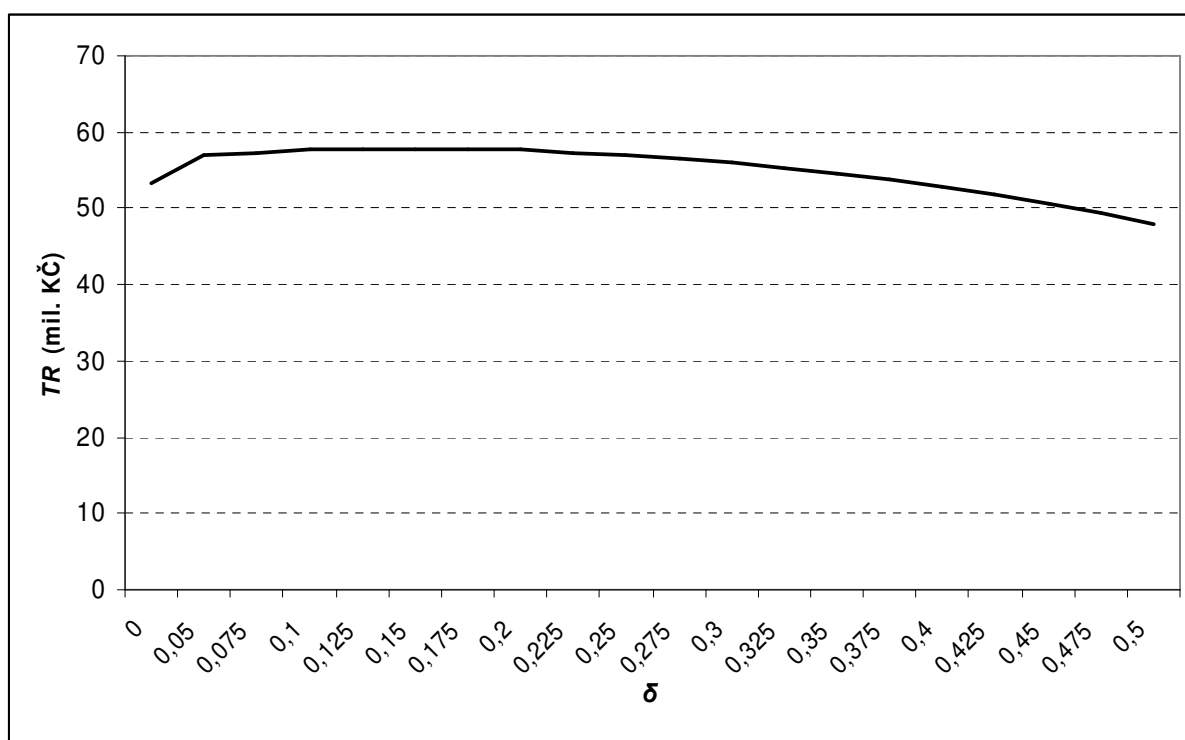
Nyní ale není splněna podmínka (11a): výše zápisného je vyšší než maximální povolená výše zápisného. Ačkoli leží vypočtený extrém opět mimo hranice modelu, optimální výše zápisného přesto může být stanovena, a to na hranici oblasti  $M$ :  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max} = 10000$  Kč.

V Tabulce 4 jsou pro srovnání uvedeny příjmy vysoké školy pro různé výše zápisného v tomto příkladu.



Tab. 2: Celkové příjmy v závislosti na výši zápisného a počtu přijatých studentů z Příkladu 2.

$N$	$n$	$n_p$	$k$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\varepsilon_{max}$	$TR$ (Kč)
2000	1900	1900	28000	0,5	0	0	20000	53200000
2000	1900	1900	28000	0,5	0,05	2000	20000	57000000
2000	1900	1850	28000	0,5	0,075	3000	20000	57350000
2000	1900	1800	28000	0,5	0,1	4000	20000	57600000
2000	1900	1750	28000	0,5	0,125	5000	20000	57750000
2000	1900	1700	28000	0,5	0,15	6000	20000	57800000
2000	1900	1650	28000	0,5	0,175	7000	20000	57750000
2000	1900	1600	28000	0,5	0,2	8000	20000	57600000
2000	1900	1550	28000	0,5	0,225	9000	20000	57350000
2000	1900	1500	28000	0,5	0,25	10000	20000	57000000
2000	1900	1450	28000	0,5	0,275	11000	20000	56550000
2000	1900	1400	28000	0,5	0,3	12000	20000	56000000
2000	1900	1350	28000	0,5	0,325	13000	20000	55350000
2000	1900	1300	28000	0,5	0,35	14000	20000	54600000
2000	1900	1250	28000	0,5	0,375	15000	20000	53750000
2000	1900	1200	28000	0,5	0,4	16000	20000	52800000
2000	1900	1150	28000	0,5	0,425	17000	20000	51750000
2000	1900	1100	28000	0,5	0,45	18000	20000	50600000
2000	1900	1050	28000	0,5	0,475	19000	20000	49350000
2000	1900	1000	28000	0,5	0,5	20000	20000	48000000



Graf 1. Závislost celkových příjmů  $TR$  (mil. Kč) v závislosti parametru  $\delta$  z Příkladu 2.

Tab. 3: Celkové příjmy v závislosti na výši zápisného a počtu přijatých studentů z Příkladu 3.

$N$	$n$	$n_p$	$k$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\varepsilon_{max}$	$TR$ (Kč)
1400	1000	1000	28000	0,5	0	0	20000	28000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,025	1000	20000	29000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,05	2000	20000	30000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,075	3000	20000	31000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,1	4000	20000	32000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,125	5000	20000	33000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,15	6000	20000	34000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,175	7000	20000	35000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,2	8000	20000	36000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,225	9000	20000	37000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,25	10000	20000	38000000
1400	1000	1000	28000	0,5	0,275	11000	20000	39000000
1400	1000	980	28000	0,5	0,3	12000	20000	39200000
1400	1000	945	28000	0,5	0,325	13000	20000	38745000
1400	1000	910	28000	0,5	0,35	14000	20000	38220000
1400	1000	875	28000	0,5	0,375	15000	20000	37625000
1400	1000	840	28000	0,5	0,4	16000	20000	36960000
1400	1000	805	28000	0,5	0,425	17000	20000	36225000
1400	1000	770	28000	0,5	0,45	18000	20000	35420000
1400	1000	735	28000	0,5	0,475	19000	20000	34545000
1400	1000	700	28000	0,5	0,5	20000	20000	33600000

Tab. 4: Celkové příjmy v závislosti na výši zápisného a počtu přijatých studentů z Příkladu 4.

$N$	$n$	$n_p$	$k$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\varepsilon_{max}$	$TR$ (Kč)
1200	1000	1000	28000	0,2	0	0	10000	28000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,02	1000	10000	29000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,04	2000	10000	30000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,06	3000	10000	31000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,08	4000	10000	32000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,1	5000	10000	33000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,12	6000	10000	34000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,14	7000	10000	35000000
1200	1000	1000	28000	0,2	0,16	8000	10000	36000000
1200	1000	984	28000	0,2	0,18	9000	10000	36408000
1200	1000	960	28000	0,2	0,2	10000	10000	36480000

## 5. Modely s obecnou závislostí mezi výší zápisného a počtem uchazečů

V předchozích kapitolách jsme uvažovali lineární závislost mezi výší zápisného a úbytkem uchazečů o studium. Obecně je funkce  $\delta$ , která popisuje úbytek uchazečů v závislosti na výši zápisného, funkcí výše zápisného  $\varepsilon$ , je tedy  $\delta(\varepsilon)$ .

Funkce  $\delta(\varepsilon)$  musí splňovat podmínky (3a,b), a navíc lze požadovat, aby byla funkce  $\delta(\varepsilon)$  na celém svém definičním oboru neklesající (což odpovídá „rozumnému“ požadavku, aby se při rostoucím zápisném úbytek zájemců o studium nesnižoval).

Pak již můžeme přeformulovat vztah (6) pro situaci B na obecnější vztah (13):

$$TR = [1 - \delta(\varepsilon)] N \cdot (k + \varepsilon), \quad (13)$$

Extrémy funkce (13) opět hledáme užitím první derivace:

$$\frac{dTR}{d\varepsilon} = N[1 - k\delta'(\varepsilon) - \varepsilon\delta''(\varepsilon) - \delta'(\varepsilon)] = 0 \quad (14)$$

Ze vztahu (14) dostaneme (implicitní) podmínku pro stacionární bod  $\varepsilon_0$ :

$$k\delta'(\varepsilon_0) - \varepsilon_0\delta''(\varepsilon_0) - \delta'(\varepsilon_0) = 1 \quad (15)$$

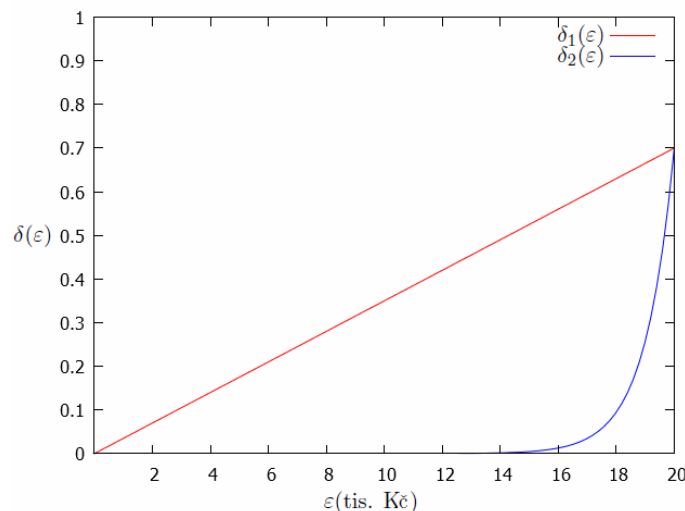
Celkový příjem vysoké školy pak vypočteme ze vztahu (10), do kterého dosadíme  $\varepsilon_0$  ze vztahu (15). Přitom stále požadujeme splnění podmínek (11a, b).

Snadno se můžeme přesvědčit, že pro  $\delta(\varepsilon) = \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}$  přejde podmínka (15) na podmínku (9).

Jako příklad nelineární funkce citlivosti uchazečů na výši zápisného splňující podmínky (3a,b) může sloužit následující funkce:

$$\delta(\varepsilon) = \gamma \frac{(e^\varepsilon - 1)}{(e^{\varepsilon_{\max}} - 1)} \quad (16)$$

Ve funkci (16) se počet studentů odrazených zápisným exponenciálně zvětšuje s rostoucím zápisným, viz též Obrázek 1. Nelineární funkce, jako například zmíněná funkce (16), mohou umožnit přesnější modelování (za předpokladu, že reálná funkce citlivost  $\delta(\varepsilon)$  je spíše nelineární než lineární, což ovšem musí být zjištěno empiricky), za cenu poněkud obtížnějších numerických výpočtů, neboť rovnice (15) pak obvykle vede na nelineární rovnice, jejichž řešení je nutno hledat numerickými iteračními metodami, například metodou půlení, tečen, sečen nebo Newtonovou-Raphsonovou metodou.



Obr. 1: Graf funkce citlivosti pro  $\gamma = 0,7$  a  $\varepsilon_{\max} = 20000$ :  $\delta_1(\varepsilon) = \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}$ ,  $\delta_2(\varepsilon) = \gamma \frac{(e^\varepsilon - 1)}{(e^{\varepsilon_{\max}} - 1)}$ .

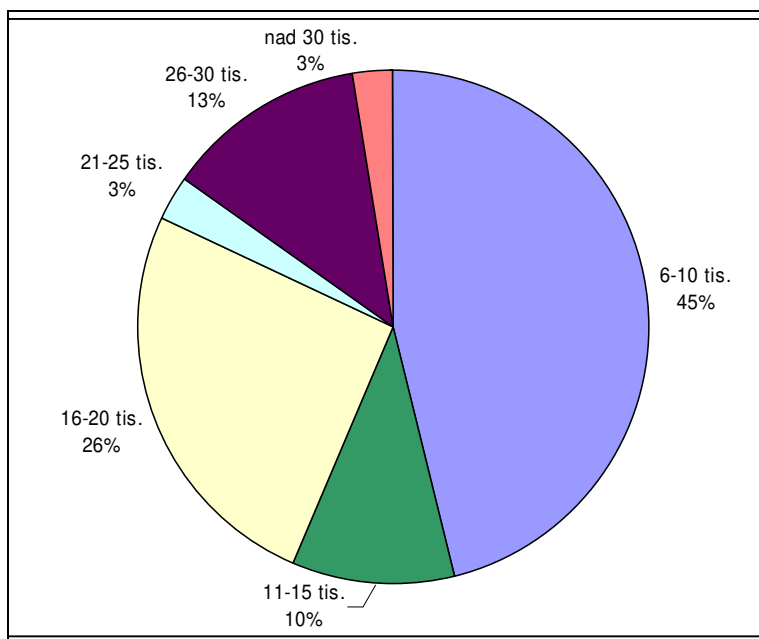
## 6. Zjištění koeficientu citlivosti v praxi

Ke zjištění alespoň orientační hodnoty koeficientu  $\gamma$  byla provedena anketa mezi studenty maturitního ročníku ( $n = 40$ ) jednoho gymnázia v Moravskoslezském kraji. Maturantům byla položena jediná otázka: „Jaká výše zápisného (za rok) v Kč by vás odradila od studia na vysoké škole?“.

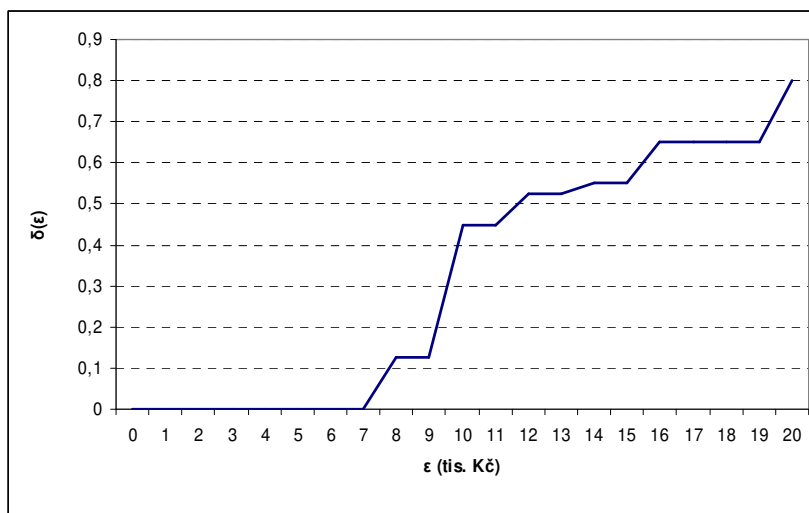
Odpovědi respondentů jsou znázorněny v Obrázku 2, empiricky zjištěná funkce citlivosti je na Obrázku 3. Bylo zjištěno, že průměrná výše ročního zápisného, která by maturanty odradila, je 15 800

Kč, medián byl 12 000 Kč a modus 10 000 Kč. Částka 6000 Kč by neodradila žádného z respondentů. Koeficient  $\gamma$  pro maximální roční zápisné 20 000 Kč činil 0,82. Tato vysoká hodnota naznačuje vysokou citlivost budoucích vysokoškolských studentů na výši zápisného, ačkoli k přesnějšímu stanovení koeficientu  $\gamma$  by samozřejmě musela být provedena mnohem rozsáhlejší a především reprezentativnější studie zahrnující i bohatší regiony České republiky (Prahu, Brno, apod.), kde je možné očekávat výrazně nižší citlivost studentů na výši zápisného než v Moravskoslezském kraji.

Prezentované výsledky ankety je proto třeba chápat především jako ilustraci toho, jak by bylo možné zjistit citlivost studentů na výši zápisného v praxi. Dále je možné správně namítnout, že výdaje na studium nesou rodiče, a ne samotní maturanti - uchazeči o studium, na druhou stranu maturanti jistě mají alespoň přibližnou představu, co si jejich rodiny (rodiče) mohou dovolit.



Obr. 2: Relativní četnosti odpovědí respondentů na otázku: „Jaká výše zápisného (za rok) v Kč by vás odradila od studia na vysoké škole?“



Obr. 3: Empiricky zjištěný průběh funkce citlivosti  $\delta(\epsilon)$ .

## 7. Omezení modelu, alternativní přístup k modelování výše zápisného

Prezentovaný model je založen na několika předpokladech uvedených v Kapitole 3, které zároveň reprezentují omezení modelu. První dva jmenované předpoklady jsou do jisté míry nerealistické, otázkou však je, jak by bylo možné je realisticky zahrnout do prezentovaného modelu, neboť zjištění počtu uchazečů rozhodnutých skutečně nastoupit na danou vysokou školu je obtížné, a zjištění počtu studentů, kteří v průběhu příštího akademického roku přestoupí z jiné školy nebo odejdou na jinou školu, je v podstatě nemožné. Některé z dalších předpokladů, jako je například předpoklad maximální výše zápisného, budou pravděpodobně realizovány v praxi. Předpoklad, že každý student dané vysoké školy bude platit stejné zápisné bez ohledu na obor nebo ročník, může být z modelu vypuštěn, pokud se v budoucnu ukáže, že tomu tak není. Až budou zatím nevyřešené otázky ohledně zápisného zodpovězeny, mohou být zahrnuty do modelu, který se tím stane přesnějším a v praxi užitečnějším.

Nejvýraznějším praktickým omezením prezentovaného modelu je tak určení koeficientu  $\gamma$ , který charakterizuje citlivost uchazečů na výši zápisného. Tento koeficient pro danou vysokou školu může být v principu určen dvěma způsoby:

- dotazníkovým šetřením mezi budoucími uchazeči o studium na dané vysoké škole (především mezi maturanty), jak bylo ukázáno v Kapitole 6,
- zjištěním skutečného poklesu uchazečů po zavedení zápisného (toto zjištění se pak využije ke stanovení nového zápisného pro příští rok).

Modelování příjmu vysokých škol po zavedení zápisného by bylo možné i pomocí teorie her a multiagentních systémů, viz např. [5]. Jednotlivé veřejné vysoké školy (nebo jejich skupiny či fakulty) by stanovovaly výši zápisného ve vazbě na ostatní (konkurenční) vysoké školy tak, aby maximalizovaly své příjmy. Tento přístup by vyžadoval analýzu konkurence mezi vysokými školami. Otázkou je, do jaké míry si české veřejné vysoké školy skutečně konkurují, neboť i přes demografický pokles a existenci více než 40 soukromých vysokých škol existuje na většině veřejných vysokých škol a oborů (s výjimkou oborů technických nebo přírodovědných) převis poptávky nad nabídkou, který je velmi výrazný zvláště u našich historicky nejstarších univerzit. Strategie jednotlivých vysokých škol by zahrnovaly různé výše zápisného, problémem by však mohlo být sestavení realistické výplatní matice pro všechny uvažované subjekty, zvláště pokud vezmeme v úvahu, že situace na „trhu“ vysokých škol se může každoročně výrazně měnit.

## 8. Závěr

I přes jistá omezení modelu zmíněná v Kapitolách 3 a 5 může být prezentovaný model velmi užitečný pro řadu veřejných vysokých škol pro stanovení optimální výše zápisného tak, aby celkové příjmy za nastupující studenty byly maximální. Nesprávně nastavená výše zápisného může způsobit vysoké škole finanční ztráty ve výši jednotek až desítek milionů korun ročně. Se zavedením zápisného však vyvstává řada dosud nevyřešených otázek. Není například jasné, zda budou zápisné platit i studenti opakující ročník nebo zahraniční studenti, zda bude zápisné povinné pouze pro studenty, kteří teprve nastoupí na vysokou školu, nebo i pro ty, kteří již nyní studují, zda se zápisné bude lišit na jednotlivých fakultách jedné vysoké školy, případně na různých oborech, apod. Až budou známy odpovědi na tyto a další otázky, je možné prezentovaný model dále zpřesnit a zdokonalit.

I proto lze prezentovaný model příjmu veřejných vysokých škol po zavedení zápisného chápat jako pokus o matematický popis možné budoucí ekonomické reality, která je sice bouřlivě diskutována v médiích a na půdě vysokých škol, avšak v odborném tisku jí byla věnována zatím jen malá pozornost.

## Literatura

- [1] BOSSHARDT, D. I. LICHTENSTEIN, L. ZAPOROWSKI, M. P. A Model Of College Tuition Maximization. *Contemporary Issues In Education Research*, 2009 Vol 2, No. ,1 s. 53 -70.
- [2] BOSSHARDT, D. I. LICHTENSTEIN, PALUMBO, G., L. ZAPOROWSKI, M. P et al. Optimization Techniques for College Financial Aid Managers, 2010, *Journal of Student Financial Aid*, 2010, vol. 40, No. 3, s. 39-57.
- [3] BRYAN, G.A., WHIPPLE, T. W. Tuition Elasticity of the Demand for Higher Education among Current Students: A Pricing Model. *The Journal of Higher Education*, 1995, Vol. 66, No. 5, s. 560-574.
- [4] CACUCI, D. G., *Sensitivity and Uncertainty Analysis: Theory, Volume I*, Chapman & Hall, 2003.

- [5] CAHLÍK, T., HLAVÁČEK, J., MARKOVÁ, J. Školné či dotace?: (simulace s modely systému vysokých škol). *Politická ekonomie*, 2008, roč. 56, č. 1, s. 54-66.
- [6] CHIANG, A. C., WAINWRIGHT, K. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th edition. New York: McGraw-Hill, 2005.
- [7] COREY, S. M. *The Trends In and Relationships Between Tuition Price, Institutional Aid, Enrollment, and Tuition Revenue and Their Determination of the Net Revenue Generated by Colleges and Universities from 1988 to 2000*. Diss. University of Arizona, 2007.
- [8] CRAVEN, B. D., ISLAM, S. M. N. 2005. Optimization in Economics and Finance: Some Advances in Non-Linear, Dynamic, Multi-Criteria and Stochastic Models. *Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance*, Vol. 7, 2005. ISBN 978-0-387-24279-8.
- [9] HAVELKA, S., LAGOVÁ, M., KOŘENÁŘ, V. *Matematické modely v ekonomii*. Ústí n. Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 1994.
- [10] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika 2*. Praha: Ekopress, 2003.
- [11] KUBIŠOVÁ, Z., LÁNSKÝ, O. Sociální důsledky zavedení školného na veřejných vysokých školách v ČR. 2012. [online]. [http://www.cssd.cz/data/files/socialni-dusledky-zavedeni-skolneho\\_1.pdf](http://www.cssd.cz/data/files/socialni-dusledky-zavedeni-skolneho_1.pdf), 1-33.
- [12] PLEVNÝ, M., ŽIŽKA, M. *Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování*. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity, 2010. ISBN: 978-80-7043-933-3.

**Title:** Modeling the optimal level of the enrollment fee at Czech public universities

**Abstract:** Public universities in the Czech Republic suffer from insufficient funding for many years. One possibility for an increased funding of Czech public universities is an introduction of a low administrative fee called enrollment fee for each semester of a study. The aim of this article is to show how to find the optimal level of the enrollment fee for a given university so the total revenue of a university for enrolling students is maximal. This is done via mathematical model encompassing parameters such as maximal enrollment fee, sensitivity of enrolling students to the level of the enrollment fee, the number of enrolling students, etc. By improperly adjusted enrollment fee a university can lose millions or tens of millions crowns per year. Thus, the determination of the optimal level of the enrollment fee has high practical value, as it enables a university to maximize its combined revenue from the enrollment fee and the number of enrolling students.

**Keywords:** Czech Republic, enrollment fee, mathematical modeling, optimization, total revenue, university.

**JEL:** C61, I22.

Informace o autorovi:

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.  
Slezská univerzita v Opavě  
Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné  
Katedra matematických metod v ekonomii  
Univerzitní nám. 1934/3  
733 40 Karviná  
Česká republika  
e-mail: mazurek@opf.slu.cz