



Munich Personal RePEc Archive

Optimal Portfolio and Structured Notes in alpha-stable Markets: a Risk Minimization Approach

Climent-Hernández, José Antonio and Venegas-Martínez,
Francisco and Ortiz-Arango, Francisco

Departamento de Administración, Universidad Autónoma
Metropolitana, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico
Nacional, Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales,
Universidad Panamericana

3 August 2014

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/57740/>
MPRA Paper No. 57740, posted 04 Aug 2014 12:09 UTC

Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados α -estables: un enfoque de minimización de riesgo

(Optimal Portfolio and Structured Notes in α -stable Markets: a Risk Minimization Approach)

José Antonio Climent-Hernández

Departamento de Administración, Universidad Autónoma Metropolitana
j.antonio.climent.h@gmail.com

Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Francisco Ortiz-Arango

Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Panamericana
fortizar@up.edu.mx

Resumen

Esta investigación estudia el problema de determinar un portafolio óptimo cuando los activos tienen rendimientos provenientes de distribuciones α -estables. El portafolio óptimo contiene un activo libre de riesgo y varios activos riesgosos, los cuales incluyen notas estructuradas. Se calculan los estadísticos básicos de los activos y se estiman los parámetros de la distribución α -estable de los rendimientos y la matriz de covariación a través de máxima verosimilitud. Por último, se muestra que al incluir notas estructuradas en el portafolio óptimo α -estable se obtiene mayor rendimiento, menor riesgo y mejor desempeño que el portafolio óptimo gaussiano.

Clasificación JEL: C46; C61; D81; G11.

Palabras clave: Portafolio óptimo, aversión al riesgo, medida de riesgo, distribución α -estable,

Abstract

This paper is aimed at studying the optimal portfolio problem when the assets have returns from α -stable distributions. The optimal portfolio contains a riskless asset and various risky assets, including structured notes. The basic statistics of the assets are calculated and both the α -stable distribution parameters and the covariation matrix are estimated through maximum likelihood. Finally, it is shown that by including structured notes in the α -stable optimal portfolio it is obtained higher returns, lower risk and better performance than Gaussian optimal portfolio.

JEL Classification: C46; C61; D81; G11.

Keywords: Optimal portfolio, risk aversion, risk measure, α -stable distribution.

1. Introducción

El análisis media-varianza, propuesto por Markowitz (1952), es una de las primeras teorías que se desarrollaron para el problema de selección de portafolios óptimos. Dicha selección se lleva a cabo con base en el rendimiento y la varianza del portafolio. Markowitz definió el riesgo del portafolio como la varianza del mismo. Uno de los supuestos de esta teoría es que los rendimientos provienen de una distribución gaussiana multivariada. No obstante, las conjeturas de Fama (1965a, 1963, 1965b) y Mandelbrot (1967, 1963) alejan la distribución empírica del mundo gaussiano. La evidencia empírica al respecto es amplia y algunos trabajos realizados, recientemente, en el marco de distribuciones α -estables son: Dostoglou y Rachev (1999), Čížek *et al.* (2005), Scalas y Kim (2006), Contreras-Piedragil y Venegas-Martínez (2011) y Climent-Hernandez y Venegas-Martínez (2013). En estas investigaciones se muestra la existencia de leptocurtosis y asimetría en los rendimientos y toman como una alternativa más realista y rica a la distribución α -estable para modelar la dinámica los rendimientos. Uno de los objetivos del presente trabajo consiste en examinar el problema de la toma de decisiones de portafolio óptimo de un inversionista cuando la incertidumbre de los mercados financieros es modelada a través de rendimientos α -estables y las decisiones se toman con base en la minimización del riesgo.¹

El objetivo principal de esta investigación es analizar el problema de portafolio óptimo de n activos con riesgo y un activo libre de riesgo extendiendo la investigación realizada por Ortobelli *et al.* (2004) al caso multivariado. En particular, los activos en el portafolio son el dólar spot, el futuro sobre el dólar americano y el contrato de opción europeas sobre el contrato futuro del tipo de cambio spot; los precios de estos dos últimos son tomados del MexDer.²

Este trabajo está organizado de la forma siguiente: en la sección 2 se presentan los vectores aleatorios α -estables, el modelo α -estable, la covariación, el proceso aleatorio α -estable y la matriz de covariación; en la sección 3, se describen las características estadísticas de los activos y se realiza la estimación de los parámetros α -estables; en la sección 4, se plantea el modelo media-dispersión y la estimación de la matriz de covariación y el portafolio óptimo α -estable; en la sección 5 se construyen productos estructurados sobre una opción sintética de venta en posición corta y sobre la cobertura de

¹ Otras investigaciones que utilizan rendimientos α -estables en el problema de decisión de un inversionista racional maximizador de utilidad son: Ortobelli *et al.* (2002), Rachev *et al.* (2003), Tokata *et al.* (2003), Ortobelli *et al.* (2004), Rachev *et al.* (2004), Ortobelli *et al.* (2005a), y Ortobelli, *et al.* (2005b).

² Un análisis de inversionistas racionales en mercados incompletos (ausencia de instrumentos de cobertura) se encuentra en Venegas-Martínez y González-Aréchiga (2000).

compra a la alza; y por último en la sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo de investigación.

2. Portafolio óptimo en mercados α -estables

A continuación se presentan las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo y la aplicación de portafolios óptimos en mercados α -estables.

2.1 Vectores aleatorios α -estables

Definición 1. (Vector aleatorio α -estable). Se dice que $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio α -estable si la sucesión de variables aleatorias $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son copias independientes e idénticas de \mathbf{X} , y para todo $n \geq 2$ existe $\alpha \in (0, 2]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_k \stackrel{d}{=} c_n \mathbf{X} + \mathbf{D}_n \quad (1)$$

donde las constantes de escala satisfacen $c_n = n^{1/\alpha}$ y $\mathbf{D}_n \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2. (Vector aleatorio estrictamente α -estable). Se dice que $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio estrictamente α -estable si la sucesión de variables aleatorias $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son copias independientes e idénticas de \mathbf{X} , y para todo $n \geq 2$ existe $\alpha \in (0, 2]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_k \stackrel{d}{=} c_n \mathbf{X} \quad (2)$$

donde las constantes satisfacen $c_n = n^{1/\alpha}$.

Definición 3. (Vector aleatorio α -estable simétrico). Se dice que $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio α -estable simétrico si es un vector α -estable y además satisface $\mathcal{P} \mathbf{X} \in \mathcal{B} \mathbb{R}^n = \mathcal{P} -\mathbf{X} \in \mathcal{B} \mathbb{R}^n$ en el espacio medible $\mathcal{B} \mathbb{R}^n, \mathcal{P}$ donde $\mathcal{B} \mathbb{R}^n$ es la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R}^n .

Teorema 1. (Combinación lineal de las componentes de \mathbf{X}). Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vector α -estable, entonces existen $\alpha \in (0, 2]$, $a, b, c \in \mathbb{R}_{++}$ y un vector, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} c\mathbf{X} + \mathbf{D} \quad (3)$$

donde $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. Más generalmente, cualquier combinación lineal $Y = \langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle$ es una variable α -estable y la función $\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es el producto escalar de los vectores \mathbf{b} y \mathbf{X} tal que:

$$Y = \langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{b} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}' \mathbf{X} = \sum_{k=1}^n b_k X_k = b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n \quad (4)$$

Las distribuciones conjuntas α -estables, usualmente, no tienen una expresión analítica cerrada, entonces es necesario representar de forma única a cualquier vector aleatorio α -estable $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ a través de la función característica conjunta $\Phi_{X_1, \dots, X_n}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, entonces la función característica $\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\kappa})$ del vector aleatorio α -estable $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es:

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\kappa}) = \Phi_{X_1, \dots, X_n}(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{X} \rangle}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i \sum_{k=1}^n \kappa_k X_k\right)\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\boldsymbol{\kappa}'\mathbf{X}}\right)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.

Teorema 2. (Función característica de un vector aleatorio α -estable). Sea $\alpha \in (0, 2)$, entonces $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio α -estable si y sólo si existe una medida finita Γ sobre la esfera unitaria $S_n \in \mathbb{R}^n$ y un vector de localización $\mathbf{D} = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\kappa}) = \begin{cases} \exp\left(-\int_{S_n} |\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha (1 - \operatorname{sgn}(\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle) \tan(\theta)) \Gamma(d\mathbf{s}) + i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{D} \rangle\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\int_{S_n} |\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle| \left(1 - i \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle) \ln(\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle)\right) \Gamma(d\mathbf{s}) + i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{D} \rangle\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

donde la representación espectral $\langle \Gamma, \mathbf{D} \rangle$ del vector aleatorio α -estable $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es única y Γ es la medida espectral del vector aleatorio α -estable $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 4. (Función de cumulantes de un vector aleatorio α -estable). Un vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable si y sólo si la función de cumulantes del vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es:

$$\Psi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\kappa}) = \ln(\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\kappa})) = \begin{cases} -\int_{S_n} |\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha (1 - \operatorname{sgn}(\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle) \tan(\theta)) \Gamma(d\mathbf{s}) + i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{D} \rangle & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\int_{S_n} |\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle| \left(1 - i \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle) \ln(\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s} \rangle)\right) \Gamma(d\mathbf{s}) + i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{D} \rangle & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (6)$$

2.2 El modelo α -estable para la selección óptima de portafolios

Proposición 1. (Parámetros α -estables de la combinación lineal) Si $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio α -estable con $\alpha \in (0, 2)$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, entonces la combinación lineal $X = \langle \mathbf{w}, \mathbf{X} \rangle \sim S_1(\alpha, \beta_X, \gamma_X, \delta_X)$.

Sea $\tau \in \mathbb{R}$ y sea $\boldsymbol{\kappa} = \tau \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, entonces la función de cumulantes de la variable aleatoria X es:

$$\begin{aligned} \Psi_X(\boldsymbol{\kappa}) &= \ln(\Phi_X(\boldsymbol{\kappa})) \\ &= \begin{cases} -|\tau|^\alpha \left(\int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s}) - i \operatorname{sgn}(\tau) \tan(\theta) \int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \operatorname{sgn}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle) \Gamma(d\mathbf{s}) \right) + i\tau \langle \mathbf{w}, \mathbf{D} \rangle, \\ -|\tau| \left(\int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle| \Gamma(d\mathbf{s}) + i \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(\tau) \int_{S_n} \langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle \ln(|\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|) \Gamma(d\mathbf{s}) \right) + i\tau \langle \mathbf{w}, \mathbf{D} \rangle. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} \gamma_X &= \left(\int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s}) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \beta_X &= \frac{\int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \operatorname{sgn}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle) \Gamma(d\mathbf{s})}{\int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s})}, \\ \delta_X &= \begin{cases} \langle \mathbf{w}, \mathbf{D} \rangle & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{D} \rangle - \frac{\pi}{2} \int_{S_n} \langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle \ln(|\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|) \Gamma(d\mathbf{s}) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Si los rendimientos se suponen α -estables multivariados con índice de estabilidad $\alpha \in (0, 2)$, entonces

$E(\mathbf{X}) = \mathbf{D}$ y $\mathbf{X} - \mathbf{D} \sim S(\alpha, 0, \gamma, 0)$, es decir $\mathbf{X} - \mathbf{D}$ tiene una distribución α -estable simétrica.

Sea \mathbf{w} el vector de diversificación de los recursos para el portafolio $X = \langle \mathbf{w}, \mathbf{X} \rangle$. A través del parámetro de escala γ_X de la distribución α -estable representado por la ecuación (8) se tiene problema de optimización de portafolio α -estable siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{\mathbf{w}} \gamma_X^\alpha &= \int_{S_n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s}) \\ \text{sujeto a:} & \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle &= 1, \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{D} \rangle &\geq a. \end{aligned} \quad (9)$$

Definición 5. (Vector aleatorio α -estable simétrico subordinado). Se dice que el vector aleatorio $\mathbf{X} = \sqrt{A}\mathbf{G} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable simétrica para $\alpha \in (0, 2)$ si A es una variable aleatoria $\alpha/2$ -estable extrema positiva con $\alpha \in (0, 2)$ y tal que

$$A \sim S\left(\frac{\alpha}{2}, 1, \cos^\alpha\left(\frac{\theta}{2}\right), 0\right). \quad (10)$$

Si A es independiente del vector aleatorio $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_n) \in \mathbb{R}^n$ con una distribución gaussiana multivariada con media nula y matriz de covarianza Σ tal que $\mathbf{G} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$, entonces se dice que \mathbf{X} está subordinado a \mathbf{G} .

Proposición 2. (Función de cumulantes de un vector aleatorio α -estable simétrico). El vector aleatorio α -estable simétrico $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ subordinado a $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^n$ tiene la siguiente función de cumulantes:

$$\Psi_X(\boldsymbol{\kappa}) = \ln(\Phi_X(\boldsymbol{\kappa})) = - \left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \kappa_j \kappa_k R_{jk} \right|^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (11)$$

2.3 Covariación

La covarianza no está definida en general para las distribuciones α -estables, pero se puede definir el concepto de covariación para $\alpha > 1$.

Definición 6. (Covariación). Sean (X_1, \dots, X_n) variables aleatorias conjuntas α -estables simétricas donde $\alpha > 1$ y Γ la medida espectral del vector aleatorio $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, entonces la covariación de X_j sobre X_k es una función $\text{cov}_\alpha(X_j, X_k): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{cov}_\alpha(X_j, X_k) = \int_{S_n} s_j s_k^{(\alpha-1)} \Gamma(d\mathbf{s}) \quad (12)$$

donde

$$s_k^{(\alpha-1)} = |s_k|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(s_k) = \begin{cases} s_k^{\alpha-1} & \text{si } s_k \geq 0, \\ |s_k|^{\alpha-1} & \text{si } s_k < 0. \end{cases}$$

Lema 1. (Covariación de variables aleatorias α -estables). Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio α -estable simétrico con $\alpha > 1$, medida espectral Γ y sean $Y = \langle \mathbf{a}, \mathbf{X} \rangle$ y $Z = \langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle$, entonces:

$$\operatorname{cov}_\alpha(Y, Z) = \int_{S_n} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{s} \rangle^{(\alpha-1)} \Gamma(d\mathbf{s}) . \quad (13)$$

Lema 2. (Covariación y el momento conjunto). Sean $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ variables aleatorias conjuntas α -estables simétricas con $\alpha > 1$, entonces para toda $p \in (1, \alpha)$:

$$\frac{\operatorname{cov}_\alpha(X_j, X_k)}{\|X_k\|_\alpha^\alpha} = \frac{\mathbb{E}(X_j X_k^{(p-1)})}{\mathbb{E}|X_k|^p} . \quad (14)$$

Proposición 3. (El momento conjunto y el parámetro de escala). Sea $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ con $\alpha \in (0, 2)$, entonces para toda $p \in (0, \alpha)$ existe una constante $c(\alpha, \beta, p)$ tal que:

$$\mathbb{E}^{\frac{1}{p}} |X|^p = c(\alpha, \beta, p) \gamma \quad (15)$$

donde

$$c^p(\alpha, \beta, p) = \mathbb{E}|Y|^p = \begin{cases} \frac{2^{p-1} \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{p \int_0^\infty u^{-p-1} \sin^2(u) du} \left(1 + \beta^2 \tan^2(\theta)\right)^{\frac{p}{2\alpha}} \cos\left(\frac{p}{\alpha} \arctan(\beta \tan(\theta))\right) & \text{si } \beta \neq 0, \\ \frac{2^{p-1} \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{p \int_0^\infty u^{-p-1} \sin^2(u) du} & \text{si } \beta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Aquí, $X \stackrel{d}{=} \gamma Y$ e $Y \sim S(\alpha, \beta, 1, 0)$.

2.4 Proceso estocástico α -estable

Definición 7. (Proceso estocástico α -estable). Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ es α -estable si todas sus distribuciones de dimensión finita son α -estables.

Proposición 4. (Representación integral del proceso estocástico α -estable). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad donde $\{G_t\}_{t \in T}$ está definido y M es una medida aleatoria α -estable simétrica en el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) con medida de control \mathcal{P} , entonces el proceso X_t subordinado al proceso gaussiano G_t tiene la representación integral siguiente:

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2} d_\alpha} \int_\Omega G(t, x) M(dx) \quad (17)$$

donde $d_\alpha = E(|Z|^\alpha)$ con $Z \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ y además:

i) La integral estocástica está definida ya que $\int_\Omega |G(t, x)| \mathcal{P}(dx) = E(|G_t|^\alpha) < \infty$.

ii) Cualquier variable aleatoria $G \sim N(0, \sigma^2)$ satisface $E(|G|^\alpha) = E\left(\left|\frac{G}{\sigma}\right|^\alpha\right) \sigma^\alpha = d_\alpha E^{\frac{\alpha}{2}}(|G|^2)$.

iii) Y además $d_\alpha = E(|Z|^\alpha) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$.

2.5 Matriz de dispersión

Lema 3. (Matriz de covariación). Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio estrictamente α -estable con $\alpha \in (1, 2)$ y $p \in [0, \alpha)$, entonces

$$\gamma_{kk}^p = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{2^p \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} E(|X_k|^p) \quad (18)$$

y para toda $p \in [1, \alpha)$

$$\gamma_{jk}^2 = \gamma_{kk}^{2-p} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{2^p \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \mathbf{E}\left(X_j X_k^{(p-1)}\right). \quad (19)$$

Si $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces para toda $p \in [0, 2]$

$$\sigma_{kk}^p = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \mathbf{E}\left(|X_k|^p\right) \quad (20)$$

y para toda $p \in [1, 2]$

$$\sigma_{jk}^2 = \sigma_{kk}^{2-p} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{2^{\frac{3-p}{4}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \mathbf{E}\left(X_j X_k^{(p-1)}\right). \quad (21)$$

Si se supone que el vector de rendimientos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable con $\alpha \in (1, 2)$, entonces por la Proposición 1, la función característica de $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ tiene la representación siguiente:

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{E}\left(e^{i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{X} \rangle}\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\langle \langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{Q} \rangle, \boldsymbol{\kappa} \rangle^{\frac{\alpha}{2}} + i\langle \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{D} \rangle\right)\right) \quad (22)$$

donde $\mathbf{Q} = (\gamma_{jk}^2)$ es una matriz definida positiva de $n \times n$ y $\mathbf{D} = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de localización. En consecuencia, el rendimiento del portafolio es la combinación lineal del rendimiento libre de riesgo r_0 y los rendimientos con riesgo $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^t \in \mathbb{R}^n$, es decir $\langle \mathbf{w}, \mathbf{r} \rangle + w_0 r_0$ donde $(w_0, \mathbf{w}), (r_0, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, entonces el comportamiento de los valores extremos de la distribución de los rendimientos implica que el vector de rendimientos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ se encuentra en el dominio de atracción de una ley α -estable n -dimensional y se puede suponer que el rendimiento del portafolio es:

$$X = \langle \mathbf{w}, \mathbf{r} \rangle + r_0 (1 - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle) = \mathbf{w}^t \mathbf{r} + r_0 (1 - \mathbf{w}^t \mathbf{e}) \stackrel{d}{=} S(\alpha, \beta_X, \gamma_X, \mathbf{E}(X)) \quad (23)$$

donde $\alpha \in (0, 2)$ es el parámetro de estabilidad, $\beta_X = 0$ es el parámetro de asimetría, $\gamma_X = \sqrt{\langle \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q} \rangle, \mathbf{w} \rangle}$ es el parámetro de escala y $\mathbf{E}(X) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle + r_0 (1 - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle)$.

Teorema 3. (Problema de optimización). Si el vector de rendimientos con riesgo $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable subgaussiana con $\alpha \in (1, 2)$, entonces el rendimiento esperado del portafolio $E(X)$ es una combinación lineal tal que $E(X) = \langle \mathbf{w}, E(\mathbf{r}) \rangle + r_0(1 - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle)$ y se tiene el problema de optimización siguiente:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{w}}{\text{Minimizar}} \gamma_X^2 = \langle \langle \mathbf{w}, \mathbf{Q} \rangle, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}' \mathbf{Q} \mathbf{w} \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle + w_0 = 1, \\ & \quad E(X) = m_X. \end{aligned} \tag{24}$$

donde $E(X) = \langle \mathbf{w}, E(\mathbf{r}) \rangle + r_0(1 - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle) = m_X$ y la medida de riesgo $\gamma_X = \gamma_{\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle}$ es una función convexa de $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, cada portafolio óptimo pertenece a la frontera media-dispersión:

$$\gamma_X = \begin{cases} \frac{m_X - r_0}{\sqrt{Ar_0^2 - 2Br_0 + C}} & \text{si } m_X \geq r_0 \\ \frac{r_0 - m_X}{\sqrt{Ar_0^2 - 2Br_0 + C}} & \text{si } m_X < r_0 \end{cases} \tag{25}$$

para alguna $p \in [1, \alpha)$.

Es importante destacar que existe consistencia, como lo muestran Ortobelli *et al.* (2005a), Venegas-Martínez (2008) y Venegas-Martínez y Rodríguez-Nava (2009), entre los inversionistas que desean minimizar la dispersión de los rendimientos y los inversionistas racionales que desean maximizar una función de utilidad cóncava U .

Teorema 4. (Problema de asignación óptima). Si el vector de rendimientos con riesgo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable subgaussiana con $\alpha \in (1, 2)$ y cada portafolio con riesgo $X_R = \langle \mathbf{w}, \mathbf{r} \rangle$ es tal que $X_R \sim S(\alpha, \beta_R, \gamma_R, m_R)$, entonces el rendimiento esperado del portafolio $E(X)$ es una combinación lineal tal que $E(X) = (1 - \lambda) \langle \mathbf{w}, E(\mathbf{r}) \rangle + \lambda r_0$ y $X \sim S(\alpha, 0, |1 - \lambda| \gamma_R, |1 - \lambda| m_R + \lambda r_0)$, por lo tanto se tiene el problema de asignación óptima siguiente:

$$\begin{aligned}
& \underset{\lambda}{\text{Maximizar}} U(X) = E(X) = (1 - \lambda m_R) + \lambda r_0 \\
& \text{sujeto a} \\
& \langle \mathbf{w}, \mathbf{e} \rangle + w_0 = 1, \\
& b E(|X - E(X)|^p) = q.
\end{aligned} \tag{26}$$

donde $b \in \mathbb{R}_{++}$, $p \in (1, \alpha)$ es la potencia de la medida de riesgo, $q \in \mathbb{R}_{++}$ es la tolerancia para la medida de riesgo.

A partir del Teorema 3 se tiene que el portafolio óptimo tiene la diversificación de recursos:

$$\lambda = \frac{m_X - r_0}{Ar_0^2 - 2Br_0 + C} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \left\langle \left\langle \frac{m_X - r_0}{Ar_0^2 - 2Br_0 + C}, \mathbf{Q}^{-1} \right\rangle, \mathbf{E}(\mathbf{r}) - r_0 \mathbf{e} \right\rangle \tag{27}$$

donde

$$A = \left\langle \langle \mathbf{e}^t, \mathbf{Q}^{-1} \rangle, \mathbf{e} \right\rangle \quad B = \left\langle \langle \mathbf{e}^t, \mathbf{Q}^{-1} \rangle, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right\rangle \quad \text{y} \quad C = \left\langle \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}^t), \mathbf{Q}^{-1} \rangle, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right\rangle \tag{28}$$

Con base en el Teorema 4 se tiene que la asignación óptima para los inversionistas racionales es

$$\mathbf{w} = (1 - \lambda) \frac{\langle \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) - r_0 \mathbf{e} \rangle}{B - r_0 A} \tag{29}$$

donde

$$\lambda = \begin{cases} 1 - \left(\frac{m_R - r_0}{\text{sgn}(1 - \lambda) b c^p (\alpha, p) \gamma_R^p} \right)^{\frac{1}{p-1}} & \text{si } m_R \geq r_0, \\ 1 + \left(\frac{m_R - r_0}{\text{sgn}(1 - \lambda) b c^p (\alpha, p) \gamma_R^p} \right)^{\frac{1}{p-1}} & \text{si } m_R < r_0. \end{cases} \tag{30}$$

y

$$c^p(\alpha, p) = \begin{cases} \frac{2^p \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)} & \text{si } \alpha \in (1, 2), \\ \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} & \text{si } \alpha = 2. \end{cases} \quad (31)$$

La matriz de covariación se puede estimar a través de las ecuaciones (18) y (19) para el caso α -estable y a través de las ecuaciones (20) y (21) para el caso α -estable gaussiano.

3. Portafolio óptimo α -estable

Ortobelli *et al.* (2002), Ortobelli *et al.* (2004) y Rachev *et al.* (2004) comparan el supuesto de distribución α -estable con el supuesto de distribución gaussiano considerando el problema de asignación óptima con las dos posiciones siguientes: un activo con riesgo y un activo libre de riesgo, utilizando los índices S&P500, DAX30 y CAC40.

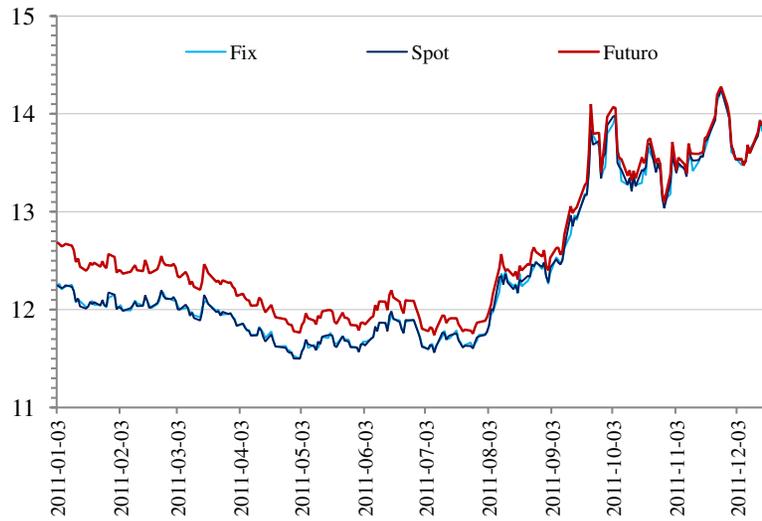
3.1 Activos con riesgo

En la investigación presente se consideran los 19 activos con riesgo siguientes:

1. El precio del dólar americano fix del 3 de enero de 2011 al 19 de diciembre de 2011.
2. El precio del dólar americano spot del 3 de enero de 2011 al 19 de diciembre de 2011.
3. El futuro sobre el dólar americano negociado en el MexDer del 3 de enero de 2011 con fecha de vencimiento el 19 de diciembre de 2011 (350 días de plazo).
4. El precio de mercado de 16 opciones europeas de compra sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot negociadas en el MexDer del 3 de enero de 2011 con fecha de vencimiento el 19 de diciembre de 2011.

Los tipos de cambio fix y spot, y el futuro sobre el tipo de cambio spot se pueden observar en la gráfica 1.

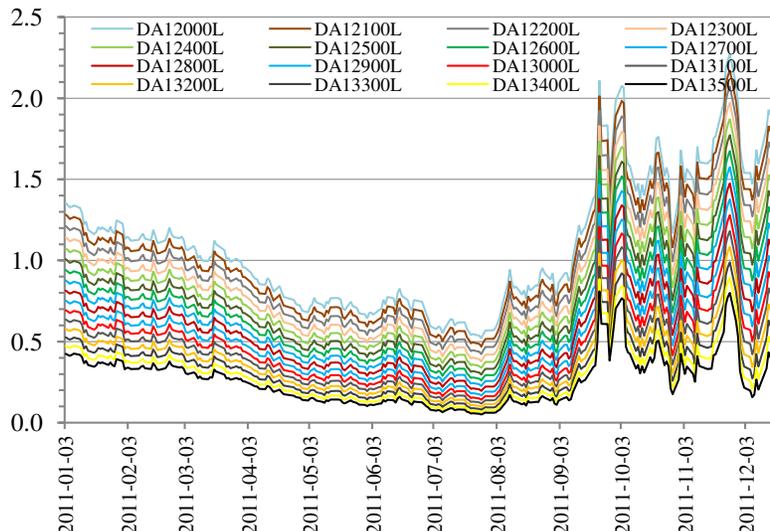
Gráfica 1. Tipos de cambio fix y spot, y el futuro sobre el tipo de cambio spot



Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En la Gráfica 1 se puede observar el comportamiento de los tipos de cambio fix y spot, así como el futuro sobre el tipo de cambio spot negociado en el MexDer. El tipo de cambio fix tiene una correlación positiva de 0.8377 con respecto al tipo de cambio spot y una correlación positiva de 0.8331 con respecto al futuro sobre el tipo de cambio spot, así mismo el tipo de cambio spot tiene una correlación positiva de 0.9562 con respecto al futuro sobre el tipo de cambio spot. El precio de mercado de las opciones europeas de compra sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot serie L negociadas en el MexDer se pueden observar en la gráfica 2.

Gráfica 2. Precio de mercado de las opciones sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot serie L



Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En la Gráfica 2 se puede observar el comportamiento del precio de mercado de las opciones sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot serie L negociadas en el MexDer. El tipo de cambio spot tiene una correlación positiva y monótona decreciente con valores desde 0.9293 hasta 0.9012 con respecto a las opciones desde la clave DA12000L hasta la clave DA13500L y el futuro sobre el tipo de cambio spot tiene una correlación positiva y monótona decreciente con valores desde 0.9701 hasta 0.9414 con respecto a las opciones desde la clave DA12000L hasta DA13500L. Las opciones serie L están dentro del dinero en la fecha de vencimiento y únicamente las opciones DA13400L y DA13500L generan pérdidas netas para los inversionistas con la posición larga.

3.2 Estadísticos básicos del rendimiento subyacente

Para modelar las características del rendimiento subyacente de los 19 activos con riesgo se realiza la estimación de los parámetros α -estables a través del método de estimación de verosimilitud máxima mediante el programa STABLE.EXE³. El periodo hábil utilizado para en la estimación de los parámetros α -estables es el que comprendido entre el 3 de enero de 2011 al 19 de diciembre de 2011 con 243 observaciones para cada subyacente. Los estadísticos básicos de los rendimientos se presentan en el cuadro siguiente:

Cuadro 1. Estadísticos básicos de los rendimientos subyacentes con riesgo

Subyacente	Nulos	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	Asimetría	Curtosis
Fix	0	-0.024947	0.035701	0.000506030	0.0076810	0.62032	6.9052
Spot	0	-0.035084	0.031094	0.000508450	0.0081978	0.21594	6.0560
Futuro	1	-0.032397	0.036458	0.000367420	0.0083261	0.20572	6.0865
DA12000L	0	-0.022394	0.245510	0.001319700	0.0646450	0.34050	5.2387
DA12100L	0	-0.233580	0.255460	0.001315600	0.0675610	0.33931	5.2536
DA12200L	0	-0.243900	0.266080	0.001307700	0.0707010	0.33801	5.2686
DA12300L	0	-0.254950	0.277370	0.001295300	0.0740960	0.33665	5.2817
DA12400L	0	-0.266800	0.289350	0.001276800	0.0777740	0.33646	5.2977
DA12500L	0	-0.279510	0.302070	0.001250800	0.0817630	0.33667	5.3131
DA12600L	0	-0.293160	0.315840	0.001215100	0.0861030	0.33749	5.3294
DA12700L	0	-0.307830	0.330480	0.001167100	0.0908330	0.33793	5.3415
DA12800L	0	-0.323610	0.346010	0.001103300	0.0959960	0.33876	5.3547
DA12900L	0	-0.340600	0.362450	0.001019100	0.1016500	0.34018	5.3708
DA13000L	0	-0.358910	0.380480	0.000907650	0.1078800	0.34203	5.3898

³ Programa desarrollado por John P. Nolan disponible en <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>.

DA13100L	0	-0.378670	0.399610	0.000759690	0.1147800	0.34478	5.4124
DA13200L	0	-0.400000	0.419810	0.000561320	0.1224000	0.34789	5.4467
DA13300L	0	-0.423430	0.441450	0.000291250	0.1308700	0.35125	5.4924
DA13400L	0	-0.463310	0.465220	-0.000085399	0.1403600	0.35200	5.5512
DA13500L	0	-0.517800	0.496810	-0.000630490	0.1509700	0.34677	5.6387

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer y el programa STABLE.EXE

En el Cuadro 1 el promedio positivo (negativo) indica que el subyacente se aprecia (deprecia) con respecto al peso mexicano, por lo que el peso mexicano presenta una tasa de depreciación con respecto a los tipos de cambio fix y spot, con respecto al futuro sobre el tipo de cambio spot y con respecto a las opciones DA12000L-DA13300L y presenta una tasa de apreciación con respecto a las opciones europeas DA13400L-DA13500L. Además, el coeficiente asimetría positivo (negativo) indica que el rendimiento tiene una distribución que se extiende hacia valores positivos (negativos) con mayor frecuencia que hacia los valores negativos (positivos). El coeficiente de curtosis positivo (negativo) significa que la distribución del rendimiento es leptocúrtica (platicúrtica) con respecto a la distribución gaussiana. Por lo cual los rendimientos de los tipos de cambio, del futuro sobre el tipo de cambio spot y las opciones europeas de compra presentan asimetría positiva y las distribuciones de todos los rendimientos son leptocúrticas.

3.3 Estimación de los parámetros α -estables

El programa STABLE.EXE analiza la serie de tiempo del rendimiento subyacente a través del método de verosimilitud máxima y los parámetros estimados se presentan en el cuadro siguiente:

Cuadro 2: Estimación de parámetros α -estables de los rendimientos subyacentes con riesgo

Subyacente	μ	σ	α	β	γ	δ
Fix	0.0005	0.0077	1.6186	0.3027	0.0040	0.0007
Spot	0.0005	0.0082	1.4432	0.5413	0.0039	0.0016
Futuro	0.0004	0.0083	1.4003	0.5515	0.0039	0.0019
DA12000L	0.0013	0.0646	1.4353	0.5527	0.0314	0.0109
DA12100L	0.0013	0.0676	1.4337	0.5495	0.0327	0.0114
DA12200L	0.0013	0.0707	1.4324	0.5453	0.0341	0.0117
DA12300L	0.0013	0.0741	1.4312	0.5405	0.0356	0.0121
DA12400L	0.0013	0.0778	1.4296	0.5349	0.0373	0.0125
DA12500L	0.0013	0.0818	1.4278	0.5280	0.0390	0.0129
DA12600L	0.0012	0.0861	1.4268	0.5197	0.0410	0.0133
DA12700L	0.0012	0.0908	1.4255	0.5103	0.0431	0.0136
DA12800L	0.0011	0.0960	1.4237	0.4985	0.0453	0.0138
DA12900L	0.0010	0.1017	1.4205	0.4833	0.0477	0.0141

DA13000L	0.0009	0.1079	1.4159	0.4653	0.0504	0.0142
DA13100L	0.0008	0.1148	1.4076	0.4436	0.0531	0.0145
DA13200L	0.0006	0.1224	1.3945	0.4146	0.0560	0.0146
DA13300L	0.0003	0.1309	1.3764	0.3844	0.0588	0.0149
DA13400L	-0.0001	0.1404	1.3574	0.3591	0.0619	0.0155
DA13500L	-0.0006	0.1510	1.3348	0.3343	0.0651	0.0165

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer y el programa STABLE.EXE

Los parámetros de estabilidad y asimetría del Cuadro 2 para los rendimientos de los tipos de cambio fix y spot, y los rendimientos de las opciones con las claves DA12000L-DA13500L son consistentes con los resultados obtenidos por Dostoglou y Rachev (1999), Ortobelli *et al.* (2002), Rachev *et al.* (2003), Ortobelli *et al.* (2004), Rachev *et al.* (2004), Čížek *et al.* (2005), Ortobelli *et al.* (2005a), Scalas y Kim (2006), Contreras-Piedragil y Venegas-Martínez (2011) y Climent-Hernandez y Venegas-Martínez (2011). El parámetro de estabilidad indica que la función de distribución del rendimiento es leptocúrtica y el parámetro de asimetría positivo (negativo) indica que la distribución del rendimiento tiene el extremo derecho (izquierdo) más pesado que el extremo izquierdo (derecho). Por lo anterior los rendimientos de los tipos de cambio, el futuro sobre el tipo de cambio spot y las opciones europeas de compra presentan leptocurtosis monótona decreciente para los tipos de cambio y el futuro sobre el tipo de cambio spot con parámetros de estabilidad con valores desde 1.6186 hasta 1.4003 respectivamente y leptocurtosis monótona decreciente para las opciones europeas de compra con las claves DA12000L hasta DA13500L con parámetros de estabilidad con valores desde 1.4353 hasta 1.3574 y los 19 rendimientos subyacentes presentan parámetros de asimetría positivos.

4. El modelo media-dispersión

La primera diferencia entre el modelo media-varianza y el modelo media-dispersión se debe a que bajo el supuesto de que los rendimientos subyacentes tienen una distribución conjunta gaussiana con un parámetro de estabilidad único $\alpha = 2$, en cambio la distribución conjunta $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -estable tiene n parámetros de estabilidad, por lo que se puede suponer que el vector de rendimientos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable subgaussiana, con $\alpha = \alpha_k$ para $k = 1, 2, 3$, donde $\alpha_1 = \min(\alpha_k) = 1.3348$ representa el mínimo de los parámetros de estabilidad de los rendimientos, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_k = 1.4229$ representa el promedio de los parámetros de estabilidad de los rendimientos y $\alpha_3 = \max(\alpha_k) = 1.6186$ representa el máximo de los parámetros de estabilidad.

4.1 La matriz de covariación

Por el Lema 3, la matriz de covariación Q_k para los valores $k=1,2,3,4$ depende de los parámetros de estabilidad $\alpha_k \in (0,2]$ y de p_k para $k=1,2,3,4$ donde $p_1=1.33$, $p_2=1.42$, $p_3=1.61$ y $p_4=2$.

El portafolio óptimo entre los 20 activos, de los cuales 19 son tienen los rendimientos $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ y el activo libre de riesgo r_0 es una tasa instantánea anual del 5.0793% anual. Para obtener el portafolio óptimo se utilizan los datos de los días hábiles a partir del 3 de enero de 2011 al 19 de diciembre de 2011 y se considera el método de estimación de verosimilitud máxima de los parámetros α -estables del Cuadro 2.

Para analizar las distribuciones conjuntas α -estables subgaussianas y las distribuciones conjuntas gaussianas para los rendimientos subyacentes de los 19 son activos con riesgo se hace el supuesto de que el vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ tiene una distribución α -estable subgaussiana con $\alpha = \alpha_k$ para $k=1,2,3,4$, donde los parámetros de estabilidad son $\alpha_1=1.3348$, $\alpha_2=1.4229$, $\alpha_3=1.6186$ y $\alpha_4=2$ por lo cual, cada portafolio $X_R \sim S(\alpha_k, \beta_R, \gamma_R, m_R)$ donde α_k representan los parámetros de estabilidad, $\beta_R=0$ es el parámetro de asimetría, $\gamma_R = \sqrt{\langle \langle \mathbf{w}, Q_k \rangle, \mathbf{w} \rangle}$ es el parámetro de escala, m_R es la media de X_R y Q_k es la matriz de dispersión que depende del parámetro de estabilidad α_k y de p_k .

4.2 Portafolio óptimo α -estable

Los inversionistas racionales que desean resolver el problema de optimización planteado a través del Teorema 3 obtienen la diversificación de recursos siguiente:

Cuadro 3. Portafolio óptimo en mercados α -estables

Subyacente	$\alpha_1=1.3348$	$\alpha_2=1.4229$	$\alpha_3=1.6186$	$\alpha_4=2$
Fix	0.1751	0.1100	0.1078	0.2067
Spot	0.2320	0.3280	0.4201	0.4667
Futuro	-0.1815	-0.2157	-0.2261	-0.2229

DA12000L	6.2455	7.5843	7.5794	7.8950
DA12100L	-1.1853	-3.8822	-5.6859	-8.0921
DA12200L	-4.0903	-4.1395	-3.3819	-3.1230
DA12300L	-7.5312	-4.4792	-1.0726	3.6385
DA12400L	8.0980	6.2509	3.3553	-0.1137
DA12500L	1.1522	0.5027	0.2451	0.3062
DA12600L	-1.2967	0.4550	0.2729	0.0419
DA12700L	-1.0329	-2.2762	-0.2457	2.3603
DA12800L	-0.1799	0.3196	-0.8647	-3.3963
DA12900L	-4.1290	-3.8351	-2.8357	-1.4122
DA13000L	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
DA13100L	6.4217	5.6444	3.2819	0.4843
DA13200L	-3.1106	-2.9271	-1.1781	1.3626
DA13300L	2.8121	2.9845	2.5088	1.8751
DA13400L	-1.4206	-1.5112	-1.2320	-0.9625
DA13500L	-0.5620	-0.4892	-0.5858	-0.7486
w_0	0.5833	0.5761	0.5372	0.4340

E(X)	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
γ	0.0001	0.0001	0.0002	0.0034
ρ	12.2608	12.8259	3.2051	0.1991

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En el Cuadro 3 se presenta la diversificación de recursos de los 19 activos con riesgo y el activo libre de riesgo cuando las ventas en corto están permitidas. El portafolio óptimo para el tipo de cambio fix tiene una inversión monótona decreciente por la posición larga para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con 45.87% para α_1 , 34.73% para α_2 y 34.27% para α_3 . El portafolio óptimo para el tipo de cambio spot tiene una inversión monótona creciente por la posición larga para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con 33.21% para α_1 , 41.27% para α_2 y 47.37% para α_3 . El Cuadro 3 muestra que el portafolio óptimo para el futuro sobre el tipo de cambio spot tiene una inversión monótona creciente por la posición corta para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con inversiones de 44.88% para α_1 , 49.18% para α_2 y 50.36% para α_3 . El portafolio óptimo para las opciones europeas de compra sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot tiene, generalmente, una inversión monótona y superior para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano. Los inversionistas que suponen una distribución gaussiana no están considerando el componente del riesgo por la leptocurtosis y los inversionistas que ajustan una distribución α -estable para los rendimientos subyacentes, implícitamente están aproximando la componente del riesgo por la leptocurtosis de la distribución empírica de los rendimientos. El parámetro de estabilidad está relacionado con la inversión óptima del portafolio y se observa que el portafolio gaussiano tiene un

riesgo mayor que el portafolio α_3 -estable ya que el portafolio gaussiano tiene un componente de activos leptocúrticos que no está considerado como en el portafolio α_3 -estable y éste a su vez tiene un componente de activos con leptocurtosis que no está considerado como en el portafolio α_2 -estable y éste a su vez tiene un riesgo mayor que el portafolio α_1 -estable. El portafolio óptimo α_1 -estable tiene un riesgo $\gamma_X = 0.0001$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.0008$ y un índice α -estable $\rho_X = 12.2608$. Por su parte, el portafolio óptimo α_2 -estable tiene un riesgo $\gamma_X = 0.0001$, un rendimiento esperado tal que $E(\mathbf{X}) = 0.0008$ y un índice α -estable $\rho_X = 12.8259$, el portafolio óptimo α_3 -estable tiene un riesgo $\gamma_X = 0.0002$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.0008$ y un índice α -estable $\rho_X = 3.2051$, y el portafolio óptimo del modelo gaussiano tiene un riesgo $\gamma_X = 0.0034$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.0008$ y tiene un índice de Sharpe $\rho_X = 0.1991$. Por lo anterior, el portafolio óptimo α_2 -estable tiene el riesgo mínimo, el segundo mejor rendimiento esperado y el índice α -estable máximo como medida de desempeño de los portafolios considerados.

4.3 Productos estructurados

Los productos estructurados son una clase de inversión que debido a sus características son capaces de generar ganancias con diversas tendencias y expectativas del mercado. Los productos estructurados están conformados por instrumentos derivados y por lo tanto tienen un grado de apalancamiento, lo que les permite crear una gran variedad de perfiles para el modelo media-dispersión, brindando a los inversionistas diferentes grados de tolerancia al riesgo y se encuentran con mayor frecuencia e importancia en los portafolios de inversionistas institucionales como: sociedades de inversión, aseguradoras, bancos, casas de bolsa y fondos de pensiones. En términos generales, un producto estructurado es un instrumento de deuda combinado con otro activo de rendimiento incierto.

4.4 Producto estructurado sobre una opción de venta sintética corta

La inversión óptima en el futuro sobre el tipo de cambio spot, la opción DA13400L y el bono que paga una tasa de interés libre de riesgo del 5.0793% instantánea anual genera una opción europea sintética posición corta, obteniendo la diversificación de recursos siguiente:

Cuadro 4. Portafolio óptimo de una opción sintética posición corta

Subyacente	$\alpha_1=1.3348$	$\alpha_2=1.4229$	$\alpha_3=1.6186$	$\alpha_4=2$
Futuro	0.017498	0.017499	0.017500	0.017522
DA13400L	-0.001005	-0.001005	-0.001004	-0.000991
w_0	0.983508	0.983506	0.983504	0.983469

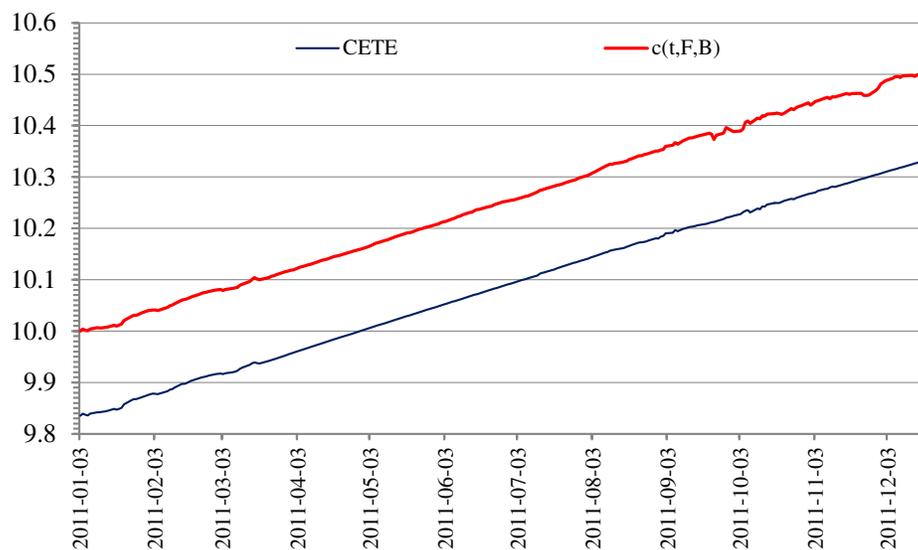
$E(\mathbf{X})$	0.000149	0.000149	0.000149	0.000149
γ	0.000001	0.000002	0.000002	0.000047
ρ	3.050442	2.519396	2.131359	0.087419

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En el Cuadro 4 se presenta la diversificación de recursos considerando el futuro sobre el tipo de cambio spot, la opción DA13400L y el activo libre de riesgo cuando las ventas en corto están permitidas. El portafolio óptimo para el futuro sobre el tipo de cambio spot tiene una inversión monótona creciente por la posición larga para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con 49.9655% para α_1 , 49.9673% para α_2 y 49.9690% para α_3 . El portafolio óptimo para la opción europea de compra DA13400L tiene una inversión monótona decreciente por la posición corta para el modelo α -estable con respecto al gaussiano con 50.36% para α_1 , 50.35% para α_2 y 50.33% para α_3 . El portafolio óptimo para el activo libre de riesgo tiene una inversión monótona decreciente por la posición larga para el modelo α -estable con respecto al gaussiano con 50.0010% para α_1 , y 50.0009% para α_2 y 50.0009% para α_3 . El portafolio óptimo α_1 -estable tiene un riesgo de $\gamma_x = 0.000001$, con un rendimiento esperado de $E(\mathbf{X}) = 0.000149$ y un índice α -estable de $\rho_x = 3.050442$, el portafolio óptimo α_2 -estable tiene un riesgo $\gamma_x = 0.000001$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.000149$ y un índice α -estable $\rho_x = 2.519396$, el portafolio óptimo α_3 -estable tiene un riesgo $\gamma_x = 0.000002$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.000149$ y un índice α -estable $\rho_x = 2.131359$, y el portafolio óptimo del modelo gaussiano tiene un riesgo $\gamma_x = 0.000047$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.000149$ y un índice de Sharpe $\rho_x = 0.087419$, por lo cual el portafolio óptimo α_1 -estable tiene el riesgo mínimo, el mejor rendimiento esperado y el índice α -estable máximo como medida de desempeño de los portafolios considerados. La diversificación de recursos es una opción de venta sintética posición corta (synthetic short put), la cual genera utilidades cuando el precio subyacente incrementa, esto es, se espera un incremento en el futuro sobre el dólar americano.

En la Gráfica 3 se observa que en el modelo α_1 -estable se toma la posición larga de 1.033294 certificados de la tesorería de la federación (CETE) donde $B_0 = 9.518178$, se toma la posición larga de 0.013794 futuros sobre el tipo de cambio spot donde $F_0 = 12.6845$ y se toma la posición corta de 0.021223 opciones de compra europeas sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot donde se tiene que $c(t, F)_t = 0.473689$. El estado de resultados del producto estructurado se puede observar en la gráfica 3.

Gráfica 3. Producto estructurado posición larga sobre una opción de venta sintética posición corta

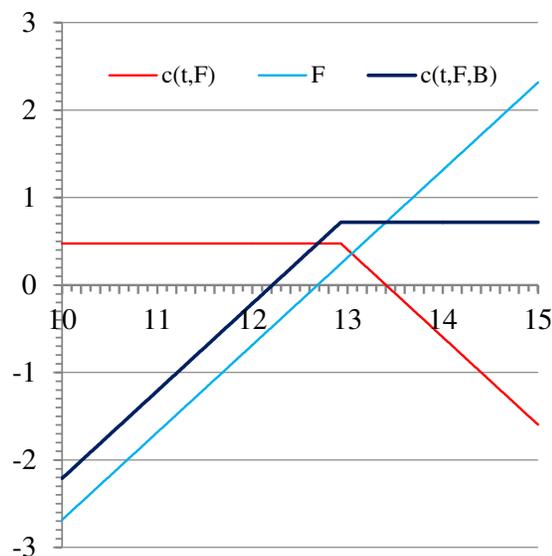


Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

El producto estructurado $c(t, F_t, B_t)$ sobre una opción de venta sintética corta está compuesto por la posición larga de un certificado de la tesorería de la federación $B_t = 9.835077$, la posición larga de un futuro sobre el tipo de cambio spot $F_t = 0.174976$ y la posición corta de una opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t) = 0.010053$, a precio de mercado. De esta manera se tiene un instrumento de deuda con rendimiento variable equivalente al valor de mercado del certificado de la tesorería de la federación B_t más el futuro sobre el tipo de cambio F_t menos la opción de compra sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot $c(t, F_t)$ menos el valor intrínseco de la opción de compra europea sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot $\max(F_t - S, 0)$. El valor final por la inversión en el certificado de la tesorería de la federación $B_T = 10.3329$, en el futuro sobre el tipo de cambio spot tal

que $F_T = 0.1912$, en la opción de compra sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot donde se tiene que $c(T, F_T) = 0.0098$ y en el valor intrínseco de la opción de compra sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot $\max(F_T - S, 0) = 0.0098$, por lo que el valor del producto estructurado es tal que $c(T, F_T, B_T) = 10.5045$. Por lo cual el producto estructurado $c(t, F_t, B_t)$ tiene un rendimiento variable positivo por la diferencia entre la posición larga en el futuro sobre el tipo de cambio spot y la posición corta en una opción de compra europea sobre el futuro sobre el tipo de cambio spot. A partir del 21 de septiembre de 2011 la opción de compra europea del el futuro sobre el tipo de cambio spot comienza a estar dentro del dinero, lo que genera pérdidas para el producto estructurado debido al valor intrínseco de la opción de compra DA13400L, sin embargo son menores que las ganancias obtenidas por el certificado de la tesorería de la federación y por el futuro sobre el tipo de cambio spot. El estado de resultados de la opción de venta sintética se puede apreciar en la gráfica 4.

Gráfica 4. Estado de resultados de la opción de venta sintética posición corta



Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En la Gráfica 4 se observa que la pérdida máxima se aproxima a 12.2108 cuando el futuro sobre el tipo de cambio spot F_t desciende y la ganancia máxima se aproxima a 0.7155 cuando F_t asciende.

5. Producto estructurado sobre una cobertura de compra a la alza

La inversión óptima de la opción DA12000L, la opción DA3300L y el bono que paga una tasa de interés libre de riesgo del 5.0793% instantánea anual genera una cobertura de compra a la alza, obteniendo la siguiente diversificación de recursos:

Cuadro 5. Portafolio óptimo de una cobertura de compra a la alza

Subyacente	$\alpha_1=1.3348$	$\alpha_2=1.4229$	$\alpha_3=1.6186$	$\alpha_4=2$
DA12000L	0.599186	0.599129	0.599073	0.598186
DA12500L	-0.298060	-0.297521	-0.296995	-0.289260
w_0	0.698874	0.698392	0.697922	0.691074

E(X)	0.000149	0.000149	0.000149	0.000149
γ	0.000001	0.000002	0.000002	0.000047
ρ	3.050442	2.519396	2.131359	0.087419

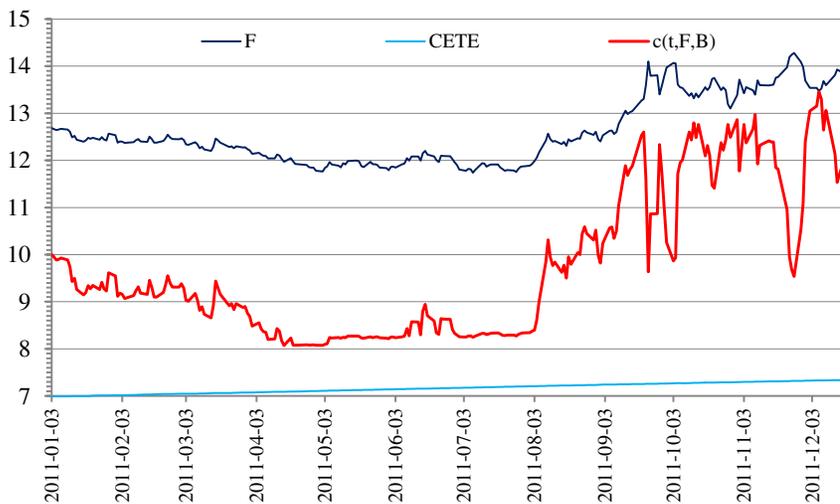
Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En el Cuadro 5 se presenta la diversificación de recursos considerando en la inversión la opción de compra DA12000L, la opción europea de compra DA13300L y el activo libre de riesgo cuando las ventas en corto están permitidas. El portafolio óptimo para la opción de compra DA12000L tiene una inversión monótona decreciente por la posición larga para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con 50.0418% para α_1 , 50.0394% para α_2 y 50.0371% para α_3 . El portafolio óptimo para la opción de compra DA13300L tiene una inversión monótona decreciente por la posición corta para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con 50.75% para α_1 , 50.70% para α_2 y 50.66% para α_3 . El portafolio óptimo para el activo libre de riesgo tiene una inversión monótona decreciente en la posición larga para el modelo α -estable con respecto al modelo gaussiano con 50.28% para α_1 , 50.26% para α_2 y 50.25% para α_3 . El portafolio óptimo α_1 -estable tiene un riesgo $\gamma_x = 0.000167$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.000805$ y un índice α -estable $\rho_x = 3.948808$, el portafolio óptimo α_2 -estable tiene un riesgo $\gamma_x = 0.000175$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X}) = 0.000805$ y un índice α -estable $\rho_x = 3.781377$, el portafolio óptimo α_3 -estable tiene un riesgo $\gamma_x = 0.000181$, un rendimiento

esperado $E(\mathbf{X})=0.000805$ y un índice α -estable $\rho_X = 3.641647$, y el portafolio óptimo gaussiano tiene un riesgo $\gamma_X = 0.007451$, un rendimiento esperado $E(\mathbf{X})=0.000805$ y un índice de Sharpe $\rho_X = 0.088623$. Por lo anterior, el portafolio óptimo α_1 -estable tiene menor riesgo, mejor rendimiento esperado y el mayor índice α -estable. El portafolio óptimo de recursos es una cobertura de compra a la alza (bull call spread) que genera utilidades cuando el precio del subyacente se incrementa, esto es, los inversionistas esperan un incremento en el futuro sobre el dólar americano. El estado de resultados del producto estructurado se puede observar en la gráfica 5.

Gráfica 5. Producto estructurado posición larga sobre una cobertura de compra a la alza

Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

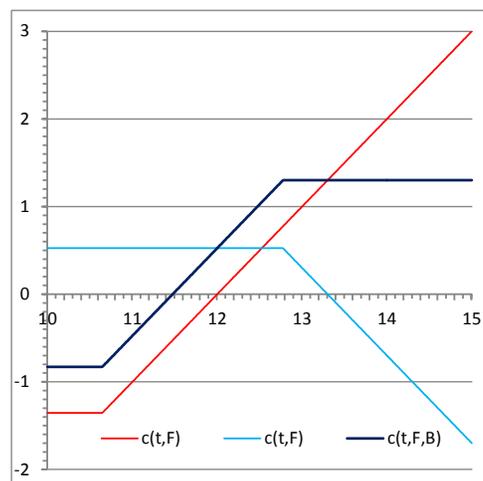


En la Gráfica 5 se observa que considerando el modelo α_1 -estable se toma la posición larga de 0.734252 certificados de la tesorería de la federación donde $B_0 = 9.518178$. Se toma la posición larga de 2.938752 opciones de compra DA12000L donde $c(t, F_t) = 1.354414$ y se toma la posición corta de 5.670676 opciones de compra DA13300L donde $c(t, F_t) = 0.525617$.

El producto estructurado $c(t, F_t, B_t)$ sobre una cobertura de compra a la alza consta de la posición larga de un certificado de la tesorería de la federación $B_t = 6.988742$, la posición larga de una opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t) = 3.980286$ y la posición corta de una opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t) = 2.980604$, a precio de mercado. En este caso, se tiene un instrumento de deuda con rendimiento variable equivalente al valor de mercado

del certificado de la tesorería de la federación B_t más la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t)$ más el valor intrínseco de la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $\max(F_t - 12, 0)$ menos la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t)$ menos el valor intrínseco de la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $\max(F_t - 13.3, 0)$. El valor final por la inversión en el certificado de la tesorería de la federación $B_T = 7.342521$, en la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t) = 5.477833$, en el valor intrínseco de la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $\max(F_t - 12, 0) = 5.477833$, en la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $c(t, F_t) = 3.198261$ y en el valor intrínseco de la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot $\max(F_t - 13.3, 0) = 3.198261$, por lo que el valor del producto estructurado $c(T, F_T, B_T) = 11.901665$. El producto estructurado $c(t, F_t, B_t)$ tiene un rendimiento variable positivo por la diferencia entre la posición larga en la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot DA12000L y la opción de compra sobre el futuro del tipo de cambio spot DA13300L. A partir del 19 de abril de 2011 y hasta el 7 de junio de 2013, y del 29 de junio al 3 de agosto de 2011 la opción DA12000L está fuera del dinero, lo que genera pérdidas para el producto estructurado. Además a partir del 21 de septiembre de 2011 la opción DA13300L está dentro del dinero, lo que genera pérdidas para el producto estructurado, sin embargo estas pérdidas son menores que las ganancias generadas por la opción DA12000L. El estado de resultados del producto estructurado se puede observar en la gráfica 6.

Gráfica 6: Estado de resultados de la cobertura de compra a la alza



Fuente: Elaboración propia con datos de MexDer a través de hoja de cálculo (LibreOffice 3.5.4.2)

En la Gráfica 6 se observa que la pérdida máxima se aproxima a 0.8288 cuando el futuro sobre el tipo de cambio spot F_t desciende a menos de 10.6456 y la ganancia máxima se aproxima a 1.3544 cuando el futuro sobre el tipo de cambio spot F_t asciende a más de 12.7744.

6. Conclusiones

Los modelos de portafolio óptimo se pueden generalizar bajo el supuesto de que los rendimientos tienen distribuciones α -estables, el modelo α -estable es teóricamente justificable, empíricamente comprobable y los portafolios α -estables consideran más adecuadamente el riesgo debido a la leptocurtosis que los portafolios gaussianos.

A través de la combinación lineal del vector de diversificación de recursos y del vector de los rendimientos se obtiene el parámetro de escala de la distribución α -estable, lo que permite plantear el problema de optimización del portafolio α -estable para un inversionista con aversión al riesgo. Mediante la covariación y el proceso estocástico α -estable se estima la matriz de covariación para resolver el problema de minimizar el riesgo.

Esta investigación extendió los trabajos de Ortobelli *et al.* (2002), Ortobelli *et al.* (2004) y Rachev *et al.* (2004) al caso multivariado utilizando 19 activos con riesgo que tienen correlaciones positivas entre ellos. Se calcularon los estadísticos básicos de los activos con riesgo y se observó que el peso mexicano se deprecia con respecto al tipo de cambio spot en 13 de las 16 opciones europeas de compra. El coeficiente de asimetría es positivo en todos los casos y lo mismo ocurre para el parámetro de curtosis por lo que las distribuciones de los rendimientos subyacentes tienen asimetría positiva y leptocurtosis. Se estiman los parámetros α -estables a través del método de verosimilitud máxima y se observa consistencia con los resultados obtenidos en las investigaciones de Dostoglou y Rachev (1999), Ortobelli *et al.* (2002), Rachev *et al.* (2003), Ortobelli *et al.* (2004), Rachev *et al.* (2004), Čížek *et al.* (2005), Ortobelli *et al.* (2005a), Scalas y Kim (2006), así como en las investigaciones recientes de Contreras-Piedragil y Venegas-Martínez (2011) y Climent-Hernandez y Venegas-Martínez (2011).

Se destaca que modelo media-dispersión tiene diferencias importantes con el modelo media-varianza, ya que la distribución conjunta α -estable tiene diferentes parámetros de estabilidad mientras que la distribución conjunta gaussiana tiene un parámetro de estabilidad único. El portafolio α -estable, tiene por lo general, más aversión al riesgo que el portafolio gaussiano ya que el modelo α -estable está más apegado a la realidad del mercado.

Por último es importante resaltar que a través del problema de optimización se construyeron productos estructurados que muestran que el portafolio α -estable tiene mayor aversión al riesgo que el gaussiano, mayor rendimiento, menor riesgo y mejor desempeño que el portafolio gaussiano.

Bibliografía

- Čížek, P., W. Härdle y R. Weron (2005). Stable Distributions. Statistical Tools for Finance and Insurance. Berlin, Springer: 21-44.
- Climent-Hernández, J. A. y F. Venegas-Martínez (2011). Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos α -estables, *Revista de Contaduría y Administración*, 58(4): 119-150.
- Contreras-Piedragil, C. E. y F. Venegas-Martínez (2011). Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables, *Estocástica* 1(1): 55-71.
- Dostoglou, S. and S. T. Rachev (1999). Stable Distributions and Term Structure of Interest Rates, *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10): 57-60.
- Fama, E. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business*, 36(4): 420-429.
- Fama, E. (1965a). Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market, *Management Science*, 11(3): 404-419.
- Fama, E. (1965b). The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, 38(1): 34-105.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36(4): 394-419.
- Mandelbrot, B. and H. M. Taylor (1967). On the Distribution of Stock Price Differences, *Operations Research*, 15(6): 1057-1062.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7(1): 77-91.
- McCulloch, J. H. (1986). Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 34(3): 1109-1136.
- Nolan, J. P. (1997). Parameter Estimation and Data Analysis for Stable Distributions. *Signals, Systems and Computers*, 1(2-5): 443-447.
- Nolan, J. P. (1998). Parameterizations and Modes of Stable Distributions. *Statistics and Probability Letters*, 38(2): 187-195.
- Nolan, J. P. (2011). Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data. Boston, Birkhauser. *In progress*, Chapter 1. Disponible en: <http://academic2.american.edu/~jpnolan>.
- Ortobelli, S. L., I. Huber, I. and E. Schwartz (2002). Portfolio Selection with Stable Distributed Returns, *Mathematics Methods of Operations Research*, 55: 265-300.
- Ortobelli, S. L., S. Rachev and E. Schwartz (2004). The Problem of Optimal Asset Allocation with Stable Distributed Returns, *Stochastic Processes and Functional Analysis*, 238: 295-347.

- Ortobelli, S. L., S. Rachev, S. Stoyanov, F. J. Fabozzi, and A. Biglova (2005a). The Proper Use of Risk Measures in Portfolio Theory, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(8): 1107-1133.
- Ortobelli, S. L., A. Biglova, I. Huber, B. Racheva and S. Stoyanov (2005b). Portfolio Choice with Heavy Tailed Distributions, *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, 3(3): 353-376.
- Rachev, S. T., I. Huber, and S. L. Ortobelli. (2003). Portfolio Choice with Heavy Tailed Distributions. Working Paper, University of California, Santa Barbara and the Deutschen Forschungsgemeinschaft.
- Rachev, S. T., S. L. Ortobelli, S., and E. S. Schwartz (2004). The Problem of Optimal Asset Allocation with Stable Distributed Returns, *Stochastic Processes and Functional Analysis* 238 (A. C. Krinik, R. J. Swift eds.): 295-347.
- Samorodnitsky, G. and M. Taqqu (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. First edition, New York: Chapman and Hall.
- Scalas, E. and K. Kim, K. (2006). The Art of Fitting Financial Time Series with Levy Stable Distributions, Munich Personal RePEc Archive August(336): 1-17. mpra.ub.uni-muenchen.de/336.
- Tokata, Y., Rachev, S. T., and Schwartz, E. S. (2003). The Stable Non-Gaussian Asset Allocation: A Comparison with the Classical Gaussian Approach, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 27(6): 937-969.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano. *Momento Económico*, 111: 20-27.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Cengage Learning Latin America. Segunda edición.
- Venegas-Martínez, F. y A. Rodríguez-Nava (2009). Consistencia entre minimización de varianza y maximización de utilidad en la evaluación de derivados, *Revista de Contaduría y Administración*, 229(3): 9-30.