Alternetive way of determining no arbitrage conditions

Ivanov, Sergei

14 September 2014

Альтернативный подход к определению условий отсутствия арбитража

Сергей Иванов*

Аннотация

В статье представлен альтернативный подход к формированию условий отсутствия арбитража на рынке, важным отличием которого является использование условно реальных цен вместо предположений о ценовом процессе. Особенное внимание уделяется альтернативной технике замены дисконта, также полученной в рамках используемого подхода. Полученные результаты позволяют предположить, что существуют значительные отличия обычно рассматриваемых моделей от реального рынка, и арбитраж возможен чаще, чем принято считать. Эти возможности скрыты не достаточным развитием рынков, однако они могут оказать существенное влияние в будущем.

Ключевые слова: арбитраж, нейтральная к риску мера, мартинальная мера, опционы, предполагаемая плотность вероятности, замена дисконта.

*Тел.:+7 921 334 24 59
Email: ivanov.sci@gmail.com

Введение

Теория арбитража играет одну из ключевых ролей в современных финансах. Понимание того, каким должен быть рынок, чтобы отсутствовали возможности для арбитража, позволяет решать множество фундаментальных и прикладных задач.

В самой теории ключевую роль играют нейтральные к риску или мартингальные меры. С их помощью мы определяем «правильные» цены, которые должны быть на рынке. Можно, например, моделировать цены опционов (Black and Sholes 1973). При этом используются условия отсутствия арбитража, заключающиеся в эквивалентности мартингальной и объективной мер. Дальнейшие исследования, как правило, проводятся в нейтральном к риску безарбитражном мире. Мы можем использовать полученные результаты на реальных рынках. В рамках такого подхода было получено множество крайне полезных теоретических и практических результатов.

Однако такой подход позволяет решать не все задачи. Существуют различия между моделью рынка и реальным рынком. Мы задаем ценовые процессы и распределения, что является скорее аппроксимацией и упрощением реального мира. В реальности же цена определяется спросом и предложением. Модель, которая бы не делала подобных предположений, была бы более общей и приближенной к практике. Существуют подходы, которые основываются на использовании реальных данных (например, Ross 2013). Можно получать распределения вероятностей из рыночных цен вместо использования предположений о таких распределениях (Ioffe and Prisman 2013). Это позволяет исследовать реальные рынки на предмет наличия арбитража, а также изучать непосредственно реальные процессы. Однако даже в данном подходе, как правило, из реальных цен мы пытаемся получить нейтральные к риску вероятности (Jackwerth 1999). Отсутствие арбитража обычно используется для «очистки» исходных данных.

На практике использование возможностей арбитража состоит в применении стратегий, которые прибыльны и приводят рынок в безарбитражное состояние. Логично предположить, что отличие модели рынка от реального рынка скрывает некоторые особенности рынка, которые могут быть использованы для получения возможно значимого результата с точки зрения арбитража. Может показаться, что отличия между моделью и рынком вызваны несовершенством последнего. Модель рассматривает идеальную ситуацию без транзакционных издержек, с идеальной ликвидностью и другими свойствами. Однако даже, если не брать в расчет распространенные ограничения, препятствующее арбитражу (Shleifer and Vishny 1997), по мнению автора данной статьи, существуют более фундаментальные отличия используемых классических моделей от реальности.

Рассмотрим пример. Рассмотрим простую одношаговую биномиальную модель. Предположим, евро стоит 1,5 доллара. Пусть возможны два сценария: евро может стоить завтра один доллар или два доллара. Есть контракт (производная ценная бумага), по которому мы заплатим в первом случае 0,5 доллара, во втором – получим 0,5 доллара. Для простоты предположим, что процентная ставка равна нулю. Мартингальные вероятности в этом случае равны 0,5, и цена контракта равна нулю.

Рассмотрим случай, когда участника рынка интересует получать прибыль в евро. После исполнения контракта ему нужно перевести прибыль или убыток в евро по курсу, который будет на тот момент. Таким образом, он рассчитывает получить в первом случае убыток 0,5 евро, а во втором – прибыль 0,25 евро. Очевидно, что вероятности должны быть распределены по-другому для него, текущий курс должен быть иным или стоимость контракта должна быть ненулевая. Однако оба участника используют один и тот же контракт, который имеет одну рыночную цену. Таким образом, на практике как минимум один из участников рассчитывает получить избыточную прибыль по этому контракту. Например, если оба участника найдут аналогичные возможности в других активах и смогут диверсифицировать свои операции с аналогичными свойствами, то оба смогут получить прибыль без начальных вложений, т.е. сформировать арбитражный портфель.

Мартингальные вероятности будут равны между собой и объективным вероятностям только в случае, когда обменный курс ожидается постоянным, что фактически означает жесткую привязку обменного курса и почти соответствует существованию единой валюты. Этот пример показывает, что нейтральный к риску мир может быть не таким уж близким к реальному миру. Наличие разных валют допускает арбитраж, который по определению очень выгодная деятельность. Однако мы видим иной мир. Это говорит о том, что пока этими возможностями никто не пользуется. Чего же не хватает, чтобы воспользоваться этими возможностями, и что станет с рынками и экономикой в целом, когда эти возможности станут доступными? Логично также предположить, что приведенный пример – это лишь вершина айсберга.

Естественным является желание понять, какие следствия для рынка означают условия отсутствия арбитража с точки зрения структуры рынка, поведения его участников, динамики цен. Какой должен быть рынок, соответствующий этим условиям? Как новые финансовые инструменты влияют на рынок? Каких финансовых инструментов или характеристик рынка не хватает, чтобы он был более эффективным?

Интересно посмотреть на такие фундаментальные задачи, как формулирование условий отсутствия арбитража, используя подход, который бы основывался на практических возможностях участников рынка. Возможности арбитража не существуют без стратегий, которые их реализуют. Арбитражные стратегии неразрывно связаны с условиями отсутствия арбитража. Более того, плотность вероятности с такой точки зрения можно рассматривать как цену некоторого элементарного финансового инструмента (Duffie 2010). В качестве такого инструмента может выступать ценная бумага Эрроу-Дебре или ее непрерывный аналог.

Исследованию подлежат параметры и процессы, определенные участниками рынка с помощью цен на финансовые инструменты. Цены в используемой модели формируются спросом и предложением. Основные выводы получены из невозможности конструирования арбитражного портфеля. Например, сконструируем такой опционный портфель, чтобы суммарная контрактная функция была равна единице вне зависимости от цены базисного актива. Очевидно, что на стоимость такого портфеля существуют ограничения, которые бы не позволяли образоваться возможностям для арбитража. Эти ограничения действуют на реальные цены многих ценных бумаг, которые связаны с указанным портфелем.

Стоимость такого портфеля будет равна дисконтированной единице, потому что сумма вероятностей равна единице. Это условие кажется очевидным, и мы обычно задаем его на этапе формирования модели, т.е. предположений о рынке. Хотя на самом деле в мире, где цены определяются спросом и предложением, не обязательно, чтобы это было так. Участники рынка могут задать такие цены, что то, что мы получим из цен, не будет являться плотностью вероятности. Такая функция должна быть плотностью вероятности, чтобы отсутствовал арбитраж. Однако это не предположение, а лишь одно из условий отсутствия арбитража, которое, как будет показано ниже, не всегда просто выполнить и которое может оказать значительное влияние на процессы, протекающие на рынке.

Основным результатом является демонстрация того, что арбитраж возможен значительно чаще, чем принято считать. Следствием этого является новый взгляд вопрос: каким должен быть эффективный рынок? В конце статьи дается предположительный ответ.

Следует отметить, что использующийся подход не является новым (например, Merton 1973)., однако результаты получены впервые. Они основываются на практических возможностях по формированию арбитражных портфелей. Данная работа не содержит строгих математических доказательств, и скорее представляет обоснование значимости используемого подхода. Цель данной статьи – показать возможности альтернативного подхода и открыть дискуссию.

Стоит также особенно отметить, что некоторые формулы визуально похожи на известные в количественных финансах. Однако сравнивать их не всегда корректно, т.к. модели рынка отличаются. Здесь не определены процессы цен, содержащие снос, диффузию, не используются теоретические процентные ставки и другие параметры. Есть только цены, заданные участниками рынка, которые мы можем проанализировать с целью получения из них некоторых параметров, которые сами по себе являются предметом дальнейшего анализа.

Рынок

Рассмотрим рынок, состоящий из безрисковых облигаций, активов и производных ценных бумаг.

Предположения о рынке:

1. На рынке может быть куплен и продан европейский опцион с любой контрактной функцией, ценой и сроком исполнения, если он имеет конечную премию. В качестве базисного актива могут выступать другие опционы.
2. Цены непрерывны и конечны.
3. Могут быть куплены и проданы «дробные» ценные бумаги.
4. Нет спрэда.
5. Полная ликвидность рынка.
6. Отсутствуют транзакционные издержки.

7. Отсутствует counterparty риск.

Таким образом, у нас есть очень развитый рынок, участники которого свободно формируют цены и заложенные в них параметры (например, процентные ставки). Мы ничего не знаем о характере ценовых процессов.

Пусть h – портфель, S_t – цены активов, состоящих в портфеле, в момент t.

Капитал портфеля:

$$V_t^h = h \cdot S_t \tag{1}$$

Арбитражный портфель:

$$V_0^h \le 0$$

$$V_t^h \ge 0 \text{ с вероятностью } 1 \tag{2}$$

$$V_t^h > 0 \text{ с положительной вероятностью}$$

Ценообразование на рынке

Традиционно для ценообразования опционов мы используем известную формулу:

$$H_0 = P(t_0, T) \cdot E^Q(H_T) \tag{3}$$

где H_t – стоимость опциона в момент t, T –срок исполнения, H_T – контрактная функция, t_0 – момент оплаты премии.

На полном рынке текущая цена актива есть дисконтированное ожидание будущей цены. Q – это нейтральная к риску мера. Цены, определяемые выражением (3), являются нейтральными к риску. Стоит отметить, что это теоретические цены. С точки зрения практики представляется естественным рассчитать теоретические безарбитражные цены, сравнить их с реальными и сделать соответствующие выводы. Однако нас интересует другой подход.

Можно попробовать предположить, что вследствие несовершенства рынка или иных причин реальные цены описываются следующим выражением

$$H_0 = P(t_0, T) \cdot E^P(H_T) \tag{4}$$

где P – объективная мера.

В общем случае цены, определяемые выражениями (3) и (4), могут не совпадать. Эквивалентность мер и единственность мартингальной меры являются условиями безарбитражности и полноты рынка.

Впрочем, даже выражение (4) не позволяет описать реальные цены. Рассмотрим опционы, имеющие, например, один базисный актив, но разные цены исполнения (страйк). Получаем систему выражений (4), в которых объективная мера одна для всей системы. Если попробовать подставить в систему (4) реальные цены, то могут существовать такие неэффективные комбинации, что выражение (4) не может быть выполнено.

Аналогично переходу от (3) к (4) можно сделать следующий переход, заменив плотность вероятности, соответствующей объективной мере, на некоторую оценку этой плотности. Пусть у нас существует множество опционов $H^0, H^1..H^n$, имеющих разные контрактные функции, которые зависят от цены одного базисного актива и имеют один срок исполнения. Нас интересуют реальные цены, которые можно описать следующей системой уравнений:

$$H_0^i = P(t_0, T) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p(S_T) \cdot H^i(S_T) dS_T, i = 1..n \tag{5}$$

где $p(S_T)$ – некоторая функция (не обязательно плотность вероятности). Для отсутствия арбитража $p(S_T)$ должна быть плотностью вероятности, соответствующей мартингальной мере Q. Однако в общем случае $p(S_T)$ может и не быть плотностью вероятности, если так решит рынок. $p(S_T)$ имеет экономический смысл плотности вероятности, поэтому определим ее как оценку плотности вероятности.

Здесь и далее предполагаем единственность и $p(S_T)$ для всей системы (5). Очевидно, что если разные подмножества цен содержат разные оценки, то возможен арбитраж. Это первое условие отсутствия арбитража.

Коэффициент дисконтирования и оценка плотности вероятности в системе (5) могут быть подобраны для любых цен, т.е. они заложены участниками рынка в цены. Коэффициент дисконтирования, например, можно определить, если сформировать опционную стратегию, для которой контрактная функция будет равна единице вне зависимости от цены базисного актива. Очевидно, что существуют ограничения, накладываемые на эти параметры.

Отсутствие арбитража

Рассмотрим европейские опционы. Любой опцион можно реплицировать портфелем ценных бумаг Эрроу-Дебре, по которым выплачивается единица при возникновении некоторого события и нуль в остальных случаях(Becherer and Davis 2010). Для непрерывного случая эквивалентом является дельта-функция Дирака. Пусть данные ценные бумаги являются частью множества рассматриваемых в (5) опционов. Очевидно, что стоимость таких опционов однозначно определяет $P(t_0,T)$ и $p(S)$. Таким образом, можно сказать, что оценка плотности вероятности $p(S)$ – это недисконтированная стоимость ценной бумаги, имеющей дельта-функцию Дирака в качестве контрактной функции.

Любые другие опционы можно составить из таких ценных бумаг. Например, опцион (или портфель опционов), имеющий единицу в качестве контрактной функции. Очевидно, что если $\int_{-\infty}^{\infty} p(S_T)dS_T \neq 1$, то возможен арбитраж.

Стоимость доллара завтра при использовании опциона будет отличаться от стоимости доллара завтра при использовании облигаций или банковского счета, что соответствует условиям (2). Таким образом, логично потребовать, чтобы оценка плотности вероятности была также плотностью вероятности. Это необходимое, но не достаточное условие отсутствия арбитража.

Рассмотрим более сложный случай, когда участник рынка желает получать прибыль в активе, отличном от зафиксированного в опционном контракте. Участник рынка при этом совершает три связанных операции:

1. Обменивает один актив на другой для оплаты/получения премий опционов.
2. Формирует портфель опционов (покупает/продает отдельные опционы).
3. Переводит финансовый результат после исполнения опционов в нужный актив.

Заметим, что в отличие от классического случая замены дисконта здесь используются обычные опционы, ценообразование которых может быть изучено без использования техники замены дисконта.

Пусть N – новый актив, N_T – стоимость в момент T. Выражение (5) верно для опционов, которые использует участник рынка. Однако его интересует финансовый результат всех трех операций вместе. Поэтому (5) необходимо дополнить ими.

Премия опциона $H_{0,N}$ и контрактная функция $H_N^i(S_T)$, переведенные в актив N:

$$H_N^i(S_T) = H^i(S_T) \cdot N_T(S_T) \qquad (6)$$

Стоимость опциона в этом случае получается из (5) добавлением двух обменных операций (N_0 и N_T):

$$H_0^i \cdot N_0 = P^N(t_0,T) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p^N(S_T) \cdot H^i(S_T) \cdot N_T(S_T) dS_T \tag{7}$$

N_T учитывает операции по переводу средств из одного актива в другой в моменты покупки/продажи опциона и его исполнения. Дисконтирование производится с использованием рыночной процентной ставки, относящейся к активу N. Следует отметить, что цены H_0^i определяются рынком и не зависят от выбора N, т.к. опционные контракты используются одни и те же, а выбор N остается за конкретным участником.

Чтобы равенства выполнялись необходимо, чтобы $p^N(S_T)$ зависела от N, что представляет особенный интерес. $p^N(S_T)$ – это оценка рынком плотности вероятности будущей цены базисного актива, выраженной не в N, а в активе, зафиксированном в контракте. Однако при этом эта оценка зависит от N, т.е. оценка вероятности того, чему будет равен обменный евро и доллара завтра зависит от того, в какой актив мы будем переводить финансовый результат, т.е. от конкретного участника рынка. В общем случае разные участники рынка могут получать разные оценки, анализируя одни и те же цены. Даже, если все они одинаково информированы, то они при этом рассчитывают получить разный финансовый результат от одних и тех же операций.

Анализируя выражение (7) легко заметить, что для того, чтобы оценка не зависела от N необходимо, чтобы $p^N(S_T)$ представляла собой дельта-функцию Дирака в точке ($S_T = S_0$). Этот случае соответствует тому, что участники рынка ожидают, что цена базисного актива не изменится.

С одной стороны, функция $p^N(S_T)$ имеет смысл плотности вероятности. С другой стороны, $p^N(S_T)$ – это стоимость элементарных ценных бумаг (Duffie 2010). Для определения связи между различными оценками используем дельта-функцию Дирака в качестве контрактной функции:

$$H_0^{\delta} \cdot N_0 = P^N(t_0,T) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p^N(S_T) \cdot \delta(S_T^*) \cdot N_T(S_T) dS_T = P^N(t_0,T) \cdot p^N(S_T^*) \cdot N_T(S_T^*) \quad (8)$$

Для любых двух N_i и N_j справедливо:

$$p^{N^i}(S_T) = p^{N^j}(S_T) \cdot \frac{P^{N^j}(t_0,T)}{P^{N^i}(t_0,T)} \cdot \frac{N_T^j(S_T)}{N_0^j} \cdot \frac{N_0^i}{N_T^i(S_T)} \quad (9)$$

Возвращаясь к исследуемому условию отсутствия арбитража можем записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^i}(S_T) dS_T = 1 \text{ для любого } i \quad (10)$$

Сравнивая (7) и (11) можно заметить, что (10) описывает портфель опционов с единичной контрактной функцией ($H^i(S_T) \cdot N_T(S_T) = 1$), которая имеет размерность актива N_i .Выплата премии при этом перенесена в момент исполнения опциона($P(T,T) = 1$) . Если условие (10) не верно, то выполняются условия (2). Таким образом, выражение (10) – это не требование, вытекающее из модели рынка, а требование, полученное из невозможности реализации арбитражного портфеля.

Данное выражение можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^i}(S_T) \cdot \frac{N_T^i(S_T)}{N_T^j(S_T)} d(S_T) = \frac{P^{N^j}(t_0,T)}{P^{N^i}(t_0,T)} \cdot \frac{N_0^i}{N_0^j} \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) представляют собой интересный результат. Отсутствие арбитража и, в конечном итоге, эффективность рынка зависит от всех торгуемых активов, чьи цены связаны с рассматриваемым. Должно быть невозможно реализовать такой актив N , чтобы условие (11) нарушалось. Таким образом, проверка цен на возможности арбитража представляет собой систему условий. Более того, по мере развития рынка новые условия могут добавляться. Ниже будет рассмотрен пример, иллюстрирующий важность этого свойства.

Здесь не рассматриваются случаи, когда зависимость обменного курса между активами от цены базисного актива носит стохастический характер. Например, в случае цен на нефть и стоимости акций авиакомпаний или компаний, связанных с биотопливом или альтернативными источниками энергии. Однако можно предположить, что даже в таком случае функция обменного курса $N_T = f(S_T)$ может быть зафиксирована с помощью некоторого контракта (набора контрактов).

Кроме условия (10) существуют еще два условия.

$$\begin{aligned} &p^{N^i}(S_T) \geq 0 \\ &0 \leq P^{N^i}(t_0, T) \leq 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Если эти условия нарушаются, то также возможен арбитраж.

Пример 1

Рассмотрим случай, когда условие (10) нарушается. Пусть $P^{N^1}(t_0,T) = P^{N^2}(t_0,T) = P^{N^3}(t_0,T) = 1$ и

$$\begin{aligned} &N_T^1(S_T) = S_T \\ &N_T^2 = 1 \\ &N_T^3(S_T) = \frac{1}{S_T} \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда используя (9) и (10) можем сделать следующие преобразования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^3}(S_T)dS_T = 1 \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^3}(S_T)dS_T = \int_{-\infty}^{\infty} p^{N^2}(S_T)\cdot\frac{S_T}{S_0}dS_T = \int_{-\infty}^{\infty} p^{N^2}(S_T)\cdot\frac{S_0}{S_0}dS_T + \int_{-\infty}^{\infty} p^{N^2}(S_T)\cdot\frac{S_T - S_0}{S_0}dS_T = 1 \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^2}(S_T)\cdot\frac{S_T - S_0}{S_0}dS_T = 0 \tag{16}$$

Аналогично можно получить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^1}(S_T)\cdot\frac{S_T-S_0}{S_0}dS_T=0 \tag{17}$$

Но тогда

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^2}(S_T)\cdot\frac{S_T-S_0}{S_0}dS_T=\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^1}(S_T)\cdot\frac{S_T}{S_0}\cdot\frac{\mathrm{S}_T-\mathrm{S}_0}{S_0}dS_T=\\&=\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^1}(S_T)\cdot\frac{\mathrm{S}_T-\mathrm{S}_0}{S_0}dS_T+\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^1}(S_T)\cdot\frac{(\mathrm{S}_T-\mathrm{S}_0)^2}{S_0^2}dS_T=\\&\int_{-\infty}^{\infty} p^{N^1}(S_T)\cdot\frac{(\mathrm{S}_T-\mathrm{S}_0)^2}{S_0^2}dS_T\neq 0\end{aligned} \tag{18}$$

Выражения (16) и (18) противоречат друг другу, что означает возможность арбитража. Единственным исключением является случай, когда ожидается, что цена не может измениться.

С одной стороны может показаться, что выражение (13) определяет нереальные условия. Однако рассмотрим случай, когда мы имеем форвардный контракт, по которому мы получим некоторый актив в будущем, и пытаемся изменить дату поставки.

Определим контракт O как обязательство поставки некоторого актива в некоторый момент времени в будущем. Данное обязательство оплачивается в том же активе, но в текущий момент. Такой контракт имеет смысл облигации, но может применяться к любому активу. Также мы исключаем риск дефолта. Очевидно, что стоимость контракта O определяется некоторой процентной ставкой.

Обязательство поставки равносильно контрактной функции, представляющей собой константу. Примем ее равной единице. Тогда из (5) следует, что стоимость контракта O равна:

$$H_0(t_0,T)=P(t_0,T)=e^{-r(t_0,T)\cdot(T-t_0)} \tag{19}$$

Определим стоимость контракта со сроком поставки t, выраженную в единицах имеющегося контракта со сроком поставки T:

$$H_0(t_0,t)\cdot N_0 = \frac{H_0(t_0,t)}{H_0(t_0,T)} = \frac{P(t_0,t)}{P(t_0,T)} = \frac{e^{-r(t_0,t)\cdot(t-t_0)}}{e^{-r(t_0,T)\cdot(T-t_0)}} = e^{-(r(t_0,t)\cdot(t-t_0)-r(t_0,T)\cdot(T-t_0))} \tag{20}$$

Выражение (20) определяет обменный курс между контрактами O.
Используя взаимосвязь между процентными ставками можно записать:

$$\frac{P(t_0,t)}{P(t_0,T)} = e^{-r(t,T)\cdot(t-T)} \tag{21}$$

Пусть $\mathrm{T}_1 < \mathrm{T}, \mathrm{T}_2 > \mathrm{T}$, T-T_1=T_2-T и $r(T_1,T) = r(T,T_2)$. Тогда

$$\frac{P(t_0,T_1)}{P(t_0,T)} = e^{-r\cdot(T_1-T)} = \frac{1}{e^{-r\cdot(T_2-T)}} = \frac{P(t_0,T)}{P(t_0,T_2)} \tag{22}$$

Таким образом, стоимость переноса срока поставки дальше в будущее (путем обмена соответствующих контрактов O) обратна стоимости переноса срока поставки ближе к текущему моменту. Эти обменные курсы, обратные друг другу, являются первым и третьим выражениями в (13). Рассмотрим следующий случай:

1. Текущий момент времени t_0.
2. Базисный актив опциона представляет собой контракт O со сроком поставки T_3.
3. Дисконтом является такой же контракт O, но со сроком поставки T_2. Обменный курс между указанными контрактами O равен $S(t)$. Контрактная функция в этом случае зависит от $S(t)$,т.е.процентной ставки, определяющей стоимость переноса срока поставки из T_2 в T_3.
4. Срок исполнения опциона $T_1, T_1 < T_2 < T_3$.
5. После исполнения мы можем перенести срок поставки из T_2 в одну или другую сторону (T_1 или T_2), стоимость переноса равна $N^1 = S(T_1)$ и

$N^3 = \dfrac{1}{S(T_1)}$ соответственно. Также мы можем оставить срок поставки, т.е. $N^2 = 1$.

В данном случае премия и контрактная функция имеют размерность контракта O, т.е. мы финансируем покупку портфеля опционов и получаем результат после исполнения опционов в контрактах O. Важным свойством является то, что $P^{N^1}(t_0, T_1) = P^{N^2}(t_0, T_1) = P^{N^3}(t_0, T_1) = 1$. Иначе получалось бы, что мы можем отдать в долг контракт O и получить через некоторые время больше, чем один контракт O. Если контракт O показывает, например, что один доллар в будущем стоит 0,9 доллара сегодня, то можно было бы купить такой контракт, одолжить его и получить, например, 1,1 контракта в будущем, что соответствовало бы 1,1 доллару. Следуя используемому в данной статье подходу можно сказать, что данное отклонение возможно, но вызывает появление арбитражных возможностей.

Таким образом, при описанных выше условиях мы получаем систему (13) и гарантированные арбитражные возможности. Однако нужно, чтобы процентные ставки были равны. Это условие является самым «слабым звеном» в том смысле, что арбитражеры изменят рынок таким образом, что это условие выполняться не будет. Таким образом, можно предположить, что на рынке не должно быть такой ситуации, что, например, можно было бы вложить доллар на разный срок под одну и ту же процентную ставку. Только если ожидается, что эта процентная ставка не будет меняться.

Следует отметить, что равенство процентных ставок – это не единственный возможный вариант. Из выражения (22) следует, что в более общем случае необходимо равенство произведений процентной ставки на временной интервал.

Пример 2

Для отсутствия арбитража необходимо, чтобы поведение процентных ставок отличалось от указанного выше. Это является следствием из условий отсутствия арбитража и ограничением на процессы, протекающие на рынке.

Однако рассмотрим это обстоятельство более детально. Что есть процентная ставка некоторого актива, определенная рынком и заложенная в реальные цены? Она определяет скорость экспоненциального роста количества актива, которым мы владеем. Также она определяет количество актива, которое мы отдадим или получим, если возьмем или отдадим актив в долг.

Более того, она определяется из соотношения цены актива сейчас и ожидаемой цены актива потом (которая может быть определена из соответствующего форвардного контракта). Покупка ценной бумаги с точки зрения ожидаемой прибыли должна быть эквивалентна альтернативным инвестициям, т.е.

$$e^{r'(t_0,T)\cdot(T-T_0)} = \frac{1}{S(t_0)} \cdot e^{r(t_0,T)\cdot(T-T_0)} \cdot E(S(t_1)) \quad (23)$$

Где r и r' – процентные ставки двух активов, $S(t_0)$ – обменный курс для двух активов в начальный момент времени, $E(S(t_1))$ – ожидание обменного курса для двух активов, которое может быть получено из стоимости соответствующего форвардного контракта.

Что, если мы можем управлять стоимостью актива в будущем? Тогда мы можем управлять процентной ставкой и получить необходимое для предыдущего примера равенство. Если стоимость ожидается без изменений, то мы рассчитываем получить безрисковую процентную ставку. Если ожидание стоимости в будущем отличается от текущего значения, то мы рассчитываем получить большую или меньшую процентную ставку.

Пусть у нас есть портфель (или публичная компания), которым мы управляем. Существуют ценная бумага, которая дает ее обладателю право обмена на ценные бумаги, входящие в портфель. Данная ценная бумага является базисным активом для опционов. Стоимость такого портфеля и ценной бумаги будет равна сумме стоимостей входящих в него активов. Пусть он состоит из акций одной компании.

Мы можем просто держать такой портфель и инвестировать полученные от него доходы (дивиденды) в увеличение количества акций, входящих в него. Тогда его стоимость $E(S(t_1))$ относительно стоимости акции будет расти за счет ожидания увеличения количества акций. Очевидно, что в таком сценарии $r(t_0,T)=0$. Иначе вложение в данную ценную бумагу даст больший или меньший доход по сравнению с альтернативными вложениями. Мы можем взять или отдать в долг некоторое количество ценных бумаг и вернуть точно такое же количество.

Мы можем анонсировать продажу части портфеля и выплату вырученных средств в качестве дивидендов. Ожидание будущей стоимости $E(S(t_1))$ (для момента после анонсированной продажи части портфеля) уменьшится в этом случае, а процентная ставка в соответствии с выражением (23) возрастет. Если мы хотим продать весь портфель, то процентная ставка стремится к бесконечности. Большая процентная ставка в этом случае образуется за счет больших дивидендов от продажи части портфеля, т.е. за счет снижения будущей стоимости.

В случае с публичной компанией управление дивидендами даст такой же результат.

Таким образом, мы можем влиять на ожидание будущей стоимости и управлять процентной ставкой. Мы можем получить любую положительную процентную ставку, и, в том числе, обеспечить равенство процентных ставок, как было указано выше. Получается, что арбитраж возможен в этом случае, а этот случай может быть искусственно создан почти при любых условиях. Возникает логичный вопрос: каким должен быть рынок, чтобы не было возможностей для арбитража?

С учетом того, что все вышеизложенное лишь гипотеза дать точный ответ не представляется возможным. Однако можно сделать предположение, согласующееся с экономическими процессами. Одно из предположений о рынке должно нарушаться. Лучший кандидат на это ликвидность. Действительно, в качестве возможных сценариев развития ситуации мы рассматриваем любые цены, но предполагаем, что они существуют. Если добавить ненулевую вероятность «отсутствия» цены, то определенный в данной статье парадокс будет разрешен. В этой связи можно предположить, что единая для всех участников рынка цена на некоторый актив – не самое эффективное решение задач, которые должен решать рынок. Наоборот, эффективная цена может быть определена только с учетом индивидуальных особенностей покупателя и продавца.

Заключение

В данной статье был рассмотрен нестандартный подход к определению условий отсутствия арбитража. Эквивалентность мартингальной и объективной мер несомненно является верным условием. Однако не всегда очевидно, что из этого следует с точки зрения практики, как это влияет на структуру рынка и другие особенности. Приведенный в начале статьи пример показывает, что в нейтральном к риске мире должна быть только одна единая валюта. Это позволяет посмотреть в новом свете на вопрос: «Каким должен быть безарбитражный рынок?».

Для ответа на этот вопросы используются более практический подход, в основе которого находится участник рынка, анализирующий рынок и создающий стратегии, которые бы использовали арбитражные возможности. Так, можно потребовать, чтобы сумма вероятностей была равна единице. С точки зрения практики это условие описывает цену весьма конкретного портфеля опционов, который мог бы использоваться для арбитража, если бы это условие нарушалось. В традиционном подходе это условие вытекает из модели рынка и наших предположений. В используемом здесь подходе мы говорим, что есть некоторая функция, которую можно получить из цен на опционы, и которая должна быть плотностью вероятности. Иначе будет возможен арбитраж.

Полученные результаты можно разделить на три важные части:

1. Получены условия отсутствия арбитража, которые являются необходимыми, но не достаточными. Они основываются на анализе цен и взаимосвязях между ценами на различные активы. Зная структуру рынка и цены можно составить систему условий, выполнение которых необходимо для отсутствия арбитража. Отсутствие арбитража является свойством не одной ценной бумаги, а системы взаимосвязанных бумаг или рынка в целом.

2. Примененный подход показывает, что подразумеваемая плотность вероятности, заложенная в цены, зависит не только от цен на ценные бумаги, но и от того, какие еще мы операции совершаем на рынке в рамках комплексной стратегии. Так, предполагаемые вероятности возможных вариантов стоимости евро в долларах завтра зависят от того хотим ли мы максимизировать счет в долларах или в евро или, может быть, максимизировать количество облигаций. Связь с техникой замены дисконта здесь такая же, как и связь полученных условий отсутствия арбитража с классическими.

3. Были определены свойства теоретических ценных бумаг, для которых бы условия не соблюдались. Далее были сконструированы такие ценные бумаги. Принципиальная возможность создания таких бумаг позволяет под новым углом взглянуть на вопрос, обозначенный в начале статьи: «Каким должен быть безарбитражный рынок?». Точный ответ дать в текущий момент не

представляется возможным, однако можно предположить, что такой рынок должен существенно отличаться от наблюдаемого. В частности, могут возникнуть проблемы с ликвидностью, что приведет к нарушению принципа одной цены.

Список литературы

1. Black F., Scholes M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (3): 637–654.
2. Becherer, D., Davis, M. H. (2010). Arrow–Debreu Prices. *Encyclopedia of Quantitative Finance*.
3. Duffie, D. (2010). Dynamic asset pricing theory. Princeton University Press.
4. Ioffe, I. D., Prisman, E. Z. (2013). Arbitrage violations and implied valuations: the option market. *The European Journal of Finance*, 19(4), 298-317.
5. Jackwerth, J. C. (1999). Option-implied risk-neutral distributions and implied binomial trees: A literature review. *The Journal of Derivatives*, *7*(2), 66-82.
6. Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, 4(1), 141-183.
7. Ross, S. (2013). The recovery theorem. *The Journal of Finance*.
8. Shleifer, A., Vishny, R. W. (1997). The limits of arbitrage. *The Journal of Finance*, *52*(1), 35-55.