Queuing system on the model of the supermarket

Il'ina, Nadezhda and Menyaylo, Yuliya

Financial University under the Government of the Russian Federation

5 April 2015

УДК 51.77

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ СУПЕРМАРКЕТА

Ильина Н.И., Меняйло Ю.С.
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

QUEUING SYSTEMS ON THE MODEL SUPERMARKET

N.I. Il'ina, U.S. Menyaylo
Financial University under the Government of the Russian Federation

Аннотация: Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Математические методы позволяют получить основные характеристики системы. Благодаря этому появляется возможность проводить качественный анализ влияния отдельных факторов на эффективность работы. В статье рассмотрена важных задач коммерческой деятельности – рациональная организация торгово-технологического процесса массового обслуживания, на примере супермаркета.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, марковский процесс, поток заявок.

Abstract: Methods of queuing theory can be solved many problems of the study of the processes occurring in the economy. Mathematical methods allow obtaining the main characteristics of the system. This means that you can perform qualitative analysis of the impact of individual factors on the work efficiency. The article considers one of the important tasks of commercial activity, the rational organization of trade and manufacturing process of mass service, for example in the supermarket.

Key words: Keywords: queuing systems, Markov process, the flow of applications.

Буквально с момента рождения всем нам приходится сталкиваться с очередями. Каждый день в университете мы стоим в очереди в гардероб и столовую. Мы стоим в очереди в билетные кассы кино. Каждый из нас посещает супермаркеты, и там тоже приходится стоять в очереди.

В.А. Емеличев говорит о том, что «очереди являются бедствием нашей эпохи, бедствием неизбежным, если мы не устраним всякую свободу выбора, и не будем планировать каждую мелочь, касающуюся людей и продуктов производства, - а это нетерпимо для цивилизованного общества и, как правило, неосуществимо. Но, если ожидание неизбежно, его можно в какой-то степени контролировать: систему или организацию, на входе которой образуется очередь, можно преобразовать и улучшить с точки зрения обслуживания»

Очереди возникают практически во всех системах массового обслуживания (далее СМО), а вот теория массового обслуживания занимается оценкой функционирования системы при заданных параметрах и поиском параметров, оптимальных по некоторым критериям. Таким образом, актуальность данной темы обусловлена тем, что при грамотном подходе и глубоких знаниях теории очередей можно задать такие параметры функционирования системы, которые сведут затраты на содержание СМО к минимуму.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц, называемых каналами обслуживания. Например, различные линии связи, продавцы или машины. Как правило, заявки поступают в СМО не регулярно, а случайно, образуя тем самым случайный поток заявок или требований. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что система массового обслуживания оказывается загруженной неравномерно. Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т.п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

Применение аппарата случайных процессов упрощает исследование СМО. В основе СМО предполагается марковский случайный процесс – для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Заявки, поступающие в СМО, распределены по закону Пуассона: $P_m(\tau) = \frac{(\lambda \cdot \tau)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$, где λ – интенсивность потока случайного числа событий $X(\tau) = m(m = 1,2,\ldots)$, наступающих за промежуток времени τ. Таким образом, пуассоновским называют поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствий и ординарности.

СМО делят на три основных типа: СМО с отказами, СМО с ожиданием (очередью) и СМО смешанного типа.

В СМО с отказами выделяют одноканальную и многоканальную систему. Одноканальная система включает в себя только один канал обслуживания и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ: $f_1(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t}$.

Так как процесс является марковским, то вероятности $p_0(t)$ и $p_1(t)$ событий, состоящих в том, что в момент времени t СМО находится в состояниях s_0 (канал свободен) и s_1 (канал занят) соответственно, удовлетворяют системе уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\mu \cdot p_1(t) + \lambda \cdot p_0(t). \end{cases}$$

Здесь λ и μ являются плотностями вероятностей перехода из состояния s_0 в s_1 и обратно. Очевидно, что: $p_0(t) + p_1(t) = 1$.Соответственно многоканальная СМО предполагает более одного канала.

Следующим видом является многоканальная и одноканальная СМО с ожиданием. Для многоканальной СМО можно вычислить формулы для вероятностей состояний:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} \right)^{-1}$$

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{n^k}{k!} \cdot \psi^k \cdot p_0, k = 1,2,\ldots,n; \\ \dfrac{n^n}{n!} \cdot \psi^k \cdot p_0, k = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

Здесь ψ – показатель нагрузки на один канал, который можно определить, как $\psi = \dfrac{\lambda}{n \cdot \mu}$. Второй подвид СМО можно рассматривать как частный случай первой при $n = 1$.

За основу работы возьмем многоканальную СМО с ожиданием и рассмотрим более подробно основные показатели и характеристики.

Доказано, что при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявок в системе (в очереди) равно среднему числу заявок в системе – $L_{\text{сист}}$, деленному на интенсивность потока заявок – λ:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} \qquad (1)$$

Среднее время ожидания в системе представляют в виде отношения среднего числа заявок в системе – $L_{\text{оч}}$ к интенсивности потока:

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} \qquad (2)$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди, вычисляется по формуле:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0 \qquad (3)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – интенсивность нагрузки канала, определяемое как отношение интенсивности потока к средней интенсивности обслуживания, а P_0 – предельная вероятность состояний n – канальной СМО, определяемой по формуле:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1} \qquad (4)$$

Тогда

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0 \qquad (5)$$

$$P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot P_0 \qquad (6)$$

А среднее число заявок в очереди и в системе определим как:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n * n!(1 - \frac{\rho}{n})^2} \qquad (7)$$

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho \qquad (8)$$

Коэффициент занятости канала обслуживания:

$$\psi = \frac{\rho}{n} \qquad (9)$$

Относительная величина затрат $С_{отн}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей:

$$C_{отн} = \frac{n}{\lambda} + 3T_{оч} \qquad (10)$$

В качестве примера применения теории массового обслуживания рассмотрим следующую задачу.

Пусть даны некоторые статистические данные по супермаркету N с 1 по 7 марта. Данные сгенерированы по времени работы магазина и разбиты на 3 периода: I – с 9:00 до 13:00; II – с 13:00 до 17:00; и III – с 17:00 до 21:00.Согласно проведенному исследованию к узлу расчета поступает поток покупателей с разной интенсивностью. Средняя интенсивность в час в первом периоде равна 23 человека, во втором – 45, а в третьем– 81.Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного покупателя 2 минуты.

Необходимо определить:

1) Минимальное количество кассиров $n_{\min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$;

2) Относительную величину затрат С$_{отн}$ при $n_{\min}$;

3) Вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

Для начала определим интенсивность потока покупателей в минутах: $\lambda_1 = 23/60 = 0{,}38$ – для I периода; $\lambda_2 = 0{,}75$ и $\lambda_3 = 1{,}35$. Так как среднее время обслуживания равно двум минутам, то $\mu = 1/2 = 0{,}5$. Интенсивность нагрузки для каждого канала соответственно: $\rho_1 = 0{,}76$; $\rho_2 = 1{,}5$ и $\rho_3 = 2{,}7$. Таким образом, минимальное количество кассиров для каждого периода необходимое для того, чтобы очередь не выросла до бесконечности: $n_{1\min} = 1$; $n_{2\min} = 2$; $n_{3\min} = 3$.

Теперь найдем основные характеристики обслуживания СМО для первого периода, при котором работает одна касса, используя формулы (1) – (10).

Вероятность P_0 того, что в узле расчета отсутствуют покупатели: $P_0 = \left(1 + \frac{0{,}76}{1!} + \frac{0{,}76^2}{1! \cdot (1-0{,}76)}\right)^{-1} \approx 0{,}24$, т.е. в среднем 20,4% времени касса будет простаивать.

Вероятность того, что покупатель окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{0{,}76^2}{1! \cdot (1-0{,}76)} \cdot 0{,}24 = 0{,}578$$

Среднее число покупателей в очереди: $L_{оч} = \dfrac{0{,}76^2 \cdot 0{,}24}{1 \cdot 1! \left(1 - \dfrac{0{,}76}{1}\right)^2} = 2{,}41$

Среднее время ожидания в очереди: $T_{оч} = 6{,}34$

Среднее число покупателей в узле: $L_{сист} = 3{,}17$

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета: $T_{сист} = 8{,}34$

Относительная величина затрат при $n = 1$ равна $C_{отн} = (1/0{,}38) \cdot 1 + 3 \cdot 6{,}24 = 21{,}65$.

Итак, последнее, что необходимо найти – вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей. Нам уже известна $P_{оч}(r \geq 1) = 0{,}578$.

Далее определяем вероятность того, что в очереди находится более трех покупателей:

$$P_{оч}(r > 3) = P_{оч}(r \geq 1) + P_{n+1} + P_{n+2} + P_{n+3} = 0{,}578 + \frac{0{,}76^2}{1 \cdot 1!} \cdot 0{,}24 + \frac{0{,}76^3}{1^2 \cdot 1!} \cdot 0{,}24 + \frac{0{,}76^4}{1^3 \cdot 1!} \cdot 0{,}24 = 0{,}666$$

Тогда вероятность, что в очереди окажется не более трех покупателей:

$P(1 \leq r \leq 3) = 1 - P_{оч}(r > 3) = 0{,}334.$

Аналогично найдем все показатели для II и III периодов. Полученные данные представим в виде таблицы.

Таблица

Период	λ	ρ	P_0	$P_{оч}$	$L_{оч}$	$T_{оч}$	$L_{сист}$	$T_{сист}$	$C_{отн}$	$P(1 \leq r \leq 3)$
I	0,38	0,76	0,24	0,578	2,41	6,34	3,17	8,34	21,65	0,334
II	0,75	1,5	0,143	0,483	1,93	2,57	3,43	4,57	10,38	0,23
III	1,35	2,7	0,025	0,738	7,38	5,47	10,08	7,47	18,63	0,054

Полученные данные позволяют сделать вывод, что наибольшую вероятность оказаться в очереди, а также наибольшее среднее время ожидания в очереди покупатель имеет в III периоде с 17:00 до 21:00, из-за достаточного увеличения интенсивности потока. В этом же промежутке времени возрастает и среднее число покупателей в узле, что в три раза превышает показатели первого и второго периода. Наибольшая вероятность того, что в очереди окажется не более трех покупателей находится в I периоде. Среднее время нахождения покупателей в узле расчета зависит как от количества касс, так и от интенсивности потока. По анализируемым периодам, можно отметить, что наименьшую относительную величину затрат и наименьшее среднее время ожидания в очереди наблюдается во II периоде. Это связано с наиболее оптимальным количеством касс и средней интенсивностью потока.

Таким образом, самые минимальные показатели достигнуты именно во втором периоде.Количество касс определяемых в задаче является минимальным, что не означает оптимальность. Увеличение касс приведет к увеличению затрат, но в то же время позволит сократить очередь и уменьшить время ожидания в ней. Целесообразней сделать разное количество касс в зависимости от времени и интенсивности потока. Тогда кассы не будут простаивать, но в тоже время очередь не будет расти до бесконечности.

Одной из важных задач коммерческой деятельности является рациональная организация торгово-технологического процесса массового обслуживания. Так с помощью элементов теории массового обслуживания можно добиться наиболее оптимальных показателей по всем характеристикам.

Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике: математические методы и модели: учебник для бакалавров. - М.: Издательство Юрайт,2013.-541с.
2. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: учебное пособие для бакалавров. - М.: Издательство Юрайт,2012.- 430с.
3. Алексенко Н.В. Математическая компетентность как качество образования в экономическом вузе / Н.В. Алексенко, Н.А. Бурмистрова, Н.И. Ильина // В мире научных открытий. – 2013. – № 7. – С. 200–219.
4. Алексенко Н.В., Бурмистрова Н.А., Ильина Н.И. Компьютерные технологии в обучении математике в условиях реализации ФГОС // Казанская наука. – 2013. – № 5. – С. 172– 175
5. Бурмистрова Н.А. Математическая компетентность будущих бакалавров направления «Экономика» как результат реализации компетентностного подхода к обучению математике в условиях уровневого высшего образования // Высшее образование сегодня. – 2011. – № 8. – С. 18–22.

6. Бурмистрова Н.А. Роль информационных технологий в обучении студентов математическому моделированию экономических процессов при реализации компетентностного подхода // Сибирский педагогический журнал. – 2009. – № 9. – С. 73–79.
7. Бурмистрова Н.А. Методические особенности обучения математике бакалавров экономических направлений в условиях реализации ФГОС / Н.А. Бурмистрова, Н.В. Алексенко, Н.И. Ильина // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы Международная научно-методической конференции. – М.: Изд. дом МФО, 2014. – С. 141–144.
8. Бурмистрова Н.А. Сборник прикладных математических задач для студентов экономических вузов: учеб. пособие / Н.А. Бурмистрова. – Омск: Издательский дом «Наука», 2011. – 140 с.
9. Бурмистрова Н.А. Использование средств информатизации образования при обучении математике в экономическом вузе / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Мещерякова // Информатизация образования: теория и практика: Материалы Международной научно практической конференции. – Омск, Изд-во ОмГПУ, 2014. – С.193 –196.
10. Бурмистрова Н.А. Системы линейных алгебраических уравнений. Балансовые модели в экономике: учеб. пособие / Н.А. Бурмистрова, Н.И. Ильина. – Омск: Издат. дом «Наука», 2010. – 128 с.
11. Бурмистрова Н.А. Мониторинг уровня сформированности математической компетентности будущих бакалавров направления «Экономика» / Н.А. Бурмистрова, Н.И. Ильина // Высшее образование сегодня. – 2012. – № 8. – С. 28–33.
12. Бурмистрова Н.А. Компьютерные технологии обучения математике в экономическом вузе / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Мещерякова // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2015. – № 1. – С. 125–131.