Dynamic optimizacion in economics: mathematical methods and implementation in the general algebraic modeling system

Mercado, P. Ruben

Uade

July 2002

Optimización dinámica restringida en economía: métodos matemáticos e implementación en el general algebraic modeling system

Julio 2002

Dr. P. Ruben Mercado

Resumen

Se presentan métodos matemáticos de control óptimo determinístico en tiempo continuo y de programación dinámica estocástica en tiempo discreto, y técnicas computacionales para su implementación en GAMS (General Algebraic Modeling System). Se ejemplifican los métodos y sus implementaciones computacionales con modelos intertemporales de crecimiento económico.

Abstract

The paper presents mathematical methods of deterministic optimal control in continuous time and stochastic dynamic programming in discrete time, and computational techniques for their implementation in the General Algebraic Modeling System (GAMS). The methods and their computational implementations are exemplified with intertemporal models of economic growth.

Palabras clave: optimización dinámica, control óptimo, programación dinámica, GAMS

Keywords: dynamic optimization, optimal control, dynamic programming, GAMS

JEL classification: C6 Mathematical Methods; Programming Models; Mathematical and Simulation Modeling

Programa de Investigación en Economía Computacional
DEyF -UADE
Lima 717 Piso 1
(1073) Buenos Aires
Argentina

El problema general de la optimización dinámica restringida es determinar una secuencia de acciones óptima para alcanzar un objetivo intertemporal sujeto a restricciones intertemporales.[1] Usualmente, en la expresión formal del problema una o más variables de control u representan la secuencia de acciones a tomar, una función de valor V representa el objetivo intertemporal, y una o más ecuaciones diferenciales o en diferencias de primer orden representan las restricciones intertemporales del problema.[2] En la mayoría de las aplicaciones económicas, la función de valor es separable y aditiva, mientras que las ecuaciones diferenciales o en diferencias son ecuaciones que relacionan variables de estado x con variables de control u. Usualmente se trata de problemas autónomos, en el sentido de que la variable tiempo t no aparece explícitamente o aparece de esa manera solamente en un factor de descuento temporal en la función de valor V.

De acuerdo al tipo de variables, al horizonte temporal y al rol de la incertidumbre, los problemas de optimización dinámica restringida pueden clasificarse como:

-de tiempo continuo o discreto
-de horizonte finito o infinito
-determinísticos o estocásticos

Desde el punto de vista de las aplicaciones económicas, hay dos métodos de solución de éste tipo de problemas que son los más utilizados: el control óptimo y la programación dinámica. Ambos se aplican indistintamente a problemas de horizonte finito o infinito. El control óptimo es más usado para resolver problemas determinísticos en tiempo continuo, mientras que la programación dinámica se utiliza para tratar con problemas estocásticos en tiempo discreto.[3] Ello es así debido a que problemas de control óptimo estocástico en tiempo continuo requieren del uso del cálculo estocástico en tiempo continuo, el cual sólo es manejable en condiciones restrictivas y para formas funcionales específicas[4], y a que problemas de programación dinámica en tiempo continuo requieren trabajar con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, un tópico de considerable complejidad.[5]

Metodológicamente, el control óptimo resuelve un solo problema de optimización determinando el sendero óptimo de variables de estado y control para todo el horizonte temporal, mientras que la programación dinámica, aplicable a problemas de estructura

---

[1] En Lambardi y Mercado (2002) se trata con problemas de optimización estática restringida y su implementación en GAMS.
[2] Si se trata de ecuaciones de orden superior al primero, pueden ser reducidas de orden a través de transformaciones apropiadas (básicamente, redefinición de variables).
[3] Chow (1997) ha realizado una defensa reciente de la aplicabilidad y utilidad en economía del método Lagrangeano como alternativa a la programación dinámica.
[4] Sin embargo, Turnovsky (1996) realiza una defensa del uso del control óptimo estocástico en tiempo continuo.
[5] Se trata de la que se conoce como ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, análogo en tiempo continuo de la ecuación de Bellman. Para una introducción a la programación dinámica en tiempo continuo, ver Kamien y Schwartz (1992) y Bertsekas (1995).

recursiva determina[6], operando temporalmente de “atrás hacia adelante”, reglas óptimas para la elección de la variable de control como función del estado en cada etapa del problema de interés, de tal modo que la solución del mismo está envuelta en la solución de una “familia” de problemas de optimización análogos.

La solución del problema de optimización implica, en control óptimo, resolver un sistema de ecuaciones dinámicas (principio del máximo de Pontryagin) para las variables de estado y co-estado, mientras que en programación dinámica se requiere resolver una ecuación funcional (ecuación de Bellman) para la función de valor en cada período. Salvo casos especiales, éstas ecuaciones son imposibles de resolver analíticamente. Ello deriva en que usualmente se requieran métodos numéricos y/o que se lleven acabo análisis cualitativos basados en las ecuaciones del principio de Pontryagin para el caso de control óptimo, o estudiando las propiedades de las ecuaciones dinámicas que se obtienen diferenciando (si esto es posible) e igualando a cero la ecuación de Bellman en el caso de programación dinámica.

1. Control Optimo Determinístico en Tiempo Continuo[7]

En términos generales[8], el problema es encontrar la secuencia óptima de controles u_t de modo de maximizar:

$$V = \int_0^T F(t, x_t, u_t)dt$$

sujeto a: (1.1)

$$\dot{x} = g(t, x_t, u_t)$$

$$x_0, x_T$$

donde V = función de valor u objetivo[9], t = tiempo, x = variable de estado, u = variable de control, $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$, x_0 = condición inicial, x_T = condición terminal.

Para resolver éste tipo de problema, debemos formar la función Hamiltoniana (o Hamiltoniano):

---

[6] Un problema es de estructura recursiva si la función objetivo es separable y aditiva y si la variable de control no puede afectar los estados pasados del sistema, sino solamente los futuros.

[7] Para una introducción detallada al control óptimo en tiempo continuo, ver Chiang (1992) y Kamien y Schwartz (2000).

[8] Para el caso de problemas multivariados (varios estados y/o controles) lo que sigue se generaliza fácilmente expresando las variables de estado, co-estado y de control en la notación vectorial apropiada.

[9] La función de valor puede contener, además de la integral, un valor para el punto terminal en la forma de un término extra tal como *W(T, y(T)).* Esta formulación puede convertirse en una estándar como la presentada aquí mediante la definición de una nueva variable *Z = W(T, y(T))* e introduciendo la derivada de la misma dentro de la integral.

$$H_t = F(t, x_t, u_t) + \lambda_t g(t, x_t, u_t) \tag{1.2}$$

donde:

$$\lambda_t = \frac{\partial V}{\partial x_t} \tag{1.3}$$

se define como variable de co-estado o multiplicador de valor presente, conceptualmente similar a un multiplicador de Lagrange.[10] Mide el valor marginal, en el período cero, de un incremento unitario en la variable de estado en el período *t*.[11]

Las condiciones necesarias que resuelven el problema (también conocidas como el principio del máximo de Pontryagin) consisten de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, una para la variable de estado y otra para la de co-estado. Implícitamente, ellas implican también que el Hamiltoniano es maximizado en todo momento respecto de la variable de control *u*, ya que su correspondiente ecuación diferencial puede obtenerse a partir de las otras dos. Además de las dos ecuaciones diferenciales mencionadas (conocidas como sistema Hamiltoniano o canónico), se requiere una condición terminal que aplica en el período terminal T. En términos formales, las condiciones para un máximo son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} \qquad \text{CT} \tag{1.4}$$

donde CT es una condición terminal o de transversalidad, dependiendo de si el problema es de horizonte finito o infinito respectivamente. La forma específica de dicha condición depende del tipo específico de estado y período terminal. Para problemas de horizonte finito, tenemos los siguientes casos:

..punto terminal fijo (estado terminal y período terminal fijos)

$$\text{CT:} \quad x_T \quad (\text{donde } T \text{ y } x_T \text{ son valores dados}) \tag{1.5}$$

..línea terminal vertical (estado terminal libre y período terminal fijo)

$$\text{CT:} \quad x_T = \text{libre} \tag{1.6}$$

..línea terminal horizontal (estado terminal fijo y período terminal libre)

$$\text{CT:} \quad H_{t=T} = 0 \tag{1.7}$$

---

[10] Para una interpretación económica de la teoría del control óptimo, ver Dorfman (1969).

[11] En su forma más general, el Hamiltoniano también incluye un valor inicial λ_0 de la variable de co-estado que aparece multiplicando la función *F*. Sin embargo, tal valor es sólo relevante en problemas muy inusuales en los cuales el integrando de la función de valor es independiente de *F*.

..curva terminal (estado terminal como función de perído terminal: $x_T = \varphi(T)$)

$$\text{CT: } \left(H_t - \lambda \frac{d\varphi}{dT} \right)_{t=T} = 0 \,. \tag{1.8}$$

Para problemas de horizonte infinito, las condiciones de transversalidad como condición necesaria de optimalidad son materia de controversia.[12]

También existen condiciones suficientes como las de Mangasarian y Arrow que básicamente requieren, para ser válidas, ciertas condiciones de concavidad en las funciones *F(.)* y *g(.)* o en el Hamiltoniano. Para horizonte finito, Mangasarian[13] establece que las funciones *F* y *g* deben ser diferenciables y cóncavas en las variables de estado *x* y de control *u* conjuntamente[14] y, en caso que la función *g* sea no lineal en *x* o en *u*, la variable de co-estado λ_t debe ser no-negativa a lo largo de la solución óptima. Esta condición también es válida para horizonte infinito, pero la condición sobre la variable de co-estado deviene:

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} \lambda_t (x_t - x_t^*) \geq 0 \tag{1.9}$$

donde x_t es cualquier sendero factible de la variable de estado y x_t^* es el sendero óptimo.

El comportamiento de las variables de control y/o de estado puede restringirse de diversas maneras, ya sea con funciones o integrales, y en general conlleva la formación de un Lagrangiano compuesto por el Hamiltoniano correspondiente más las restricciones multilplicadas por sus respectivos multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de suficiencia de Mangasarian y Arrow continúan siendo válidas en éstos casos cuando el horizonte temporal es finito. Para horizonte infinito, si se impone una restricción del tipo $x_T \geq 0$ (algo que es muy usual en modelos económicos), para una clase extendida de problemas tenemos que :

$$\text{CT: } \lim_{t\to\infty} \lambda_t \, k_t = 0 \tag{1.10}$$

---

[12] Chiang (1992), cap. 9, propone como condición general de transversalidad (es decir, para estado y, obviamente, período terminal libre):

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} H_t = 0$$

y caracteriza como controversial la condición:

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} \lambda_t = 0 \,.$$

Ver referencias en el capítulo citado y también en Kamien y Schwartz (2000), pág. 184.

[13] Para las condiciones de Arrow, que son menos restrictivas, ver Chiang (1992) y Kamien y Schwartz (2000).

[14] Una función $h(x_t, u_t)$ es cóncava conjuntamente en (x_t, u_t) si la forma cuadrática:

$$q = h_{xx}\, dx^2 + 2\, h_{xu}\, dx\, du + h_{uu}\, du^2$$

es menor o igual que cero.

es condición necesaria y suficiente de optimalidad.[15]

Cuando H_t es diferenciable con respecto a u y el valor de u que maximiza H_t es interior a la región admisible de control, se puede hallar el máximo de H_t con la siguiente condición:

$$0 = \frac{\partial H_t}{\partial u_t} \tag{1.11}$$

en vez de (ver 1.4):

$$\dot{x} = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} \tag{1.12}$$

lo cual simplifica el trabajo.

En muchas aplicaciones económicas, el integrando de la función de valor contiene un factor de descuento temporal, es decir que:

$$F(t, x_t, u_t) = f(t, x_t, u_t)\ e^{-\theta t} \tag{1.13}$$

La inclusión de dicho factor de descuento, junto con el supuesto de que la función f es positiva y posee una cota superior asegura, para problemas de horizonte infinito, que el valor de la integral sea convergente, es decir, finito. El Hamiltoniano correspondiente a éste tipo de problema es:

$$H_t = f(t, x_t, u_t) e^{-\theta t} + \lambda_t\ \mathrm{g}(t, x_t, u_t) \tag{1.14}$$

Para simplificar el trabajo se elimina el factor de descuento del Hamiltoniano definiendo una nueva variable:

$$\mu_t = \lambda_t \mathrm{e}^{\theta \mathrm{t}} \tag{1.15}$$

que se conoce como multiplicador de valor corriente, pues mide el valor marginal en el período t de un incremento unitario en la variable de estado en el mismo período. De ésta manera, el Hamintoniano en valor corriente pasa a ser:

$$H_t^c = H_t \mathrm{e}^{\theta \mathrm{t}} = f(t, x_t, u_t) + \ \mu_{\mathrm{t}}\ \mathrm{g}(t, x_t, u_t)\,. \tag{1.16}$$

Maximizar H_t ó H_t^c es equivalente, puesto que el factor de descuento $e_t^{\theta t}$ es, en cada período, una constante multliplicativa. Puede fácilmente demostrarse que las condiciones para un máximo pasan entonces a ser:

[15] Ver Benveniste y Scheinkman (1982).

$$\dot{x} = \frac{\partial H_t^c}{\partial \mu_t} \qquad \dot{\mu} = -\frac{\partial H_t^c}{\partial x_t} + \theta \mu_t \qquad \text{CT} \tag{1.17}$$

donde en CT debe reemplazarse λ_t por $\mu_t e^{-\theta t}$ y H_t por $H_t^c e^{-\theta t}$, según corresponda en las expresiones de CT vistas más arriba.

Para fijar conceptos, recurramos a un ejemplo simple de crecimiento económico en un modelo tipo Ramsey.[16] Formalmente, el problema es:[17]

$$\begin{array}{l} \max\limits_{c_t} \; V = \int_0^\infty u(c_t)\, e^{-\theta t} dt \\ \text{s.a.} \\ \dot{k}_t = \varphi(k_t) - c_t - nk_t \\ k_0 \qquad k_t, c_t \geq 0 \end{array} \tag{1.18}$$

donde *c* es el nivel de consumo per cápita (y la variable de control), *k* es el stock de capital per cápita (y variable de estado), *n* es la tasa de crecimiento poblacional y θ es la tasa de preferencia temporal (estrictamente positiva). Se supone que $u(.)$ es no-negativa y función cóncava creciente de *c* y que φ es estrictamente cóncava y satisface:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = \infty, \qquad \varphi'(\infty) = 0. \tag{1.19}$$

Se trata de un problema de horizonte infinito, con descuento temporal, autónomo[18], con estado terminal libre y con restricciones (aunque muy simples) en las variables de control y de estado. El Hamiltoniano en valor corriente correspondiente es:

$$H_t^c = u(c_t) + \mu_t \left[\varphi(k_t) - nk_t - c_t \right] \tag{1.20}$$

Analizando cualitativamente este Hamiltoniano, puede demostrarse que el valor de *c* que lo maximiza es mayor o igual que cero, y por lo tanto interior a la región admisible

---

[16] Este tipo de modelos, ampliados con la incorporación de variables de política económica o con elementos de economía abierta, se utilizan para la determinación de respuestas óptimas de política de largo plazo, tales como por ejemplo el manejo de deuda o la reacción frente a cambios en los términos del intercambio. También se los utiliza para representar la dinámica de economías de mercado con competencia y previsión perfecta, aunque éste uso no carece de controversia (ver por ejemplo Solow (1994)).

[17] Un análisis detallado de éste problema puede encontrarse, por ejemplo, en Blanchard y Fischer (1989). La notación de los multiplicadores de valor presente y corriente λ y μ utilizada por éstos autores es la reversa de la empleada aquí.

[18] Es decir que el tiempo no aparece como variable explícita, salvo en el factor de descuento. Ello implica que el Hamiltoniano óptimo -es decir evaluado en las secuencias óptimas de estados, co-estados y controles- tendrá un valor constante a través del tiempo. Asimismo, al ser un problema autónomo permite el análisis cualitativo de la solución por medio de diagramas de fase.

para la variable de control.[19] Entonces, en base a lo visto más arriba, podemos usar $0 = \frac{\partial H_t^c}{\partial c_t}$ como parte de la condiciones necesarias para un máximo. Finalmente, considerando la restricción de que las variables de estado y control sean positivas, las condiciones necesarias y suficientes para un máximo para nuestro problema son:

$$0 = \frac{\partial H_t^c}{\partial c_t}; \qquad \dot{\mu} = -\frac{\partial H_t^c}{\partial k_t} + \theta\mu_t; \qquad \lim_{t\to\infty} \mu_t k_t = 0 \tag{1.21}$$

de las cuales obtenemos, respectivamente:

$$u'(c_t) = \mu_t \ ; \qquad \dot{\mu} = \mu_t\left[\theta + n - \varphi'(k_t)\right] \ ; \qquad \lim_{t\to\infty} u'(c_t)\ \mathrm{e}^{-\theta t} k_t = 0\,. \tag{1.22}$$

La CT se interpreta como que al final de los tiempos, si ha de quedar un stock positivo de capital es porque el valor presente de la utilidad marginal del consumo es cero o, si dicho valor presente es positivo al final de los tiempos es porque el stock de capital se consumió totalmente y ya nada puede hacerse para decrecerla. Nótese que en éste modelo se supone que el capital puede consumirse.

Reemplazando en (1.22) la primera ecuación en la segunda y reordenando, obtenemos la regla de Ramsey-Keynes:

$$\frac{\dot{\left[u'(c_t)\right]}}{u'(c_t)} = \theta + n - \varphi'(k_t)\,. \tag{1.23}$$

La misma es una ecuación de Euler que caracteriza, como condición necesaria, el comportamiento de las variables del sistema a lo largo del sendero óptimo, y que en términos de eficiencia económica (dinámica en éste caso) dice que la tasa marginal de substitución es igual a la tasa marginal de transformación. Esta ecuación y la restricción:

$$\dot{k}_t = \varphi(k_t) - c_t - nk_t \tag{1.24}$$

caracterizan la evolución dinámica de la economía.

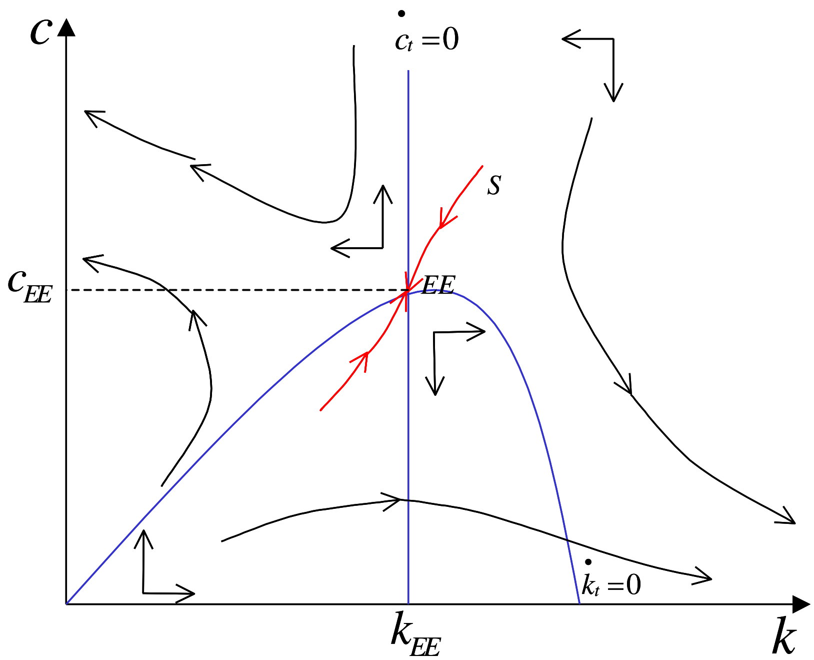
El estado estable (*EE*) del sistema se obtiene (si existe) haciendo $\dot{c}_t = 0$ en (1.23) (lo cual implica que $\dot{\left[u'(c_t)\right]} = 0$), y $\dot{k}_t = 0$ en la restricción dinámica (1.24), con lo que obtenemos un sistema estático de ecuaciones:

$$\varphi'(k) = \theta + n \tag{1.25}$$

[19] Ver Chiang (1992), Cap. 9.3, quien lo demuestra para un modelo análogo.

$$c = \varphi(k) - nk$$

cuya solución nos da c_{EE} y k_{EE}. Asimismo, dichas ecuaciones caracterizan las líneas de demarcación del diagrama de fase correspondiente, el cual nos da una representación gráfica-cualitativa de las posibilidades de evolución dinámica de las variables de interés.[20]



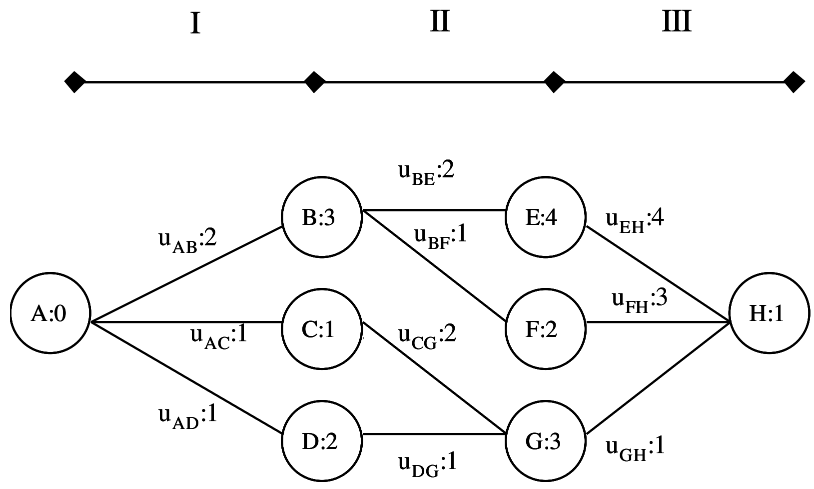
Puede verse en el diagrama que hay un solo sendero (*S*) que conduce al estado estable *EE*. Ello implica que, dada una condición inicial para el stock de capital, el consumo deberá ajustarse instantáneamente de modo de colocarse sobre el sendero SP si la economía ha de converger hacia *EE*. Todo otro comportamiento estaría violando la condición de transversalidad de éste problema o la regla de Ramsey-Keynes eventualmente no sería satisfecha.

2. *Programación Dinámica Estocástica en Tiempo Discreto*

La metodología de la programación dinámica se puede ilustrar con un ejemplo sencillo. El diagrama de abajo representa los distintos caminos posibles para ir de A a H en tres etapas, aplicando un control específico en cada etapa. Cada segmento tiene asociado un valor, que está dado por la suma del valor de arribar a un estado determinado y del valor de aplicar un control determinado.[21] El problema es seleccionar la secuencia de mayor valor para ir de A a H.

[20] Para una introducción a la construcción de diagramas de fase, ver Chiang (1984).

[21] Por ejemplo, pensemos en un problema en que hay que trasladarse geográficamente de un lugar a otro, pasando por lugares intermedios (estados) alternativos con distintos costos de alojamiento y utilizando medios de transporte para trasladarse de un estado a otro (controles) alternativos con costos diferentes. En éste



Un método de solución del problema, al que podemos denominar como “no recursivo” por razones que quedarán claras más abajo, consiste en listar todas las secuencias factibles de controles (y por lo tanto de estados) para ir de A a H y el valor correspondiente a cada secuencia de segmentos. Obviamente, la secuencia de controles (y estados) óptima será aquella que genere la secuencia de segmentos de valor máximo. En nuestro ejemplo tenemos:

Secuencia controles	Valor
u_{AB}, u_{BE}, u_{EH}	16
u_{AB}, u_{BF}, u_{FH}	12
u_{AC}, u_{CG}, u_{GH}	9
u_{AD}, u_{DG}, u_{GH}	9

con lo cual la secuencia óptima es u_{AB}, u_{BE}, u_{EH}.

Para resolver el mismo problema, la programación dinámica ultiliza un método recursivo que transforma el problema original en una secuencia de sub-problemas. El mismo se basa en la aplicación de lo que se conoce como principio de optimalidad de Bellman, que establece que si eliminamos el primer segmento de una secuencia óptima, la secuencia remanente debe seguir siendo óptima (a partir de su nuevo punto inicial), y así sucesivamente. Es decir que si u_{AB}, u_{BE}, u_{EH} es óptima, entonces u_{BE}, u_{EH} es óptima, etc.

Este principio se puede implementar a través de la aplicación de un algoritmo iterativo que comienza de atrás para adelante, y que consiste de los pasos siguientes:

---

ejemplo, el problema sería uno de minimización de valor, equivalente a uno de maximización pero con signo negativo.

1) determinar el valor de cada secuencia óptima factible de segmentos en la etapa III: aquí hay obviamente tres valores:

$$V_{EH} = 5; \quad V_{FH} = 4; \quad V_{GH} = 2$$

2) determinar el valor de cada secuencia óptima factible de segmentos a partir de la etapa II:

$$\begin{aligned} V_{BH} &= \max\{\text{valor de segmento BE} + V_{EH};\ \text{valor de segmento BF} + V_{FH}\} \\ &= \max\{6+5;\ 3+4\} \\ &= 11 \end{aligned}$$

lo que implica que la secuencia óptima de controles para ir de B a H es u_{BE}, u_{EH}. Obviamente, la secuencia óptima CH es u_{CG}, u_{CH} (la única posible) con $V_{CH} = 7$, mientras que para DH es u_{DG}, u_{GH} con $V_{DH} = 6$.

3) determinar el valor de la secuencia óptima factible de segmentos desde la etapa I:

$$\begin{aligned} V_{AH} &= \max\{\text{valor de segmento AB} + V_{BH};\ \text{valor de segmento AC} + V_{CH}; \\ &\qquad \text{valor de segmento AD} + V_{DH}\} \\ &= \max\{5+11;\ 2+7;\ 3+6\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

lo que implica que la secuencia óptima de controles es u_{AB}, u_{BE}, u_{EH}.

De éste modo, la aplicación del principio de Bellman nos ha permitido determinar la función de valor óptima (suma de valores a lo largo del camino óptimo) y la función de política óptima (secuencia de decisiones óptimas respecto de qué camino seguir a partir del primer nodo A). Más aún, hemos también determinado funciones de valor y de políticas óptimas a partir de cada nodo, con lo cual la resolución del problema original (encontrar la secuencia óptima AH) quedó incluida en la resolución de una familia de problemas análogos.

Pare éste ejemplo sencillo, las soluciones obtenidas mediante lo que introducimos como procedimiento "no recursivo" y mediante programación dinámica coinciden. Pero esto no siempre es así.[22]

Pasando ahora a una formulación más general, un problema de optimización dinámica estocástica puede expresarse como:[23]

[22] Por ejemplo, hay cierto tipo de problemas de "inconsistencia temporal" en los que la solución óptima encontrada para ir de A a H mediante el método "no recursivo", puede dejar de serlo si se procede a re-optimizar una vez alcanzado algún estado intermedio. Ello no sucede si la solución óptima se obtuvo mediante programación dinámica, pues cada sub-secuencia de la solución óptima es también óptima.

[23] Ver Bertsekas(1995), Sargent (1987) y Stokey y Lucas (1989).

$$\max\ \mathrm{E}_0 \left\{ \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{T-1}} F(x_t, u_t, t) + W(x_T) \right\}$$

$$\text{s.a.: } x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1}) \qquad (2.1)$$

$$x_0$$

donde:

E_0 = operador de valor esperado dada la información disponible en el período,
$W(x_T)$ = valor terminal,
ε = shock estocástico idéntica e independientemente distribuido.

y donde u_t está restringido a tomar valores factibles en un conjunto no vacío U que depende del estado corriente x_t, es decir que $u_t \in U(x_t)$. Se supone que x_t es conocido en el período *t*, mientras que valores posteriores no son conocidos en dicho período, pues ε es observado en el período *t+1*, luego de que u_t ha sido determinado y aplicado.[24]

La solución de programación dinámica estocástica para éste problema consiste en hallar la función de valor $V(x_0)$ que nos de el mayor valor esperado factible a partir del estado inicial, y el conjunto $U(x_0)$ de todas las reglas factibles a partir del período inicial para determinar, en cada período, el control óptimo como una función del estado *x*. Formalmente, se busca:

$$V(x_0) \equiv \max_{U(x_0)} \mathrm{E}_0 \left\{ \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{T-1}} F(x_t, u_t, t) + W(x_T) \right\}. \qquad (2.2)$$

La función de valor satisface la siguiente ecuación funcional, conocida como ecuación de Bellman:

$$V(x_t, t) = \max_{u_t} F(x_t, u_t, t) + E\left\{ V(x_{t+1}, t+1) \middle| x_t = x \right\} \qquad (2.3)$$

con condición terminal:

$$V(x_t, T) = W(x_T). \qquad (2.4)$$

y donde $E\{.|\,.\}$ es el valor esperado dada la información disponible en el período *t*.

[24] Sobre las implicancias the especificaciones alternativas de la temporalidad del shock estocástico, ver Stokey y Lucas (1989), Cap. 9.

En economía son frecuentes los problemas autónomos, con horizonte infinito y descuento temporal, que pueden formalizarse como:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t)$$
$$\text{s.a.:} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1}), \qquad x_0 \tag{2.5}$$

donde $0 < \beta < 1$. La ecuación de Bellman correspondiente es:

$$V(x_t) = \max_{u_t} \left[f(x_t, u_t) + \beta E\left\{ V(x_{t+1}) \middle| x_t = x \right\} \right]. \tag{2.6}$$

Si f es cóncava y acotada, el conjunto de restricción generado por g es convexo y compacto, f y g son diferenciables y la solución es interior, podemos escribir la siguiente la condición de primer orden:

$$V'(x_t) = \frac{\partial f(x_t, u_t)}{\partial u_t} + \beta E\left\{ \frac{\partial g}{\partial u}(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1})\ V'\left[g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1}) \right] \middle| x_t = x \right\} = 0. \text{[25]} \tag{2.7}$$

En muchos casos, las variables de estado y de control se pueden definir de modo que x_t no aparezca en g, es decir que $\frac{\partial g}{\partial x_t} \equiv 0$. En éstos casos (2.7) se simplifica a:

[25] La versión determinística de ésta ecuación es:

$$V'(x_t) = \frac{\partial f(x_t, u_t)}{\partial u_t} + \beta \frac{\partial g}{\partial u_t}(x_t, u_t)\ V'\left[g(x_t, u_t) \right] = 0.$$

Nótese que:

$$V'\left[g(x_t, u_t) \right] = \frac{\partial V(x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} = 0$$

puede interpretarse como una variable de co-estado, con lo cual tenemos que, para funciones diferenciables y solución interior, la condición de primer orden de la programación dinámica es equivalente a la condición de optimalidad del control óptimo -como se desprende de (1.2) y (1.11)- obviamente expresando ambas condiciones en la misma notación temporal, es decir en tiempo continuo o discreto según corresponda. Para una introducción al control óptimo en tiempo discreto, ver Sengupta y Fanchon (1997).

$$\frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial u_t}+\beta E\left\{\frac{\partial g}{\partial u}(x_t,u_t,\varepsilon_{t+1})\ \frac{\partial f(x_{t+1},u_{t+1})}{\partial x_{t+1}}\Big| x_t=x\right\}=0\,. \tag{2.8}$$

Para fijar conceptos, analicemos ahora un ejemplo sencillo de crecimiento económico estocástico.

$$\max\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t\ E\left\{\frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau}\Big| k_t\right\}$$

$$\text{s.a.: } k_{t+1}+c_t=y_t\equiv v_t k_t^{\varphi} \tag{2.9}$$

$$k_0$$

donde c = consumo , k = shock de capital, v = shock de productividad (variable aleatoria), $0<\rho<1$ y $0<\varphi<1$. Se supone que v_t se observa al comienzo del período *t+1*. En relación con la notación utilizada más arriba, obtenemos:

$$\beta=\frac{1}{1+\rho}\quad,\quad f(x_t,u_t)=\frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau}. \tag{2.10}$$

Asimismo, si definimos k_t como variable de estado y k_{t+1} como variable de control, tenemos que:

$$x_{t+1}=g(x_t,u_t) \tag{2.11}$$

deviene:

$$v_t k_t^{\varphi}=k_{t+1}+c_t \tag{2.12}$$

y por lo tanto :

$$\frac{\partial g}{\partial x_t}\equiv 0\,. \tag{2.13}$$

Sustituyendo $c_t=v_t k_t^{\varphi}-k_{t+1}$ (de 2.12) en la función objetivo, la ecuación de Bellman correspondiente es:

$$V(k_t)=\max_{k_{t+1}}\left\{\frac{(v_t k_t^{\varphi}-k_{t+1})^{1-\tau}}{1-\tau}+\frac{1}{1+\rho}E\left\{V_{t+1}\,|\,k_t=k\right\}\right\} \tag{2.14}$$

Entonces, para la condición de primer orden tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial u_t}(x_t,u_t)=-c_t^{-\tau}\,,\qquad \frac{\partial g}{\partial u_t}(x_t,u_t,\varepsilon_{t+1})=1\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}}(x_{t+1},u_{t+1})=c_{t+1}^{-\tau}\varphi\ \mathrm{v}_{t+1}k_{t+1}^{\varphi-1}. \tag{2.15}$$

y por lo tanto:

$$c_t^{-\tau} = \frac{1}{1+\rho} E\left\{ c_{t+1}^{-\tau} \varphi \, \mathrm{v}_{t+1} k_{t+1}^{\varphi-1} \middle| k_t = k \right\} \qquad (2.16)$$

la cual es una ecuación de Euler estocástica que caracteriza, como condición necesaria, el comportamiento de las variables del sistema económico a lo largo del sendero óptimo de crecimiento. Esta ecuación, junto con la ecuación dinámica del stock de capital (2.9), representan la evolución dinámica del sistema.

3. Implementación en GAMS

En muchos casos, las formas funcionales de la función objetivo y/o de las ecuaciones de restricción impiden obtener una solución analítica completa del problema de optimización, lo cual obliga a utilizar métodos computacionales.[26]

Desde el punto de vista computacional, hay varias formas de resolver problemas de optimización dinámica restringida como los vistos en las secciones anteriores. El problema puede implementarse computacionalmente en forma directa como problema general de optimización, es decir trabajando directamente con la función objetivo y las restricciones. O pueden introducirse métodos computacionales en algún paso “intermedio” de la solución. Por ejemplo, en el caso del control óptimo y, bajo ciertos supuestos, en la programación dinámica, sabemos que la dinámica óptima del sistema puede caracterizarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias. Como la resolución analítica de las mismas es, salvo excepciones, imposible, se requerirá de métodos computacionales para resolverlas.[27]

GAMS es un programa de optimización que también puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas.[28] Por lo tanto sirve para atacar el problema en cualquiera de los dos niveles recién mencionados. Comencemos por la implementación en GAMS de sistemas dinámicos de ecuaciones, para luego pasar al caso de problemas de optimización dinámica.[29]

---

[26] Aún en casos típicos en los que es posible obtener una solución analítica, como es el caso de los problemas de función objetivo cuadrática y restricciones lineales, la estructura iterativa del sistema de ecuaciones que resulta para la generación de las secuencias de valores solución para variables de estado y control requiere usualmente de métodos computacionales. Aunque tal tipo de estructura iterativa puede representarse en GAMS, existen otros programas más eficientes. Para métodos analíticos de solución de problemas lineales cuadráticos, ver Kendrick (1981) y Sargent (1987). Para un software especializado en la solución de ese tipo de problemas, ver Amman y Kendrick (1997) y Mercado y Kendrick (1999).

[27] Existen también métodos alternativos de solución que operan directamente sobre la ecuación de Bellman. En general se trata de métodos iterativos para los cuales GAMS no es muy eficiente, y donde puede ser conveniente trabajar con GAUSS o Matlab. Ver Ljungqvist y Sargent (2000) y Marimon y Scott (1999).

[28] Para una introducción a GAMS, ver Brooke et al. (1998).

[29] Información adicional sobre la representación de problemas dinámicos en GAMS puede encontrarse en Brooke et al. (1998), cap. 13.

En la sección anterior vimos que el problema de crecimiento económico óptimo daba lugar al siguiente sistema de ecuaciones en diferencias estocásticas.[30] Prescindiendo por el momento del elemento estocástico y reordenando la ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} c_t^{-\tau} &= \frac{1}{(1+\rho)}\ c_{t+1}^{-\tau}\varphi\, k_{t+1}^{\varphi-1} \\ k_{t+1} &= k_t^{\varphi} - c_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

con condición inicial k_0. La representación de éste sistema en GAMS se muestra abajo:

```
$TITLE CRECIM1
* modelo de crecimiento economico: sistema de ecuaciones

SETS t horizonte extendido /0*2/;

SCALARS
phi   exponente de capital  /0.75/
rho   preferencia temporal  /0.03/
eta   elasticidad           /0.9/;

VARIABLES
css consumo en estado estable
kss stock de capital en estado estable
c(t) consumo
k(t) stock de capital
j  indice de performance;

EQUATIONS
kbss balance de stock de capital en estado estable
eess ecuacion de Euler en estado estable
ee(t) ecuacion de Euler
kb(t) balance de stock de capital
jd definicion de indice de performance;

jd..             j =E= 0;

eess..    css**(-eta)  =E= (1/(1+rho)) * css**(-eta)* phi * kss**(phi-1);
kbss..           kss =E= kss**phi - css;

ee(t+1).. c(t)**(-eta) =E=(1/(1+rho))*c(t+1)**(-eta)*phi*k(t+1)**(phi-1);
kb(t+1)..      k(t+1) =E= k(t)**phi - c(t);

MODEL CRECIM1SS /jd, eess, kbss/;
* cota inferior en variables
```

[30] En control óptimo en tiempo continuo, se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales. Para implementarlo computacionalmente, previamente hay que discretizarlo, por ejemplo, reemplazando primeras derivadas con respecto al tiempo por primeras diferencias con adelanto temporal . Es decir, reemplazando una expresión como "$\dot{k}$" con otra como "$k_{t+1} - k_t$". Para un análisis detallado del problema y las técnicas de discretización, ver Dixon et. al. (1992), Cap. 5-B.

```
css.lo = 0.001; kss.lo = 0.001;
* valores iniciales tentativos para facilitar convergencia al solver
kss.l = 0.2; css.l = 0.1;
SOLVE CRECIM1SS MAXIMIZING J USING NLP;

MODEL CRECIM1DYN /jd, ee, kb/;
* cota inferior en variables
c.lo(t) = 0.01;  k.lo(t) = 0.01;
* condiciones iniciales y terminales
k.fx("0") = 0.1; c.fx("2")= css.l;

SOLVE CRECIM1DYN MAXIMIZING J USING NLP;

PARAMETER REPORT sumario de solucion;
report(t, "k") = k.l(t);  report(t, "c") = c.l(t);
DISPLAY REPORT;
```

Comenzamos definiendo el horizonte temporal de la simulación. Para ello, definimos el conjunto t = {0, 1, 2}, que será utilizado como índice temporal en las ecuaciones dinámicas. Luego pasamos a definir variables y ecuaciones. Nótese que básicamente definimos dos tipos de variables: estáticas (kss y css) y dinámicas (k(t) y c(t)). Las variables estáticas corresponden a lo que será la solución de estado estable (steady-state) del sistema. Efectivamente, en nuestro modelo tenemos dos ecuaciones dinámicas en dos variables, y una condicion inicial para el stock de capital. Sabemos que para definir una trayectoria de solución óptima para las variables, necesitamos una condición terminal. Para nuestro modelo, resulta razonable imponer como tal a la solución estado estable, la cual computaremos en el programa antes de pasar a resolver las ecuaciones dinámicas.[31] Las variables dinámicas están definidas, obviamente, sobre el índice temporal, es decir sobre el conjunto t. Finalmente, definimos una variable "j" . La misma no jugará ningún rol relevante en éste programa. Como GAMS utiliza solvers de optimización, siempre supone que está mini o maximizando algo. En nuestro caso, le diremos que maximice "j", la cual igualaremos a una constante arbitraria, por ejemplo cero. De tal forma, GAMS resolverá el sistema de ecuaciones de nuestro interés como un "subproducto" del proceso de maximización.

Las ecuaciones eess y kbss corresponden a la representación del estado estable del sistema, y su solución nos dará los valores correspondiente para css y kss. La ecuaciones ee y kb caracterizan la dinámica del sistema. Nótese como están definidos los índices temporales de las ecuaciones y de las variables. Ello tiene que ver con dos factores. En primer lugar, lo que hace en realidad GAMS cuando resuelve un sistema dinámico de ecuaciones, es generar una ecuación (o un sistema de ecuaciones estático) para cada valor del índice termporal y resolver el sistema ampliado resultante como un gran sistema estático simultáneo. Es decir que si tenemos un sistema de dos ecuaciones en dos variables con cuatro períodos temporales, GAMS generará y resolverá un sistema equivalente de ocho ecuaciones en ocho variables, donde cada nueva variable está ahora asociada a cada

[31] La implementación computacional de problemas de horizonte infinito implica obviamente su transformación en problemas de horizonte finito. Ello conlleva errores de aproximación y puede acarrear una seria sensibilidad de los senderos de solución respecto de la longitud del horizonte termporal de la simulación. Ver Manne (1970).

valor posible del índice termporal.[32] Esto hace que GAMS sea particularmente útil para resolver problemas con condiciones iniciales y terminales ("two-point boundary value problems") que no pueden por lo tanto resolverse recursivamente, es decir período a período y de principio a fin a partir de condiciones iniciales dadas.

En segundo lugar, GAMS maneja la asignación de valores a variables con índices temporales "fuera de dominio" de un modo especial, y esto puede acarrearnos problemas para imponer propiamente condiciones iniciales y/o terminales en nuestro modelo. Por ejemplo, en nuestro programa el dominio de t es {0, 1, 2}. Cuando se hace referencia a un elemento inexistente, por ejemplo k("3"), el valor de dicho elemento será el de default, es decir, cero. Por lo tanto, una expresión como [c("2") =E= k("3")] redundaría en [c("2") = 0]. Y, por otra parte, cuando se trata de asignar un valor a un elemento inexistente, GAMS no realiza ninguna asignación. Es decir que una expresión como [c("3") = 7.5] no redunda en ninguna asignación a c("3"), pues éste elemento no existe.

Lo dicho anteriormente hace que debamos ser cuidadosos al definir los índices temporales de ecuaciones y variables si queremos que nuestro modelo y sus correspondientes condiciones iniciales y terminales sean efectivamente implementados en GAMS. Para no correr riesgos, en muchos casos resulta de utilidad seguir la siguiente regla:

"establecer el índice temporal de las variables intra-período igual a t más el máximo rezago termporal presente en el modelo, y establecer el índice temporal de ecuaciones igual a t más el máximo adelanto más el máximo rezago".

Entonces, puesto que en nuestro modelo no tenemos variables rezagadas, y tenemos sólo un adelanto temporal, transcribimos el índice temporal de las variables tal como está en el modelo matemático, y definimos el índice de las ecuaciones como igual a "t+1".[33]

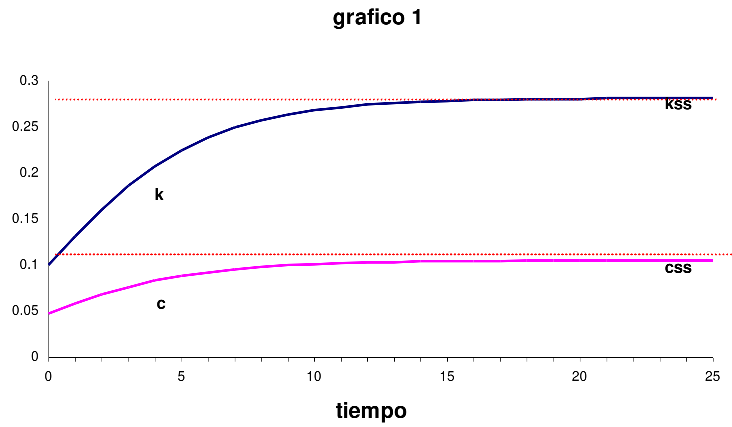
Luego de especificar las ecuaciones del modelo, asignamos un límite inferior cercano a cero al stock de capital y al consumo, un valor inicial para el stock de capital y, como condición terminal, el valor del consumo correspondiente a la solución de estado estable. Este valor será obtenido y almacenado por GAMS al resolver el modelo CRECIM1SS compuesto por las ecuaciones eess, kbss y jd utilizando programación no lineal (Non Linear Programming, NLP), y luego tomado como dato al resolver el modelo dinámico CRECIM1DYN compuesto por las ecuaciones ee, kb y jd. Finalmente, se prepara e imprime un reporte sumario conteniendo los valores solución del stock de capital y del consumo.

El gráfico 1 muestra la evolución temporal del capital y el consumo para una simulación con un horizonte temporal de 26 períodos con el programa descripto más arriba.

---

[32] Para visualizar el modelo que efectivamente se está implementando en GAMS, es conveniente poner la opción "OPTION LIMROW" al comienzo del programa con un valor igual al número de períodos del horizonte de simulación (tres en nuestro ejemplo) y analizar la sección Equation Listing del listado de output.

[33] Un análisis más detallado del manejo de índices termporales y con ejemplos más complejos se encuentra en Mercado et. al. (1998).



A los fines de no tener que cambiar la condición terminal –en nuestro caso, “c(“2”) = css.l” cada vez que cambiamos el horizonte extendido de la simulación, podemos reescribir la sección de definición de conjuntos de la siguiente manera:

```
SETS t horizonte extendido /0*2/
tp(t)  periodo terminal;
tp(t) = YES$(ORD(t) EQ (CARD(t)-1));
```

De éste modo, definimos un subconjunto del conjunto “t” al que denominamos “tp(t)”, y con el comando siguiente le asignamos el el valor del índice temporal correspondiente al período terminal de la simulación. Efectivamente, teniendo en cuenta que en GAMS el operador “$” equivale a un “IF” -es decir, a un operador condicional-, la expresión contenida en el programa se lee como “cuando el ordinal y el cardinal del conjunto t sean iguales, asignar el valor del elemento correspondiente al subconjunto tf(t)”. El cardinal de “t” es 3 (tiene tres elementos). Entonces, se asignará a tf(t) el valor correspondiente al ordinal 3 (es decir, al tercer elemento) del cojunto “t”, que en nuestro caso es el número 2. Si luego reemplazamos la condición terminal “c(“2”) = css.l” por “c(tp) = css.l” nos liberaremos de tener que actualizarla cada vez que cambiemos el horizonte extendido de la simulación, lo cual es muy útil en el caso de modelos más complejos que contienen varias condiciones terminales.

Como dijéramos más arriba, GAMS también nos permite implementar el problema de optimización directamente, es decir en su versión más general. Para un horizonte finito, y nuevamente prescindiento del elemento estocástico, el modelo es:

$$\max \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^t \frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau}$$

$$\text{s.a.: } k_{t+1} + c_t = y_t \equiv k_t^{\varphi} \qquad (3.2)$$

$$k_0$$

y la representación en GAMS es:

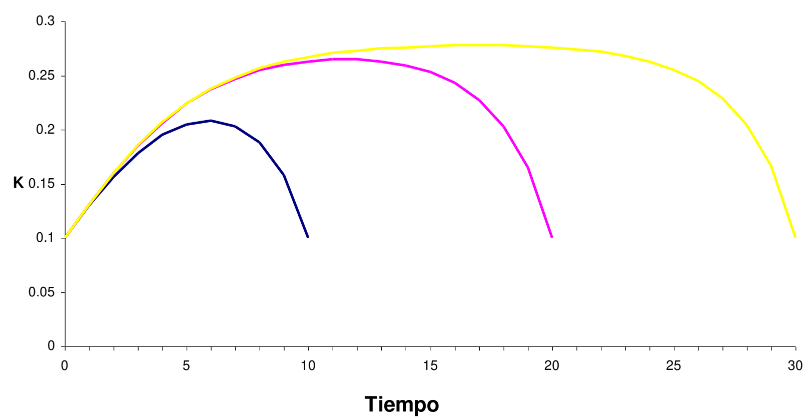
```
$TITLE CRECIM2
* modelo de crecimiento economico: optimizacion directa

SETS T horizonte extendido /0*2/
tp(t)  periodo terminal;
tp(t) = YES$(ORD(t) EQ CARD(t));

SCALARS
phi   exponente de capital /0.75/
rho   preferencia temporal /0.03/
eta   elasticidad          /0.9/;

PARAMETERS
dis(t) factor de descuento;
dis(t) = (1+rho)**(1-ord(t)) / (1-eta);

VARIABLES
c(t) consumo
y(t) ingreso
k(t) stock de capital
j  indice de performance;

EQUATIONS
yd(t) definicion de ingreso
kb(t) balance de stock de capital
jd definicion de indice de performance;
jd..                  j =E= sum(t,  dis(t-1) * c(t-1)**(1-eta) );
yd(t)..           y(t)  =E= k(t)**phi;
kb(t+1)..   k(t+1) =E= y(t) - c(t);

* cota inferior de variables
c.lo(t) = 0.001;  k.lo(t) = 0.001;

* condiciones iniciales y terminales
k.fx("0") = 0.1; k.fx(tp) = 0.281;

MODEL CRECIM2 /ALL/;

SOLVE CRECIM2 MAXIMIZING J USING NLP;

PARAMETER REPORT sumario de solucion;
report(t, "k") = k.l(t);  report(t, "c") = c.l(t);  report(t, "y") = y.l(t);

DISPLAY REPORT;
```

En ésta representación, hemos adicionado una variable y una ecuación para el ingreso ("y" e "yd" respectivamente) que en la formulación anterior aparecían implícitamente, lo cual no altera para nada la equivalencia entre las dos representaciones, pero nos sirve para mostrar más claramente otras posibilidades de especifcación termporal del modelo.

Obsérvese que para la especificación de los índices temporales en las ecuaciones dinámicas hemos seguido la misma regla que arriba (la ecuación "yd", sin variables con rezagos y/o adelantos ha sido implementada con el índice "t", mientras que la ecuación "kb", con un adelanto, ha sido implementada con el índice "t+1". Pero también obsérvese que en la ecuación "jd" hemos escrito el índice "t-1" en vez de "t". De otro modo, si escribiéramos por ejemplo "c(t)", dejaríamos en realidad el último elemento de "c", es decir "c("2")" libre, pues no estaría restringido por la estructura del sistema de ecuaciones generado por GAMS. En tal caso, GAMS asignaría un número "infinitamente" alto a tal valor al tratar de maximizar la sumatoria.[34]

El gráfico 2 muestra tres simulaciones -para 11, 21 y 31 períodos respectivamente- en las cuales se impuso como condición terminal el mismo nivel de capital inicial, es decir que se prescindió del cómputo y aplicación del estado estable como condición terminal. Puede puede observarse claramente un comportamiento de "supercarretera", es decir, cómo la solución se hacerca al estado estable y transita cerca de él por varios perídos para luego, hacia el final, dirigirse abruptamente hacia la condición terminal impuesta.[35]

grafico 2



Desde el punto de vista computacional, el elemento estocástico de nuestro problema puede reintroducirse en forma relativamente sencilla. Se trata solamente de introducir un parámetro "v(t)", cuyos valores serán extraídos de una distribución de probabilidad pre-especificada.[36] Por ejemplo, en el programa CRECIM2, podemos definir dicho parámetro

---

[34] Para un análisis detallado de los errores posibles en la implementación en GAMS del que estamos presentando aquí, ver Mercado et al. (2000).

[35] Para un análisis de éste tipo de comportamiento en problemas de optimización dinámica, ver Samuelson (1965).

[36] Recuérdese que más arriba asumimos que los shocks están idéntica e independientemente distribuídos. Implícitamente, tambien asumimos que son temporarios, lo cual implica que el estado estable al cual se

en la sección PARAMETERS y asignarle valores provenientes de una distribución normal con media uno y desvío standard igual a 0.03 de la siguiente manera:

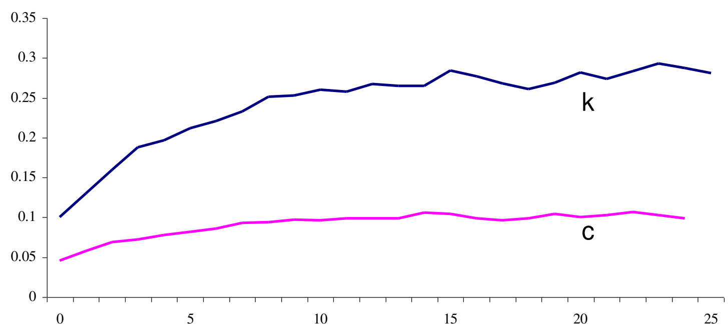
```
v(t) ;
v(t) = normal(1,0.03);
```

y reescribir la ecuación yd(t) como:

```
yd(t)..   y(t)  =E= v(t) * k(t)**phi;
```

El gráfico 3 muestra los resultados de una simulación estocástica para el consumo y el stock de capital.

grafico 3



Adicionalmente, utilizando el comando "LOOP", podríamos relizar un estudio tipo "Monte Carlo", realizando una serie de simulaciones encadenadas y computando los valores medios y desvíos estándar de las variables de interés. Cabe mencionar que mientras se realicen dichas simulaciones dentro de un mismo programa, GAMS generará una secuencia de shocks diferente para cada corrida.[37]

Finalmente, es de destacar que así como impusimos cotas inferiores para las variables consumo y capital para evitar divisiones por cero, también podríamos imponer restricciones más abarcativas y por otros motivos. Por ejemplo, podríamos acotar los valores del consumo o del capital dentro de un determinado intervalo como objetivo de política. Y en modelos más complejos, podríamos establecer restricciones más sofisticadas a través de relaciones funcionales entre grupos de variables que se expresen como igualdades o desigualdades. Ello puede hacerse fácilmente en GAMS, agregrando al modelo las ecuaciones o inecuaciones correspondientes.

---

supone tenderá el sistema en el largo plazo no es afectado. Para el caso de shocks permanentes, deberá modificarse el estado estable en la forma correspondiente.

[37] Para un ejemplo de éste tipo de simulación estocástica, ver Mercado et. al. (1998).

Bibliografía

Amman H. y D. Kendrick (1997), "The DUALI/DUALPC Software for Optimal Control Models: Introduction", en Amman, H., B. Rustem y A. Whinston (Eds.): *Computational Approaches to Economic Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 363-372.

Benveniste L. y J. Scheinkman (1982), "Duality Theory for Dynamic Optimization Models in Economics: The Continuous Time Case", *Journal of Economic Theory* 27, 1 (June), 1-19.

Bertsekas, D. (1995), *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific.

Blanchard O. y S. Fischer (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

Brooke A., D. Kendrick, A. Meeraus y R. Raman (1998), *GAMS: a user´s guide*, GAMS Development Corporation (www.gams.com).

Chiang, A. (1984), *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, Tercera Edición, 1987.

Chiang, A. (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill.

Chow G. (1997), *Dynamic Economics: optimization by the Lagrange method*, Oxford University Press.

Dixon, P., B. Parmenter, A. Powell y P. Wilcoxen (1992), *Notes and Problems in Applied General Equilibrium Analysis*, North Holland.

Dorfman, R. (1967), "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *American Economic Review*, December 1969, pp. 817-831.

Kendrick, D. (1981), *Stochastic Control for Economic Models*, McGraw-Hill.

Kamien M. y N. Schwartz (2000), *Dynamic Optimization: the calculus of variations and optimal control in Economics and Management*, North-Holland.

Lambardi, G, y P. R. Mercado (2002), *Optimización Estática Restringida en Economía: métodos, algoritmos e implementación en el General Algebraic Modeling System*, Documento de Trabajo PIEC-DEyF-UADE.

Manne, A. (1970), "Sufficient Conditions for Optimality in an Infinite Horizon Development Plan", *Econometrica*, 38(1), January, 18-38.

Marimon, R. y Scott A., (1999), *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford University Press.

Mercado, P. R. y D. Kendrick (1999), "Computational Methods for Macro Policy Analysis: Hall and Taylor's Models in DUALI", en A Hughes-Hallett y P. McAdam (Eds.): *Analyses in Macroeconomic Modelling*, Kluwer Academic Publishers.

Mercado, P. R., D. Kendrick y H. Amman (1998), "Teaching Macroeconomics with GAMS", *Computational Economics* 12, pp. 125-149.

Mercado, P. R., L. Lin y D. Kendrick (2000), "Modeling Economic Growth with GAMS", Department of Economics, The Universityof Texas at Austin (working paper).

Samuelson, P. (1965), "A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule", *American Economic Review*, June, pp. 486-496.

Sargent, T. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.

Ljungqvist, L. y T. Sargent (2000), *Recursive Macroeconomic Theory*, The MIT Press.

Sengupta J. y P. Fanchon (1997), *Control Theory Methods in Economics*, Kluwer Academic Publishers.

Solow, R. (1994), "Perspective on Growth Theory", *Journal of Economic Perspectives* pp. 45-54.

Stokey, N. y R. Lucas (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.

Turnovsky (1996), *Methods of Macroeconomic Dynamics*, MIT Press.