Substitution and Income Effects in the case of specific preferences

Arango Sánchez, Efraín

Universidad Autónoma Latinoamericana

20 February 2015

EFECTOS SUSTITUCIÓN Y RENTA EN EL CASO DE PREFERENCIAS ESPECÍFICAS: DESCOMPOSICIÓN SEGÚN SLUTSKY Y SEGÚN HICKS

RESUMEN

En este documento se analizan los cambios que sufren las cantidades demandadas de un bien, como consecuencia de cambios en su precio. Para esto utilizaremos las descomposiciones en efectos Sustitución y Renta planteadas por Slutsky y Hicks en sus respectivos trabajos concernientes al análisis de la demanda. En términos generales cuando el precio de un bien varía las cantidades demandadas del mismo cambian, de acuerdo a la relación de la función de demanda con la variable precio, estas pueden aumentar o disminuir según la función. En algunos casos de acuerdo con las preferencias de los individuos el cambio en el precio de un bien puede llegar a afectar la demanda del otro bien, dependiendo de la relación que exista entre ellos, es decir, podría existir una relación de sustituibilidad, complementariedad o neutralidad entre los bienes que se analizan.

Las preferencias elegidas para desarrollar este documento son del tipo Leontief (Proporciones Fijas - Complementarios Perfectos), las formulas empleadas del efecto-sustitución y el efecto-renta son las propuestas por Hal Varian en su texto de Microeconomía Intermedia 8 a Edición (Antoni Bosch).

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

ABSTRACT

This document analyzes the changes that suffer the amounts demanded of a good, due to changes in its price. For this we use the decomposition in Income and Substitution effects posed by Slutsky and Hicks in their work concerning the analysis of the demand.

In general, when the price of a good varies the amount also change, according to the relation of the demand function with the price variable, these may increase or decrease depending on the function.

In some cases according with the preferences of individuals, the change in the price of a good, it can affect the demand of the other good, depending on the relation between them, it means, there could be a relation of substitutability, complementarity or neutrality between goods that are analyzed.

The preferences chosen to develop this document are those of Leontief type (fixed proportions - perfect complements), the formulas used of the substitution-effect and the income-effect are proposed by Hal Varian in his text Intermediate Microeconomics Edition 8th (Antoni Bosch).

Palabras Clave: Efecto-Sustitución, Efecto-Renta, Descomposición de Slutsky, Descomposición de Hicks, Poder Adquisitivo, Utilidad.

Clasificaciones *JEL:* D00, D11, C00, C61.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Vamos a suponer entonces que el individuo se enfrenta al siguiente problema:

$$Max\ U(x,y) = min\{\alpha x, \beta y\}$$

$$s.a \quad m = p_x x + p_y y$$

Al resolver este problema de optimización restringida, partiendo del hecho de que los bienes se consumen en proporciones fijas, es decir, $x = \frac{\beta}{\alpha} y$ y reemplazando en la restricción presupuestaría, obtenemos las demandas Marshallianas del individuo, las cuales están dada por $x(m, p_x, p_y) = \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}$ y $y(m, p_x, p_y) = \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}$. Ahora supongamos que el precio del bien (x) cambia y se convierte en p_x^*. En primer lugar utilicemos la descomposición de Slutsky para probar que la variación de las cantidades demandadas de dicho bien, está explicada en su totalidad por el Efecto-Renta.

De acuerdo con el trabajo de Slutsky, cuando el precio de un bien varía es necesario ajustar el nivel de renta del individuo, de manera tal que se compense el cambio en el poder adquisitivo como consecuencia de la variación del precio. El objetivo consiste en garantizar que el consumidor pueda acceder a la cesta óptima que consumía inicialmente.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Variación del nivel de renta (Slutsky)

$$\Delta m = x(p_x^* - p_x)$$

$$m^* = m + \Delta m$$

$$m^* = m + x(p_x^* - p_x)$$

$$m^* = m + \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}(p_x^* - p_x)$$

$$m^* = \frac{m(\beta p_x^* + \alpha p_y)}{\beta p_x + \alpha p_y}$$

"Nuevo nivel de renta que permite acceder a la cesta inicial dado el nuevo precio"

Ahora, el nuevo problema al que se enfrenta el consumidor será:

$$Max\ U(x,y) = min\{\alpha x, \beta y\}$$

$$s.a \quad m^* = p_x^* x + p_y y$$

Las nuevas condiciones que involucra el problema son el cambio en la renta y el cambio en el precio del bien (x). Estos cambios permiten llevar a cabo la descomposición de Slutsky de una manera más sencilla, es decir, la nueva restricción de presupuesto exhibe los cambios planteados por Evgeny Evgenievich Slutsky en su trabajo. Desde el punto de vista analítico esta nueva restricción o recta de balance constituye un artificio matemático muy útil para simplificar los cálculos. Aunque en situaciones reales resulta un poco difícil explicar como a los individuos se les puede “sustraer” determinado nivel de renta para garantizar que su poder adquisitivo no varía ante una disminución en el precio de determinado

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

bien. En el caso contrario, es decir, ante un aumento del precio de uno de los bienes o mejor aun de un aumento generalizado del nivel de precios (Inflación) de un periodo a otro, resulta un poco más coherente explicar un aumento del nivel de renta (Incremento salarial) por parte del gobierno, para garantizar la no pérdida de poder adquisitivo de los individuos. Un claro ejemplo de este caso se presenta en los modelos de pensiones.

Resolviendo el sistema se obtienen las nuevas demandas Marshallianas, dadas por

$$x\left(m^{*}, p_x^{*}, p_y\right) = \frac{\beta m^{*}}{\beta p_x^{*} + \alpha p_y}$$

$$y\left(m^{*}, p_x^{*}, p_y\right) = \frac{\alpha m^{*}}{\beta p_x^{*} + \alpha p_y}$$

Sustituyendo en ambas funciones de demanda el nuevo nivel de renta se obtiene,

$$x\left(m^{*}, p_x^{*}, p_y\right) = \frac{\beta m^{*}}{\beta p_x^{*} + \alpha p_y} = \frac{\beta \dfrac{m(\beta p_x^{*} + \alpha p_y)}{\beta p_x + \alpha p_y}}{\beta p_x^{*} + \alpha p_y}$$

$$y\left(m^{*}, p_x^{*}, p_y\right) = \frac{\alpha m^{*}}{\beta p_x^{*} + \alpha p_y} = \frac{\alpha \dfrac{m(\beta p_x^{*} + \alpha p_y)}{\beta p_x + \alpha p_y}}{\beta p_x^{*} + \alpha p_y}$$

Simplificando en ambos casos, se determina la nueva cesta óptima que el consumidor elige.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

$$x(m^*, p_x^*, p_y) = \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}$$

$$y(m^*, p_x^*, p_y) = \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}$$

En este punto del desarrollo se observa que cuando el precio del bien (x) cambio y la renta del individuo varío para compensar la pérdida de poder adquisitivo de acuerdo a la descomposición de Slutsky, las nuevas cestas que demanda el consumidor son idénticas a las iniciales, dadas las preferencias del tipo Leontief.

Por ultimo bastará con analizar el caso en el cual no se hubiese llevado a cabo la descomposición, es decir, sin involucrar la recta artificial o recta de balance. En este caso el individuo se enfrenta al siguiente problema de optimización restringida,

$$Max\ U(x, y) = min\{\alpha x, \beta y\}$$

$$s.a \quad m = p_x^* x + p_y y$$

Cuya soluciones óptimas estarán dadas por $x(m, p_x^*, p_y) = \frac{\beta m}{\beta p_x^* + \alpha p_y}$, y $y(m, p_x^*, p_y) = \frac{\alpha m}{\beta p_x^* + \alpha p_y}$. En términos generales, en el momento de llevar a cabo la descomposición de la variación del precio de uno de los bienes, en un efecto-sustitución y un efecto-renta, el individuo se enfrentará a tres restricciones presupuestarias distintas, una de las cuales (recta de balance) permitirá interpretar de una mejor forma ambos efectos. A partir de este punto utilizaremos las formulas propuestas en el libro de texto de Hal Varian (Microeconomía Intermedia 8^{a} Edición) para calcular ambos efectos, veamos:

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Efecto-Sustitución $\Delta x^S = x(m^*, p_x^*, p_y) - x(m, p_x, p_y)$

Efecto-Renta $\Delta x^R = x(m, p_x^*, p_y) - x(m^*, p_x^*, p_y)$

Efecto-Total $\Delta x = \Delta x^S + \Delta x^R$

En ambos casos, consiste simplemente en evaluar las demandas óptimas de los individuos después de llevar a cabo los respectivos cambios en precios y en renta, es decir, como se comportan las cantidades demandadas. Veamos: Reemplazando los resultados anteriormente obtenidos, tenemos lo siguiente:

$$\Delta x^S = \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y} - \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}$$

$$\Delta x^S = 0$$

$$\Delta x^R = \frac{\beta m}{\beta p_x^* + \alpha p_y} - \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}$$

$$\Delta x^R = \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)}$$

$$\Delta x = 0 + \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)} = \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)}$$

De esta forma mostramos que cuando el individuo se enfrenta con unas preferencias del tipo Leontief, toda la variación de la demanda de un bien como consecuencia de un cambio en el precio del bien está explicada en su totalidad por el Efecto-Renta, ya que el efecto sustitución es igual a cero. Ante un cambio en el precio de un bien, el consumidor de acuerdo con sus preferencias no obtiene ningún tipo de Utilidad si solo modifica el consumo de ese bien, esto por la existencia de complementariedad entre los bienes (Proporciones Fijas).

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Ahora examinemos el signo del efecto-renta $\Delta x^R = \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)}$, en el caso del denominador de esta fracción, dado que α y β son parámetros positivos, además $p_x, p_y > 0$, el denominador siempre es positivo $(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y) > 0$. En el caso del numerador como $m \geq 0$, el signo del efecto-renta dependerá de la relación entre p_x y p_x^*, esto es si $p_x > p_x^*$ entonces $(p_x - p_x^*) > 0$ y si $p_x < p_x^*$ entonces $(p_x - p_x^*) < 0$, luego el efecto-renta será positivo o negativo para este tipo de preferencias dependiendo si existe un aumento o una disminución del precio del bien analizado.

En la siguiente tabla se resumen los resultados de la descomposición de la variación del precio del bien (x), en los efectos sustitución y renta según Slutsky.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Problema	***Descripción***	***Óptimo*** $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$
$Max\ U(x,y) = min\{\alpha x, \beta y\}$ $s.a \qquad m = p_x x + p_y y$	Restricción Inicial (Problema General con preferencias del tipo Leontief)	$\left(\frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}, \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}\right)$
$Max\ U(x,y) = min\{\alpha x, \beta y\}$ $s.a \qquad m^* = p_x^* x + p_y y$	Restricción Artificial (Recta de Balance), restricción que me permite hallar la nueva renta para compensar la variación del poder adquisitivo de los individuos.	$\left(\frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}, \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}\right)$
$Max\ U(x,y) = min\{\alpha x, \beta y\}$ $s.a \qquad m = p_x^* x + p_y y$	Restricción Final (Restricción presupuestal que recoge el efecto final de la variación del precio del bien x).	$\left(\frac{\beta m}{\beta p_x^* + \alpha p_y}, \frac{\alpha m}{\beta p_x^* + \alpha p_y}\right)$
Efecto Sustitución	$\Delta x^S = x(m^*, p_x^*, p_y) - x(m, p_x, p_y) = \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y} - \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y} = 0$	
Efecto Renta	$\Delta x^R = x(m, p_x^*, p_y) - x(m^*, p_x^*, p_y) = \frac{\beta m}{\beta p_x^* + \alpha p_y} - \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y} = \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)}$	
Efecto Total	$\Delta x = x(m, p_x^*, p_y) - x(m, p_x, p_y) = 0 + \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)} = \frac{\beta^2 m(p_x - p_x^*)}{(\beta p_x^* + \alpha p_y)(\beta p_x + \alpha p_y)}$	

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Ahora, analicemos el cambio en el precio del bien (x) mediante la descomposición en los efectos sustitución y renta según Hicks. A diferencia de la descomposición de Slutsky, Hicks consideró en su trabajo que cuando el individuo se enfrenta a una variación en el precio de uno de los bienes, se le debe compensar vía renta, pero para permitirle conservar el mismo nivel de utilidad que poseía antes de la variación del precio del bien. Es decir, un nivel de renta que le permita mantenerse sobre la curva de indiferencia inicial. Las condiciones iniciales son las mismas, veamos:

El problema del individuo,

$$Max\ U(x, y) = min\{\alpha x, \beta y\}$$

$$s.a \quad m = p_x x + p_y y$$

Cuyas demandas óptimas están dadas por: $x(m, p_x, p_y) = \frac{\beta m}{\beta p_x + \alpha p_y}$ y $y(m, p_x, p_y) = \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}$. Ahora supongamos nuevamente un cambio en el precio del bien (x), pero hallemos el nuevo nivel de renta planteado por Sir John Hicks.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Variación del nivel de renta (Hicks)

De acuerdo con las cestas óptimas iniciales, el consumidor obtendrá un nivel de utilidad dado por $U\left(\frac{\beta m}{\beta p_x+\alpha p_y},\frac{\alpha m}{\beta p_x+\alpha p_y}\right)=min\left\{\alpha\left(\frac{\beta m}{\beta p_x+\alpha p_y}\right),\beta\left(\frac{\alpha m}{\beta p_x+\alpha p_y}\right)\right\}$

$\bar{U}=\frac{\alpha\beta m}{\beta p_x+\alpha p_y}$, Según esto para conservar este nivel de utilidad, el cambio que debe sufrir la renta del individuo como compensación por la variación en el precio, estará dada por:

$$\bar{U}=min\left\{\alpha\left(\frac{\beta m^*}{\beta p_x^*+\alpha p_y}\right),\beta\left(\frac{\alpha m^*}{\beta p_x^*+\alpha p_y}\right)\right\}$$

$$\frac{\alpha\beta m}{\beta p_x+\alpha p_y}=min\left\{\alpha\left(\frac{\beta m^*}{\beta p_x^*+\alpha p_y}\right),\beta\left(\frac{\alpha m^*}{\beta p_x^*+\alpha p_y}\right)\right\}$$

$$\frac{\alpha\beta m}{\beta p_x+\alpha p_y}=\frac{\alpha\beta m^*}{\beta p_x^*+\alpha p_y}$$

$$m^*=\frac{m(\beta p_x^*+\alpha p_y)}{(\beta p_x+\alpha p_y)}$$

"Nuevo nivel de renta que garantiza al individuo el mismo nivel de utilidad del que disfrutaba antes de la variación del precio"

Por lo tanto, el nuevo problema al que se enfrenta el individuo está dado por:

$$Max\ U(x,y)=min\{\alpha x,\beta y\}$$

$$s.a\quad m^*=p_x^*x+p_y y$$

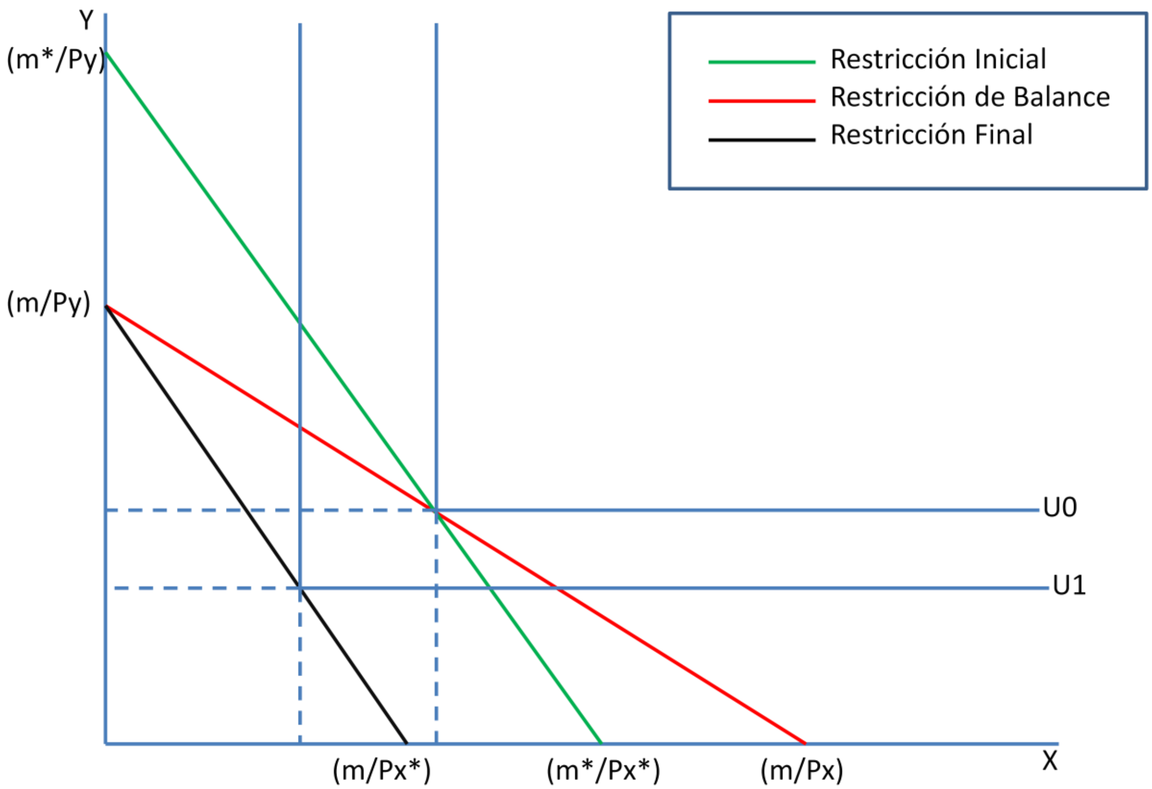
*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Como los bienes analizados en este documento se consumen en proporciones fijas (Complementariedad), entonces se tiene que $x = \frac{\beta}{\alpha} y$, sustituyendo en la nueva restricción presupuestaría se obtiene lo siguiente $m^* = p_x^* \left(\frac{\beta}{\alpha} y\right) + p_y y$, pero como $m^* = \frac{m(\beta p_x^* + \alpha p_y)}{(\beta p_x + \alpha p_y)}$, entonces $\frac{m(\beta p_x^* + \alpha p_y)}{(\beta p_x + \alpha p_y)} = \frac{(\beta p_x^* y + \alpha p_y y)}{\alpha}$, simplificando esta expresión y despejando (y), conseguimos la demanda óptima del bien $y(m^*, p_x^*, p_y) = \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}$. Luego sustituimos el valor de (y), obteniendo $x(m^*, p_x^*, p_y) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}\right) = \frac{\alpha m}{\beta p_x + \alpha p_y}$. Las demandas óptimas que obtuvimos son las mismas que en el problema inicial (antes de la variación del precio).

De acuerdo con estos resultados, en el caso de las preferencias del tipo Leontief (Bienes complementarios), ambas descomposiciones la de Slutsky y la de Hicks arrojan resultados idénticos, desde dos perspectivas diferentes, la primera plantea el hecho de que la renta se modifica para garantizar que el poder adquisitivo no varíe, mientras que el segundo enfoque busca que la renta se modifique, para garantizar que la utilidad sea quien no cambie. En términos generales, en el desarrollo de ejercicios prácticos la diferencia entre una y otra descomposición es ínfima por no decir ninguna, lo cual sorprende aún más, dadas las condiciones de independencia en las que surgieron ambos desarrollos.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Gráficamente



Conclusión

En términos generales, dadas las preferencias de los individuos es posible determinar la descomposición de Slutsky o de Hicks, de una manera general. En este documento se consideraron solo las preferencias del tipo Leontief, el lector podría darse a la tarea por ejemplo de generalizar de igual forma ambos efectos en el caso en el que el individuo considerase que los bienes fuesen sustitutos perfectos, o que las preferencias se representasen por otras funciones de utilidad.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Referencias Bibliográficas

VARIAN R. HAL. (2006). Microeconomía Intermedia Un enfoque actual. (7ª Edición). Barcelona: Antoni Bosch.

NICHOLSON WALTER. (2009). Teoría Microeconómica Principios Básicos y Ampliaciones. (9ª Edición). Mexico: Cengage Learning.

HENDERSON M. JAMES, QUANDT E. RICHARD. (1973). Teoría Microeconómica Una Aproximación Matemática. (2ª Edición Revisada y Aumentada). Barcelona: Editorial Ariel.

PINDYCK S. ROBERT, RUBENFIELD L. DANIEL. (2009). Microeconomía. (7ª Edición). Madrid: Pearson Educación S.A.

FRANK H. ROBERT. (2008). Microeconomics And Behavior. (Seventh Edition). New York: McGraw Hill.

CARRASCO, AMPARO. DE LA IGLESIA, COVADONGA. GRACIA, ESPERANZA. HUERGO, ELENA. MORENO, LOURDES. Microeconomía Intermedia Problemas y Cuestiones. (2003). McGraw Hill-Interamericana.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)