Use of tools of analytical geometry for search of an extremum of production function

Aleksenko, Natalia and Il'ina, Nadezhda and Motrich, Victoriya

Financial University under the Government of the Russian Federation

12 April 2014

УДК 51.77

Использование инструментов аналитической геометрии для поиска экстремума производственной функции

Н.А. Алексенко, Н.И. Ильина, В.С. Мотрич
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Use of tools of analytical geometry for search of an extremum of production function

N.A. Aleksenko, N.I. Il'ina, V.S. Motrich
Financial University under the Government of the Russian Federation

Аннотция: Авторы статьи рассматривают метод поиска экстремума производственной функции с использованием инструментов аналитической геометрии.

Ключевые слова: производственная функция, экстремум функции, линия уровня, направление роста.

Abstract: The authors consider a method for searching the extremes of the production function using the tools of analytic geometry.

Key words: production function extremum of the function, line level, the direction of growth.

В курсе изучения дисциплины «Системный анализ» бакалавры направления «Экономика» осваивают методы решения задач линейного программирования с использованием инструментов Microsoft Excel [8]. Однако решая подобные задачи, студенты не улавливают непосредственно ход решения задачи, так как программа Microsoft Excel выполняет решение в автоматическом режиме [4], [9].

Подсчитано, что в настоящее время 80-85% всех решаемых на практике задач оптимизации относятся к задачам линейного программирования. Линейное программирование (ЛП) оформилось как отдельный раздел математики в 30-40 годах XX века, когда выяснилось, что целый ряд задач из сферы планирования и управления может быть сформулирован в виде задач ЛП.

В период интенсивного экономического и индустриального развития Советского Союза (30 годы прошлого века) Леонид Витальевич Канторович был назначен консультантом в лабораторию фанерной фабрики. Перед ним была поставлена задача – разработать такой метод распределения ресурсов, который мог бы максимизировать производительность оборудования. Л.В. Канторович, сформулировав проблему с помощью математических терминов, произвел максимизацию линейной функции, подверженной большому количеству ограничений.

Метод Л.В. Канторовича, созданный для решения проблем, связанных с производством фанеры, и известный сегодня как метод линейного программирования, нашел широкое экономическое применение во всем мире. В работе «Математические методы организации и планирования производства», опубликованной в 1939 г., Л.В. Канторович показал, что все экономические проблемы распределения могут рассматриваться как проблемы максимизации при многочисленных ограничениях, следовательно, могут быть решены с помощью линейного программирования. Позднее американский ученый Дж.Данциг описал один из эффективных методов решения задач линейного программирования, так называемый симплекс-метод.

Идея метода Л.В. Канторовича основана на утверждениях:

1. Линии уровня $f(x) = const$ целевой функции $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ перпендикулярны вектору $\vec{c} = (c_1, c_2)$.

2. Значение целевой функции $f(x)$ растет при параллельном перемещении линии уровня в направлении вектора $\vec{c}$ и убывает в противоположном направлении.

Доказательство.

1. Выберем на линии $f(x) = K$ уровня K, где K произвольная константа, две различные точки $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Векторы $\vec{c}$ и $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярны, так как их скалярное произведение равно нулю

$$\vec{c}\cdot\overrightarrow{AB}=c_1(b_1-a_1)+c_2(b_2-a_2)=c_1b_1+c_2b_2+c_0-(c_1a_1+c_2a_2+c_0)=$$
$$=f(B)-f(A)=K-K=0$$

Следовательно, линия уровня $f(x)=K$ перпендикулярна вектору $\vec{c}$.

2. Построим вектор $\vec{c}=(c_1;c_2)$. Выберем две различные точки $P(p_1,p_2)$ и $M(m_1,m_2)$ так, что вектор $\overrightarrow{PM}=(m_1-p_1;\ m_2\text{-}p_2)$ параллелен вектору $\vec{c}$ (*рис.1*). Через каждую из этих точек можно провести свою линию уровня $f(x)=f(P)$ и $f(x)=f(M)$. Обозначим $a=f(M)-f(P)$ и определим знак числа *a:*

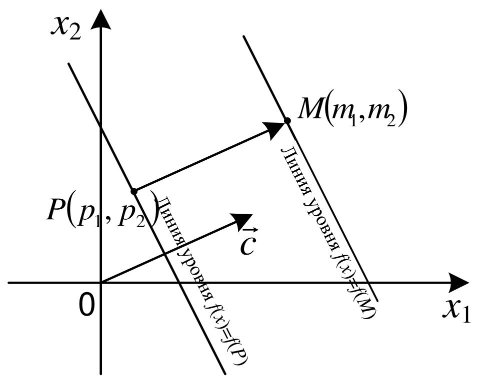

Рис. 1. Векторы $\vec{c}$ и $\overrightarrow{PM}$ параллельны

$$a=f(M)-f(P)=c_1m_1+c_2m_2+c_0-(c_1p_1+c_2p_2+c_0)=$$
$$=c_1(m_1-p_1)+c_2(m_2-p_2)==\vec{c}\cdot\overrightarrow{PM}=|\vec{c}|\cdot\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot(\pm1)$$

Следовательно, $a>0$, если $\vec{c}\uparrow\uparrow\overrightarrow{PM}$, и $a<0$, если $\vec{c}\uparrow\downarrow\overrightarrow{PM}$. То есть значение $f(x)$ увеличивается в направлении вектора $\vec{c}$ и уменьшается в противоположном направлении. Что и требовалось доказать [1].

Метод Л.В. Канторовича можно рассмотреть на примере решения задач ЛП:

- с двумя переменными, представленными в неканонической форме;
- со многими переменными в канонической форме при условии, что система ограничений содержит не более двух свободных переменных [10].

Таким образом, рассмотренный в данной работе графический метод решения задач линейного программирования обладает рядом достоинств. Он прост, нагляден, позволяет быстро и легко получить ответ.

Однако при использовании этого метода возникают «технические» погрешности, которые неизбежно возникают при приближенном построении графиков. Второй недостаток геометрического метода заключается в том, что многие величины, имеющие четкий экономический смысл (такие, как остатки ресурсов, избыток питательных веществ и т. п.) не выявляются наглядно при графическом решении задач. Но самое главное – графический метод можно применить только в случае, когда число переменных в стандартной задаче равно двум [2]. Если в задаче три переменных и более, а в реальных экономических задачах возникает именно такая ситуация, то наглядно представить себе область допустимых планов трудно. Поэтому необходимы аналитические методы, позволяющие решать задачи линейного программирования с любым числом переменных и выявить экономический смысл входящих в них величин [5].

Литература

1. Алексенко Н.В. Основы линейного программирования: учебное пособие / Н.В. Алексенко, М.Н. Рассказова. – М.: Академия бюджета и казначейства МФ РФ, 2010. – 177 с.
2. Алексенко Н.В. Математика: учебное пособие / Н.В. Алексенко, Р.И. Воробьева. – Омск: Омский гос. ин-т сервиса, 2004. – 131 с.
3. Алексенко Н.В. Математическая компетентность как качество образования в экономическом вузе / Н.В. Алексенко, Н.А. Бурмистрова, Н.И. Ильина // В мире научных открытий. – 2013. – № 7. – С. 200–219.
4. Бурмистрова Н.А. Использование информационных технологий в обучении будущих специалистов финансовой сферы математическому моделированию экономических процессов // Информационные технологии в образовании. XIX Международная конференция-выставка: сборник трудов. – М.: Изд-во МИФИ, 2009. – Ч.2. – С. 5–57.
5. Бурмистрова Н.А. Компетентностный подход к обучению математике как основа профессиональной подготовки студентов экономических вузов // Высшее образование сегодня. – 2009. – № 6. – С. 40–42.
6. Бурмистрова Н.А. Критерии оценки профессиональной компетентности студентов экономического вуза при обучении математике // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. – 2009. – № 8. – С. 49–60.

7. Бурмистрова Н.А. Модель методической системы обучения математике будущих специалистов финансовой сферы в условиях компетентностного подхода // Сибирский педагогический журнал. – 2011. – № 2. – С. 307–314.
8. Бурмистрова Н.А. Методические особенности обучения математике бакалавров экономических направлений в условиях реализации ФГОС / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Алексенко, Н.И. Ильина // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы Международная научно-методической конференции. – М.: Изд. дом МФО, 2014. – С. 141–144.
9. Бурмистрова Н.А. Роль информационных технологий в обучении студентов математическому моделированию экономических процессов при реализации компетентностного подхода // Сибирский педагогический журнал. – 2009. – № 9. – С. 73–79.
10. Бурмистрова Н.А. Системы линейных алгебраических уравнений. Балансовые модели в экономике: учеб. пособие / Н.А. Бурмистрова, Н.И. Ильина. – Омск: Издат. дом «Наука», 2010. – 128 с.

Опубликовано: Алексенко Н.А. Использование инструментов аналитической геометрии для поиска экстремума производственной функции / Н.А.Алексенко, Н.И. Ильина, В.С. Мотрич // Потенциал Российской экономики и инновационные пути его реализации: Материалы международной научно-практической конференции. – Омск: РОФ «Фонд региональной стратегии развития», 2014. – С. 445−447. *(Доступна электронная версия)*