Continuous accrued interest. Equivalent rates

Aleksenko, Natalia and Eprikov, Ivan and Khorzova, Yana

Financial University under the Government of the Russian Federation

5 April 2015

УДК 51:36.6(075.8)

НЕПРЕРЫВНОЕ НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СТАВКИ

Алексенко Н.В., Эприков И.А., Хорзова Я.А.
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

CONTINUOUS ACCRUED INTEREST. EQUIVALENT RATES

Aleksenko N.V., Eprikov I.A., Khorzova I.A.
Financial University under the Government of the Russian Federation

Аннотация: В настоящей статье произведен сравнительный анализ наращения сложных процентов с использованием дискретных и непрерывных ставок, а также практика применения эквивалентности процентных ставок для обоснования выбора инвестиционных решений.

Ключевые слова: сложные проценты, дискретные процентные ставки, непрерывные процентные ставки, капитализация процентов.

Abstract: In this article comparative analysis of compound interest compounding using discrete and continuous rates, as well as the practice of the equivalence of interest rates to justify the selection of investment decisions.

Key words: compound interest, interest rates are discrete, continuous interest rates, interest capitalization.

При анализе инвестиций возникает задача начисления процентов за очень малые промежутки времени, т.е. по существу речь идет о непрерывном начислении процентов (непрерывной капитализации). Поскольку многие производственные и экономические процессы непрерывны по своей природе, то такой же должна быть соответствующая им математическая модель.

Модель непрерывного начисления процентов получила широкое распространение в количественном финансово-экономическом анализе благодаря своей простоте и универсальности. Действительно, единственным параметром этой модели является годовая норма доходности, при этом отсутствует зависимость от срока инвестирования средств и способа начисления процентов. Хотя в практических финансово-кредитных операциях, как правило, применяется инвестирование средств на конечные отрезки времени, но если оно происходит достаточно часто, то его описание с помощью модели непрерывного начисления процентов дает высокую точность. Непрерывное наращение используют обычно для выбора инвестиционных решений.

В данной работе мы рассмотрим схему сложных процентов [1], капитализацию процентов за разные промежутки времени, условие эквивалентности процентной ставки и силы роста, а также рассмотрим кейс-ситуацию, где наглядно продемонстрируем практическое применение непрерывного начисления процентов.

1. Формула сложных процентов. Капитализация процентов

Если проценты в конце каждого расчетного периода добавляются к основной сумме и полученная сумма является исходной для начисления процентов в следующем периоде, то начисленные к концу срока инвестирования проценты называются **сложными процентами (compound interest).**

Рассмотрим формулу наращения по схеме сложных процентов при условии, что проценты начисляются (капитализируются) один раз в год. Пусть P – начальная сумма, i – годовая ставка процента, t – число лет наращения. Тогда в конце первого года наращенная сумма составит

$$S(1) = P + P \cdot i = P(1+i)$$

К концу второго года наращенная сумма будет равна

$$S(2) = S(1) \cdot (1+i) = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$$

$$S(3) = S(2) \cdot (1+i) = P(1+i)^2 (1+i) = P(1+i)^2$$

Получаем

$S(t) = P(1+i)^t$ **(1)** – наращение по сложным процентам со ставкой i

Величина $(1+i)^t$ – **коэффициент наращения (accumulation factor)**.

Коэффициент наращения показывает, во сколько раз увеличивается первоначальный капитал. Проценты могут капитализироваться несколько раз в году.

Пусть $i^{(m)}$ - годовая процентная ставка (номинальная), m – число периодов начисления процентов в году.

Тогда $\frac{i^{(m)}}{m}$ - ставка за один период.

$S(t) = P(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt}$ **(2)** − наращение по формуле сложных % с номинальной процентной ставкой $i^{(m)}$ и количеством периодов начисления в году, равном m.

2. Формула непрерывного наращения

В банковской практике – особенно при электронных методах производства и регистрации финансовых операций – проценты могут начисляться за 1 сутки или даже за несколько часов. Например, коммерческий банк, находящийся в Москве, может одолжить определенную сумму денег банку, находящемуся во Владивостоке, на 12 часов – с 20 часов сегодняшнего дня до 8 часов следующего дня по московскому времени. За счет разницы во времени владивостокский банк не может добавить эти деньги к своему фонду краткосрочных ссуд, а затем вернуть долг с определенным процентом к началу работы московского банка. Очевидно, что в этом и другом аналогичных случаях возникает задача начисления процентов за очень малые промежутки времени, т.е. по существу речь идет о непрерывном начислении процентов (непрерывной капитализации) [1].

Уменьшая период начисления %, а также увеличивая частоту начисления процентов (m→∞) переходим к непрерывной капитализации, при которой наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально [13].

В этом случае используем **2й замечательный предел**:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

Вычислим наращенную сумму:

$$S(t) = \lim_{m\to\infty} P(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt} = P\lim_{\substack{m\to\infty \\ x\to\infty}}(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{i^{(m)}}\cdot\frac{i^{(m)}}{m}\cdot mt} = P\left[\lim_{m\to\infty}(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{i^{(m)}}}\right]^{\lim\limits_{m\to\infty}(i^{(m)}\cdot t)}$$

Обозначая $\lim\limits_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$ **– сила роста (force of interest)**

Получаем

$$S(t) = Pe^{\delta\cdot t}$$ **(3)** – формула непрерывного наращения

Непрерывное начисление процентов используют обычно для выбора инвестиционных решений. Например, оценивая работу финансового учреждения за период, в котором платежи поступают многократно, целесообразно применять непрерывное начисление процентов.

3. Эквивалентные процентные ставки

В финансовой математике существует понятие эквивалентных % ставок. Две ставки называю эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовый результат остается неизменным. Другими словами, ставки эквивалентны, если соответствующие им коэффициенты наращения равны.

Меняя частоту начисления процентов, можно существенно влиять на доходность операции. В частности, оговоренная в контракте номинальная ставка может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход или относительные расходы.

Например, в контракте клиента с банком указано, что банк начисляет проценты по ставке 18% годовых.

Если сложные проценты начисляются один раз в конце года, реальная доходность этой сделки составляет 18%. Если же банк начисляет сложные проценты ежемесячно, реальная доходность сделки составляет 19,6%. Покажем это, используя уравнение эквивалентности, т.е. сравнивая коэффициенты наращения

$$P(1+i)^t = P(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt} \Rightarrow 1+i = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m \qquad \textbf{(4)}$$

$$1+i = (1+\frac{0{,}18}{12})^{12} \Rightarrow 1+i = 1{,}015^{12} \Rightarrow i = 1{,}19561817-1 \Rightarrow i = 19{,}6\%$$

Выразим процентную ставку, эквивалентную силе роста. Для этого сравним коэффициенты наращения в формуле сложных процентов

$$S(t) = P(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt}$$

И в формуле непрерывного наращения

$$S(t) = Pe^{\delta \cdot t}$$

Получаем

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mt} = e^{\delta \cdot t}$$

Если m=1, то $(1+i)^t = e^{\delta \cdot t} \Rightarrow 1+i = e^{\delta} \Rightarrow i = e^{\delta} - 1$

$i = e^{\delta} - 1$ **(5)** – условие эквивалентности процентной ставки и силы роста

4. Выбор инвестиционных решений

Рассмотрим практическое применение эквивалентности дискретных и непрерывных ставок в анализе кейс-ситуации.

В начале 70-х годов в США интенсивно росли цены на продукты питания, нефть, страна испытывала нехватку металлов и других полезных ископаемых. Все это наряду с непрекращающейся инфляцией привело экономику США к очередному спаду. Чтобы подавить инфляцию, повысить международную конкурентоспособность страны, был взят курс на повышение эффективности экономической системы.

Таким образом, в США стали интенсивно развиваться инновационные технологии в финансовой сфере. Основными инвесторами в этой стране являлись не столько коммерческие банки, сколько акционеры, различные инвестиционные фонды и другие финансовые институты контрактного типа. Возникла ситуация, когда непрерывное начисление процентов использовали непосредственно в работе с клиентами.

В начале 70-х годов в США ставка процентных выплат по депозитам со сроком от 6 до 10 лет была ограничена величиной 7,75% годовых, при этом не ограничивалось количество начислений процентов в течение года. Этим воспользовались банки для привлечения вкладчиков, и некоторые из них стали предлагать непрерывное начисление процентов по ставке 7,75%, пытаясь ввести вкладчика в заблуждение, что наращенная сумма с каждым дополнительным периодом начисления увеличивается бесконечно [14].

Однако применяя математическую модель эквивалентности процентной ставки и силы роста получаем

$$i = e^{\delta} - 1 \Rightarrow i = e^{0,0775} - 1 = 0,0806$$

По существу банки установили годовую ставку 8,06%, равную силе роста 7,75%. Очевидно, что в этом случае вкладчику гарантирован процентный доход (8, 06% годовых), который не зависит от длительности периода размещения средств на депозите.

Литература

1. Алексенко Н.В. Простые и сложные проценты. Потребительские кредиты: учебное пособие. – Омск: Образование Информ, 2013. – 55 с.
2. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. – М.: ИНФРА-М, 1997 . – 160 с.
3. Бурмистрова Н.А. Использование информационных технологий в обучении будущих специалистов финансовой сферы математическому моделированию экономических процессов // Информационные технологии в образовании. XIX Международная конференция-выставка: сборник трудов. – М.: Изд-во МИФИ, 2009. – Ч.2. – С. 5–57.
4. Бурмистрова Н.А. Использование средств информатизации образования при обучении математике в экономическом вузе / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Мещерякова // Информатизация образования: теория и практика: Материалы Международной научно практической конференции. – Омск, Изд-во ОмГПУ, 2014. – С.193 –196.
5. Бурмистрова Н.А. Математическое моделирование экономических процессов как средство формирования профессиональной компетентности будущих специалистов финансовой сферы при обучении математике: монография. – М.: Изд-во «Логос», 2010. – 228с.
6. Бурмистрова Н.А. Модель методической системы обучения математике будущих специалистов финансовой сферы в условиях компетентностного подхода / Н.А. Бурмистрова // Сибирский педагогический журнал. – 2011. – № 2. – С. 307–314.

7. Бурмистрова Н.А. Методические особенности обучения математике бакалавров экономических направлений в условиях реализации ФГОС / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Алексенко, Н.И. Ильина // Современная математика и концепции инновационного математического образования: материалы Международная научно-методической конференции. – М.: Изд. дом МФО, 2014. – С. 141–144.

8. Бурмистрова Н.А. Компьютерные технологии обучения математике в экономическом вузе / Н.А. Бурмистрова, Н.А. Мещерякова // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2015. – № 1. – С. 125–131.

9. Кормильцева Е.А. Социально-статусный аспект экономического поведения домохозяйств на финансовом рынке // Двадцатые Апрельские экономические чтения: Материалы международной научно-практической конференции. – Омск: РОФ «Фонд региональной стратегии развития», 2014. С. 77−80.

10. Корнеенкова Т.П. Региональные аспекты глобализации // Экономика и финансы; теоретические и практические аспекты управления: сб. трудов Международной научно-практической конференции. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. – С. 126–131.

11. Эджибия Т.Л. Несовершенство рыночного механизма и роль государства // Экономика: учеб. пособие для студентов, обучающихся по неэкономическим специальностям и направлениям / Под ред. Е.И. Лаврова, М.Ю. Маковецкого, Г.М. Чердынцева. Омск: Изд-во ОмГУ, 2005. – С. 266-290.