



Munich Personal RePEc Archive

Solving multiobjectif assignment problem and multiobjectif knapsack problem by dominance preferential mark method

Okitonyumbe Y.F., Joseph and Ulungu, Berthold E.-L.

Institut Supérieur Pédagogique de Mbanza-Ngungu, Institut
Supérieur des Techniques Appliquées de Kinshasa

December 2014

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/66125/>
MPRA Paper No. 66125, posted 15 Aug 2015 22:44 UTC

Résolution des problèmes multi-objectif d'affectation et de sac-a-dos par la méthode du repère préférentiel de dominance

Joseph OKITONYUMBE Y. F.

Département de Mathématiques & Informatique, ISP/Mbanza-Ngungu République Démocratique du Congo

E-mail : josephfak@ispmbanza-ngungu.com

Berthold ULUNGU E.-L.

ISTA/Kinshasa République Démocratique du Congo

E-mail : Ulungu.berthold@gmail.com

Résumé : *Les méthodes de résolution des problèmes classiques d'optimisation combinatoire multi-objectif présentent d'énormes difficultés pour leur adaptation dans le contexte multi-objectif. Dans l'une de nos publications antérieures, nous avons conçu une nouvelle méthode exacte d'optimisation combinatoire multi-objectif appelée méthode du repère préférentiel de dominance basée sur une nouvelle caractérisation des solutions efficaces des problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectif que nous avons énoncé et démontré. Dans le but de rendre notre méthode populaire et familière, nous proposons à travers cet article, son application à la résolution deux problèmes MOCO à savoir le problème multi-objectif d'affectation et celui de sac-à-dos.*

Mots clés : Méthode du repère préférentiel de dominance, Problème multi-objectif d'affectation, Problème multi-objectif de sac-à-dos,

Abstract: Methods for solving classical combinatorial optimization problems have enormous difficulties in their adaptation to multi-objective context. In one of our previous publications, we have designed a new exact method multiobjective combinatorial optimization method called dominance reference mark method based on a new characterization efficient solutions for multiobjective combinatorial optimization problems we stated and demonstrated. In order to make our popular and familiar method we propose through this article, its application to solving two MOCO problems namely multiobjective assignment problem and multiobjective knapsack problem

Keywords : Dominance reference mark method, multiobjective assignment problem, multiobjective knapsack Problem,

1. Introduction

De neuf problèmes classiques d'optimisation combinatoire figurent les problèmes d'affectation et celui de sac-à dos. Dans le cas mono-objectif, on

sait que ce problème d'affectation appartient à la classe P des problèmes, et est un des plus faciles de l'optimisation combinatoire. En effet, il n'est pas restrictif de résoudre sa relaxation linéaire puisque ce problème vérifie la propriété de totale uni-modularité. En revanche la prise en compte de plusieurs objectifs dans ce problème simple et la présence des variables discrètes, génèrent une nouvelle difficulté surprenante. Son appréhension est fondamentale pour la bonne compréhension de ce domaine de recherche (bien que certains auteurs semblent l'ignorer). Cette difficulté reste d'application pour le problème multi-objectif de sac-à-dos. A travers cet article, nous rendons aisé la résolution des problèmes multi-objectif d'affectation et de sac-à-dos par la méthode du repère préférentiel de dominance.

2. Méthode du repère préférentiel de dominance : Méthode (MRPD) (Okitonyumbe Y.F., 2012 & 2013)

```

Input:
    D : Ensemble de solutions admissibles du problème P
    O = F(D) = (fi(a))i=1,...,m, a ∈ D.
Output: E(P) : Ensemble de solutions efficaces du problème P.
Début
E(P) ← ∅
Représenter graphiquement O
Tant que O ≠ ∅ faire
    Choisir z dans O
    Tracer le repère préférentiel de dominance de z
    Pour tout z' dans O \ {z} faire
        Si z' est situé dans la zone des solutions dominantes du repère
            préférentiel de dominance de z alors
                E(P) ← E(P) ∪ {z'}
                O ← O \ {z'}
        Fin si
        Si z' est situé dans la zone des solutions dominées du repère
            préférentiel de dominance de z alors
                O ← O \ {z'}
        Fin si
        Si la zone des solutions dominantes du repère préférentiel de dominance
            de z est vide alors
                E(P) ← E(P) ∪ {z'}
                O ← O \ {z'}
        Fin si
    Fin pour tout
    SI z' est situé dans une zone d'indifférence du repère préférentiel de dominance de z
        alors
            z ← z'
            E(P) ← E(P) ∪ {z'}
            O ← O \ {z'}
        Fin si
Fin tant que
Choisir z dans E(P)
Tracer le repère préférentiel de dominance de z
Pour tout z' dans E(P) \ {z} faire
    Si z' est situé dans la zone des solutions dominantes du repère
        préférentiel de dominance de z alors
            E(P) ← E(P) \ {z'}
    Fin si
    Si z' est situé dans la zone des solutions dominées du repère
        préférentiel de dominance de z alors
            E(P) ← E(P) \ {z'}
    Fin si
Fin pour tout
Afficher E(P)
Fin

```

3. **problème multi-objectif d'affectation** (Teghem, J., 2012 ; Ulungu, E.-L., 1993)

Le problème multi-objectif d'affectation consiste à affecter n personnes à n tâches, de manière optimale. Si nous désignons par $i = 1, \dots, n$ les personnes et par $j = 1, \dots, n$ les tâches, c^k_{ij} le coefficient d'affectation de la personne i à la tâche j , du $k^{i\text{eme}}$ objectif. Ces valeurs peuvent être un coût d'affectation de i à j ; une durée d'affectation; un indice de préférence exprimée par une personne i , ou un facteur de fiabilité, la formulation

Mathématique du problème s'écrit :

$$(P): \begin{cases} \text{"min"} F(X) = (f_k(X)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c^k_{ij} x_{ij} & k = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & j = 1, \dots, n & (1) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, n & (2) \\ x_{ij} = (0,1) & i, j = 1, \dots, n & (3) \end{cases}$$

$$\text{où } x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ est affecté à } j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les autres contraintes indiquent qu'une tâche est effectuée par une et une seule personne et réciproquement.

3.1° Application de la MRPD pour la résolution des problèmes multi-objectif d'affectation

Pour résoudre un problème multi-objectif d'affectation avec la méthode du repère préférentiel de dominance, on procède comme suit :

1. Déterminer le nuage des points en attribuant des valeurs à chaque objectif ;
2. Appliquer, autant de fois que possible, la MRPD sur ce nuage de points pour engendrer, par échelon, les ensembles de solutions efficaces $Ei(P)$;

3. Construire des affectations potentiellement efficaces avec les $E_i(P)$ en donnant priorité aux indices i les plus petits.
4. Filtrer les affectations ainsi construites en appliquant une fois de plus la MRPD pour générer $E(P)$.

3.2° Exemples didactiques

Exemple 1 : $n=3$

Le département de production d'une entreprise industrielle dispose de trois machines de transformation et trois ouvriers commis à cette tâche. Les ouvriers n'ont pas la même compétence et expérience du travail. Les coûts d'affectation d'un ouvrier i à la machine j sont donnés par la matrice A et les niveaux d'incompétence par la matrice B.

Matrice A : coûts d'affectation

	M1	M2	M3
O1	7	5	2
O2	8	3	4
O3	2	9	5

Matrice B : niveaux d'incompétence

	M1	M2	M3
O1	5	2	6
O2	3	7	8
O3	9	4	5

Résolution

Il s'agit d'un problème de minimisation simultanée de deux objectifs et nous devons appliquer la version min-min de la MRPD. La matrice C de nuage des points dans l'espace des objectifs est obtenue en fusionnant les deux matrices A et B :

Matrice C du nuage des points

	M1	M2	M3
O1	(7,5)	(5,2)	(2,6)
O2	(8,3)	(3,7)	(4,8)
O3	(2,9)	(9,4)	(5,5)

Ensembles de Solutions potentiellement efficaces par échelon :

L'application de la MRPD sur ce nuage de points permet de dégager l'ensemble de solutions efficaces de premier échelon. La suppression des points de cet ensemble et une deuxième application de la MRPD sur le reste des points nous donne l'ensemble de solutions efficaces de deuxième échelon et ainsi de suite.

D'où

$$E_1(P) = \{(5,2)(2,6)\}$$

$$E_2(P) = \{(5,5)(2,9)(3,7)(9,4)\}$$

$$E_3(P) = \{(8,3)(4,8), (7,5)\}$$

Affectations probablement efficaces :

Les affectations sont construites en commençant par les éléments de l'ensemble de solutions efficaces du premier échelon aux éléments de l'ensemble de solutions efficaces du dernier échelon.

Toutefois, il est possible d'accepter même une affectation dans l'ensemble de solutions efficaces de dernier échelon dans le but de l'intensification et de diversification de la recherche car la filtration viendra départager les solutions. Ce qui conduit à :

1° O1-M2, O3-M3, O2-M1; Solution A(18,10)

2° O1-M3, O3-M1, O2-M2; Solution B(7,22)

3° O1-M2, O3-M1, O2-M3; Solution C(11,19)

4° O1-M3, O3-M2, O2-M1; Solution D(19,13)

5° O1-M1, O2-M2, O3-M3; Solution E(15,17)

Appliquons la MRPD pour filtrer ces affectations :

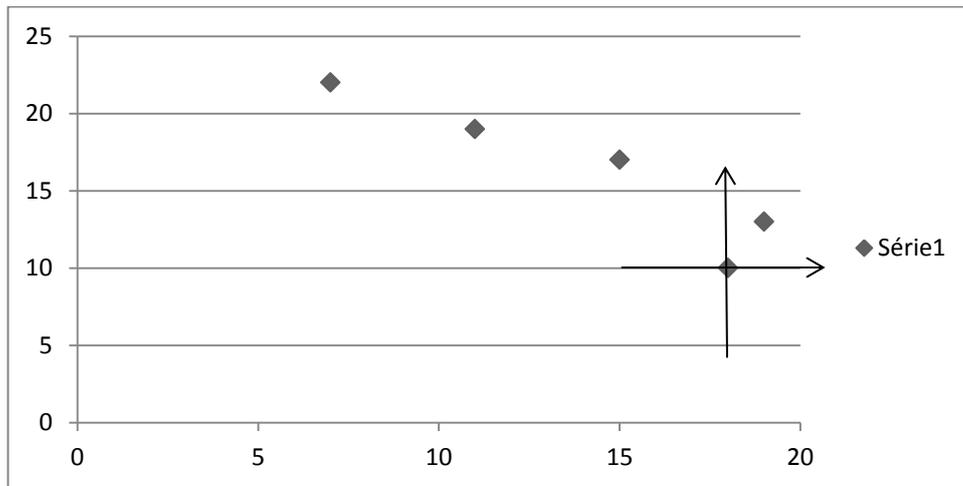


Fig. 1 : 1^{ère} application numérique de la MRPD au MOAP

En appliquant la MRPD, nous constatons que l'affectation 4^o correspondant à la solution D est dominée par l'affectation 1^o correspondant au point A et que les quatre solutions 1^o, 2^o, 3^o et 5^o correspondant respectivement aux points A, B, C et E sont Pareto optimales car mutuellement situées dans les zones d'indifférences de leurs repères préférentiels de dominance respectifs.

Ces affectations constituent l'ensemble de solutions efficaces trouvé par Malhotra (Malhotra & Al., 1982) et par Ulungu (Ulungu E.-L., 1993) :

$$E(P)=\{(18,10),(7,22),(11,19),(15,17)\}.$$

Exemple 2 : n=4

Matrice A ; coûts d'affectation

	M1	M2	M3	M4
O1	5	1	4	7
O2	6	2	2	6
O3	2	8	4	4
O4	3	5	7	1

Matrice B : niveaux d'incompétence

	M1	M2	M3	M4
O1	3	6	4	2
O2	1	3	8	3
O3	5	2	2	3
O4	4	2	3	5

Matrice C : nuage des points dans l'espace des objectifs

	M1	M2	M3	M4
O1	(5,3)	(1,6)	(4,4)	(7,2)
O2	(6,1)	(2,3)	(2,8)	(6,3)
O3	(2,5)	(8,2)	(4,2)	(4,3)
O4	(3,4)	(5,2)	(7,3)	(1,5)

Ensembles des Solutions potentiellement efficaces par échelon :

$$E_1(P) = \{(2,3), (1,5), (6,1), (4,2)\}$$

$$E_2(P) = \{(2,5), (4,3), (3,4), (5,2), (1,6)\}$$

$$E_3(P) = \{(5,3), (4,4), (7,2), (2,8)\}$$

$$E_4(P) = \{(6,3), (8,2)\}$$

$$E_5(P) = \{(7,3)\}$$

Affectations probablement efficaces :

1° O2-M2, O4-M4, O3-M3, O1-M1; Solution (12,13)

2° O4-M4, O2-M1, O3-M3, O1-M2; Solution (12,14)

3° O2-M1, O3-M4, O4-M2, O1-M3; Solution (19,10)

4° O3-M3, O4-M2, O2-M1, O1-M4; Solution (22,7)

5° O2-M2, O3-M1, O1-M3, O4-M4; Solution (9,17)

6° O4-M4, O1-M2, O2-M3, O4-M4; Solution (6,24)

7° O3-M3, O4-M1, O1-M2, O2-M4; Solution (14,15)

8° O3-M1, O2-M2, O1-M4, O4-M3; Solution (18,13)

9° O3-M4, O2-M2, O1-M1, O4-M3; Solution (18,12)

10° O4-M1, O3-M3, O2-M2, O1-M4; Solution (16,11)

11° O4-M2, O1-M1, O3-M3, O2-M4; Solution (20,10)

Filtrons ces affectations par l'application de la MRPD :

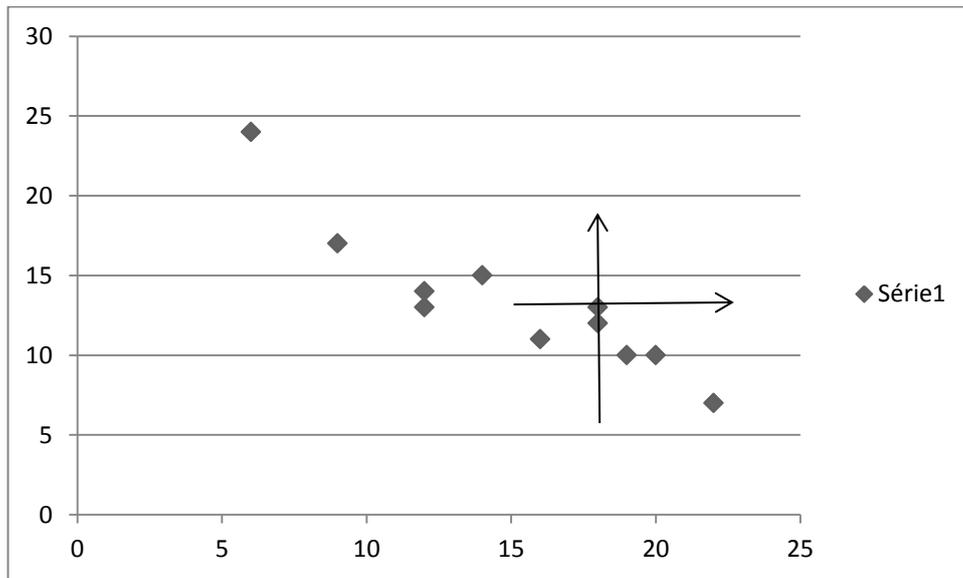


Fig. 2 : 2^{ième} application numérique de la MRPD

L'application de la MRPD montre que les solutions 7°, 8°, 9° et 11° sont dominées tandis que les solutions 1°, 3°, 4°, 5°, 6° et 10 sont Pareto optimales et forment l'ensemble de solutions efficace du problème : $E(P)=\{(12,13),(19,10),(22,7),(9,17),(6,24),(16,11)\}$, obtenu par Ulungu (Ulungu, E.-L., 1993), que le principe de Malhotra (Malhotra & Al., 1982) n'a pu trouver que trois de ces six solutions efficaces.

4. Problème multi-objectif de sac-à-dos

Pour un problème multi-objectif de sac-à-dos, on dispose de n objets indicés par $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ de poids (ou volume) ω_j et W la capacité totale (en poids ou volume) d'un sac-à-dos (ou chargement). A chaque objet on associe m valeurs c_j^k , $k = 1, \dots, m$ mesurant son importance selon les m objectifs.

Le problème multi-objectif du sac-à-dos consiste à remplir le sac d'objets de manière à maximiser les différentes valeurs des objets choisis, sans dépasser la capacité W . Schématiquement, le problème se présente comme suit :



Fig. 3 : Illustration du MOKP

4.1° Formulation mathématique

Le problème multi-objectif de sac-à-dos peut alors se formuler par :

$$(P) : \begin{cases} \text{"max"} \sum_{j=1}^n c_j^k x_j & k = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \omega_j x_j \leq W & (1) \\ x_j \in \{0, 1\} & (2) \end{cases}$$

où $x_j = 1$ signifie que l'objet j est choisi.

D'après Martello et Toth (Martello & Toth, 1990), ce problème se particularise par le fait de posséder une seule contrainte et plusieurs interprétations en sont possibles tel le problème de chargement et celui d'investissement.

Quoi qu'il s'agisse d'un problème, vu sa seule contrainte, relativement simple dans la classe \mathcal{NP} (le problème de décision qui lui est associé est \mathcal{NP} -complet mais pas \mathcal{NP} -complet au sens fort, car c'est un problème numérique (Garey & al., 1979), (Goldberg D.E., 1989). La littérature est quasi inexistante à son sujet dans un contexte multi-objectif.

Signalons une méthode interactive proposée par Dyer et al. (Dyer, R.F. & Al., 1988) qui consiste à sélectionner les meilleurs organes de presse pour une campagne de publicité avec un budget de montant W . Dans cette étude, les coefficients c_j^k sont définis par le pourcentage p_j^k du nombre N_j de lecteurs du magazine j possédant une caractéristique spécifique k (revenu, instruction, âge, loisirs,...) c'est-à-dire $c_j^k = p_j^k N_j x_j$ avec $x_j = 1$ si le magazine j est sélectionné

N.B. Le problème de sélection de média se modélise souvent avec des variables entières quelconques comme dans (Deckro & Murdock, 1983).

La méthode comporte deux étapes principales : la première étape est l'utilisation de la méthode AHP (AnalyticHierarchy Process) pour déterminer des coefficients d'efficacité globale e_j pour chaque magazine j à partir des p_j^k . Il s'agit donc d'une agrégation définissant une préférence globale —en dehors de l'aspect budget— des différents média et la seconde étape consiste à résoudre le problème mono-objectif du sac-à-dos suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^n e_j N_j x_j \\ \sum_{j=1}^n \omega_j x_j \leq W \quad (1) \\ x_j \in \{0, 1\} \quad (2) \end{array} \right.$$

Ce problème relativement simple correspond à des applications très intéressantes dans le domaine de la gestion de portefeuille, chargement de bateaux, avions,...

Sa version multi-objectif de base est la suivante, Soit :

-un container (ou cargo ou camion ou satellite ou ...) de capacité limitée W en poids (ou volume).

-n objets, $j = 1, \dots, n$ caractérisés par leur valeur p_j^k et leur poids (ou volume) w_j .

Le problème consiste à définir le chargement "optimal" du container à l'aide des objets disponibles : quels objets charger dans le container de manière à maximiser les valeurs totales du chargement, tout en respectant la limite de capacité du container ?

Le nom "Knapsack" (sac à dos), quelque peu folklorique, lui vient de la situation du campeur devant sélectionner les objets à emporter dans son

sac. Utilisé originellement pour ce problème, le nom lui est resté. Il est aussi parfois dénommé "Cargo loading problem".

D'autres contextes d'application peuvent être donnés à ce problème :

- le problème d'investissement (Capital Budgeting problem) : sélection d'investissement $j = 1, \dots, n$, nécessitant un capital w_j et correspondant à un rendement p_j . W représente alors le capital total disponible.
- le problème de découpe (Cutting stock problem) : découpe d'une plaque rectangulaire (en carton, acier, verre, ...) de longueur W , en différentes pièces possibles $j = 1, \dots, n$, de même largeur que la plaque et de longueurs prédéfinies w_j ; p_j représente le profit correspondant à la pièce j .

Notre but n'est pas de les développer ici, nous voulons néanmoins évaluer l'efficacité de notre méthode sur deux applications numériques résolues dans la thèse de (Ulungu, E. -L., 1993) pour illustration de sa méthode.

4.2° Application de la MRPD à la résolution du MOKP

Cette application consiste à :

1. Calculer $LB(\omega)$ et $UB(\omega)$.
2. Déterminer le sous ensemble de solution admissibles D limité par $LB(\omega)$, $UB(\omega)$ et concentré autour de la valeur maximale de la contrainte de capacité du sac.
3. Déterminer l'image directe O de D dans l'espace des objectifs.
4. Appliquer la MRPD sur O pour générer $E(P)$.

Exemple 1 : n=5

Considérons le problème multi-objectif de chargement suivant :

$$n = 5 ; p_j^1 = (11, 5, 7, 13, 3) ; p_j^2 = (9, 2, 16, 5, 4)$$

$$W_j = (4, 2, 8, 7, 5) \text{ pour } j = 1, \dots, 5 \text{ et } W = 16$$

Mathématiquement, le problème se formule comme suit :

$$\begin{aligned} \text{"max"} \quad & \begin{cases} z_1(X) = 11x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 13x_4 + 3x_5 \\ z_2 = 9x_1 + 2x_2 + 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 \end{cases} \\ & 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 5x_5 \leq 16 \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Solution :

$LB(\omega) = 2$ et $UB(\omega) = 3$. Le sous ensemble D' de l'espace de décisions réalisables limité par $LB(\omega)$ et $UB(\omega)$ et concentré autour $W= 16$ est :

$$D = \{(1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,0,1,1), (1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0), (0,0,1,0,1), (1,0,0,1,0), (0,1,0,0,1), (1,0,0,0,1), (1,1,1,0,0), (0,1,0,1,1), (1,0,0,1,1), (0,1,1,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,0,0,1)\}.$$

Ce qui conduit au sous ensemble de l'espace des objectifs :

$$O' = \{(16,11), (12,18), (20,21), (16,9), (18,25), (18,7), (10,20), (24,14), (8,6), (14,13), (23,27), (21,11), (27,18), (15,22), (29,16), (19,15)\}$$

L'application de la méthode du repère préférentiel de dominance nous permet de filtrer l'espace des objectifs O' pour générer l'ensemble de solutions efficaces.

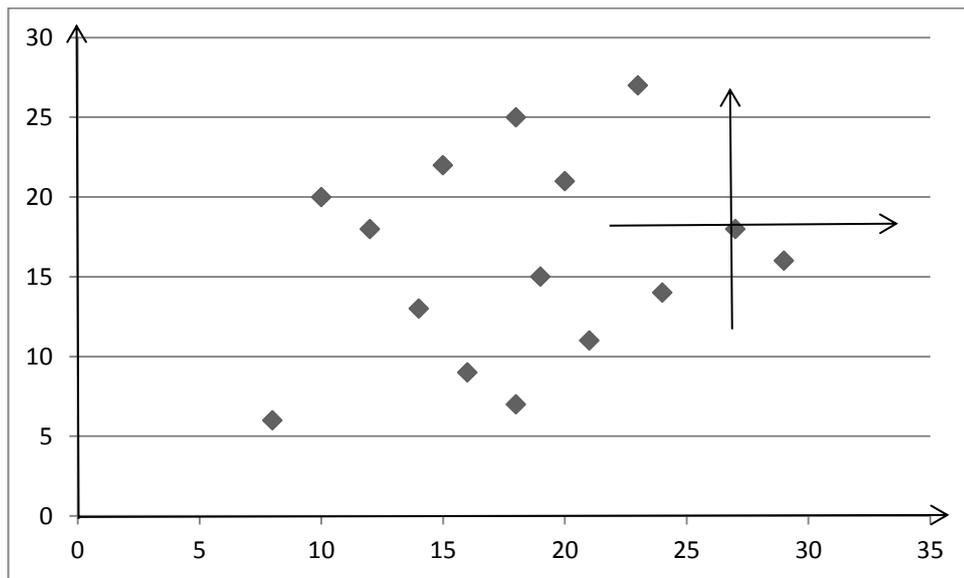


Figure 4 – 3ième application numérique de la MRPD.

La résolution de ce problème par la méthode du repère préférentiel de dominance nous a permis d'obtenir aisément l'ensemble de solutions efficaces : $E(P) = \{(23, 27), (27, 18), (29, 16)\}$ généré par (Ulungu, E.-L., 1993).

Quant à l'exploration de l'espace des objectifs surtout dans les instances de moyenne et grande dimensions, il faut surtout chercher autour de la

valeur maximale de la contrainte de capacité du sac dans les limites $LB(\omega)$ et $UB(\omega)$.

Exemple 2 : n=8

Considérons le problème multi-objectif de chargement suivant :

$n = 8$; $p^1_j = (11,4,5,1,7,13,4,3)$; $p^2_j = (9,8,2,2,16,5,9,4)$; $W_j = (4,3,2,1,8,7,6,5)$ pour $j = 1, \dots, 8$ et $W = 20$

Mathématiquement, le problème se formule comme suit :

$$\begin{aligned} \text{"max"} \quad & \begin{cases} z_1(X) = 11x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 + 13x_6 + 4x_7 + 3x_8 \\ z_2 = 9x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 16x_5 + 5x_6 + 9x_7 + 4x_8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 8x_5 + 7x_6 + 6x_7 + 5x_8 \leq 20 \\ x_j = (0,1), \quad j = 1, \dots, 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Résolution

Avec l'expérience acquise par l'exercice précédent et vu la dimension du problème à traiter : $n = 8$ variables de décision, nous allons explorer un sous ensemble D' de l'espace des décisions réalisables, orienté vers la capacité maximale du sac c'est-à-dire les points de $\{0,1\}^8$ qui rapprochent le chargement du sac vers sa capacité maximale $w = 20$ en maximisant les deux objectifs. En agissant de cette manière, nous intensifions la recherche dans les zones les plus prometteuses car l'objectif du décideur étant, dans la mesure du possible, de charger tous les objets mais hélas, il est limité par la capacité du sac. Comme $LB(\omega) = 2$ et $UB(\omega) = 5$, nous explorons surtout des vecteurs de D à quatre ou cinq composantes non nulles.

$D' = \{(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)\}$

L'image directe de D' nous donne un sous ensemble de l'espace des objectifs:

$O' = \{(28, 37), (17, 28), (32, 32), (34, 26), (25, 30), (24, 25), (27, 26), (17, 25), (34, 27), (26, 25), (23, 18), (32, 31)\}$.

L'application de la méthode du repère préférentiel de dominance nous permet de filtrer le sous espace des objectifs O' pour générer l'ensemble de solutions efficaces :

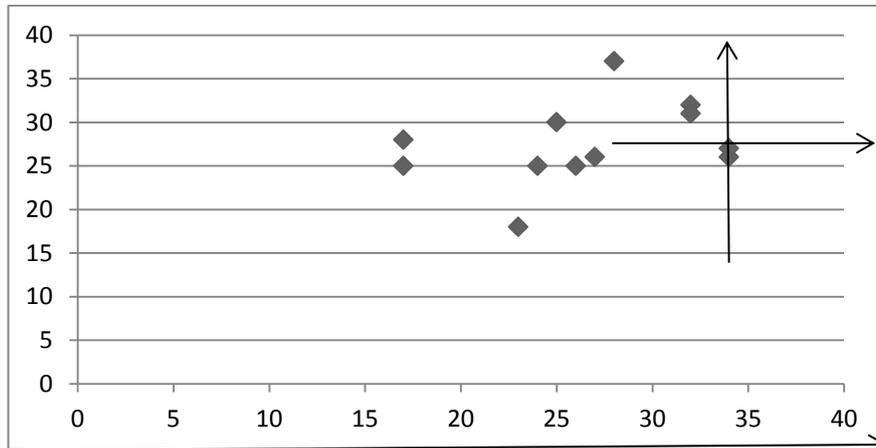


Figure 5 – 4ième application numérique de la MRPD.

Comme à l'exercice précédent, la méthode du repère préférentiel de dominance nous a permis d'obtenir, sans peine, l'ensemble de solutions efficaces :

$E(P) = \{(28, 37), (32, 32), (34, 27)\}$, obtenu par (Ulungu, E.-L., 1993).

5. CONCLUSION

A travers cet article, nous venons de prouver l'efficacité pratique de la méthode du repère préférentiel de dominance sur deux problèmes classiques d'optimisation combinatoire multi-objectif à savoir, le problème multi-objectif d'affectation et celui de sac-à-dos. Cette méthode qui désormais porte le nom de son auteur a l'avantage de générer toutes les solutions efficaces supportées et non supportées de tout problème d'optimisation combinatoire multi-objectif alors que plusieurs chercheurs procèdent par agrégation des objectifs grâce à une fonction scalarisante et les poids fournis par le décideur. Ces méthodes d'agrégation des objectifs ignorent les solutions efficaces non supportées du fait que le domaine d'admissibilité D n'est pas connexe en optimisation combinatoire multi-objectif.

Ces quatre expériences numériques puisés de la thèse de Ulungu prouvent en suffisance non seulement que la méthode du repère préférentiel de dominance (MRPD) fonctionne correctement et efficacement mais aussi et surtout qu'il s'agit d'une méthode exacte car elle génère tout l'ensemble $E(P)$. Une piste de recherche ouverte ici est, l'adaptation de notre méthode à la résolution des problèmes multi-objectif de transport, de transbordement ou flots dans le graphe, de voyageur de commerce, de localisation, de couverture et celui du plus court chemin.

6. BIBLIOGRAPHIE

Deckro R.F. and Winkofsky, Solving Zero-One Multiple Objective Programs through Implicit Enumeration, European Journal of Operational Research 12, 1983, PP362-374.

Dyer R.F., Foreman E.H. and Mustafa M.A., Decision support for media selection, T.R. Georges Washington University, (1988), presented at the Third International Summer School on MCDM Portugal, July 1988.

Garey M.R. and John D.S., Computers and Intractability, a guide to the theory of NP-Completeness, Freeman and Co., San Francisco 1979.

Goldberg D.E., Genetic Algorithms in Search, optimization, and Machine Learning, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, USA 1989.

Malhotra R., Bhatia H.L. and Puri M.C : Bicriteria assignment problem, OPSEARCH, Vol. 19(2), 1982, pp.84-96.

Martello S. and Toth P., Knapsack Problems : Algorithm and Computer Implementation, John Wiley & Sons, New-York, 1990.

Okitonyumbe Y. F., *Optimisation combinatoire multi-objectif : Méthodes exactes et métaheuristiques*, Dissertation de DEA, Mathématiques Appliquées, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa/RD CONGO, Septembre 2012

Okitonyumbe Y. F. and Ulungu E. L., Nouvelle caractérisation des solutions efficaces des problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectif. *Revue Congolaise des Sciences Nucléaires*, 27, Décembre 2013.

Teghem J., *Recherche opérationnelle Tome1 : Méthodes d'optimisation*, Ellipses 2012.

Ulungu B., *Optimisation Combinatoire Multicritère: Détermination de l'ensemble des solutions efficaces et méthodes itératives*, Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, octobre 1993.