Econometric modelling of financial market

Aleksenko, Natalia and Kovcheg, Anastasiya and Kosykh, Victoriya

Financial University under the Government of the Russian Federation

3 April 2015

УДК 51.7

Эконометрическое моделирование финансового рынка

Алексенко Н.В., Ковчег А.С., Косых В.В.
Финансовый Университет при Правительстве РФ

Econometric modelling of financial market

Aleksenko N.V., Kovcheg A.S., Kosykh V.V.
Financial University under the Government of the Russian Federation

Аннотация: В статье рассматривается моделирование финансового рынка как наиболее яркий пример экономических исследований, использующих эконометрические выводы.

Ключевые слова: актив, финансовый рынок, моделирование, инвестор.

Abstract: the article deals with the modelling of the financial market as the most prominent example of economic studies that use econometric findings.

Key words: asset, financial market, modeling, investor.

В современной экономике на рынке обращаются различные виды ценных бумаг, обладающих рыночной стоимостью, которая определяется, как правило, в ходе биржевых торгов. К ценным бумагам [2], в частности, относятся:

а) *облигация* – долговая ценная бумага, по которой эмитент обязуется выплатить инвестору фиксированную сумму и определенный процент в будущем в установленные сроки. Облигации выпускаются корпорациями и государственными организациями;

б) *акция* – это ценная бумага, держатель которой получает права на участие в управлении корпорацией. Акции наиболее распространены среди остальных видов ценных бумаг;

в) *форвардные и фьючерсные контракты* - обязательства по выполнению некоторой определенной операции в некоторый определенный момент времени.

Существуют и такие виды ценных бумаг как: опционы, векселя, чеки и другие.

Изучение моделирования финансового рынка невозможно без знания следующих терминов.

Актив - любая ценная бумага, которая вращается на финансовом рынке.

Операции - акты покупки и продажи актива на финансовом рынке.

Инвесторы - субъекты, совершающие операции на рынке (частные лица, корпорации, государственные операции).

С любой финансовой операцией связаны понятия возможной прибыли - *доходности* и возможности неудачного исхода операции – *риска*. В большинстве случаев инвесторы стремятся к максимизации доходности и минимизации риска. Вследствие этого наименее рисковые активы оказываются, как правило, наименее доходными и наоборот. Соотношение в предпочтениях между доходностью и риском определяет индивидуальную тактику инвесторов на финансовом рынке.

Среди имеющихся активов наименее рисковыми являются облигации, а наиболее рискованными – акции.

Как правило, инвестор обращается с различными видами активов. Набор ценных бумаг, которыми владеет инвестор, называется *портфелем* ценных бумаг.

Математическое моделирование – важное направление для исследования финансового рынка, с помощью которого анализируются связи между его структурными элементами, а также делаются прогнозы динамики цен финансовых активов [5].

Для создания математических моделей следует ввести основные количественные характеристики финансового рынка и принять некоторые предположения относительно этих величин [3].

Пусть X_t - цена финансового актива в момент времени t; X_{t+1} - цена финансового актива в момент времени t+1. Доходность актива будет выглядеть следующим образом

$$r_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} \qquad (1)$$

Пусть на рынке обращаются k активов с ценами X_1, … , X_k. Портфелем инвестора называется набор чисел $(\omega_1, \dots, \omega_k)$, где ω_i- доля i-го актива среди имеющихся. При этом

$$\omega_1 + \cdots + \omega_k = 1 \qquad (2)$$

Некоторые из чисел могут быть равны нулю, некоторые числа ω_i могут быть отрицательными. Такая ситуация соответствует так называемой «короткой продаже», когда актив продается перед датой котировок, а высвободившиеся средства инвестируются в другие активы.

Цена портфеля это величина

$$X_\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i X_i,$$

а доходность

$$r_\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i r_i \qquad (3)$$

где r_i - доходность i-го актива [1].

При моделировании финансового рынка как правило принимаются следующие предположения:

a) значения величин (1), (3) формируются многими случайными, в основном независимыми факторами;

b) имеется в доступе информация об «истории» котировок активов, т.е. о значениях величин (1), (3) в предыдущие моменты времени;

c) в рассматриваемый отрезок времени отсутствуют факторы, резко изменяющие ситуацию на финансовом рынке.

Предположение «а» означает, что величины (1), (3) можно рассматривать как случайные величины, обладающие некоторым распределением. Допущение «б» предполагает, что имеется серия выборочных наблюдений соответствующих величин. Предположение «в» означает, что результаты соответствующего исследования окажутся адекватными.

Математическое ожидание и дисперсия величины (3) имеют вид

$$m_\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i m_i \qquad (4')$$

$$\sigma_\omega^2 = \sum_{i,j=1}^{k} Cov(r_i, r_j)\omega_i\omega_j \qquad (4'')$$

Математическое ожидание r_i : $m_i = M\ (r_i)$.

Величины m_ω и σ_ω называются соответственно ожидаемой доходностью и риском портфеля.

Инвестор стремится обеспечить большее значение ожидаемой доходности (1') и меньшее значение риска (4').

Безрисковым активом называется актив, удовлетворяющий условию $r_f = m_i > 0, \sigma_i = 0$.

Портфелем, оптимальным по Марковицу, называется портфель, обладающий минимальным риском при заданной доходности:

$$\sigma_\omega \to \min \qquad (5')$$

$$m_\omega = \mu \qquad (5'')$$

В задаче Марковица (5) рассматриваются только рисковые активы. Портфель, удовлетворяющий условиям (5), называется также эффективным портфелем.

При наличии безрискового актива на рынке оптимальным портфелем является портфель $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k)$, где ω_0 - доля, инвестируемая в безрисковый актив, а $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ - портфель, оптимальный по Марковицу.

Величина ω_0 может быть отрицательной, если инвестор берет кредит по процентной ставке m_0 и инвестирует заемные средства в рисковые активы.

Далее рассмотрим общеизвестный подход, с помощью которого оценивается уровень премий за акционерный риск, применяемый инвестбанками и аудиторами – модель САРМ, иначе она называется – «модель оценки финансовых активов». В учебной литературе также можно встретить аббревиатуру МОДА – «модель оценки долгосрочных активов».

Данная модель применяется для объяснения динамики курсов ценных бумаг и функционирования механизма, с помощью которого инвесторы имеют возможность оценивать как влияют инвестиции в ценные бумаги на риск и доходность их портфеля.

Пусть портфель p принадлежит эффективному множеству, т.е.

$$r_p = ar_f + (1-a)r_m \qquad (6)$$

В данном случае он расположен на прямой l (см.рис.1) и имеет место следующее равенство

$$\frac{m_p - r_f}{m_M - r_f} = \frac{\sigma_p}{\sigma_M}. \qquad (7)$$

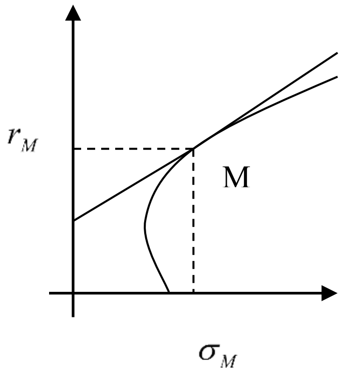

Рис.1

Предположим, что на рынке фигурирует безрисковый актив с доходностью $r_f\,(M(r_f) = r_f)$ и дисперсией доходности, равной нулю (в качестве примера можно привести краткосрочные государственные облигации при стабильной экономике). Также представим, что имеется возможность брать кредит по той же ставке r_f. Гипербола (рис. 1) изображает фронт эффективных портфелей в отсутствии безрискового актива. Прямая l касается этой гиперболы в точке М. Портфель, соответствующий точке М, называется *касательным*. Прямая l состоит из портфелей, в которых доля α вложена в безрисковый актив, а доля $(1-\alpha)$ - в касательный портфель (при этом α может иметь отрицательное значение, если инвестор возьмет кредит по безрисковой ставке и вложит заемные средства в касательный портфель).

Прямая *l,* при наличии безрискового актива, представляет собой эффективное множество (портфели, расположенные выше прямой *l*, является недостижимыми).

Из равенства (6) следует, что коэффициент корреляции между оптимальным и касательным портфелем равен 1,

$\frac{\sigma_p}{\sigma_M} = \frac{Cov(r_p, r_M)}{\sigma_M^2}$ и равенство (7) может быть записано в виде

$$m_p - r_f = \beta(m_M - r_f) \qquad (8')$$

где

$$\beta = \frac{Cov(r_p, r_M)}{D(r_M)} \qquad (8'')$$

Равенство (8) называется уравнением CAPM – модели оценки финансовых активов.

Эффективные портфели удовлетворяют условию (8’).

В рамках модели CAPM можно выдвинуть гипотезу, что сформулированный портфель p имеет «нормальную доходность».

Рассмотрим следующую регрессию

$$r_p - r_f = a + \beta\left(r_M - r_f\right) + \varepsilon \qquad (9)$$

Таким образом, тестирование CAPM [3] сводится к проверке условия $\alpha = 0$ для уравнения регрессии (9).

Формальная запись итогового уравнения модели CAPM выглядит следующим образом:

$$r_p = r_f + \beta\left(r_M - r_f\right) + \varepsilon \quad (10)$$

где r_f- ставка безрискового вложения, % годовых [1];

r_M - среднегодовая доходность рыночного портфеля (среднегодовой прирост биржевого индекса, такого как S&P500 в США, FTSE в Англии и т.п.), % годовых;

$(r_M - r_f)$- рыночная премия за риск инвестирования в акции, % годовых;

β - показатель систематического риска акций определенной компании.

Коэффициент β можно представить следующим образом:

$$\beta = b_0 \times b_1. \quad (11)$$

где b_0 – «безрычаговый» коэффициент, отражающий степень бизнес-риска корпорации;

b_1 - корректирующий коэффициент, отражающий степень финансового риска, поскольку фирма, пользующаяся заемными средствами, создает для своих акционеров дополнительный риск.

По формуле для мировой практики

$$b_1 = 1 + \mathrm{D/E} * (1 - \mathrm{T}) \quad (12)$$

где D/E - отношение заемного капитала к собственному,

T - ставка налога на прибыль (доли ед.).

Таким образом, зная коэффициент систематического риска β, для любой ценной бумаги или инвестиционного проекта можно найти требуемый уровень доходности r_p.

Рассмотрим пример [4]. Возьмем некую компанию, например автомобильный завод. Коэффициент b_0 для машиностроения составляет 0,37. Для данной компании отношение заемного капитала к собственному

D/E составляет около 0,85. Ставка налога (T) для российских компаний - 35%. Удельный вес платежей, освобожденных от налога на прибыль (I), в общем объеме процентных платежей компании составляет 0,7. Определим коэффициент b:

$\beta = b_0$ *[1 + D/E*(1 -IT)] (13)

Подставим в формулу значения:

β = 0,37*[1 + 0,85(1 - 0,7*0,35)] = 0,607.

Ставка безрискового вложения (r_f) = 5,1%

Рыночная премия за риск инвестирования в акции ($r_M - r_f$) = 22,3%

Требуемая доходность на собственный капитал для компании соответственно будет равна:

r_p= 0,051 + 0,607 * 0,223% = 18,64% = 19% годовых, долл.

Модель CAPM является центральной концепцией финансовой экономики. С помощью данной модели можно получить представление о возможном соотношении между риском вложения в актив и доходностью этого вложения. Эта формула широко применяется в различных областях: портфельных инвестиций, оценки предприятий, оценки прибыльности проектов.

Литература

1. Алексенко Н.В. Простые и сложные проценты. Потребительские кредиты: учебное пособие. – Омск: Образование Информ, 2013. – 55с.
2. Брусов П.Н. Финансовая математика: учеб. пособие/П.Н.Брусов, П.П.Брусов, Н.П.Орехова, С.В. Скородулина.– М.: КНОРУС, 2014. -224 с.
3. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учеб.-справ. пособие для бакалавров. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2012. – 685 с.
4. Бурмистрова Н.А. Компьютерные технологии обучения математике в экономическом вузе / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Мещерякова // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2015. – № 1. – С. 125–131
5. Бурмистрова Н.А. Математическое моделирование экономических процессов как средство формирования профессиональной компетентности будущих специалистов финансовой сферы // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. – 2009. – № 9. – С. 29–39
6. Бурмистрова Н.А. Математическая компетентность будущих бакалавров направления «Экономика» как результат реализации компетентностного подхода к

обучению математике в условиях уровневого высшего образования // Высшее образование сегодня. – 2011. – № 8. – С. 18–22.
7. Бурмистрова Н.А. Математическое моделирование экономических процессов как средство формирования профессиональной компетентности будущих специалистов финансовой сферы при обучении математике: монография. – М.: Изд-во «Логос», 2010. – 228 с.
8. Бурмистрова Н.А. Роль информационных технологий в обучении студентов матема-тическому моделированию экономических процессов при реализации компетентностного подхода // Сибирский педагогический журнал. – 2009. – № 9. – С. 73–79.
9. Корнеенкова Т.П. Некоторые аспекты рейтинговой оценки студентов // Совершенствование технологий обеспечения качества образования: сборник международной научно-методической конференции. – Омск: Изд-во Омского гос. ин-та сервиса, 2007. – Т.2. – С. 122.
10. Эджибия Т.Л. Сберегательное поведение домохозяйств на финансовом рынке // Экономика и финансы; теоретические и практические аспекты управления: сб. трудов Международной научно-практической конференции. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. – С. 186-192.