The physical structure of an economy

Quaas, Georg

2001

2. Die naturale Struktur einer Volkswirtschaft

Unter *naturaler* und *gebrauchswertmäßig-stofflicher* Struktur einer Volkswirtschaft - gegebenenfalls auch der Weltwirtschaft - wird hier dasselbe verstanden. Der konkrete Inhalt dieses Begriffs wird im Abschnitt 2.8. erläutert - nachdem die Momente, auf denen er beruht, im einzelnen eingeführt worden sind.

2.1. Der Gebrauchswert und seine Messung

Als Gebrauchswert wird hier jedes sinnlich-gegenständliche Ding bezeichnet, das einem Menschen irgendwie nützlich ist. Dabei ist zunächst vorauszusetzen, daß sich die betrachteten Gebrauchswerte in einem wohlfixierten Zustand befinden, der dadurch gekennzeichnet ist, daß sie ihren Entstehungsprozeß bereits hinter sich haben und ihr tatsächlicher Gebrauch noch bevor steht. Das gerupfte und ausgenommene Hähnchen im Kühlschrank ist nur ein spezielles Beispiel: auf dem Markt sollten sich alle Dinge idealiter in einem solchen 'konservierten' Zustand befinden.[1]
Gebrauchswerte sind entweder Resultat von Naturprozessen oder Resultat menschlicher Arbeit. Erstere bezeichnet man als von Natur vorgefundene Gebrauchswerte, letztere als (Arbeits-) Produkte.
Gebrauchswerte können auf unterschiedliche Weise nützlich sein. Ökonomisch relevant ist die Einteilung der Gebrauchswerte nach ihrer Funktion als Produktionsmittel (darunter fallen Arbeitsgegenstände und Arbeitsmittel) oder Lebensmittel. Ob ein spezieller Gebrauchswert diese oder jene Bezeichnung verdient, hängt von der jeweils vorgesehenen Verwendung ab.
Der allgemeine Gebrauchswertbegriff abstrahiert in gewissem Sinne von den Prozessen der Produktion und der tatsächlichen Verwendung eines nützlichen Dinges. Diese Abstraktion entspricht dem enthobenen Dasein der Gebrauchswerte auf dem Markt. Doch auch nach dieser Abstraktion ist jeder Gebrauchswert qualitativ und quantitativ bestimmt. Qualitativ gleichartige Dinge können zu Klassen zusammengefaßt werden, und zwar so, daß die unterschiedlichen Klassen die verschiedenen Arten von Gebrauchswerten repräsentieren (Autos, Fische, Korn). Jede Klasse von Gebrauchswerten umfaßt eine endliche Menge gleichartiger Dinge, deren Ausmaß man prinzipiell durch (zumeist physikalische) Meßverfahren bestimmen kann.

[1] Durch einfache Hochkommas werden metaphorische Ausdrücke hervorgehoben.

Um die qualitative und quantitative Struktur der vorhandenen Gebrauchswerte mathematisch zu erfassen, wird innerhalb einer Klasse gleichartiger Gebrauchswerte (Sorte) ein bestimmtes Quantum als Maßeinheit fixiert. Das ist die zu der entsprechenden Sorte gehörende Gebrauchswerteinheit oder - falls es sich um Gebrauchswerte auf einem Markt handelt - die Wareneinheit. Ist ein anderes Quantum von Gebrauchswerten derselben Art gegeben und existiert ein Vergleichsverfahren für diese verschiedenen Quanta derselben Sorte, so läßt sich eben jenes andere Quantum messen. Das Vergleichsverfahren selbst hängt von der stofflichen Natur der zu messenden Gegenstände und von der Erfindungsgabe der Menschen ab, die ein Interesse daran haben, für die Gebrauchswerte ein Maß zu definieren. Im einfachsten Fall handelt es sich um das Abzählen der Gebrauchswerteinheiten; dazu muß ein einzelnes Stück als Einheit fixiert werden. Gebrauchswertmengen können aber auch anhand ihres Gewichts oder Volumens gemessen werden, wenn kein eindeutig definierbares Einzelstück existiert. In jedem Fall ist das Resultat der Messung eine Zahl z, die das quantitative Verhältnis des gemessenen Gebrauchswerts a zur Maßeinheit a_0 ausdrückt. Die Struktur der Größe a wird durch die Gleichung

$$a = z\, a_0 \tag{2.1}$$

darstellt. Analoge Quantitätsbestimmungen lassen sich mit den anderen Gebrauchswerten durchführen. Für jede Sorte wird dabei ein eigener Buchstabe reserviert: a beispielsweise für eine bestimmte Quantität Autos, b für ein Quantum Fische usw.

Es muß hier ausdrücklich hervorgehoben werden, daß im Unterschied zu anderen mathematischen Darstellungen die Symbole für die Gebrauchswerteinheiten $a_0, b_0, \ldots$ mit in die Variable für die gemessenen Gebrauchswertmengen einbezogen werden (siehe Gleichung 2.1!). Es handelt sich im folgenden also nicht einfach um Zahlen, die man beliebig interpretieren kann, sondern wie in der Physik um maßeinheitsbehaftete Größen. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, arithmetische Berechnungen einer Maßeinheitskontrolle zu unterziehen. Eine wesentliche meßtheoretische Forderung ist damit erfüllt.[2]

Da Waren in der Regel Gebrauchswerte sind, die sinnlich-gegenständlich existieren, können mit der obigen Methode auch Warenmengen erfaßt werden. Die

[2] Vgl. Peter Ruben: Vom Problem der ökonomischen Messung und seiner möglichen Lösung. In: F. Quaas / G. Quaas (Hrsg.): Elemente zur Kritik der Werttheorie. Frankfurt a. M.: Peter Lang-Verlag 1997. S.55 f.

gängigen Theorien der mathematisch orientierten Ökonomie stellen auf die Möglichkeit einer solchen Reduktion ab.

2.2. Gemischte Gebrauchswertquantitäten

Die endliche Folge von Gebrauchswerteinheiten

$$a_0, b_0, \ldots, k_0 \tag{2.2}$$

repräsentiere die Gesamtheit aller in einer gegebenen Gesellschaft produzierten Sorten von Gebrauchswerten, und zwar seien es genau n der Anzahl nach, soll heißen: es gebe n Sorten. Der Einfachheit halber wird hier zunächst angenommen, daß die ökonomische Sphäre der betrachteten Gesellschaft ebenfalls aus n Industriezweigen besteht; in jedem Zweig werde genau eine Gebrauchswertart hergestellt (Ein-Produkt-Zweige).
Die von den n Zweigen produzierten Gebrauchswertmengen

$$a, b, \ldots, k \tag{2.3}$$

kann man auch als eine einzige, gemischte Gebrauchswertmenge auffassen. Eine einfache mathematische Darstellung gemischter Gebrauchswertmengen ist mit Hilfe der vektoriellen Schreibweise möglich. Dazu werden die gemessenen Größen der einzelnen Teilmengen als Koordinaten eines Vektors x in einem n-dimensionalen mathematischen Raum betrachtet. Es sei

$$x_1 = a\ , \quad x_2 = b\ , \quad \ldots \quad , x_n = k \tag{2.4}$$

Der Zeilenvektor[3]

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{2.5}$$

ist mathematisch gesehen ein Vektor im Vektorraum aller geordneten n-Tupel G und in ökonomischer Hinsicht eine Widerspiegelung von Struktur und Größe der gemischten Gebrauchswertmenge (2.3). Durch den in (2.4) und (2.5)

[3] Die hier realisierte Notation orientiert sich an F.R.Gantmacher: Matrizenrechnung. Berlin 1970.

vollzogenen Übergang zur vektoriellen Schreibweise werden die Industriezweige zugleich durchnumeriert.
Als mathematische Basis des Vektorraumes *G* sind hier die Vektoren

$$\begin{aligned} e_1 &= [1,0,\ldots,0] \\ e_2 &= [0,1,\ldots,0] \\ &\ldots \\ e_{\mathrm{n}} &= [0,0,\ldots,1] \end{aligned} \tag{2.6}$$

gewählt worden. Mit Hilfe der in (2.4) definierten Koordinaten x_i läßt sich eine (beliebige) gemischte Gebrauchswertmenge im Raum *G* dann auch folgendermaßen darstellen:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i \tag{2.7}$$

Die in *G* erklärte Addition zweier Vektoren

$$\begin{gathered} x + y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i + \sum_{j=1}^{n} y_j \, e_j = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} z_i \, e_i = z \\ \text{mit} \quad z_i = x_i + y_i \end{gathered} \tag{2.8}$$

beschreibt eine Summenbildung aus den gemischten Gebrauchswertmengen *x* und *y*, während die Multiplikation mit einem Skalar α

$$\alpha \, x = \sum_{i=1}^{n} \alpha \, x_i \, e_i \tag{2.9}$$

die Vervielfachung einer gegebenen Gebrauchswertmenge *x* darstellt. Diese mathematischen Operationen können unter der Bedingung sinnvoll ökonomisch interpretiert werden, daß sich die Gebrauchswerte in dem wohlfixierten Zustand befinden, von dem oben die Rede war.

2.3. BRUTTOPRODUKT, PRODUKTIVKRAFT UND ARBEITSZEIT

Auf der Grundlage des soeben eingeführten analytischen Instrumentariums läßt sich das gebrauchswertmäßig-stoffliche Bruttoprodukt als Funktion der gesamtgesellschaftlichen Produktivkraft und der Arbeitszeit darstellen.
Wir betrachten die ökonomische Sphäre einer Gesellschaft, die aus n verschiedenen Ein-Produkt-Zweigen besteht.[4] Jeder Industriezweig sei wenigstens so ergiebig, daß nach Ablauf einer bestimmten Produktionsperiode (z.B. nach einer Woche, einem Jahr oder nach 10 Jahren) eine gewisse Gütermenge vorliegt. Es sei q_1 die im ersten Zweig produzierte Gebrauchswertmenge, q_2 das Erzeugnis des zweiten Industriezweiges usw. - jeweils bezogen auf einen vorgegebenen Zeitraum t' bis t'' (Produktionsperiode). Der Zeilenvektor

$$q = [q_1, q_2, \ldots, q_n] \tag{2.10}$$

stellt dann das von der gesamten Gesellschaft in dem betreffenden Zeitraum erzeugte Bruttoprodukt - unter gebrauchswertmäßig-stofflichem Aspekt betrachtet - dar.
Der Einfachheit halber wollen wir kurz von einem *Bruttoprodukt-Vektor* sprechen. (Eine differenziertere Terminologie ist erst in den nächsten Kapiteln erforderlich, wenn zusätzlich wert- und preismäßige Aspekte beachtet werden.)
Weiterhin sei t_i die Meßgröße für die im Laufe der Produktionsperiode t' bis t'' tatsächlich realisierte Arbeitszeit aller im i-ten Industriezweig tätigen Arbeiter. Faßt man die Meßgrößen für die Arbeitsquanten aller möglichen Zweige (i=1,...,n) in einem Vektor zusammen, so ergibt sich

$$t = [t_1, t_2, \ldots, t_n] \tag{2.11}$$

t ist, exakt gesprochen, der Vektor für die Größe und die Verteilung der gesamten, tatsächlich realisierten Arbeitszeiten in den verschiedenen Zweigen, kurz: der *Arbeitszeit-Vektor*.
Das Verhältnis

[4] Das ist natürlich eine Idealisierung. Die Komplexität der ökonomischen Realität kann allerdings erst begriffen werden, nachdem ihre Probleme in theoretisch idealisierter Form beherrschbar gemacht worden sind.

$$\pi_i = \frac{q_i}{t_i} \qquad (i=1,...,n) \tag{2.12}$$

definiert die im *i*-ten Industriezweig der betrachteten Gesellschaft entwickelte *Produktivkraft* der Arbeit, und zwar unter gebrauchswertmäßig-stofflichem Aspekt; es ist ein Maß für die im *i*-ten Zweig während der Periode t' bis t'' von einem dort beschäftigten Arbeiter pro Zeiteinheit durchschnittlich erzeugte Gebrauchswertmenge. Hat sich diese Gebrauchswertmenge beispielsweise in der folgenden Produktionsperiode verdoppelt, so kann man sicherlich von einer "Verdoppelung der Produktivkraft der Arbeit" sprechen - aus welchen Gründen eine solche Veränderung auch immer geschehen sein mag.
Es sei Π die (n,n)-Matrix, auf deren Hauptdiagonale in geordneter numerischer Reihenfolge von links oben nach rechts unten die durch (2.12) definierten Größen π_i und außerhalb der Hauptdiagonalen Nullen stehen:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \pi_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \pi_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \pi_n \end{Vmatrix} \tag{2.13}$$

(2.13) soll die *Produktivitätsmatrix* der betrachteten ökonomischen Sphäre heißen. Um es ein letztes Mal zu betonen: In diesem Kapitel werden die Produktivkraft der Arbeit und andere ökonomisch relevante Größen immer nur unter gebrauchswertmäßig-stofflichem Aspekt betrachtet.
Aus der Definition von Π und der Voraussetzung, daß in jedem Zweig ein nicht verschwindendes Produkt erzeugt wird, folgt, daß alle Elemente auf der Hauptdiagonalen von Π (siehe 2.13) positiv sind. Mathematisch hat dies zur Konsequenz, daß die Determinante dieser Matrix, symbolisiert durch $|\Pi|$, ebenfalls positiv ist, und insbesondere, daß sie nicht verschwindet:

$$|\Pi| \neq 0. \tag{2.14}$$

Folglich existiert die inverse Matrix Π^{-1}. Sie ist leicht zu berechnen:

$$\Pi^{-1} = \left\| \frac{\delta_{ik}}{\pi_i} \right\|_1^n \qquad (i,k = 1,...n). \tag{2.15}$$

Dabei ist δ_{ik} das Kronecker-Symbol.[5]
Multipliziert man Π von links mit dem Arbeitszeit-Vektor, so erhält man aufgrund der Definition (2.12) den Vektor für das Bruttoprodukt:

$$q = t\,\Pi \; . \tag{2.16}$$

Diese Vektorgleichung ist eine analytische Darstellung[6] für den ökonomischen Zusammenhang zwischen Bruttoprodukt, Arbeitszeit und Produktivkraft - differenziert nach Zweigen. Sind zwei der in (2.16) eingehenden Größen gegeben und kann die Gültigkeit der Gleichung für den gerade analysierten Zeitraum angenommen werden, so läßt sich mit ihrer Hilfe die dritte Größe berechnen.
Wie man sieht, ist es nicht falsch zu behaupten, daß die Arbeit eine reichere oder ärmere Quelle von Gebrauchswerten im direkten Verhältnis zum Steigen oder Sinken ihrer Produktivkraft ist.[7] Aber diese verbale Formulierung bringt die Differenziertheit des gesamtgesellschaftlichen Produktionszusammenhanges nur sehr unzureichend zum Ausdruck. Außerdem sind die Voraussetzungen zu beachten, unter denen der formale Apparat Ökonomisches sinnvoll darstellt.
Gleichung (2.16) ist zunächst nichts weiter als die mathematische Darstellung eines ökonomischen Zusammenhangs, die - diesmal im Sinne *I. Kants* - *analytisch* wahr ist; das heißt, ihre Gültigkeit folgt aus der Definition (2.12).
Aus der Behauptung (2.16) wird ein "synthetisches Urteil" (im Sinne *Kants*), wenn diese Gleichung entweder auf ein Zeitintervall *innerhalb* der Periode t' bis t'' oder auf eine *andere* Produktionsperiode bezogen wird. Die Produktivitäts-Matrix stellt im ersten Fall die *durchschnittliche* Produktivkraft der Arbeit der verschiedenen Zweige dar und im zweiten Fall eine *Extrapolation*, die man immer dann vornehmen kann, wenn die Entwicklung der Arbeitsbedingungen nahezu konstant zu setzen ist (ceteris-paribus-Klausel). In beiden Fällen ergäbe sich aus (2.16) eine *erste Näherung* für den tatsächlichen ökonomischen Zusammenhang.

---

[5] Für $i=k$ ist $\delta_{ik}=1$, sonst gilt: $\delta_{ik}=0$.
[6] Nachdem der bei *I. Kant* noch exakt definierte Begriff des Analytischen durch die moderne Wissenschaftstheorie ziemlich verwässert worden ist, kommt man nicht um eine Erläuterung, wie dieser Begriff soeben gemeint worden ist, herum: "Wir sagen, eine funktionale Abhängigkeit zwischen Größen [...] sei *analytisch* dargestellt, wenn die Größen *durch Gleichungen* einander zugeordnet sind, in die sie eingehen, indem sie verschiedenen mathematischen Rechenoperationen unterworfen werden: der Addition, Subtraktion, Division, dem Logarithmieren usw." W.I. Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik. Berlin 1973. Bd.1. S.21.
[7] Vgl. K. Marx: Das Kapital. Bd.1. In: Marx-Engels-Werke. Berlin 1986. Bd.23. S.60.

Eine dynamische Sicht liegt beispielsweise vor, wenn man eine kontinuierliche Vergrößerung des Arbeitszeit-Vektors t im Laufe einer Produktionsperiode unterstellt; dann erklärt Gleichung (2.16) bei gegebener Produktivkraft der Arbeit Π das nach Zweigen differenzierte Wachstum des Bruttoprodukts. Der oben vorausgesetzte 'wohldefinierte Zustand', in dem sich die Gebrauchswerte befinden müssen, um mathematisch darstellbar zu sein, hindert also nicht daran, gedanklich *das Werden* (ökonomisch: die Produktion) von Gebrauchswerten zu erfassen. Man kann dies so interpretieren, daß die Gebrauchswerte gerade in dem zeitlichen Moment mathematisch erfaßt und zu den bereits produzierten addiert werden, in dem sie als fertiges Produkt vorliegen.

2.4. VERTEILUNG VON ARBEITSKRÄFTEN UND -ZEITEN

Ist l_i die Anzahl der im i-ten Industriezweig insgesamt beschäftigten Arbeiter und bedeutet h_i die durchschnittliche (bzw. einheitliche) Arbeitszeit, die ein einzelner Arbeiter während der Periode t' bis t'' im Zweig i tätig ist, dann ist das mathematische Produkt aus l_i und h_i eine Substitution für die im i-ten Zweig geleistete Arbeitszeit, d.h.

$$t_i = l_i\ h_i \qquad (i=1,...,n)\ . \tag{2.17}$$

Wir nennen

$$l = [l_1, l_2, \ldots, l_n] \tag{2.18}$$

den *Arbeitskräfteverteilungs-Vektor* und

$$h = [h_1, h_2, \ldots, h_n] \tag{2.19}$$

den Vektor der (zweiglich differenzierten) *Durchschnittsarbeitszeiten* je Beschäftigteneinheit in der betrachteten Produktionsperiode.
Um eine in formaler Hinsicht bequemere Schreibweise einzuführen, erheben wir die in (2.10), (2.11), (2.18) und (2.19) definierten Vektoren zu Diagonalmatrizen:

$$Q = \|\ q_i\ \delta_{ik}\ \|_1^n \qquad (i,k = 1,...,n) \tag{2.20}$$

$$T = \| \, t_i \, \delta_{ik} \, \|_1^n \qquad (i,k = 1,...,n) \tag{2.21}$$

$$L = \| \, l_i \, \delta_{ik} \, \|_1^n \qquad (i,k = 1,...,n) \tag{2.22}$$

$$H = \| \, h_i \, \delta_{ik} \, \|_1^n \qquad (i,k = 1,...,n) \tag{2.23}$$

Die ökonomische Interpretation der Matrizen Q und T entspricht der der Vektoren q und t. Die Diagonalmatrix H beschreibt die zweiglich differenzierten durchschnittlichen Arbeitszeiten, und L die Verteilung der Arbeitskräfte über die verschiedenen Industriezweige.
Aus den Diagonalmatrizen erhält man auf einfache Weise die zugrunde liegenden Vektoren, wenn man sie von links mit dem sogenannten Spaltensummenvektor e multipliziert. Der Vektor e wird dabei durch die folgende, n mal die "1" enthaltende Zeile definiert:

$$e = [1,1,\ldots,1] \; . \tag{2.24}$$

Diagonalmatrizen sind vertauschbar, und für die Gleichungen (2.20 - 2.23) existiert außerdem die jeweilige inverse Matrix. Das erleichtert die Operation mit den entsprechenden Größen erheblich.
Der Zusammenhang zwischen den Arbeitszeiten, der Verteilung der Arbeitskräfte und den durchschnittlichen Arbeitszeiten der Zweige (2.17) wird nun durch die folgende Formel beschrieben:

$$T = L\,H \; . \tag{2.25}$$

Die Umformung dieser Gleichung nach H belegt noch einmal, daß H die durchschnittliche Arbeitszeit eines Arbeiters in den verschiedenen Industriezweigen erfaßt:

$$H = L^{-1}T \; . \tag{2.26}$$

Für das Bruttoprodukt gilt analog zu (2.16)

$$Q = T\,\Pi \tag{2.27}$$

und bei Berücksichtigung von (2.25) und der Vertauschbarkeit von Diagonalmatrizen:

$$Q = H\, L\, \Pi \; . \tag{2.28}$$

Je nachdem, welche Matrix von der rechten Seite dieser Gleichung man nach vorn (links) bringt, erhält man nach Multiplikation mit dem Spaltensummenvektor e eine andere Vektorgleichung. Direkt aus (2.28) ergibt sich beispielsweise:

$$q = h\, L\, \Pi \; . \tag{2.29}$$

An späterer Stelle werden wir die Formel

$$L = H^{-1} Q\, \Pi^{-1} \tag{2.30}$$

benötigen, die ebenfalls aus (2.28) folgt.
Ist die Arbeitszeit für die Arbeiter aller Industriezweige dieselbe, und wird sie in der betrachteten Produktionsperiode t' bis t'' durch die Größe η erfaßt, so ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$H = \eta\, E \tag{2.31}$$

wobei E die Einheitsmatrix n-ter Ordnung und η ein Skalar ist. Für die Verteilung der Arbeitszeiten t hat man dann anstelle von (2.25) die Formel

$$T = \eta\, L \tag{2.32}$$

zu setzen.
Unter der vereinfachenden Voraussetzung einer überzweiglich einheitlichen Arbeitszeit ist das Bruttoprodukt durch

$$Q = \eta\, L\, \Pi \tag{2.33}$$

gegeben. Mit Hilfe des Spaltensummenvektors ließe sich dieser Ausdruck auch in Vektorschreibweise umformulieren.

Diese mehr formalen Umformungen sollen zeigen, daß
(i) durch den Übergang von Vektoren zu (untereinander vertauschbaren) Diagonalmatrizen und
(ii) durch vereinfachende Annahmen über die untersuchte ökonomische Struktur eine alternative und unter Umständen flexiblere mathematische Darstellung erreicht werden kann.
Die hier abgeleiteten Formeln sind noch relativ einfach zu interpretieren. Gleichung (2.28) ergibt sich zum Beispiel unmittelbar aus der Definition der entsprechenden Matrizen. Sie stellt das gebrauchswertmäßig-stoffliche Bruttoprodukt als eine nach Zweigen differenzierte Größe dar, die von der durchschnittlichen Arbeitszeit, der Menge der Arbeitskräfte und der Produktivität abhängt.
Jede verbale Interpretation einer Formel muß aus der Sicht des mathematischen Ökonomen als laxe Darstellung eines Zusammenhanges bewertet werden, der exakt nur mit Hilfe eines geeigneten mathematischen Instrumentariums erfaßt werden kann. Was in der eben angeführten Interpretation beispielsweise der Begriff "Produktivität" bedeutet, wird durch den Text erläutert, der der Gleichung (2.12) zugrunde liegt. Wie man sieht, ist die verbale Darstellung selbst einfacher Zusammenhänge, soll sie korrekt sein, unübersichtlicher als der entsprechende mathematische Ausdruck. Das ist der Grund, weshalb die Darstellung der hochkomplexen Zusammenhänge des gesamtgesellschaftlichen Reproduktionsprozesses am zweckmäßigsten mit Hilfe der Matrizenrechnung erfolgen sollte.

2.5. Der Produktionsmittelverbrauch

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels ist von einer Form des Gebrauchswerts ausgegangen worden, die idealtypisch im Zirkulationsprozeß vorliegt: dort ist der Gebrauchswert eine wohlfixierte, meßbare Größe. In den Abschnitten 2.3 und 2.4 ist gezeigt worden, wie auf dieser meßtheoretischen Grundlage die *Produktion* von Gebrauchswerten dargestellt werden kann. Dazu muß der Gebrauchswert als eine mit der Zeit veränderliche Größe betrachtet werden. Andererseits werden im Produktionsprozeß Arbeitsmittel und Arbeitsgegenstände zweckmäßig vernutzt. Dieser Aspekt soll jetzt berücksichtigt werden.

2.5.1. Der absolute Verbrauch von Produktionsmitteln

In jedem Arbeitsprozeß werden Rohmaterialien verbraucht, Arbeitsmittel angewandt und damit auch verschlissen. Es handelt sich um deren Konsumtion, die aber zu produktiven Zwecken erfolgt. Diese *produktive Konsumtion* soll differenziert betrachtet werden
(i) nach den Gebrauchswertarten, die als Produktionsmittel (Arbeitsmittel und Rohstoffe) fungieren, und
(ii) nach den Industriezweigen, in denen sie aufgebraucht werden.
Bei den Arbeitsmitteln kann es vorkommen, daß sie über die betrachtete Produktionsperiode t' bis t'' hinaus noch genutzt werden: sie haben eine längere *Lebenszeit*. In diesem Fall ist der anteilige Verbrauch des entsprechenden Gebrauchswerts zu bestimmen. Ein Beispiel mag dies illustrieren! Gesetzt, die Lebenszeit einer Maschine a_0, die Produkt des 1. Industriezweiges ist, überdauert bei ihrem Einsatz im Zweig 2 im Durchschnitt 6 Jahre. Dann verliert diese Maschine jedes Jahr durchschnittlich ein Sechstel ihres Gebrauchswerts. Kommen im Zweig 2 gleichzeitig 50 dieser Maschinen zum Einsatz und bezeichnet t' bis t'' die Periode eines Arbeitsjahres, so ist der absolute Gebrauchswertverlust, der durch die Produktion im 2. Industriezweig verursacht wird, bezüglich der Sorte a_0 quantitativ durch

$$a = \frac{50}{6} a_0 = 8\frac{1}{3} a_0 \qquad (2.34)$$

anzusetzen (lineare Abschreibung).
Dies läßt sich verallgemeinern. Es sei z_{ij} eine Größe, die den absoluten (produktiven) Verbrauch von Gebrauchswerten der Sorte j im gesamten Industriezweig i erfaßt, und zwar während der Produktionsperiode von t' bis t'', deren Länge gleich

$$\Delta t_1 = t'' - t' \qquad (2.35)$$

ist. Die Matrix

$$Z = \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & . & . & . \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{matrix} \right\| \qquad (2.36)$$

stellt dann die Struktur des Produktionsprozesses der betrachteten Gesellschaft hinsichtlich der absoluten Größen des Verbrauchs an Produktionsmitteln dar. Alle Elemente der Matrix Z sind größer oder gleich Null:

$$z_{ij} \geq 0 \qquad (i,j = 1,...,n) \ . \tag{2.37}$$

Greifen wir das oben angeführte Beispiel noch einmal auf! Wenn im Zweig 2 genau 8 1/3 Stück des Produktes von Zweig 1 als Produktionsmittel verbraucht werden, dann ist z_{21} = 8 1/3 a_0. Wird das Produkt des 1. Industriezweiges im Zweig 3 überhaupt nicht angewandt, so ist der entsprechende absolute Verbrauch $z_{31} = 0$. Negative Verbrauchszahlen tauchen aufgrund der Definition von z_{ij} nicht auf. Z ist also eine nichtnegative Matrix:

$$Z \geq 0 \ . \tag{2.38}$$

Zur besseren Einordnung der hier entwickelten Theorie soll ergänzend noch folgendes angemerkt werden: Im Unterschied zur Theorie *Piero Sraffas* wird von vornherein der Produktionsmittelverbrauch separat vom Lebensmittelverbrauch dargestellt. Zwischen beiden Prozessen besteht ein ökonomisch hinreichend relevanter Unterschied: Lebensmittel unterstützen den Produktionsprozeß immer nur indirekt, vermittelt über die lebendige Arbeitskraft. Sie gehen deshalb prinzipiell nie wie Schmieröl in den Produktionsprozeß ein.[8]
Es sei ausdrücklich noch einmal hervorgehoben: Im Zahlenschema Z darf nur der tatsächliche Produktionsmittelverbrauch zum Ausdruck kommen. Aus diesem Grund bezeichnen wir Z als *Matrix des absoluten Verbrauchs von Produktionsmitteln* oder kürzer als *Produktionsmittel-Verbrauchsmatrix*.
Da der erste Index von z_{ij} die Nummer i des Industriezweiges angibt, in dem das Produkt des j-ten Zweiges (j=1,...,n) verbraucht wird, stellt die i-te Zeile der Matrix Z den Verbrauch der verschiedenen Gebrauchswerte (j=1,...,n) innerhalb des i-ten Zweiges dar. Dabei muß jedoch eine Einschränkung gemacht werden. Durch Z werden offenbar nur diejenigen Gebrauchswerte dargestellt, die

[8] Sraffas Input-Matrix kann auch die Lebensmittel, die die Arbeiter verzehren, enthalten. Vgl. P. Sraffa: Warenproduktion mittels Waren. Frankfurt a.M. 1976. S.28. Nr.8. Später wird diese Annahme fallen gelassen, um einer Auseinandersetzung mit dem traditionellen Lohnbegriff aus dem Wege zu gehen. Dadurch wird der Lohn zu einer beliebig manipulierbaren Variable, was die unrealistische Möglichkeit einer Lohnrate gleich oder nahe Null impliziert. Vgl. ebd. Nr.30.

Arbeitsprodukte sind. Produktionsmittel, die unmittelbar dem Reservoir der Natur entnommen worden sind, werden nicht berücksichtigt. Vom Standpunkt der Arbeitsquantentheorie sind sie ökonomisch irrelevant, weil in ihnen keine Arbeit verkörpert ist. Dazu folgende Anmerkungen:
(i) Die Reduktion der Betrachtung auf nützliche *Arbeits*produkte erfolgt hier im Hinblick auf die angestrebte Rekonstruktion der Wertstruktur einer warenproduzierenden Volks- oder Weltwirtschaft. Hebt man diese Einbindung auf, ergeben sich andere Perspektiven und Probleme. Zu letzteren gehört sicherlich der Fakt, daß unendlich viele Faktoren bei der Produktion mitwirken, die betreffenden Matrizen folglich unendlich-dimensional sein müßten.
(ii) Mit der behaupteten ökonomischen Irrelevanz gewisser Gebrauchswerte ist nicht ausgeschlossen, daß sie einmal ökonomisch relevant werden können. Wenn zum Beispiel die Ausbeutung eines von Natur vorhandenen Stoffes so weit fortgeschritten ist, daß er industriell (re-)produziert werden muß, um ihn auch weiterhin als Produktions- oder Lebensmittel einsetzen zu können, wird er zu einem Arbeitsprodukt, das seinen Platz im Schema Z findet (bei gleichzeitiger Erhöhung der Ordnung n der Matrix).
(iii) Die ökonomische Irrelevanz gewisser Gebrauchswerte schließt keineswegs aus, daß sie unter Umständen eine sehr wichtige technologische Rolle im Produktionsprozeß spielen. Ohne die natürliche Luft ist kaum ein Produktionsprozeß denkbar; trotzdem wird dieser Stoff nur dann durch Z berücksichtigt, wenn er das Produkt vorangegangener Arbeit ist (z.B. Preßluft).
(iv) Wie die Theorie der negativen Werte zeigen wird (siehe unten!), bedeutet diese scheinbar ökonomistische Ausgrenzung der vom Menschen 'unberührten' Natur nicht, daß die Arbeitsquantentheorie zur ökologischen Blindheit verurteilt wäre. Das ganze Gegenteil ist der Fall! Erst mit ihrer Hilfe läßt sich das Verursacherprinzip theoretisch, d.h. jenseits moralischer Argumente, begründen.
(v) Mit diesen Hinweisen grenze ich mich schließlich von der Illusion ab, daß auf jene Weise konstruierte *Input-Matrizen* (der Produktionsmittel- und der Lebensmittelverbrauch treten aus kybernetischer Sicht als Input des Reproduktionsprozesses auf) "geschlossene Systeme" erfassen könnten, "in denen n Waren durch n voneinander unabhängige Prozesse mit Hilfe dieser selben Waren und Arbeit hergestellt werden."[9] Dieser Eindruck ist durch die spezifische Abstraktionsrichtung bedingt, mit der hier wie in anderen ökonomisch-mathematischen Theorien, die die Warenproduktion erfassen sollen, gewisse

[9] Bertram Schefold in P. Sraffa: Warenproduktion mittels Waren. A.a.O. S.216.

Zusammenhänge von vornherein als ökonomisch irrelevant ausgeblendet werden.
Eine Spalte der Matrix Z drückt den produktiven Konsum von Gebrauchswerten derselben Sorte aus, ein Konsum, der durch die verschiedenen Industriezweige hervorgerufen wird. Damit ergibt die Summe aller Elemente der j-ten Spalte den gesamtgesellschaftlichen Verbrauch von Gebrauchswerten der Sorte j als Produktionsmittel. Diese Summe bezeichnen wir mit z_j:

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \ . \tag{2.39}$$

Die einzelnen z_j lassen sich wieder als Koordinaten eines Zeilenvektors z auffassen:

$$z = [z_1, z_2, \ldots, z_n] \ ; \tag{2.40}$$

z heiße der *Produktionsmittel-Verbrauchsvektor*.
Mit Hilfe des Spaltensummenvektors e kann der Zusammenhang zwischen der Matrix Z und dem Vektor z wie folgt geschrieben werden:

$$z = e\,Z \ . \tag{2.41}$$

2.5.2. DER SPEZIFISCHE PRODUKTIONSMITTELVERBRAUCH

z_{ij} stellt also den Verbrauch von Gebrauchswerten der Sorte j dar, die im Industriezweig i als Produktionsmittel zur Anwendung kommen. (Der Verbrauch dieser Gebrauchswerte als Lebensmittel muß auf andere Weise erfaßt werden. Siehe dazu weiter unten!) Dividiert man diese Größe durch das im gleichen Zeitraum hergestellte gebrauchswertmäßige Bruttoprodukt q_i, so erhält man die Größe des produktiven Konsums von Gebrauchswerten j, der zur Herstellung einer Einheit der Gebrauchswertsorte i dient:

$$\zeta_{ij} = \frac{z_{ij}}{q_i} \qquad (i,j = 1,\ldots,n). \tag{2.42}$$

Die Größe ζ_{ij} bezeichnen wir als den spezifischen Verbrauch von Produktionsmitteln der Sorte *j* im *i*-ten Industriezweig. Analog zur Bildung der Matrix *Z* fassen wir alle Größen ζ_{ij} zu einem Zahlenschema ζ zusammen.[10] Ausführlich geschrieben lautet die Matrix für den *spezifischen Produktionsmittelverbrauch* in den einzelnen Zweigen:

$$\zeta = \begin{Vmatrix} z_{11}/q_1 & z_{12}/q_1 & \cdots & z_{1n}/q_1 \\ z_{21}/q_2 & z_{22}/q_2 & \cdots & z_{2n}/q_2 \\ \vdots & . & . & . \\ z_{n1}/q_n & z_{n2}/q_n & \cdots & z_{nn}/q_n \end{Vmatrix} \qquad (2.43)$$

Betrachten wir nun eine (beliebige) Zeile *i* der Matrix ζ! Einige Elemente werden gleich Null sein, weil der dazugehörige Gebrauchswert im Zweig *i* nicht als Produktionsmittel verwendet wird. Die anderen Elemente werden sich in ihrer Größe voneinander unterscheiden. Insgesamt gesehen besitzt die Zeile *i* im Vergleich zu den anderen Zeilen eine für den *i*-ten Industriezweig charakteristische quantitative Struktur. Es fragt sich nun, was diese Struktur bedeutet. Berücksichtigt man, daß die Größe ζ_{ij} in erster Näherung unabhängig von einer Variation des Bruttoprodukts ist, so wird deutlich, daß die in der *i*-ten Zeile verankerte quantitative Struktur im wesentlichen ein Spiegelbild der im Zweig angewendeten Technologien ist. Zwar kann man nicht unterstellen, daß in einem Industriezweig eine und nur eine Technologie zur Anwendung kommt; trotzdem dürften aber die verschiedenen tatsächlich angewandten Technologien zu einem für den Zweig typischen Produktionsmittelverbrauch führen: Die Herstellung eines bestimmten Produkts erfordert in der Regel ein charakteristisches Ausgangsmaterial und den Einsatz spezifischer Arbeitsmittel; manche Gebrauchswerte werden gar nicht benötigt, andere dagegen in ganz bestimmten, charakteristischen Proportionen. Die Struktur des Produktionsmittelverbrauchs in einem Zweig unterschiedet sich so *prinzipiell* von der quantitativen Struktur des Produktionsmittelverbrauches in anderen Zweigen. Eine faktische Übereinstimmung der quantitativen Verhältnisse wäre als rein zufällig zu betrachten.

Wir unterstellen weiterhin, daß die quantitativen Proportionen zwischen den Zweigen durch die Art und Weise des Umgangs der Arbeiter mit den Produktionsmitteln nicht wesentlich verzerrt, sondern nur geringfügig modifiziert wer-

[10] Da das große griechische Zeta leicht mit dem lateinischen großen Z verwechselt werden kann, wird hier zur Bezeichnung einer Matrix ausnahmsweise der kleine griechische Buchstabe benutzt.

den. Ein allgemein schludriger Umgang mit den Produktionsmitteln wird sich statistisch gesehen auf alle Zweige etwa in gleicher Weise auswirken, so daß die spezifischen Proportionen erhalten bleiben.[11] Diese sind folglich im wesentlichen abhängig von den Techniken der Produktion, den Technologien, das heißt von dem, *was* und *womit* produziert wird. Aus diesem Grund soll die Matrix ζ im weiteren als *technologische Matrix* bezeichnet werden.

Wie bereits angedeutet, können innerhalb eines Zweiges durchaus verschiedene Technologien zur Anwendung kommen. Diese brauchen ja nur eine einzige Bedingung zu erfüllen, nämlich die, daß sie zur Produktion des gleichen Gebrauchswertes führen. Im Fall unterschiedlicher Technologien innerhalb eines Zweiges repräsentiert die i-te Zeile der Matrix ζ keine einheitliche, im i-ten Zweig realisierte Technologie, sondern einen gewichteten Durchschnitt der verschiedenen Technologien. Der Einfachheit halber wollen wir in diesem Fall sagen, daß die i-te Zeile eine "*Mischtechnologie*" repräsentiert,[12] die zwar insofern eine Fiktion ist, als keine reale Verkörperung dieser Technologie existiert, deren Konstruktion aber den Vorteil hat, daß sie die wirklichen Verbrauchszahlen berücksichtigt und eine im Vergleich zu den anderen Zweigen typische Verbrauchsstruktur kennzeichnet. Die Mischtechnologie nähert sich in ruhigeren Phasen der Produktivkraftentwicklung der jeweils herrschenden Technologie eines Industriezweiges an, falls ineffektive Technologien durch einen noch darzustellenden Konkurrenzmechanismus nach und nach verdrängt werden.

Wenn sich die Zeilen der technologischen Matrix ζ strukturell voneinander unterscheiden, bedeutet das in mathematischer Hinsicht, daß keine Zeile als eine Linearkombination der anderen Zeilen dargestellt werden kann. Bezeichnen wir mit ζ_i die i-te Zeile von ζ, so gilt, daß die Vektorgleichung

---

[11] Gleichgültig, ob der Verbrauch der Norm entspricht oder nicht, in die Matrix des Produktionsmittelverbrauchs muß der tatsächliche Verbrauch eingehen, der in der betrachteten Periode verursacht worden ist.

[12] Der Ausdruck "Mischtechnologie" ist entlehnt von Peter Seidelmann: Das Eigensystem verflechtungsdeterminierter Preise der Volkswirtschaft und seine Bedeutung für die planmäßige Preisbildung im Sozialismus. Leipzig 1975. S.23. Desgleichen der Ausdruck "technologische Matrix". Die Anleihe betrifft aber nur die sprachliche Formulierung. Im Unterschied zu der hier definierten technologischen Matrix, die sich auf den tatsächlichen Verbrauch in einer bestimmten Produktionsperiode bezieht, will Seidelmann den wahrscheinlichen, zukünftig zu erwartenden Verbrauch erfassen. Außerdem hängt Seidelmanns "technologische Matrix B" auch noch von der Größe und der Struktur des Bruttoprodukts ab. Diese Abhängigkeit habe ich in erster Näherung dadurch beseitigt, daß jede Zeile der Matrix Z durch das entsprechende Bruttoprodukt dividiert wurde. Vgl. auch: G. Quaas: Kritische Bemerkungen zu einem ökonomisch-mathematischen Modell. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Leipzig. Gesellschaftswissenschaftliche Reihe. 1990/ Heft 6. S.611 ff.

$$\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 + \ldots + \alpha_n \zeta_n = 0 \qquad (2.44)$$

dann und nur dann erfüllt werden kann, wenn alle α_i verschwinden. Die Zeilen der Matrix ζ sind also in der Regel *linear unabhängig* voneinander. Diese mathematische Eigenschaft widerspricht nicht dem Fakt, daß die Zweige, die von den Zeilen der Matrix ζ widergespiegelt werden, in ökonomischer Hinsicht durchaus voneinander abhängig sind, ja sein müssen. Die lineare Unabhängigkeit der Zeilen der Matrix ζ ist ein Reflex der technologischen Einzigartigkeit jedes Industriezweiges.

Für das Folgende soll angenommen werden, daß die betrachtete ökonomische Sphäre ein echtes System voneinander abhängiger Zweige darstellt, daß es also keinen Industriezweig gibt, der in der Lage wäre, völlig autark, d.h. ohne Anwendung eines Produkt irgendeines anderen Zweiges, zu produzieren.[13] Mathematisch drückt sich diese ökonomische Abhängigkeit darin aus, daß es in jeder Zeile der Matrix ζ mindestens ein Element gibt, für das gilt:

$$\zeta_{ij} \succ 0 \qquad (i \neq j). \qquad (2.45)$$

Dies, zusammen mit der linearen Unabhängigkeit der Zeilen in ζ, bedeutet, daß in der Regel

$$\det \zeta \neq 0 \qquad (2.46)$$

angenommen werden kann. Wenn im folgenden die Gültigkeit der Ungleichung (2.46) unterstellt wird, so handelt es sich um eine Idealisierung, die von den seltenen Ausnahmen abstrahiert, bei denen sich (mindestens) zwei Zweige hinsichtlich der Struktur des spezifischen Produktionsmittelverbrauchs zufälligerweise genau gleichen oder bei denen ein Zweig überhaupt keine ökonomisch relevanten Produktionsmittel verbraucht.

Zwischen der technologischen Matrix ζ und der Produktionsmittel-Verbrauchsmatrix Z besteht der Zusammenhang

$$\zeta = Q^{-1} Z \qquad (2.47)$$

---

[13] Wohlgemerkt wird aber nicht vorausgesetzt, daß eine direkte Abhängigkeit von *allen* anderen Zweigen existiert.

oder

$$Z = Q\,\zeta \quad . \tag{2.48}$$

Beide Gleichungen sind im Sinne *Immanuel Kants* analytisch wahr. Sie bekommen einen empirischen Gehalt, wenn man sie über die betrachtete Zeitperiode hinaus anwendet. Dazu müssen - ganz im Sinne des kritisch-rationalistischen Theorie-Begriffs - gewisse Randbedingungen konstant gesetzt werden können. Von den in die Gleichungen (2.47) und (2.48) eingehenden Größen ändert sich die technologische Struktur wohl am wenigsten. Deshalb ist es sinnvoll, die folgende Extrapolation vorzunehmen: Mit den Produktionstechniken bleibt auch die technologische Matrix ζ in erster Näherung für aufeinander folgende Produktionsperioden (1) und (2) konstant. Für das Bruttoprodukt ist dies offenbar keine realistische Annahme. Aus (2.48) ergibt sich unter diesen Bedingungen näherungsweise der absolute Produktionsmittelverbrauch in der Periode (2):

$$Z(2) = Q(2)\,\zeta \quad . \tag{2.49}$$

Nach dieser Formel ist der Produktionsmittelverbrauch unter der Bedingung konstanter Technologien eine lineare Funktion des Bruttoprodukts.
Multipliziert man (2.48) mit den Zeilensummenvektor *e*, so ergibt sich

$$z = q\,\zeta \quad . \tag{2.50}$$

Unter der Voraussetzung (2.46) existiert die Inverse ζ^{-1}, und man kann schreiben:

$$q = z\,\zeta^{-1} \, . \tag{2.51}$$

Auch die letzten beiden Formeln sind mathematische Darstellungen des Zusammenhanges zwischen dem Bruttoprodukt und dem zu seiner Herstellung dienenden Produktionsmittelverbrauch. Nach (2.50) bestimmt das Endprodukt den notwendigen Verbrauch, nach (2.51) ist umgekehrt das Endprodukt durch den Verbrauch bestimmt. Das bedeutet: Aus mathematischer Sicht gibt es keine eindeutige Determination einer der beiden Größen durch die andere. Die Ursache dafür liegt darin, daß sowohl das Bruttoprodukt q als auch der Produktionsmittelverbrauch z das Resultat des gesamtgesellschaftlichen Produktionsprozesses wiederspiegeln, wenn auch auf gegensätzliche Weise: q stellt den produzierten und z den (produktiv) konsumierten Gebrauchswert dar. Beide Vektoren zusammen erfassen das Resultat der Produktion *konkret*, das heißt in seinem widersprüchlichen Verhältnis von Erzeugen und Vernichten. Dieser doppelseitige Prozeß wird quantitativ durch die Matrix des spezifischen Verbrauchs charakterisiert.

2.6. DIE REPRODUKTION DER ARBEITSKRÄFTE

Wenn hier die *stoffliche* Seite der Reproduktion der Arbeitskräfte betrachtet werden soll, so kann das nicht unter physiologischem, pädagogischem, gastronomischem oder einem sonstigen nicht-ökonomischen Aspekt geschehen. In ökonomischer Hinsicht sind vor allem zwei stoffliche Momente jenes Prozesses relevant: Erstens die Tatsache, daß ständig eine *bestimmte Anzahl in gewisser Weise qualifizierter Arbeitskräfte* zur Verfügung steht; dies ist das *Resultat* der Reproduktion der Arbeitskräfte. Zweitens ist es der Fakt, daß in jenen Prozeß *materielle Güter verschiedener Art* eingehen, die dort entweder direkt von den Arbeitern und ihren Familienangehörigen oder indirekt von den an der Reproduktion der Arbeitskräfte unmittelbar Beteiligten wie Lehrer, Ärzte etc. *verbraucht*, das heißt *konsumiert* werden. (Deren Konsumtion darf in diesem Zusammenhang nur insoweit in Rechnung gestellt werden, wie ihre Leistungen eine direkte Funktion bei der Reproduktion der Arbeitskräfte haben.) Um weiterhin kein unnötiges, normatives Element in die Analyse hineinzubringen, wird *an dieser Stelle* ausdrücklich auf eine Unterscheidung zwischen Luxusgütern und notwendigen Gütern verzichtet. Die Gesamtheit der Gebrauchswerte, die von der Arbeiterschaft eines Landes als Lebensmittel konsumiert werden, bildet einen *Warenkorb*, der bei allgemeiner Warenproduktion den stofflichen Teil des *Reallohns* verkörpert. Aber auch im Falle des Vorherrschens anderer Produktionsweisen existiert stets eine bestimmte (gemischte) Gebrauchswertmenge, die die Funktion hat, die Reproduktion der gesamtgesellschaftlichen Arbeitskraft zu sichern. Diese Gütermenge ist bekanntlich qualitativ und quantitativ unterschiedlich strukturiert, je nach Herkommen (Konvention), Nationalität, dem damit verbundenen Entwicklungs- und Bildungsniveau - und unter anderem auch der Durchsetzungkraft der Arbeitnehmerschaft bei Tarifverhandlungen.

Es sei d_{ij} der absolute Verbrauch von Gebrauchswerten der Sorte j, der durch die Arbeiter des Industriezweiges i (einschließlich ihrer Familienangehörigen und gewisser Dienstleistender) während einer bestimmten Produktionsperiode verursacht wird. Die nichtnegative quadratische Matrix

$$D = \left\| d_{ij} \right\|_1^n \tag{2.52}$$

spiegelt Größe und Struktur des durch die Reproduktion der Arbeitskräfte bedingten Verbrauchs von Lebensmitteln wider. Je eine Zeile der Matrix D repräsentiert - differenziert nach Gebrauchswertarten - den (direkten und indirekten) Konsum der Arbeitskräfte des entsprechenden Zweiges in der betrachteten Produktionsperiode. Dagegen wird durch eine Spalte der Matrix D der Verbrauch einer bestimmten Sorte von Gebrauchswerten durch die Beschäftigten verschiedener Zweige zum Ausdruck gebracht.

Analog zum Produktionsmittelverbrauch definieren wir den gesamtgesellschaftlichen Verbrauch an Lebensmitteln durch die Beziehung

$$d = e\,D\ . \tag{2.53}$$

Der Vektor d ist das Analogon zum Vektor z; während z den *produktiven* Konsum erfaßt, drückt d den durch die Arbeiter verursachten, wenn man so will: *unproduktiven* Konsum aus. Dieser Konsum ist eine notwendige Voraussetzung der Produktion.[14]

Die Elemente von D hängen zwar nicht direkt von der Größe und Struktur des Bruttoprodukts q ab; es existiert aber eine indirekte Beziehung, insofern nämlich für die Herstellung des gesamtgesellschaftlichen Bruttoprodukts eine bestimmte Anzahl in gewisser Weise qualifizierter Arbeitskräfte benötigt wird. Nach Gleichung (2.28) besteht zwischen der Anzahl der Arbeitskräfte und dem Bruttoprodukt ein linearer Zusammenhang. In erster Näherung kann man annehmen, daß die Größe des Lebensmittelverbrauchs proportional zur Anzahl der Arbeitskräfte steigt oder fällt. Eine Matrix mit solchen Eigenschaften sagt wenig über die *Spezifik* der Arbeitskräfte in den verschiedenen Zweigen aus. Um uns von der linearen Abhängigkeit zwischen dem Lebensmittelverbrauch und der Menge der Arbeitskräfte zu befreien, dividieren wir die Elemente jeder Zeile i der Matrix D

[14] Der Einfachheit halber sprechen wir im folgenden von dem Konsum der Arbeiter, wohl wissend, daß D den Konsum ihrer Familienangehörigen und den gewisser Dienstleistender einschließt.

durch die Anzahl der Arbeiter des *i*-ten Industriezweiges l_i und bilden die Maßverhältnisse

$$\chi_{ij} = \frac{d_{ij}}{l_i} \qquad (i,j = 1,...,n)\ . \tag{2.54}$$

Die (dimensionierten) Zahlen χ_{ij} bilden die Matrix χ :[15]

$$\chi = \left\| \chi_{ij} \right\|_1^n\ . \tag{2.55}$$

Die Elemente einer beliebigen Zeile χ_i dieses Zahlenschemas spiegeln den durchschnittlichen Verbrauch an Lebensmitteln pro Arbeitskraft des Zweiges *i* wider. Man kann dies auch so interpretieren: Eine Zeile charakterisiert die *Durchschnittsarbeitskraft* des entsprechenden Zweiges hinsichtlich ihres Lebensmittelverbrauchs während der betrachteten Periode.

Wäre in einer Gesellschaft alle Arbeit von derselben Qualität, das heißt die Leistung von Arbeitskräften, die dieselbe Qualifikation besitzen und die deshalb alle etwa denselben gesellschaftlichen Aufwand zu ihrer Reproduktion abfordern, dann würde χ - unter der weiteren Annahme, daß sich individuelle Unterschiede bei großen Zahlen ausmitteln - nur gleiche Zeilen enthalten. In der Regel ist dies aber nicht der Fall: Realistischerweise muß man deshalb annehmen, daß sich die Zeilen der Matrix χ (unter Umständen erheblich) voneinander unterschieden. Sie repräsentieren den unterschiedlichen Lebensmittelverbrauch der verschiedenen, industriezweigspezifischen Durchschnittsarbeitskräfte.[16]

Die Spezifik der industriezweiglichen Durchschnittsarbeitskraft ist ein Ausdruck der *Lebensweise* und im engeren Sinne des *Lebensstandards* der Arbeiter des entsprechenden Zweiges. Kann man die Lebensweise für einen bestimmten Zeitraum als unveränderlich ansehen, so gilt:

$$\chi = \text{konst}\,. \tag{2.56}$$

---

[15] Auch hier muß man wieder auf den kleinen griechischen Buchstaben zurückgreifen, um Verwechslungen zu vermeiden.

[16] Wie viele anderen ökonomischen Theorien auch, unterstellt Sraffas "Warenproduktion mittels Waren" "Arbeit von gleicher Qualität" (vgl. P. Sraffa a.a.O. Nr.10). Ein wesentliches Merkmal marktwirtschaftlicher Realität wird damit von Anfang an verfehlt.

Zwischen D und χ besteht aufgrund der Definition (2.54) der Zusammenhang

$$D = L\chi \ . \tag{2.57}$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit dem Spaltensummenvektor e, erhält man den Lebensmittelverbrauch der lohnabhängig Beschäftigten

$$d = l\chi \ . \tag{2.58}$$

Gleichung (2.58) ist das Analogon zu (2.50).

2.7. DIE INNERE STRUKTUR DER VERBRAUCHSMATRIZEN

Es lassen sich (in Anlehnung an *Sraffa*) folgende Arten von Gütern unterscheiden:
(i) Gebrauchswerte, die nur als Produktionsmittel verwendet werden;
(ii) notwendige Lebensmittel, d.h. Gebrauchswerte, die von den Arbeitern zur Reproduktion ihrer Arbeitskraft konsumiert werden. Dabei ist nicht auszuschließen, daß sich unter diesen Gütern auch solche befinden, die als Produktionsmittel verwendet werden. Sofern von diesen Gütern ein Überschuß vorhanden ist, kann durch sie auch der Unterhalt anderer Klassen bestritten werden.
(iii) Gebrauchswerte, die nicht als notwendige Lebensmittel der Arbeiter in Betracht kommen, die aber auch nicht als Produktionsmittel fungieren - außer vielleicht bei ihrer eigenen Produktion (z.B. Rennpferde). Diese Gruppe bezeichnen wir als *Luxusgüter*.
Durch eine entsprechende Numerierung von Gebrauchswertarten und Zweigen kann man erreichen, daß die ersten f Zeilen der Matrizen Z und D Zweige repräsentieren, die reine Produktionsmittel herstellen, die nächsten g Zeilen Zweige mit Produkten der Gruppe (ii) und die restlichen $h=n-f-g$ Zeilen die Zweige der Luxusgüterproduktion. Daraus ergibt sich die folgende Grobstruktur der Matrizen Z und D:

Produktionsmittelverbrauch Z:

	f	g	h
f	≥0	≥ 0	0
g	≥ 0	≥ 0	0
h	≥0	≥ 0	≥0

Lebensmittelverbrauch D:

	f	g	h
f	0	≥0	0
g	0	≥ 0	0
h	0	≥ 0	0

Abb. 1: Grobstruktur der Verbrauchsmatrizen

Die beiden Verbrauchsmatrizen lassen sich also in Blöcke von Nullmatrizen (durch das Zeichen 0 symbolisiert) und nichtnegativen Matrizen unterteilen. Wie man leicht sieht, sind beide Matrizen im mathematischen Sinne zerlegbar, wobei hier vorausgesetzt wird, daß sie nicht vollständig zerlegbar sind.[17] Darüber hinaus gilt - es sei daran erinnert - Ungleichung (2.46).

2.8. DIE GEBRAUCHSWERTMÄßIG-STOFFLICHE STRUKTUR

Das Resultat des gesamtgesellschaftlichen Reproduktionsprozesses während einer Produktionsperiode ist - unter gebrauchswertmäßig-stofflichem Aspekt betrachtet - mehrfach charakterisiert worden: Erstens durch das *Bruttoprodukt q*, zweitens durch den *Verbrauch an Produktionsmitteln z*, drittens durch den *Konsum von Lebensmitteln d* zur Reproduktion der Arbeitskräfte und viertens durch die tatsächlich *realisierte Arbeitszeit t* bzw. durch die *Arbeitskräfteverteilung l* und den Vektor für die *durchschnittlichen Arbeitszeiten h.*

Die *Produktions- und Lebensweise* der betrachteten Gesellschaft ist (unter gebrauchswertmäßig-stofflichem und dominant quantitativem Gesichtspunkt betrachtet) durch die *Produktivitätsmatrix* Π, durch die *technologische Matrix* ζ, durch die Matrizen zur *Charakterisierung der Duchschnittsarbeitskräfte* χ und ihrer *Verteilung L* bestimmt. Dies geht offenbar über eine bloß mathematische Beschreibung der Produktionstechniken hinaus, erreicht aber auch nicht das Niveau einer soziologischen Beschreibung der Produktions- und Lebensweise

[17] Vgl. F.R.Gantmacher: Matrizenrechnung. Bd.2. Berlin 1970. S.44 f. - Die oben formulierte Bedingung läßt sich noch etwas abschwächen: Für das Folgende ist lediglich erforderlich, daß die Summe *Z+D* nicht vollständig zerlegbar ist.

einer Gesellschaft - eventuell unter Berücksichtigung der Eigentumsverhältnisse. In Ermangelung eines besser treffenden Terminus' spreche ich hier von der *gebrauchswertmäßig-stofflichen Struktur der Produktions- und Lebensweise*, die durch jene Größen erfaßt wird.
Die gesamte gebrauchswertmäßig-stoffliche Struktur des ökonomischen Reproduktionsprozesses, die teils durch die entsprechende Struktur der *Ausgangssituation*, die weiter unten noch dargestellt werden wird, durch die angegebene Struktur der *Produktions- und Lebensweise* sowie durch die des *Resultats* einer Produktionsperiode gegeben ist, stellt ein sehr allgemeines Moment jeder realen Volks- oder Weltwirtschaft dar. In einer warenproduzierenden Gesellschaft wird dieses Moment, das eine komplexe Struktur ist, von den Wertverhältnissen überlagert, die den Austausch und - darüber vermittelt - auch die Produktion beherrschen. Die Dominanz des Werts in warenproduzierenden Gesellschaften verdeckt in einem gewissen Maße die gebrauchswertmäßig-stoffliche Struktur.[18] Trotzdem ist sie (vermittelt über den Wert) auch dort wirksam. Im folgenden werden eine Reihe ökonomischer Begriffe, die bisher entweder überhaupt noch nicht oder lediglich in Bezug auf die Wertverhältnisse exakt definiert worden sind, von dieser Einschränkung befreit und in ganz allgemeiner Weise definiert. Diese, an die gebrauchswertmäßig-stoffliche Struktur gebundenen Definitionen haben, unabhängig von ihrer gesellschaftliche Bedeutung für das Handeln innerhalb von (Re-) Produktionseinheiten, die nur als ganze und an ihren Rändern in den Warenverkehr eingehen, eine grundlegende theoretische Bedeutung für die vergleichende Analyse ökonomischer Gesellschaftsformationen. Darüber hinaus bilden sie die begriffliche Basis für die exakte Formulierung der Arbeitsquantentheorie.

2.9. Einfache, erweiterte und rückläufige Reproduktion

Der Begriff der einfachen Reproduktion soll hier unter Abstraktion von jeder wertmäßigen Betrachtung definiert werden, das heißt, allein in Bezug auf gebrauchswertmäßig-stoffliche Momente des ökonomischen Reproduktionsprozes-

[18] Vgl. G. Quaas: Dialektik als philosophische Theorie und Methode des 'Kapital'. Frankfurt a. M. 1992. S.55 ff.

ses. Es seien Δt_1 und Δt_2 zwei gleich lange, aufeinanderfolgende Produktionsperioden, die nahezu 'nahtlos' ineinander übergehen:[19]

$$\Delta t_1 = t_1'' - t_1' \succ 0, \quad \Delta t_2 = t_2'' - t_2' \succ 0, \tag{2.59}$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \ . \tag{2.60}$$

Das während der Periode Δt_1 erzeugte Bruttoprodukt sei q_1, und das während Δt_2 erzeugte Bruttoprodukt q_2. Wir wollen von *einfacher Reproduktion der ökonomischen Sphäre* oder von einer *Produktion auf gleicher Stufenleiter* sprechen, wenn unter den genannten Bedingungen

$$q_2 = q_1 \tag{2.61}$$

ist. Dagegen handelt es sich um *erweiterte Reproduktion*, wenn

$$q_2 \neq q_1 \quad \cap \quad q_2 \geq q_1 \tag{2.62}$$

gilt. (Hierbei bedeutet $\cap$ die logische Konjunktion.) Dementsprechend handelt es sich um eine *rückläufige Reproduktion*, wenn

$$q_2 \neq q_1 \quad \cap \quad q_2 \leq q_1 \tag{2.63}$$

gilt. Die Differenz

$$\Delta q = q_2 - q_1 \tag{2.64}$$

erfaßt den - eventuell auch negativen - Zuwachs des Bruttoprodukts. Wegen (2.62) muß bei erweiterter Reproduktion

$$\Delta q \geq 0 \quad \cap \quad \Delta q \neq 0 \tag{2.65}$$

gelten.

---

[19] Zwischen t_1'' und t_2' kann eine zeitliche Differenz liegen, wobei unterstellt wird, daß in diesem Zeitabschnitt keine Produktion stattfindet. Es wird angenommen, daß $t_2' \geq t_1''$.

2.10. PRODUKTIONSVORRÄTE

Ohne bereits vorhandene Produktionsmittel und Arbeitskräfte ist keine Produktion möglich. Arbeitsmittel müssen vorhanden und zweckmäßig mit den Arbeitskräften arrangiert werden, damit sie ihre Funktion im Produktionsprozeß erfüllen können. Die zu bearbeitenden Arbeitsgegenstände werden laufend vernutzt und sind ständig zu ersetzen, wenn die Produktion fortgeführt werden soll. Die Träger der Arbeitskraft, die Arbeiter, müssen leben und sich fortpflanzen können, wenn sie über längere Zeit ihre physischen und geistigen Fähigkeiten produktiv verausgaben sollen. Darüber hinaus bedürfen sie einer gewissen 'Pflege' durch Dienstleistende wie Lehrer, Ärzte, Friseure etc. In all' diesen Rücksichten setzt eine kontinuierlich und störungsfrei ablaufende Produktion die Existenz von *Vorräten* voraus. Ein gewisses Mindestmaß davon befindet sich zweckmäßigerweise in unmittelbarer Nähe der (produktiven oder unproduktiven) Konsumtionsprozesse.[20] Diese Vorräte bestehen aus auf Industriezweige bzw. auf Haushalte verteilten Gebrauchswerten.

Die verbrauchten Lebens- und Produktionsmittel des Vorrats werden in einer funktionierenden Volkswirtschaft ständig aus der laufenden Produktion ersetzt. Dies setzt die besitzmäßige Aufteilung der Produkte unter die verschiedenen Wirtschaftssubjekte (Distribution) und ihre tatsächliche raum-zeitliche Verteilung über die verschiedenen Produktionsstätten und Haushalte (Transport) voraus. Arbeitsteilige Produktion impliziert also den Prozeß der Verteilung der Produkte, und das bedeutet unter dem Aspekt eines Fließgleichgewichts betrachtet eine weitere Vorratbildung: Gebrauchswerte, die gerade verteilt werden, werden weder produziert noch konsumiert.

Eine bestimmte Menge an Gebrauchswerten muß also als Vorrat in den Poren der Reproduktions- und Zirkulationsprozesse stecken, damit der ganze Prozeß reibungslos ablaufen kann. Verbrauch, Produktion und Transport der Gebrauchswerte sind Prozesse, die parallel zueinander ablaufen: sie finden zur gleichen Zeit statt, erfassen aber verschiedene Zusammenhänge der ökonomischen Sphäre, die - wie Transport und Produktion - auch an verschiedenen Orten lokalisiert sein können. Trotz des simultanen Ablaufs der Prozesse von Produktion, Konsumtion und raumzeitlicher Umverteilung der Gebrauchswerte gilt der

[20] Die gegenwärtig zumindest von größeren Unternehmen praktizierte Reduktion der Lagerbestände auf nahezu Null widerspricht dem nicht: das erforderliche Mindestmaß an Vorräten befindet sich hier quasi auf dem Transportweg (rollender Vorrat). Die zunehmende Gefahr eines 'Verkehrsinfarkts' in dichtbesiedelten Gebieten lockert das System der Zulieferungen 'zur richtigen Zeit' zugunsten eines größeren (festen) Lagerbestands wieder auf.

einfache Satz, daß immer nur das verteilt werden kann, was *vorher* produziert worden ist. Und das Produzieren *setzt*, wie bereits bemerkt, die Existenz von Arbeitern, Rohmaterial und Arbeitsmitteln *voraus*.

Aus dem komplexen Zusammenhang der ökonomischen Reproduktionsprozesse lassen sich nun folgende Phasen der produktiven und konsumtiven Stoffumformung und des Stoffwechsels abstrahieren: Im Produktionsprozeß wird ein gegebener Bestand an Produktionsmitteln verbraucht, während gleichzeitig ein neuer Bestand an Gebrauchswerten produziert wird. Parallel dazu erfolgt die Reproduktion der Arbeitskräfte, wobei ebenfalls Gebrauchswerte (Lebensmittel) konsumiert werden. Sowohl das durch die produktive als auch das durch die unproduktive Konsumtion verursachte Defizit an Gebrauchswerten muß aus dem vorhandenen Bestand der Produkte ausgeglichen werden, und dies erfolgt durch Umverteilungsprozesse. Nach der Verteilung des Bruttoprodukts auf die Industriezweige und die Haushalte ist - wenn auch mit gewissen Modifikationen - die Ausgangslage wiederhergestellt, und es kann erneut produziert werden.

Die Abstraktion, die an dieser Stelle vorgenommen werden soll, besteht in der idealisierenden Annahme, daß (Re-)Produktion und raum-zeitliche Umverteilung der Produkte einander abwechseln. Diese Abstraktion hat eine reale Grundlage, insofern jene Prozesse nämlich tatsächlich aufeinander folgen, allerdings begleitet durch eine Vielzahl parallel ablaufender Prozesse derselben Struktur.

Dieser Idealisierung entsprechend stellen wir uns vor, daß in jedem Industriezweig ein gewisser, für die Periode Δt_1 ausreichender Vorrat an Produktions- und Lebensmitteln vorhanden ist. Dieser Vorrat werde durch die *Ersatzfondsmatrix F* dargestellt. Das Element f_{ij} erfasse die Menge an Gebrauchswerten der Art j, die (als Produktions- oder Lebensmittel) für den Verbrauch im i-ten Industriezweig bzw. zur 'Verköstigung' der in diesem Zweig beschäftigten Arbeiter tatsächlich vorrätig sind.

Soll der Ersatzfond für die gesamte Produktionsperiode Δt_1 ausreichen, so muß er zum Zeitpunkt t_1 mindestens so groß wie der zu erwartende Verbrauch an Produktions- und Lebensmitteln sein:

$$F_1 \geq Z_1 + D_1 \,. \tag{2.66}$$

Dabei sind die Größen Z_1 und D_1 von dem herzustellenden Bruttoprodukt Q_1 als auch von der Produktions- und Lebensweise der betrachteten Gesellschaft abhängig, die nach dem oben Gesagten durch die Matrizen Π , ζ, H, und χ charakterisiert werden. Um dies explizit zu machen, setze man die Gleichungen (2.48), (2.57) und (2.30) in die Ungleichung (2.66) ein:

$$F_1 \geq Q_1\zeta_1 + H_1^{-1}Q_1\Pi_1^{-1}\chi_1 \,. \tag{2.67}$$

Alle in (2.67) eingehenden Größen beziehen sich auf ein und dieselbe Produktionsperiode Δt_1. Dies ist durch den Index "1" kenntlich gemacht worden. Ungleichung (2.67) beschreibt die *Ausgangssituation* der gesamtgesellschaftlichen Produktion für die betrachtete Zeitperiode hinsichtlich der erforderlichen Vorratbildung.

Am Ende der Produktionsperiode Δt_1, das heißt zum Zeitpunkt t_1'', liegt das Produkt Q_1 tatsächlich vor, und F_1 ist um Z_1 und D_1 vermindert worden. Das konkrete Resultat der Produktion wird also weiterhin durch eine Matrix charakterisiert, die wir als R_1 bezeichnen und so definieren:

$$R_1 = F_1 - Z_1 - D_1 + Q_1 \,. \tag{2.68}$$

Im Vergleich zu F_1 zeichnet sich R_1 dadurch aus, daß sich die größeren Zahlen auf der Hauptdiagonalen konzentrieren, während außerhalb der Hauptdiagonalen kleinere Werte zu finden sind. Die Periode 1 kann idealtypisch so lange dauern, wie R_1 noch an keiner Stelle negativ geworden ist.

Soll die folgende Produktionsperiode Δt_2 hinsichtlich der vorhandenen Vorräte eine Ausgangssituation vorfinden, die weitere Produktion ermöglicht, muß der Vorrat hinsichtlich der verbrauchten Produktions- und Lebensmittel wieder aufgestockt werden. Zum Zeitpunkt t_1'' beginnt also - unserer Idealisierung entsprechend - die Verteilung der produzierten Gebrauchswerte, und sie endet zum Zeitpunkt t_2'. Dieser Prozeß beinhaltet die Bereitstellung des Ersatzfonds F_2. Dieser Vorgang kann mathematisch als eine Abbildung der Matrix R_1 auf die Matrix F_2 betrachtet werden, wobei bei einer verlustfreien Umverteilung die Bedingung

$$eF_2 = eR_1 \tag{2.69}$$

erfüllt sein muß: der Bestand am Ende des 1. Produktionsprozesses wird vollständig in den Vorrat für den 2. Produktionsprozeß überführt. In einer warenproduzierenden Gesellschaft wird die Struktur der Verteilung außerdem noch durch wertmäßige Aspekte determiniert.

Soll die Verteilung wenigstens *einfache Reproduktion* ermöglichen, muß sie offenbar gewisse Bedingungen erfüllen, die gebrauchswertmäßig-stofflicher Art sind. Gesetzt, es gilt (2.61) oder (2.62), d.h. die Bedingung für einfache bzw. erweiterte Reproduktion! Für die Produktion in Δt_2 ist ein gewisser Vorrat F_2 erforderlich. Die Größe und Struktur dieses Ersatzfonds ergibt sich nicht automatisch als Fortschreibung der Matrix F_1 der vorangegangenen Periode, auch wenn die Bruttoprodukte identisch gesetzt werden können (Q_1=Q_2). Analog zur Ungleichung (2.67) erhält man die notwendige Größe von F_2 aus dem Bruttoprodukt, dem spezifischen Produktionsmittelverbrauch, der Arbeitszeitverteilung, der Produktivität sowie der Struktur der Durchschnittsarbeitskräfte, so, wie diese Größen in der Periode Δt_2 vorliegen. Alle Veränderungen der Produktivität und der Effektivität (genauer gesagt: des Produktionsmittelverbrauchs) sowie der Lebensweise der Arbeitsnehmer wirken sich auf die Größe und Struktur des benötigten Vorrats (Ersatzfonds) aus. Dies gilt offenbar auch dann, wenn lediglich einfache Reproduktion stattfindet. Die Bedingung für die stofflichen Voraussetzungen der Produktion in der Periode 2 bei gegebenen Produktionsmethoden, Lebensmittelverbrauch und anvisiertem Bruttoprodukt Q_2 ist:

$$F_2 \geq Q_2\zeta_2 + H_2^{-1}Q_2\Pi_2^{-1}\chi_2 \ . \qquad (2.70)$$

Diese Ungleichung stellt eine minimale Bedingung dar, die erfüllt sein muß, wenn die Reproduktion gesichert sein soll.
Geht man umgekehrt von der ökonomischen Priorität der Verteilung, deren Regeln in Gänze erst noch dargestellt werden müssen, vor den durch (2.70) formulierten Notwendigkeiten aus, so ist die Ersatzfondsmatrix F_2 eine der unendlichen Möglichkeiten, die (2.69) zuläßt. Die Gleichungen (2.69) und (2.70) können als der Rahmen angesehen werden, in dem sich die verschiedenen Parameter der Produktion in der neuen Periode (2) bewegen müssen.

2.11. ÖKONOMISCHE LEBENSFÄHIGKEIT UND DAS SURPLUSPRODUKT

Vom Bruttoprodukt der Produktionsperiode Δt_1 muß im wesentlichen der Verbrauch an Produktions- und Lebensmitteln in der folgenden Periode Δt_2 gedeckt werden. Natürlich ist es denkbar, daß ein Teil des Vorrats, der in der ersten Periode zur Verfügung stand, auch noch dazu beiträgt, die Produktion in der

folgenden Periode zu ermöglichen. Das betrifft vor allem diejenigen Produktionsmittel, die nur zum Teil verschlissen worden sind und deshalb für weitere Produktion verwendet werden können. Um die Möglichkeiten zur Fortsetzung der Produktion abzuschätzen, genügt es also nicht, allein das Bruttoprodukt Q_1 ins Verhältnis zum Verbrauch in der kommenden Periode zu setzen. Entscheidend ist das konkrete Resultat der Produktion, das durch R_1 bzw. das von R_1 abhängige (siehe Gleichung 2.69), außerdem aber noch durch die Verteilung determinierte F_2 beschrieben wird.
Im allgemeinen kann (2.70) als notwendige Voraussetzung für die reibungslose Produktion während der Periode Δt_2 angesehen werden. Dabei ist allerdings noch explizit der Zusammenhang mit dem konkreten Resultat der Phase Δt_1 zu beachten. Wir multiplizieren (2.70) von links mit dem Spaltensummenvektor e, berücksichtigen (2.69), vereinfachen die einzelnen Terme wieder und erhalten den einfachen Ausdruck:

$$eR_1 \geq z_2 + d_2 \ . \qquad (2.71)$$

Relation (2.71) muß gewährleistet sein, damit das ökonomische System in der folgenden Periode funktioniert. Der Verbrauch in Periode (2) ist durch die Mittel beschränkt, die aus der vorangegangenen Periode übernommen werden - seien sie nun dort oder in noch weiter zurückliegenden Produktionsperioden erzeugt worden. In diesem Sinne stellt (2.71) eine notwendige Bedingung für das Überleben eines ökonomischen Systems dar. Aber diese Bedingung ist noch nicht hinreichend. Das zeigt eine einfache Grenzbetrachtung: Jeder wird sicherlich einräumen müssen, daß ein Generalstreik - sagen wir in der Periode 2 - auf Dauer eine Volkswirtschaft zugrunde richtet. In diesem Fall wäre

$$q_2 = 0 \quad \cap \quad z_2 = 0 \ . \qquad (2.72)$$

Die Gleichung (2.71) lautet unter diesen Bedingungen

$$eR_1 \geq d_2 \ . \qquad (2.73)$$

(2.73) kann leicht erfüllt werden, wenn die Streikenden nicht mehr konsumieren als die Arbeitenden in der Periode Δt_1, wenn also

$$d_2 \leq d_1 \qquad (2.74)$$

ist. (Die Streikenden zehren von den Vorräten, die sie vor dem Streik produziert und erworben haben.)
Wir ziehen daraus die Schlußfolgerung, daß bei Erfüllung der Gleichung (2.71) die ökonomische Lebensfähigkeit einer Volkswirtschaft nur in dem Sinne garantiert ist, daß die stofflichen Voraussetzungen weiterer Produktion gegeben sind. Ob diese aber tatsächlich genutzt werden, ist eine andere Frage. Insofern stellt (2.71) nur eine notwendige Bedingung für das Überleben eines ökonomischen Verbandes dar.
Gleichung (2.71) macht keinerlei Voraussetzungen hinsichtlich der ökonomischen Parameter des Systems in der Periode Δt_2. Insbesondere wird weder erweiterte noch einfache Reproduktion unterstellt. Wir wollen hier kurz die Frage erörtern, ob, und wenn ja, unter welchen Bedingungen ein ökonomisches System, dessen Bruttoprodukt kleiner wird oder gleich bleibt, lebensfähig ist, wenn es stets die gleiche konsumtive Versorgungsleistung zu erbringen hat. Es sei

$$q_1 \geq q_2 \quad \cap \quad q_2 \neq q_1 \tag{2.75}$$

und

$$D_2 = D_1 = D = \text{konst.} \tag{2.76}$$

Wir notieren die Bedingung (2.70) in der Form

$$F_2 \geq Q_2 \zeta_2 + D \tag{2.77}$$

multiplizieren mit e und setzen (2.69) und (2.68) ein. Nach Vereinfachung ergibt sich:

$$eF_1 - z_1 - d + q_1 \geq q_2 \zeta_2 + d\ . \tag{2.78}$$

Nimmt man weiterhin vereinfachend an, daß der produktive und unproduktive Konsum in der ersten Periode durch vorhandene Vorräte genau gedeckt wird, also

$$eF_1 - z_1 - d = 0 \tag{2.79}$$

ist, dann muß das Bruttoprodukt der Periode 1 den Produktionsmittel- und den Lebensmittelverbrauch in der Periode (2) decken:

$$q_1 \geq q_2 \zeta_2 + d \ . \tag{2.80}$$

Wegen (2.75) ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$q_2 - d \geq q_2 \zeta_2 \tag{2.81}$$

also der Produktionsmittelverbrauch trotz sinkendem Bruttoprodukt noch abgedeckt werden kann. Dies erfordert unter Umstanden eine solche Verbesserung der Produktionsmethoden, daß - bei gegebenem q - der rechte Term in (2.81) so klein wird, daß die Ungleichung gerade noch erfüllt werden kann, im allgemeinen also eine Entwicklung, die durch sinkende Produktionsmittel-Verbrauchszahlen charakterisiert ist:

$$\zeta_1 \geq \zeta_2 \quad \cap \quad \zeta_2 \neq \zeta_1 \ . \tag{2.82}$$

Dies kann man als Verbesserung der technologischen Effizienz (Effektivität) einer Volkswirtschaft bezeichnen. Wir ziehen die Schlußfolgerung: Gleichbleibender Konsum ist mit negativem Wachstum des Bruttoprodukts nur bei hinreichender Effektivierung des Produktionsmittelverbrauchs vereinbar.

Umfaßt die Verbesserung der Produktionsmethoden auch die Steigerung der Produktivkraft im Sinne von $\Pi_2 \geq \Pi_1$, so kann dasselbe Bruttoprodukt auch mit weniger Arbeitskräften hergestellt werden. Der Pro-Kopf-Verbrauch der Arbeiter kann steigen, trotzdem - oder besser gesagt: weil $d_1 = d_2$ gilt. Negatives Wachstum ist demnach unter gewissen Bedingungen sogar mit steigendem Lebensstandard (im Sinne steigenden Pro-Kopf-Verbrauchs) der Beschäftigten denkbar.

Aus diesen Überlegungen ziehe ich die Schlußfolgerung, daß es nicht zweckmäßig ist, den Begriff der "ökonomischen Lebensfähigkeit" an die Bedingung zu binden, daß (mindestens) *einfache Reproduktion* gewährleistet sein muß. Ein ökonomisches System kann unter Umständen auch bei negativem Wachstum überleben.

Die obige Diskussion könnte nahelegen, eine ausreichende Versorgung mit Lebensmitteln als entscheidendes Kriterium für die Charakterisierung lebensfähiger ökonomischer Systeme anzunehmen. Wie wir soeben gesehen haben, ist selbst eine schrumpfende Volkswirtschaft mit wachsendem oder gleichbleibendem Lebensstandard möglich, also 'überlebensfähig'. Im Grenzfall einer automatischen Produktion wird es zwar nicht genügen, nur die wenigen Arbeiter, die zur Überwachung notwendig sind, mit Lebensmitteln zu versorgen. Aber dies scheint weniger ein ökonomisches als ein politisches Problem zu sein. - M.a.W.: Die Tendenz zur Automatisierung kann damit verbunden werden, einer abnehmenden Zahl von Beschäftigten ein wachsendes Realeinkommen zu sichern. Bei Realisierung dieser Möglichkeit wächst zwar das politische Problem der Ernährung einer zunehmenden, nicht-arbeitenden Bevölkerung, der Begriff der Lebensfähigkeit des ökonomischen Systems wäre jedoch erfüllt.

Abstrahiert von dem Druck, der von den beschäftigungslosen Massen in einer zunehmend industrialisierten Welt ausgeht, kann man feststellen, daß ein ökonomisches System nur dann überleben wird, wenn es wenistens seine Beschäftigten mit ausreichenden Mengen *Food* versorgt. Da die Anzahl der Beschäftigten bei Automatisierung fällt, sind immer weniger und weniger Lebensmittel erforderlich, um diese Minimalbedingung für das Überleben einer Volkswirtschaft zu erfüllen. M.a.W., auch eine konstante Lebensmittelversorgung ist kein geeignetes Kriterium für Überlebensfähigkeit.

Weder das Bruttoprodukt noch der Konsum oder der Produktionsmittelverbrauch für sich genommen sind demnach geeignete Größen, um den Begriff ökonomischer Lebensfähigkeit zu definieren. Es gibt mannigfache Möglichkeiten für die Fortentwicklung einer Volkswirtschaft in der jeweils folgenden Produktionsperiode. Das macht Gleichung (2.70) deutlich, die nur sehr schwach, nämlich über Gleichung (2.69), an den Output der vorangegangenen Periode gekoppelt ist. Auf der rechten Seite der Ungleichung stehen 5 verschiedene Matrizen, von denen allein 3 Matrizen n^2 verschiedene Elemente haben - die alle in weiten Grenzen unterschiedlich variieren können, ohne mit den Rahmenbedingungen (2.70) und (2.69) zu kollidieren. Die dabei konstruierbaren Entwicklungsvarianten sind nur schwer zu überblicken. Dementsprechend kann man kaum abschätzen, welche Möglichkeiten mit unserer Vorstellung von ökonomischer Überlebensfähigkeit einer Volkswirtsachaft zu vereinbaren wären.

Den bisherigen Überlegungen lagen 4 Schnitte an aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_1', t_1'', t_2', t_2'' zugrunde, durch die zwei Produktionsperioden und eine Zirkulationsperiode unterschieden worden sind. Beim Vergleich zweier Produktionsperioden müssen realistischerweise unterschiedliche, die Produktions- und Lebensweise charakterisierende Parameter unterstellt werden. Anders verhält es sich, wenn nur eine Periode betrachtet wird. Da die entsprechenden Matrizen Π , ζ , χ per definitionem für eine Periode konstant sind, können keine unterschiedlichen Entwicklungslinien auftreten. Um diese analytische Wahrheit der Wirklichkeit anzunähern, sollen unterschiedliche Produktionsperioden so lang oder so kurz gewählt werden, daß man eine annähernde Konstanz der Produktions- und Lebensweise annehmen kann. Dies bezeichne ich hier als *quasi-differentielle Betrachtungsweise*.

Unter der Bedingung einer konstanten Produktions- und Lebensweise läßt sich der Begriff der ökonomischen Lebensfähigkeit negativ so formulieren: Ein System, das ständig mehr verbraucht als es hervorbringt, ist sicher nicht auf Dauer ökonomisch überlebensfähig. Positiv formuliert bedeutet dies, daß der Überschuß des Bruttoprodukts über den Gesamtverbrauch größer oder gleich Null sein muß.

Auf der Produktseite steht unter gebrauchswertmäßig-stofflichem Gesichtspunkt der Bruttoproduktvektor q; auf der Verbrauchsseite stehen die Vektoren z und d. Zur Unterscheidung des 'naturalen' Überschusses von anderen 'Überschüssen', die wir in der AQT noch zu betrachten haben, wird hier der Begriff des Surplus eingeführt anhand der Definition

$$s = q - z - d \ . \tag{2.83}$$

Mit dieser Definition läßt sich der Begriff der ökonomischen Lebensfähigkeit eines Systems zwanglos durch die Ungleichung

$$s \geq 0 \tag{2.84}$$

festlegen.

Durch die Gleichung (2.84) wird keine notwendige, sondern eine hinreichende Bedingung für die ökonomische Lebensfähigkeit einer im betrachteten Zeitraum bevölkerungsmäßig nahezu statischen Gesellschaft zum Ausdruck gebracht. Es ist nämlich durchaus möglich, daß in einem hinreichend kleinen Zeitintervall manche Elemente von s negativ werden. Der zeitweise zu hohe Verbrauch wird durch Vorräte ermöglicht, die zu anderen Zeiten wieder aufgefüllt werden. Dabei kann es sich um ein voll funktionsfähiges ökonomisches System handeln, aber (2.84) wäre zu gewissen Zeiten nicht erfüllt.

Ist umgekehrt Gleichung (2.84) zu allen Zeiten und bei allen Schnittbreiten Δt, durch die wir realistischerweise einen Reproduktionsprozeß analysieren können, erfüllt, dann ist für die jeweils folgende Periode stets genug an Vorräten zur Fortsetzung der Produktion vorhanden, wenn die Produktion überhaupt einmal in Gang gekommen ist. Insofern stellt (2.84) eine hinreichende Bedingung für ökonomische Lebensfähigkeit einer bevölkerungsmäßig nahezu statischen Gesellschaft dar.[21]
Versieht man die Größen in (2.83) und (2.84) mit dem Index '2' und berücksichtigt dazu noch (2.50) und (2.76), so folgt daraus die Gleichung (2.81). Ökonomische Lebensfähigkeit im Sinne von (2.84) und der dabei unterstellten quasi-differentiellen Betrachtungsweise garantiert also auch die ökonomische Lebensfähigkeit in dem Spezialfall negativen Wachstums, den wir oben analysiert haben.
Unterteilt man den Reproduktionsprozeß wie oben wieder in zwei Produktionsperioden (1) und (2), lassen sich die Produktionsmöglichkeiten unter der Voraussetzung, daß für beide (2.84) gilt, folgendermaßen abschätzen:

$$eF_2 = eR_1 = eF_1 + s_1 \ . \qquad (2.85)$$

Hierbei ist (2.69), (2.68) und - für die Periode Δt_1 - (2.83) benutzt worden. Nach (2.71) muß der Verbrauch in der Periode Δt_2 genau in diesem Rahmen erfolgen:

$$eF_1 + s_1 \geq z_2 + d_2 \ . \qquad (2.86)$$

Demnach sind die materialen Voraussetzungen für die Produktion in Periode (2) besser als die in Periode (1), da nicht nur die gleiche Menge an Vorräten eF_1 vorhanden ist, sondern außerdem noch das Surplusprodukt s_1. Sowohl die Produktions- als auch die Konsummenge sind auf die Summe dieser beiden Größen beschränkt. Da $s_2 \geq 0$ sein soll, können wir die rechte Seite von (2.86) noch etwas umformen:

$$eF_1 + s_1 \geq q_2 - s_2 \ . \qquad (2.87)$$

[21] Klarerweise erfordert eine wachsende Bevölkerung bei gleichbleibenden Produktionsmethoden auch ein wachsendes Bruttoprodukt. Teilt man einen größeren Zeitraum in kleinere Intervalle auf, für die nur geringfügige Wachstumsänderungen zu beobachten sind, und gilt (2.84) in jedem dieser Intervalle auch dann, wenn man von der jeweiligen maximalen Bevölkerungszahl ausgeht, so ist die betrachtete Gesellschaft sicher für den gesamten Zeitraum 'ökonomisch lebensfähig'.

Man sieht, daß eine Steigerung des Bruttoprodukts in Δt_2 über das durch den Ersatzfonds

$$eF_2 = eF_1 + s_1 \ . \tag{2.88}$$

gesetzte Maß hinaus nur dann und insoweit erfolgen kann, wie das während der Periode (2) erzeugte Surplusprodukt anwächst. Bei $s_2 = 0$ ist das Bruttoprodukt gleich dem Verbrauch an Produktions- und Lebensmitteln, und dieser ist durch eF_2 limitiert.

Es scheint, daß der mit Hilfe des Surplusprodukts definierte Begriff der ökonomischen Lebensfähigkeit sinnvolle ökonomische Implikate hat; er erfaßt eine Größe, die Bruttoprodukt, Konsum und produktiven Konsum ins Verhältnis setzt. Dabei scheint das Maß an Willkür, das in jede Definition eingeht, nicht sehr groß zu sein.

Nochmals soll betont werden, daß sich u.U. *ökonomische* Lebensfähigkeit in dem hier definierten Sinne als nicht ausreichend für *politische* Überlebensfähigkeit eines ökonomischen Systems erweist. Auch in ökonomischer Hinsicht handelt es sich um ein nicht sehr scharfes Schwert bei der Beurteilung der Leistungsfähigkeit unterschiedlicher Ökonomien. Aber es ist immerhin scharf genug, um die Grenze für die Existenz eines eindeutig bestimmbaren Wertevektors zu sichern. Dieser theoretische Zweck jener Begriffsbildung kann aber erst im nächsten Kapitel voll verständlich werden.