



Munich Personal RePEc Archive

## **Mathematical models of economic equilibrium**

Natalya Burmistrova and Tatyana Edzhibiya and Pavel  
Urlapov and Natalia Tsoy

Financial University under the Government of the Russian  
Federation

5 April 2013

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/63657/>  
MPRA Paper No. 63657, posted 15 April 2015 14:44 UTC

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

*Бурмистрова Н.А., Эджибия Т.Л., Урлапов П.С., Цой Н.В.,  
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации*

### **Mathematical models of economic equilibrium**

*Burmistrova N.A., Edzhibiya T.L., Urlapov P.S., Tsoy N.B.  
Financial University under the Government of the Russian Federation*

**Аннотация:** Авторы статьи рассматривают особенности и возможности применения балансовых экономико-математических моделей.

**Ключевые слова:** Балансовые модели, экономико-математические модели.

**Abstract:** The authors examine the features and applications of the balance of economic and mathematical models.

**Key words:** Balance models, economic and mathematical models.

Порой бывает трудным представить и осознать целостный процесс функционирования какого-либо предприятия. Результаты труда, также как и их масштабы, мы осознаем прекрасно: это существующий рынок услуг и товаров [6]. Мы можем легко вообразить себе масштаб такого результата труда, как журнала, лежащего на полке. Для этого нам стоит лишь открыть его и прочитать, каким тиражом он издается. Но мало кто при этом представляет весь процесс изготовления этого тиража: производство электроэнергии, печатных станков, красителей, бумаги, и, как следствие, развитие сталелитейных заводов и химических лабораторий. Мы не говорим уже и про продукты питания, которые, справедливости ради заметим, тоже становятся неотъемлемой частью в производстве журналов, хоть и не являются частью технологической цепочки [5].

Для того чтобы можно было не только представлять, но и рассчитывать стоимость всех участков производства была создана математическая модель Василия Леонтьева, известная как модель межотраслевого баланса [3].

В равновесной модели многоотраслевой экономики рассматривается экономическая система, состоящая из  $n$  отраслей, каждая из которых производит некоторую продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для непроизводственного потребления, т.е. конечная продукция (табл. 1).

Таблица 1

Отрасли потребления / Отрасли производства	Производственное потребление						Конечная продукция $Y$	Валовая продукция $X$
	1	2	...	$j$	...	$n$		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$	$y_1$	$x_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2n}$	$y_2$	$x_2$
⋮	...	...	...	...	...	...	⋮	⋮
$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$	$y_i$	$x_i$
⋮	...	...	...	...	...	...	⋮	⋮
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nj}$	...	$x_{nn}$	$y_n$	$x_n$

В соответствии с балансовым характером таблицы объем валовой продукции  $i$  отрасли равен сумме объемов этой продукции, потребляемой  $n$  отраслями, и конечного продукта, т.е.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + y_1 = x_1; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + y_2 = x_2; \\ \dots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + y_n = x_n. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения системы (1) называется соотношениями баланса. Поскольку продукция разных отраслей может иметь разные измерения, будем рассматривать стоимостный баланс. Введем коэффициенты прямых затрат

$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  – объем (затраты) продукции  $i$  отрасли, необходимой для

производства 1 единицы продукции  $j$  отрасли. Тогда  $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$  и система

(1) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = x_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n = x_n. \end{cases} \quad (1')$$

или в матричном виде:  $A \cdot X + Y = X$  (2)

В уравнении многоотраслевого баланса (2)

$A = (a_{ij})$  – матрица прямых материальных затрат (технологическая матрица);

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  – вектор валовой продукции каждой отрасли;

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  – вектор конечной продукции каждой отрасли.

Цель модели многоотраслевого баланса – дать ответ на вопрос: каким должен быть объем валовой продукции каждой отрасли  $X$ , чтобы удовлетворить потребности в продукции этой отрасли при заданном объеме конечного продукта  $Y$  и известной матрице прямых затрат  $A$ ?

Из уравнения (2) выразим вектор  $X$

$$X - AX = Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y.$$

В том случае, если матрица  $(E - A)$  невырожденная, т. е.  $|E - A| \neq 0$ , то решение уравнения (2) определяет формула  $X = (E - A)^{-1} Y$ .

Усложнить и расширить эту математическую модель помогла модель равновесных цен. Усложняется ситуация тем, что вводится матрица непрямых затрат (налоги, оплата труда), которая используется при исследовании таких экономических процессов как прогноз цен на продукцию отраслей при известных нормах добавленной стоимости и прогноз норм добавленной стоимости при известных ценах на продукцию отраслей [2].

Введем  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$  – вектор цен, где  $p_i$  – цена 1 единицы продукции

$i$  отрасли,  $i = (1, \dots, n)$ .

Поскольку для выпуска 1 единицы продукции первой отрасли требуется

$a_{11}$  – продукции первой отрасли;

.....

$a_{n1}$  – продукции  $n$ -й отрасли,

то на приобретение необходимой продукции будет потрачена сумма

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n.$$

В этом случае для выпуска первой отраслью продукции в объеме  $x_1$  необходимы затраты

$$x_1 p_1 = x_1 \underbrace{(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n)}_{\text{производственные расходы}} + \underbrace{V_1}_{\text{непроизводственные расходы}},$$

где  $V_1$  – добавленная стоимость (зарботная плата, налоги и т. д.)

При делении полученного уравнения на  $x_1$ , получаем затраты первой отрасли, необходимые для производства 1 единицы продукции

$$p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n + v_1,$$

где  $v_1 = \frac{V_1}{x_1}$  – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на 1 единицу выпускаемой продукции).

Аналогично определяются затраты других отраслей на производство 1 единицы продукции

$$p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n + v_2;$$

.....

$$p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n + v_n.$$

Полученную систему можно записать в форме матричного уравнения

$$P = A^T \cdot P + V, \text{ где}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ — вектор норм добавленной стоимости.}$$

Уравнение  $P = A^T \cdot P + V$  называют моделью равновесных цен, которая используется при исследовании следующих экономических процессов:

- прогноз цен на продукцию отраслей при известных нормах добавленной стоимости

$$P - A^T P = V \Rightarrow (E - A^T) \cdot P = V \Rightarrow P = (E - A^T)^{-1} \cdot V;$$

- прогноз норм добавленной стоимости при известных ценах на продукцию отраслей

$$V = P - A^T P \Rightarrow V = (E - A^T) \cdot P.$$

Чтобы применить эти две балансовые модели в процессе обучения, дабы наглядно продемонстрировать весь процесс производства, мы прибегнем к методу, появившемуся в начале XX века в Школе бизнеса Гарвардского университета. Метод получил название Кейс-стади, (от англ. Case study), основанный на разборе конкретных ситуаций путем применения на них полученных знаний. Является методом активного обучения, а использование ситуаций, в некоторой степени знакомых, а от того и более понятных, позволяет учащимся не только получать знания, но в дальнейшем представлять, как они их могут применить и какие последствия могут последовать.

Сформулируем кейс следующим образом. Центральное конструкторское бюро автоматики (ЦКБА) получила государственный заказ на производство X авиазапчастей. Каждая деталь проходит две одинаковых стадии производства. Первая стадия осуществляется на оборудовании, которое было установлено еще при открытии завода в Советском Союзе. Вторая же стадия изготовления проходит на металлообрабатывающих, пяти координатных станках, с числовым программным управлением, фирмы

Hermle, которые будут закуплены и привезены прямым из Германии. И вопрос будет состоять в том, сколько рублей будет заплачено за выполнение всей работы, если известно известна доля металла, стоимость станков, всех коммуникаций, известны суммы, которые отводятся на оплату труда работника предприятия. Учтем так же, что чего-то да будет стоить пищевая промышленность (на территории завода существует столовая) и не забудем мы о внутреннем и внешнем ремонте зданий, об очистке территории завода и персонале, который не только стоит у станка, но еще и занимается руководством предприятия, охраной и уборкой.

Суть кейса в том, что мы можем получить совершенно разные цифры итоговой стоимости. Эта разница варьируется в зависимости от невероятного количества факторов: от, казалось бы, ни на что не влияющего климата до экономической политики различных государств. Климатические условия, например, могут резко изменить положение дел и вещей в сельском хозяйстве, что приведет к росту стоимости товаров в столовой, а эмбарго на ввоз определенной продукции соседним государством затруднит. Каждую из отраслей, продукт которой используется при выполнении заказа в ЦКБА можно также описать при помощи модели равновесных цен и увидеть, что и она является очень сложной системой, из чего мы делаем сразу два вывода. Во-первых, глобальность модели равновесных цен неоспорима, т.к. вы можете разложить на отдельные составляющие любое производство, равно, как и разложить на составляющие любое другое производство, которое является составляющим первого. И, во-вторых, модель равновесных цен является очень громоздкой и не до конца точной в практике, если неизвестны конечные стоимости продукции других отраслей.

Как видим, обе представленные модели позволяют описать и достаточно точно и верно рассчитать стоимость продукции, производимой предприятием [1]. Модель проста в своем образе и невероятно глубока в применении. И данный кейс стадии это только подтвердил.

Однако есть и минусы. Зачастую на продукцию предприятия, помимо холодно рассчитанных показателей влияют еще и совершенно

непредсказуемые факторы [8]. Урожай в аграрной промышленности может уничтожить излишняя засушливость, разработка нефтяного месторождения может быть приостановлена по причине аварии, а приостановленная добыча стали могут помешать скорому решению возникшего военного положения с другой державой. Эти недочеты решаемы компьютерным моделированием дюжины вариаций одного и того же кейса с различными переменными, что позволяет увидеть наиболее возможный из всех результатов [4]. Но это вовсе не значит, что развитие ситуации пойдет именно по этому, наиболее вероятному. С этого ракурса модели, рассматриваемые нами в этой работе, выглядят не самым наилучшим образом [7].

### Литература

1. Бурмистрова Н.А. Математическое моделирование как творческий процесс // Естественные науки и экология: межвузовский сборник научных трудов. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998. – С. 3–5.
2. Бурмистрова Н.А. Сборник прикладных математических задач для студентов экономических вузов: учеб. пособие. – Омск: Издательский дом «Наука», 2011. – 140 с.
3. Бурмистрова Н.А. Системы линейных алгебраических уравнений. Балансовые модели в экономике: учеб. пособие / Н.А. Бурмистрова, Н.И. Ильина. – Омск: Издательский дом «Наука», 2010. – 128 с.
4. Бурмистрова Н.А. Математическое моделирование и всеобщая компьютеризация или имитационные модели // Информационные технологии в образовании. VIII Международная конференция-выставка: сборник трудов. – М.: Изд-во МИФИ, 1998. – С. 20–22.
5. Эджибия Т.Л. Сберегательное поведение домохозяйств на финансовом рынке // Экономика и финансы; теоретические и практические аспекты управления: сб. трудов Международной научно-практической конференции. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. – С. 186-192.
6. Эджибия Т.Л. Экономическая элита и модернизация экономики России // Социально-экономические и правовые системы: современное видение: материалы Международной научно-практической конференции. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. – С. 40-43.
7. Эджибия Т.Л. Экономическая культура и финансовая грамотность // Двадцатые Апрельские экономические чтения: Материалы международной научно-практической конференции. – Омск: РОФ «ФРСР», 2014. – С.440-442.
8. Эджибия Т.Л. Структурные сдвиги в экономике Красноярского края и их воздействие на сферу потребления // Проблемы развития рынка товаров и услуг: перспективы и возможности субъектов РФ: Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2014.

**Опубликовано:** Бурмистрова Н.А., Эджибия Т.Л., Урлапов П.С., Цой Н.В. Математические модели экономического равновесия // Вопросы финансового обеспечения социально-экономического развития Российской Федерации: сб. трудов II Международной научно-практической конференции Омск: Омский филиал Финуниверситета, 2013. – С. 516–521. (Доступна [электронная версия](#))