Munich Personal RePEc Archive

Methodical aspects of estimating fractal dimension of financial time series

Buła, Rafał

University of Economics in Katowice

2012

Online at https://mpra.ub.uni-muenchen.de/59711/
MPRA Paper No. 59711, posted 08 Nov 2014 08:55 UTC

ASPEKTY METODYCZNE SZACOWANIA WYMIARU FRAKTALNEGO FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Rafał Buła

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Finansów i Ubezpieczeń,
Katedra Inwestycji i Nieruchomości
Opiekun naukowy: Prof. UE dr hab. Krystian Pera

Streszczenie: Niniejsze opracowanie jest poświęcone metodom szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych. Autor opisuje metodę podziału pola oraz metodę segmentowo – wariacyjną. Następnie metody te są wykorzystywane do otrzymania oszacowań wymiaru fraktalnego szeregów czasowych kursów wybranych walut. Ponadto autor poddaje krytycznej ocenie rezultaty otrzymane w wyniku zastosowania wspomnianych metod.

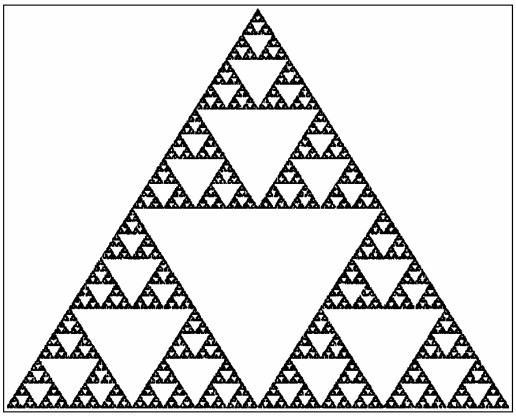
Słowa kluczowe: wymiar fraktalny, metoda podziału pola, metoda segmentowo - wariacyjna, kursy walut

1. Wstęp

Jednym z najistotniejszych problemów nierozerwalnie związanych z procesem inwestowania jest kwestia oceny ryzyka towarzyszącego podejmowanym decyzjom. Naturalne dążenie do jego skwantyfikowania doprowadziło do powstania znacznej ilości rozmaitych miar, które miały wspomagać inwestora w procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych. Różnią się one m.in. sposobem rozumienia ryzyka, założeniami dotyczącymi kształtowania się zmiennych ekonomicznych czy też warunkami, w których mogą (bądź powinny) być stosowane. Nierzadko wnioski wysnuwane w oparciu o różne miary ryzyka są krańcowo odmienne, stąd też nadal poszukuje się wielkości, która nie byłaby obarczona wadami występującymi w przypadku miar dotychczas stosowanych i umożliwiałaby formułowanie bardziej jednoznacznych konkluzji. Jedną z nowszych charakterystyk stosowanych do oceny ryzyka inwestycyjnego jest wymiar fraktalny. Koncepcja wymiaru mogącego przybierać także wartości niecałkowite była znana w matematyce już na początku wieku XX, jednak dopiero prace Benoit Mandelbrota z lat 70. przyczyniły się jej popularyzacji. Wraz z powstaniem nowych teorii dotyczących kształtowania się cen instrumentów finansowych wspomnianą miarę próbowano wykorzystać do oceny ryzyka związanego z lokowaniem kapitału na rynkach finansowych. Jednocześnie stworzono wiele metod szacowania wymiaru fraktalnego cechujących się odmiennym podejściem do problemu. Z tego też względu celem niniejszego opracowania jest ocena zasadności stosowania metody podziału pola oraz ewentualna korekta wniosków ekonomicznych sformułowanych w oparciu o wyniki uzyskane za jej pomocą.

2. Wymiar fraktalny jako charakterystyka finansowych szeregów czasowych

Koncepcja wymiaru niewyrażającego się liczbą całkowitą została stworzona na początku XX wieku przez matematyka Felixa Hausdorffa. Dotychczas posługiwano się wymiarem topologicznym, który punktom przypisywał wymiar równy 0, prostym – 1, płaszczyznom – 2, itd. Okazało się jednak, że zdecydowanie różniące się obiekty geometryczne mogą mieć ten sam wymiar topologiczny (dla przykładu: prosta oraz trójkąt Sierpińskiego przedstawiony poniżej charakteryzują się tym samym wymiarem topologicznym wynoszącym 1).



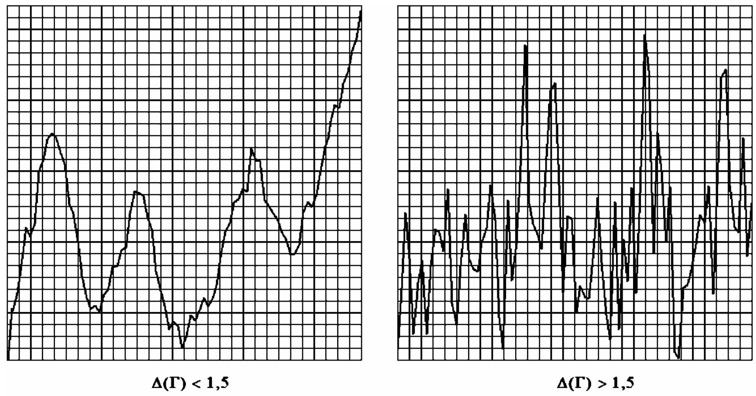
Ryc. 1. Trójkąt Sierpińskiego

Z tego też względu należy uznać, że wykorzystywanie go do klasyfikacji obiektów geometrycznych skutkuje utratą zbyt dużej ilości informacji o badanych zbiorach. Aby tego uniknąć Hausdorff rozwijając koncepcje Carathéodory'ego zdefiniował nowy rodzaj miary oraz rozszerzył pojęcie wymiaru, tak by mógł on przyjmować wartości niecałkowite (nazwanego na jego cześć wymiarem Hausdorffa – Besicovitcha). Nieco później także Georges Bouligand bazując na pracach Minkowskiego przyjął, że wymiar zbioru może być ułamkiem. Ze względu na fakt, że jakkolwiek wymiar Minkowskiego – Bouliganda z matematycznego punktu widzenia cechuje się własnościami mniej pożądanymi niż wymiar Hausdorffa, to jednak zdecydowanie łatwiejsze metody jego szacowania skłaniają do posługiwania się właśnie wymiarem Minkowskiego – Bouliganda. Dlatego też w niniejszym opracowaniu właśnie ów wymiar traktuje się jako synonim wymiaru fraktalnego.

Poniższa definicja wymiaru fraktalnego powstała także dzięki pracom m.in. Pontrjagina, Schnirelmana oraz Kołmogorowa i Tichomirowa. Formalnie, w odniesieniu do obiektów geometrycznych położonych na płaszczyźnie, wymiarem fraktalnym zbioru Γ nazywa się granicę (o ile istnieje):

$$\Delta(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(1/\varepsilon\right)}, \tag{1}$$

gdzie $N(\varepsilon)$ jest liczbą kwadratów siatki kwadratowej o boku ε mających co najmniej jeden punkt wspólny z danym zbiorem Γ. Dla prostych zachodzi $\Delta(\Gamma) = 1$, zaś $\Delta(\Gamma) = 2$ dla krzywych wypełniających płaszczyznę. Obrazowo można powiedzieć, że wymiar fraktalny wskazuje, w jaki sposób badany zbiór zachowuje się, gdy zmniejszamy bok danej siatki kwadratowej. W przypadku funkcji określonych na pewnym przedziale wymiar fraktalny pozwala na stwierdzenie, jak bardzo postrzępiony jest ich wykres. Jeżeli przyjąć, że finansowe szeregi czasowe są dyskretną reprezentacją pewnych funkcji, to wówczas można charakteryzować je za pomocą wymiaru fraktalnego owych funkcji. Wyróżnia się szeregi szybkozmienne (antypersystentne, $\Delta(\Gamma) > 1{,}5$) oraz wolnozmienne (persystentne, $\Delta(\Gamma) < 1{,}5$). Różnice między nimi są doskonale widoczne na ryc. 2.



Ryc. 2. Przykładowe szeregi czasowe o odmiennym wymiarze fraktalnym

W przypadku szeregów persystentnych występuje zjawisko wzmacniania trendu – tym silniejsze, im niższy wymiar fraktalny. Z kolei szeregi antypersystentne cechują się częstym odwracaniem trendu – tym częstszym, im wymiar fraktalny wyższy. Z tego też względu wymiar fraktalny został uznany za istotną charakterystykę szeregów czasowych pochodzących z rynku finansowego, dostarczającą informacji o ryzyku związanym z inwestowaniem w rozmaite walory.

3. Metody szacowania wymiaru fraktalnego

Dotychczas powstało wiele metod szacowania wymiaru fraktalnego, które różnią się przede wszystkim sposobem określenia $N(\varepsilon)$. Wynika to z faktu, że niezależnie od tego, czy $N(\varepsilon)$ jest:

a) najmniejszą liczbą kół o promieniu ε pokrywających zbiór Γ,
b) najmniejszą liczbą kwadratów o boku ε pokrywających zbiór Γ,
c) liczbą kwadratów siatki kwadratowej o boku ε, które mają co najmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem Γ,
d) najmniejszą liczbą zbiorów o średnicy równej co najwyżej ε pokrywających zbiór Γ,
e) największą liczbą rozłącznych kół o promieniu ε o środkach w punktach należących do zbioru Γ,

to granica wyrażenia $\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(1/\varepsilon\right)}$ przy $\varepsilon \to 0$ (o ile istnieje) jest taka sama [Falconer 2003].

W sytuacji dysponowania jedynie skończonym zbiorem punktów (jak w przypadku finansowych szeregów czasowych) kwestia wyboru metody zliczania kół bądź kwadratów nabiera jednak decydującego znaczenia. Ponadto przy malejącym ε pojawiają się trudności z określeniem właściwej liczby kół (kwadratów). Wobec powyższego Dubuc et. al. zasugerowali zastosowanie metody wariacyjnej wykorzystującej tzw. ε-oscylacje. Metodę tę następnie udoskonaliła Małgorzata Zwolankowska tworząc metodę segmentowo – wariacyjną [Zwolankowska 2000]. Oznaczając bowiem przez $|\Gamma(\varepsilon)|$ pole kwadratów siatki kwadratowej o boku ε mających co najmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem Γ, można wzór 1 przekształcić do:

$$\Delta(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(\frac{|\Gamma(\varepsilon)|}{\varepsilon^2}\right)}{\ln\left(1/\varepsilon\right)}. \tag{2}$$

Zwolankowska zaproponowała, ażeby $|\Gamma(\varepsilon)|$ obliczać jako:

$$|\Gamma(\varepsilon)| = \sum_{i=1}^{\left[\frac{N-1}{\varepsilon}\right]} h_i \cdot \varepsilon + h' \cdot \left(N - 1 - \left[\frac{N-1}{\varepsilon}\right] \cdot \varepsilon \right), \tag{3}$$

gdzie: N – liczba obserwacji w szeregu, h_i – rozstęp szeregu w i-tym przedziale postaci $\langle (i-1)\cdot\varepsilon, i\cdot\varepsilon \rangle$, ε – długość przedziału, h` – rozstęp szeregu w ostatnim przedziale (jeżeli $\frac{N-1}{\varepsilon} = \left[\frac{N-1}{\varepsilon}\right]$ należy przyjąć $h' = 0$). W niniejszym opracowaniu przyjęto, że $1 \le \varepsilon \le \left[\frac{N-1}{2}\right]$ (rozważamy przypadki gdy występują co najmniej dwa przedziały) oraz że ε jest podzielnikiem $N-1$. Następnie wykorzystujemy regresję $\ln\left(\frac{|\Gamma(\varepsilon)|}{\varepsilon^2}\right)$ względem $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (z wyrazem wolnym) by otrzymać oszacowanie wymiaru fraktalnego.

Podobną metodę zaproponował Grzegorz Przekota [Przekota 2003]. Sugeruje on by obliczać pole prostokąta zajmowanego przez badany szereg czasowy, a następnie dzielić go na połowy i znajdować sumę pól prostokątów zajmowanych przez pierwszą i drugą połowę szeregu. W tym celu można wykorzystać wzór:

$$P_k = \frac{N}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i^{max} - x_i^{min} \right), \tag{4}$$

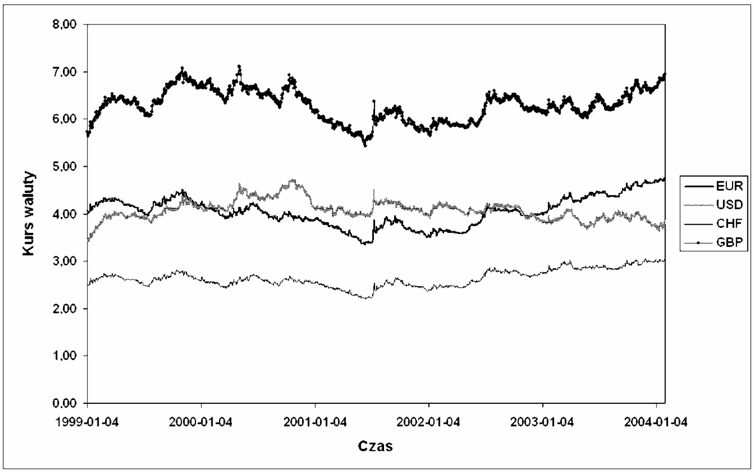
gdzie: P_k – pole zajmowane przez wykres szeregu po podziale na k części, N – liczba obserwacji w szeregu, x_i^{max} – największa wartość szeregu w i-tym prostokącie, x_i^{min} – najmniejsza wartość szeregu w i-tym prostokącie. Dzieląc każdy z prostokątów na dwa i obliczając sumę pól otrzymamy:

$$p_{2k} = \frac{N}{2k} \sum_{i=1}^{2k} \left(x_i^{max} - x_i^{min} \right). \tag{5}$$

Wtedy $p_{2k} = D(\Gamma) \cdot \frac{P_k}{2}$, gdzie $D(\Gamma)$ Przekota traktuje jako wymiar fraktalny. W celu jego oszacowania należy zatem dokonać regresji p_{2k} względem $\frac{P_k}{2}$ (bez wyrazu wolnego). Zdaniem autora podejście to może rodzić pewne wątpliwości metodyczne. Po pierwsze, nie wiadomo w jakiej dokładnie relacji względem $\Delta(\Gamma)$ pozostaje szacowany $D(\Gamma)$. Z definicji $D(\Gamma)$ można jedynie wnioskować, że $D(\Gamma) = 1$ gdy Γ jest prostą (bowiem wtedy $p_{2k} = 1 \cdot \frac{P_k}{2}$) oraz że $D(\Gamma) = 2$, gdy Γ jest figurą płaską całkowicie wypełniającą przestrzeń (wówczas $p_{2k} = 2 \cdot \frac{P_k}{2}$). Takie same wartości w przypadku rozważanych zbiorów przyjmuje $\Delta(\Gamma)$, jednak dla innych obiektów geometrycznych na płaszczyźnie niekoniecznie musi to być prawda. W sytuacji występowania rozbieżności porównywanie dotychczas wyliczanych wartości $\Delta(\Gamma)$ z $D(\Gamma)$ byłoby bezcelowe. Po drugie, wskazane byłoby przeprowadzenie analizy stabilności uzyskiwanych oszacowań oraz popełnianego potencjalnie błędu, a także skonfrontowanie ich z odpowiednimi wartościami otrzymywanymi w przypadku stosowania metody segmentowo – wariacyjnej. Może się bowiem okazać, że prowadzą one do błędów większych niż w przypadku innych metod szacowania wymiaru fraktalnego, co skłaniałoby do odrzucenia metody podziału pola jako sposobu optymalnego. W niniejszym opracowaniu skupiono się na kwestiach dotyczących stabilności oszacowań oraz błędzie estymacji.

4. Wymiar fraktalny szeregów czasowych kursów walut – porównanie metod

W celu zapewnienia porównywalności danych dla potrzeb niniejszego opracowania oszacowano wymiar fraktalny szeregów czasowych kursów walut opisanych w artykule Grzegorza i Daniela Przekotów [Przekota, Przekota 2004], tj. euro, dolara amerykańskiego, franka szwajcarskiego oraz funta brytyjskiego względem złotego w przedziałach czasowych pochodzących z okresu 04.01.1999 – 30.01.2004. Z tego też powodu wykorzystano zarówno metodę segmentowo - wariacyjną jak i podziału pola. Ponadto zauważono, że w przypadku metody podziału pola uwzględnienie pierwotnego podziału prostokąta dla k=1 prowadzi na ogół do uzyskania znacznie gorszego dopasowania linii regresji. Wobec powyższego zdecydowano się także szacować wymiar fraktalny metodą podziału pola wyłącznie dla k>1, co pozwoli na uzyskanie dodatkowych informacji o przydatności stosowanej metody.



Ryc. 3. Kursy wybranych walut względem złotego w okresie 04.01.1999 – 30.01.2004

Zanim zostaną przedstawione wyniki opisanych uprzednio kalkulacji wydaje się celowe określenie przybliżonych relacji, jakie winny zachodzić pomiędzy wymiarami fraktalnymi wykresów kursów poszczególnych walut na podstawie zarówno analizy wizualnej oraz klasycznych miar związku, takich jak współczynnik korelacji. Wykresy badanych kursów walut wskazują, iż ich wymiary fraktalne nie powinny istotnie odbiegać od siebie, zwłaszcza w przypadku euro, funta i franka. Jedynie dolar amerykański wykazuje odmienne zachowanie niż pozostałe trzy waluty, bowiem począwszy od połowy roku 2001 jego kurs podlega trendowi spadkowemu, zaś kurs pozostałych walut w tym czasie systematycznie wzrasta. Tym niemniej fluktuacje wokół trendu wydają się niezwykle podobne dla wszystkich omawianych walut. Poniżej zaprezentowano macierz korelacji logarytmicznych stóp zwrotu dla poszczególnych walut. Uzyskane wyniki są zgodne z uprzednio sformułowanymi wnioskami.

Tab. 1. Macierz korelacji logarytmicznych stóp zwrotu kursów walut

Współczynnik korelacji				
Waluta	EUR	USD	CHF	GBP
EUR	1,000	-	-	-
USD	0,550	1,000	-	-
CHF	0,957	0,561	1,000	-
GBP	0,756	0,741	0,754	1,000

Następnie oszacowano wymiar fraktalny szeregów czasowych kursów walut wykorzystując opisane metody. Rezultaty zestawiono poniżej.

Tab. 2. Oszacowany wymiar fraktalny szeregów czasowych kursów walut

Liczba obser-wacji	Waluta	Okres badany		Wymiar fraktalny		
				Metoda		
		Początek	Koniec	PP	PP, k>1	SW
1000	EUR	1999-01-04	2002-12-17	1,3971	1,4509	1,4262
1000	EUR	1999-07-01	2003-06-17	1,5098	1,2769	1,3948
1000	EUR	2000-02-11	2004-01-30	1,3687	1,2683	1,4010
1000	USD	1999-01-04	2002-12-17	1,4164	1,3710	1,3963
1000	USD	1999-07-01	2003-06-17	1,5390	1,4757	1,4071
1000	USD	2000-02-11	2004-01-30	1,4547	1,5503	1,4370
1000	CHF	1999-01-04	2002-12-17	1,5092	1,4628	1,4208
1000	CHF	1999-07-01	2003-06-17	1,4788	1,3195	1,4046
1000	CHF	2000-02-11	2004-01-30	1,3677	1,4046	1,4323
1000	GBP	1999-01-04	2002-12-17	1,4944	1,4610	1,4074
1000	GBP	1999-07-01	2003-06-17	1,4899	1,4253	1,4151
1000	GBP	2000-02-11	2004-01-30	1,5235	1,4212	1,4121

Objaśnienia:
SW – metoda segmentowo – wariacyjna,
PP – metoda podziału pola.

Tab. 3. Oszacowany wymiar fraktalny szeregów czasowych kursów walut

Liczba obser-wacji	Waluta	Okres badany		Wymiar fraktalny		
				Metoda		
		Początek	Koniec	PP	PP, k>1	SW
100	EUR	2002-07-02	2002-11-21	1,4480	1,3007	1,3982
100	EUR	2002-11-22	2003-04-15	1,2171	1,2604	1,3267
100	EUR	2003-04-16	2003-09-08	1,4519*	1,3289	1,3902
100	EUR	2003-09-09	2004-01-30	1,3256*	1,3805	1,3585
100	USD	2002-07-02	2002-11-21	1,4332	1,3015	1,3455
100	USD	2002-11-22	2003-04-15	1,4335	1,2480	1,3286
100	USD	2003-04-16	2003-09-08	1,4401*	1,5335	1,3476
100	USD	2003-09-09	2004-01-30	1,3808	1,4433	1,3810
100	CHF	2002-07-02	2002-11-21	1,4884	1,3327	1,4062
100	CHF	2002-11-22	2003-04-15	1,2713	1,3514	1,3297

100	CHF	2003-04-16	2003-09-08	1,6229	1,4616	1,4476
100	CHF	2003-09-09	2004-01-30	1,4272*	1,4787	1,4350
100	GBP	2002-07-02	2002-11-21	1,5199*	1,3257	1,3541
100	GBP	2002-11-22	2003-04-15	1,5385	1,3795	1,3902
100	GBP	2003-04-16	2003-09-08	1,5221*	1,3844	1,3476
100	GBP	2003-09-09	2004-01-30	1,3851*	1,3643	1,2947

Objaśnienia:
SW – metoda segmentowo – wariacyjna,
PP – metoda podziału pola,
* – oszacowania istotnie odmienne od oryginalnych.

Tab. 4. Średnie i odchylenia standardowe współczynnika zmienności losowej

Liczba obserwacji	Miara	Współczynnik zmienności losowej		
		Metoda		
		PP	PP, k>1	SW
1000	Średnia	13,7%	10,6%	1,6%
100	Średnia	13,0%	8,9%	2,9%
1000	σ	6,7%	3,0%	0,4%
100	σ	4,5%	4,9%	1,4%

Objaśnienia:
SW – metoda segmentowo – wariacyjna,
PP – metoda podziału pola.

Przeprowadzone obliczenia umożliwiają wyciągnięcie wniosku, że metoda podziału pola skutkuje uzyskiwaniem zdecydowanie gorzej dopasowanych linii regresji. Modyfikacja polegająca na dołączeniu warunku, że k>1 nieco poprawia sytuację, lecz współczynnik zmienności losowej nadal przyjmuje wartości istotnie większe niż w przypadku metody segmentowo – wariacyjnej (dopasowanie linii regresji mierzono wykorzystując współczynnik zmienności losowej, bowiem w przypadku metody podziału pola dokonujemy regresji bez wyrazu wolnego, a wówczas współczynnik determinacji nie może być stosowany). W przypadku szeregów czasowych o 1000 obserwacji można zauważyć, że zastosowanie metody podziału pola skutkuje otrzymywaniem drastycznie odmiennych oszacowań wymiaru fraktalnego dla danych dotyczących jednej waluty, a jedynie nieznacznie opóźnionych w czasie. Dla przykładu, przejście od okresu 04.01.1999 – 17.12.2002 do okresu 01.07.1999 – 17.06.2003 jest równoznaczne z zamianą 250 obserwacji (odrzuceniem 125 z okresu 04.01.1999 – 30.06.1999 oraz dołączeniem 125 z okresu 18.12.2002 – 17.06.2003). Jednocześnie w przypadku euro i dolara oszacowany wymiar fraktalny gwałtownie zmienia się rosnąc o ok. 0,1100, by przy przejściu do kolejnego okresu równie dynamicznie zmaleć. Dla szeregów o 100 obserwacjach zmiany te są jeszcze bardziej widoczne. Świadczy to albo o istotnej zmianie stosunków ekonomicznych w owych okresach bądź o niestabilności oszacowań uzyskiwanych z wykorzystaniem metody podziału pola. Autor niniejszego opracowania skłania się raczej ku tej drugiej możliwości. Należy jednocześnie zauważyć, że choć nałożenie warunku k>1 poprawia nieco sytuację, to jednak nadal występują znaczące fluktuacje oszacowań, a dopasowanie linii regresji nie jest najlepsze. Za to w przypadku metody segmentowo – wariacyjnej sytuacja jest zdecydowanie odmienna. Współczynnik zmienności losowej nie przekracza 2,5% (szeregi o 1000 obserwacjach) bądź 6,0% (szeregi o 100 obserwacjach). Ponadto otrzymane oszacowania cechują się znaczną stabilnością zarówno w odniesieniu do pojedynczych walut jak i całej grupy – przeciętny estymowany wymiar fraktalny wynosi $1{,}4129 \pm 0{,}0132$ (szeregi o 1000 obserwacjach, fluktuacje w przedziale (1,3948; 1,4370)) oraz $1{,}3676 \pm 0{,}0404$ (szeregi o 100 obserwacjach, fluktuacje w przedziale (1,2947; 1,4476)). Szczegółowe dane zostały zawarte poniżej.

Tab. 5. Oszacowania wymiaru fraktalnego w odniesieniu do grupy walut

Liczba obserwacji	Miara	Wymiar fraktalny		
		Metoda		
		PP	PP, k>1	SW
1000	Średnia	1,4624	1,4073	1,4129
1000	σ	0,0579	0,0811	0,0132
1000	Rozstęp	0,1713	0,2820	0,0422
100	Średnia	1,4316	1,3672	1,3676
100	σ	0,0986	0,0768	0,0404
100	Rozstęp	0,4058	0,2855	0,1529

Objaśnienia:
SW – metoda segmentowo – wariacyjna,
PP – metoda podziału pola.

Zaprezentowane wyniki obliczeń skłaniają do przyjęcia hipotezy, że w badanym okresie wymiary fraktalne szeregów czasowych kursów czterech badanych walut były zbliżone do siebie i wynosiły ok. 1,4129 (nieco niższe oszacowanie uzyskane dla szeregów o 100 obserwacjach jest raczej spowodowane mniejszą liczbą informacji dostarczanych przez te szeregi). Z tego też względu wszelkie wnioski natury ekonomicznej sformułowane w oparciu o gwałtownie fluktuujące oszacowania otrzymane z wykorzystaniem metody podziału pola należy uznać za wątpliwe. Ewentualne widoczne trendy nie muszą być efektem zmiany wymiaru fraktalnego, a ich istnienie może wynikać z charakteru danego szeregu czasowego (w przypadku szeregów persystentnych tego typu zjawiska występują raczej często, choć nie wiąże się to ze zmianą ich natury). Uzyskane wyniki nie świadczą bowiem o wystąpieniu w badanym okresie istotnej zmiany warunków ekonomicznych.

5. Podsumowanie

Wyniki uzyskane w niniejszym opracowaniu skłaniają do odrzucenia metody podziału pola jako sposobu estymacji wymiaru fraktalnego. W oparciu o szeregi czasowe kursów wybranych walut stwierdzono, że prowadzi ona do otrzymywania oszacowań wysoce niestabilnych oraz niepewnych, mimo zastosowania pewnych poprawek. Wszelkie wnioski formułowane w oparciu o wyniki uzyskane z jej wykorzystaniem pozostają wątpliwe. Z tego też powodu zdecydowanie lepszym rozwiązaniem wydaje się zastosowanie metody segmentowo – wariacyjnej. Ponieważ konkluzje dotyczące jakości wykorzystanych metod zostały wyprowadzone w oparciu o dane empiryczne o nieznanym rzeczywistym wymiarze fraktalnym celowe wydaje się przeprowadzenie analogicznych badań w odniesieniu do szerokiej klasy szeregów czasowych o znanym wymiarze fraktalnym. Kwestii tej oraz problemowi udowodnienia na gruncie teoretycznym, że oszacowania otrzymywane za pomocą metody podziału pola są obciążone poświęcone będzie odrębne opracowanie.

6. Literatura

Falconer K. 2003. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.
Mandelbrot B. 1983. The Fractal Geometry of Nature.

Przekota G. 2003. Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola. Zesz. St. Dokt. AE. Poznań. 12: 47-68.
Przekota G., Przekota D. 2004. Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych kursów walut metodą podziału pola. Bad. Oper. i Dec. 3/4: 67-82.
Zwolankowska M. 2000. Metoda segmentowo – wariacyjna. Nowa propozycja liczenia wymiaru fraktalnego. Przegl. Stat. 1/2: 209-224.
Zwolankowska M. 1998. Szacowanie lokalnego wymiaru fraktalnego szeregów czasowych. Zesz. Nauk. USz. Szczecin. 233: 157-163.

Adres do korespondencji: rafalbula@ue.katowice.pl