about the contact theorem Collette Siarry

Okitonyumbe Y.F., Joseph and Ulungu, Berthold E.-L.

Institut Supérieur Pédagogique de Mbanza-Ngungu, Institut Supérieur des Techniques Appliquées de Kinshasa

September 2013

Sur le théorème de contacte de Collette & Siarry

Joseph OKITONYUMBE Y. F.
Département de Mathématiques & Informatique, ISP/Mbanza-Ngungu République Démocratique du Congo
E-mail :josephfak@ispmbanza-ngungu.com
Berthold ULUNGU E.-L.
ISTA/Kinshasa République Démocratique du Congo
E-mail : Ulungu.berthold@gmail.com

Résumé : *Les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectif sont confrontées à la difficulté liée à la caractérisation des solutions efficaces. Le présent article essai d'apporter une contribution à cette préoccupation en revisitant le théorème de contact énoncé sans démonstration par Yann Collette et Patrick Siarry depuis 2002.*

Mots clés : Ensemble des solutions efficaces, Espace de décisions, Espace des objectifs, Optimisation combinatoire multi-objectif.

Abstract : *Methods for solving multi-objective combinatorial optimization problems are classified in two categories indeed exact and metaheuristics methods. The latter class is more competitive than the first, for solving larger problems, But the implementation of these exacts and metaheuristics methods presents two inherent difficulties namely the characterization of efficient solutions and acceptance rules for neighborhoods system. This article tackles the first problem.*

KEY WORDS : Decision space, Set of efficient solution, Objective space, Multi-objective combinatorial optimization.

1 . Introduction

Un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif, (notation anglo-saxonne : **M**ulti **O**bjective **C**ombinatorial **O**ptimization, en sigle MOCO) est un problème décisionnel qui consiste à optimiser conjointement un ensemble de m fonctions objectif linéaires ($m \geq 2$), souvent conflictuelles et soumises à un ensemble de contraintes linéaires, le tout en présence des variables binaires.

Résoudre un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif c'est trouver tout ou une partie de l'ensemble de solutions efficaces noté $E(P)$ que nous pouvons définir soit en compréhension ou soit en extension.

Définir $E(P)$ en compréhension c'est caractériser toutes les solutions efficaces du problème, c'est-à-dire, donner une propriété commune définissant tous les éléments de $E(P)$, cela présente beaucoup de difficultés vu que le domaine d'admissibilité D n'est pas convexe. Dans ce cas, on sait ($Ulungu\ et\ Teghem,$ 1999) que $E(P)$ se décompose en solutions efficaces supportées $SE(P)$ et solutions efficaces non supportées $NSE(P)$. Ainsi il n'est pas aisé de trouver une caractérisation générale de toutes les solutions efficaces.

Définir $E(P)$ en extension implique l'énumération exhaustive de toutes les solutions efficaces. Malheureusement, cet ensemble peut être de grande cardinalité, parfois

$$E(P) \cong D.$$

A ce jour, les théorèmes caractérisant les solutions efficaces utilisent tous une fonction scalarisante ainsi, seules les solutions efficaces dites supportées car situées sur l'enveloppe convexe de D sont trouvées.

Nous proposons, à travers cet article, une correction du théorème de contact énoncé sans démonstration par Collette & Siarry depuis 2002 et que nous démontrons formellement pour la première fois.

Cet article est organisé de la manière suivante : après cette introduction, la section 2 modélise le problème MOCO, la section 3 donne notre contribution et ses outils conceptuels; finalement, une conclusion et les perspectives de recherches futures terminent l'article.

2. Modélisation et formulation mathématique du problème (Steuer R.E., 1986), (Ulungu E.-L. & Al., 1994, 1996)

Définition 1

Soit un ensemble fini de variables de décision $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ainsi que les domaines D_i associés à chaque variable $x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$. L'**espace de décision** est le produit cartésien de tous les domaines : $S = D_1 \text{x} D_2 \text{x} \dots \text{x} D_n$. Un élément $a \in$ S est appelé une **solution**.

Remarque 1

En optimisation combinatoire, par définition, $D_i = \{0,1\}$ et par conséquent $S = \{O, 1\}^n$.

Définition 2

Soit S un espace de décision et un ensemble de fonctions de contrainte

$$C_l : S \to IR^+,\ l = 1, 2, \dots, k.$$

Un espace de décision réalisable ou admissible noté D est défini par :

$$D = \{a \epsilon S \text{ tel que } C_l(a) op\ 0, \forall l\}, \quad op \ \epsilon\ \{=, \geq, \leq\}.$$

Chaque élément de D est appelé **solution réalisable ou solution admissible,** D⊂S.

Définition 3

Soient un espace de décisions réalisables D et un ensemble de fonctions objectif f_j; $j = 1, \ldots, m$; $m > 1$. **Le domaine des valeurs d'une fonction objectif** j est défini par :

$$\Omega_j = \{f_j(a), a \in D\}.$$

Un **espace des objectifs** est noté par O et défini par le produit cartésien :

$$O = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_m.$$

Une solution dans l'espace des objectifs est le vecteur image par F noté :

$$z\ O \text{ avec } z = F(a) = \left(f_j(a)\right),\ j = 1, \ldots, m \text{ et } a \in D.$$

Définition 4

Soient deux solutions z_1 et z_2 définies dans l'espace des objectifs O, le **principe de dominance** représenté par l'opérateur ≤ (respectivement≥) est tel que $z_1 \leq z_2$ (respectivement $z_1 \geq z_2$), qui signifie que la solution z_1 domine la solution z_2 si et seulement si, dans l'espace de décisions réalisables, il existe a_1 et a_2, solutions associées à z_1 et z_2 respectivement, satisfaisant les deux conditions suivantes pour un problème de minimisation (respectivement maximisation) :

(1°) $f_j(a_1) \leq f_j(a_2)$ $\left(\text{respectivement } f_j(a_1) \geq f_j(a_2)\right), \forall j = 1, 2, \ldots, m.$

(2°) $\exists\ j'$ tel que $f_{j'}(a_1) < f_{j'}(a_2)$ $\left(\text{respectivement } f_{j'}(a_1) > f_{j'}(a_2)\right)$, $1 \leq j' \leq m$.

C'est-à-dire que la solution a_1 est au moins aussi bonne que a_2 sur tous les objectifs et, a_1 est meilleure que a_2 sur au moins un objectif j'. Remarquons que l'opérateur de dominance est non symétrique.

Définition 5

Soit un espace des objectifs O, un **ensemble des solutions efficaces** d'un problème P est un ensemble dénombrable de solutions non dominées défini par :

$E(P) = \{\{z_1, z_2, \dots, z_r\ \} \subset O$ tel que $z_s \nleq z_t$ et $z_t \nleq z_s$,

$\forall\ s, t = 1, 2, \dots, r;\ s \neq t\}$.

Cette définition s'interprète de la manière suivante : *« une solution z est efficace pour un problème P s'il n'existe pas de solution réalisable z' qui améliore la valeur d'un objectif sans détériorer au moins celle d'un autre objectif ».*

L'ensemble des solutions efficaces est aussi connu sous le nom de l'**ensemble Pareto optimal** ou **ensemble des solutions non dominées** ou **non inférieures.**

A présent, nous pouvons donner la formulation mathématique du problème étudié.

Définition 6

Un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif, abréviation anglo-saxonne (MOCO) pour « **M**ulti-**O**bjective **C**ombinatorial **O**ptimization », est défini par : $a \in S$; $a = (a_1,\ a_2,\ \dots, a_n)^T$, l'espace des objectifs O, l'ensemble de m fonctions objectif f_j et k fonctions de contraintes C_l et a la forme :

$$MOCO \equiv \begin{cases} \text{" min" } f_j(a), & j = 1, 2, \dots, m; \\ C_l\,(a)\text{op } 0, & l = 1, 2, \dots, k \\ a \in S & \end{cases}$$

où $op \in \{=, \geq, \leq\}$ selon le type de contraintes.

Un problème MOCO est résolu par l'obtention de l'ensemble des solutions efficaces $E(P) \subset O$.

3. Lecture épistémologique du théorème de contact

Dans cette section, nous faisons une lecture épistémologique du théorème dit de contact (Collette & Siarry, 2002 *Page* 32), théorème élogieux que nous démontrons formellement pour la première fois, étant donné que les auteurs le considérant confusément comme une définition, s'en sont servis de son aspect pratique et intuitif.

Pour notre part, nous en faisons un théorème que nous allons démontrer. A ce propos, Signalons modestement que les auteurs du théorème semblent entretenir une confusion entre l'espace de décisions réalisables d'un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif et son image directe qui est l'espace des objectifs.

En effet, tel que défini, le cône négatif, que nous appelons orthant discret dans $\mathbb{Z}^m$, base du théorème de contact est un sous ensemble de l'espace de décisions réalisables mais curieusement, lors de l'illustration, il est représenté dans l'espace des objectifs. Cette confusion amène les auteurs à énoncer leur théorème dans l'espace de décision au lieu de l'espace des objectifs.

Devant la difficulté d'établir le théorème, ils ont préféré le baptiser au nom d'une définition peut être pour éviter sa démonstration. Nous corrigeons d'abord le théorème en l'énonçant dans l'espace des objectifs pour qu'il soit démontrable.

Par ailleurs, nous faisons remarquer que les définitions et théorème qui suivent sont présentés dans un espace de dimension $m = 2$ mais qu'ils peuvent être aisément étendus pour $m > 2$.

Ainsi, relativement à un problème dont le sens d'optimisation est la minimisation (maximisation), nous décidons d'introduire d'abord la notion d'orthant négatif (positif) discret avant la démonstration proprement dite du théorème précité.

Définition 6

Un **orthant négatif (positif) discret** [$Okitonyumbe$ 2012], est défini dans $\mathbb{Z}^m$de la manière suivante :

$$C^-(C^+) = \{z \in \mathbb{Z}^m / z = F(x) \leq 0 \ (respectivement \ \geq 0), x \in D\}.$$

Théorème de contact

Soit un vecteur $y \in O$, si y est une solution efficace pour un problème d'optimisation combinatoire multi-objectif alors,

$$(C^- + \{y\}) \cap O = \{y\}.$$

Preuve

Nous devons montrer que :

$C^- + \{y\} \cap O \neq \emptyset$ et que si $z \in E(P) \ et \ z \in C^- + \{y\} \cap O$ alors $z = y$.

D'une part, $C^- + \{y\} \cap O = \{x : x \in C^- + \{y\} \ et \ x \in O\}$

$$= \{x : \exists \ t \in C^-, x = t + y \ et \ x \in O\}.$$

Or $0 \in C^- \ et \ 0 + y = y$ avec $y \in E(P) \subset O$ donc $(y \in C^- + \{y\}) \cap O$,

par conséquent : $C^- + \{y\} \cap O \neq \emptyset$.

D'autre part, supposons par l'absurde qu'il existe

$$z \in E(P) \text{ et } z \neq y \text{ avec } z \in C^- + \{y\} \cap O.$$

Dire que $z \in C^- + \{y\} \cap O$ signifie qu'il existe $t \in C^-$ tel que $z = t + y \; et \; z \in O$.

D'où, comme $t \leq 0$, par définition de C^-, de deux choses l'une : soit $z = y$ pour $t = 0$, soit $z < y$ lorsque $t < 0$. Dans les deux cas, il y a contradiction.

- Primo, conclure que $z = y$ est absurde vu l'hypothèse que $z \neq y$.
- Secundo, conclure que $z < y$ est aussi absurde car y est une solution efficace par hypothèse c'est-à-dire non dominée.

Finalement, on a bien que : $(C^- + \{y\}) \cap O = \{y\}$. ■

Nous affirmons avec Collette & Siarry que l'utilisation de ce théorème est illustrée dans la figure ci-dessous lorsque $m = 2$.

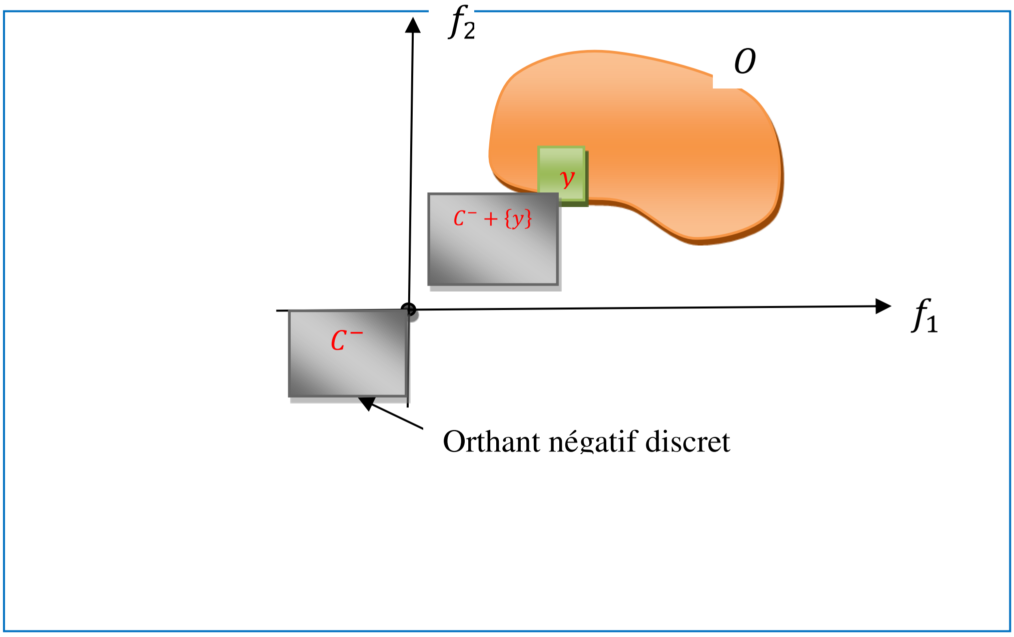

Fig. 1 : *Illustration du théorème de contact pour un problème bi-objectif à minimum*

4. Conclusion

Nous avons ainsi corrigé et démontré le théorème de contact de Collette & Siarry, théorème tant utilisé en optimisation combinatoire multi-objectif mais qui jusque-là n'avait pour base que l'intuition et le bon sens. Cet article contribue à donner à l'optimisation combinatoire multi-objectif ses assises théoriques au lieu de se contenter des aspects pratiques, intuitifs et du bon sens. Ce théorème que nous avons corrigé et démontré formellement pour la première fois nous ouvre une voie de recherche orientée vers la conception d'un nouveau théorème plus globalisant et d'une nouvelle méthode exacte pouvant permettre de générer toutes les solutions efficaces supportées et non supportées des problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectif.

5. Bibliographie

Okitonyumbe Y.F., *Optimisation combinatoire multi-objectif : méthodes exactes et métaheuristiques*, Mémoire de DEA, Mathématiques Appliquées, Université Pédagogique Nationale, R.D. CONGO, Septembre 2012.

Steuer R.E. Multiple criteria optimization: theory computation and application. *Krieger Pub Co*, 1986.

Ulungu E.-L., Teghem J., Fortemps Ph. and Tuyttens D., MOSA Method : a tool for solving multiobjective combinatorial optimization problems. *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, 1999, 8, pp 221-236.

Ulungu E.-L., *Optimisation Combinatoire Multicritère : détermination de l'ensemble des solutions efficaces et méthodes interactives,* Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, octobre 1993.

Ulungu B. and Teghem J., Multiobjective Combinatorial Optimization Problem : A survey. *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 3, 1994, pp 33-104.

Yann Collette et Patrick Siarry, Optimisation multi-objectif, *Eyrolles*, Paris, 2002.