

**MPRA**

Munich Personal RePEc Archive

**Dynamic Modelling of the Cournot  
Oligopoly using Control Engineering  
Methods**

Schüssler, Robert

30 October 2015

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/67526/>  
MPRA Paper No. 67526, posted 30 Oct 2015 14:15 UTC

# **Dynamische Modellierung des Cournot-Oligopols mit Methoden der Regelungstechnik**

## **Dynamic Modelling of the Cournot Oligopoly Using Control Engineering Methods**

Robert Schüssler

### **Zusammenfassung**

Im Beitrag wird ein dynamisches Modell für den Preisbildungsprozess in einem Cournot-Oligopol Markt vorgestellt. Die Modellbildung erfolgt mit ingenieur-wissenschaftlichen Methoden. Zunächst wird, wie in der Regelungstechnik üblich, die Rückkopplungsstruktur des Cournot-Preisbildungsmechanismus als Blockdiagramm dargestellt. Diese Struktur wird dann um dynamische Modelle erweitert, welche ein angenommenes, zeitlich verzögertes Reaktionsverhalten der Marktteilnehmer auf Marktpreisänderungen beschreiben. Auf diese Weise erhält man ein einfach verständliches und modular-erweiterbares dynamisches Modell des Cournot-Oligopol-Marktes. Die Leistungsfähigkeit des Modells wird anhand von Simulationsergebnissen für ein aus drei Marktteilnehmern bestehendes Oligopol veranschaulicht. Die vorgestellten Simulationsbeispiele beinhalten sowohl unterschiedliche Reaktionsdynamik der einzelnen Teilnehmer als auch Kapazitätsbeschränkungen und Änderungen der Marktnachfrage. Die Ergebnisse zeigen, dass Methoden der Regelungstechnik auch für die dynamische Modellierung ökonomischer Prozesse effektiv nutzbar sind.

**Stichworte** Dynamische Modellierung - Cournot-Oligopol - Industrieökonomik  
**JEL Klassifikationen** C6, C60, L13

### **Abstract**

In the paper a dynamic model for the price formation process in a Cournot oligopoly market is provided. Model development is carried out using control engineering methods. At first, as common in control engineering the feedback structure of the Cournot market price mechanism is depicted as a block diagram. Then, this structure is enhanced by dynamic models reflecting an assumed time-delayed response behaviour of the market participants to changes in market price. This approach leads to a dynamic model for the Cournot oligopolistic market which is self-evident and modularly expandable. The performance of the model is shown using simulation results for an oligopoly composed of three market participants. The simulation examples presented are related to differing response dynamics of the individual participants as well as to capacity limitations and alterations in market demand. The results show that control engineering methods can effectively be applied to dynamic modeling of economics processes as well.

## 1. Einleitung

In der Praxis sind unternehmerische Entscheidungen im allgemein in komplexem, dynamischem Umfeld zu treffen. Markt- und Umfeldbedingungen ändern sich oft schneller als sich statische Gleichgewichte einstellen.

Erfahrungswerte, Kenntnis der Wettbewerber, das Monitoring weniger relevanter Marktparameter und leicht verständliche, bewährte Modelle bilden häufig die Basis für die Erklärung des Marktgeschehens, für Vorhersagen und für strategische Entscheidungen.

In diesem Kontext können einfache Modelle nützlich sein, mit deren Hilfe dynamische Abläufe simuliert und analysiert werden können. Für die Entwicklung derartiger Modelle verfügt die Regelungstheorie einen Fundus an bewährten und effizienten Verfahren. In diesem Beitrag werden die Methoden der klassischen Regelungstechnik verwendet, um ein dynamisches Oligopol-Markt-Modell zu erstellen.

## 2. Der Cournot-Markt

Die Grundlage für die dynamische Modellbildung ist das bekannte Cournot-Modell (siehe z.B. /1/ oder andere Grundlagenliteratur der Ökonomie), das nachfolgend zunächst kurz wiedergegeben wird.

Das Cournot-Modell geht von einem oligopolistischen Markt aus, in dem die gesamte Nachfrage nach einem bestimmten Produkt vollständig von  $n$  Firmen bedient wird, welche das Produkt in gleicher Ausführung herstellen. Die Firmen wählen ihren Output jeweils so, dass sich ihr Gewinn maximiert. Der Marktpreis bildet sich unmittelbar aus den Angebotsmengen dieser  $n$  Firmen.

Die aggregierte Preisabsatzfunktion für das Produkt lautet

$$P(X) = P_{\text{pro}} - b \cdot X \quad \text{mit} \quad X = \sum x_i \quad i = 1 \dots n \quad (1)$$

$$\text{wobei gilt:} \quad P(X) = 0 \quad \text{falls} \quad P_{\text{pro}} - b \cdot X < 0$$

Dabei steht  $X$  für die Summe der Angebotsmengen  $x_i$  aller  $n$  Firmen. Der Preis  $P_{\text{pro}}$  ist der Prohibitivpreis bei dem Nachfrage vollständig zum Erliegen kommt.

Mit zunehmendem Angebot sinkt der Preis  $P(X)$  linear, falls  $b > 0$  ist. Ist die Nachfrage vollständig befriedigt, erreicht der Preis den Wert Null. Eine weitere Angebotssteigerung würde formal zu negativen Preisen führen, was auszuschließen ist.

Falls  $c_i$  die Stückkosten der  $i$ -ten Firma sind, lautet deren Gewinnfunktion

$$\Pi_i = P(X) \cdot x_i - c_i \cdot x_i$$

Im Cournot-Modell wird angenommen, dass jede der Firmen ihre Angebotsmenge  $x_i$  in Abhängigkeit von Marktpreis  $P(X)$  so wählt, dass sich der größtmögliche Gewinn einstellt.

Da  $b > 0$  vorausgesetzt ist, ergibt sich die gewinnmaximierende Menge  $x_{iw}$  aus der Bedingung

$$d\Pi_i/dx_i = 0 : P_{\text{pro}} - b * X - b * x_{iw} - c_i = 0$$

Mit Hilfe von Gl. (1) lässt sich  $x_{iw}$  als Funktion des Marktpreises  $P(X)$  angeben:

$$x_{iw} = 1/b * [ (P(X) - c_i) ] \quad (2)$$

$$\text{wobei gilt: } x_{iw} = 0 \quad \text{falls } P(X) - c_i < 0$$

Die gewinnmaximierende Angebotsmenge  $x_{iw}$  ist die vom i-ten Unternehmen anzustrebende, Menge und somit die Sollgröße für deren Produktionsoutput. Im (statischen) Cournot-Modell wird angenommen, dass der tatsächliche Produktionsoutput  $x_i$  zu jedem Zeitpunkt der gewinnmaximierende Menge  $x_{iw}$  entspricht, d.h. es gilt stets

$$x_i = x_{iw} \quad (3)$$

Die Gln (1), (2), (3) beschreiben die Preisbildung und das Reaktionsverhalten der n Firmen im Cournot- Oligopol-Markt.

Aus den Outputmengen  $x_i$  aller n Firmen ergibt sich die aggregierte Angebotsfunktion

$$X = 1/b * [ n * P(X) - \Sigma c_i ]$$

Befindet sich der Cournot-Markt noch nicht im Gleichgewicht, so bewirkt das preisabhängige, aggregierte Angebot  $X$  solange eine Änderung des Preises  $P(X)$ , bis sich ein Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage, das „Cournot-Gleichgewicht“, eingestellt hat; danach ändern sich Preis und die Angebotsmengen nicht mehr.

Der Preis  $P^*$  im Marktgleichgewicht ergibt als Schnittpunkt der aggregierten Angebotsfunktion mit der inversen Nachfragefunktion [Gl. (1) nach  $X$  aufgelöst]:

$$P^* = [ P_{\text{pro}} + \Sigma c_i ] / (n+1)$$

Mit  $P^*$  erhält man für die aggregierte Angebotsmenge  $X^*$  im Marktgleichgewicht

$$X^* = 1/b * [ n * P_{\text{pro}} - \Sigma c_i ] / (n+1)$$

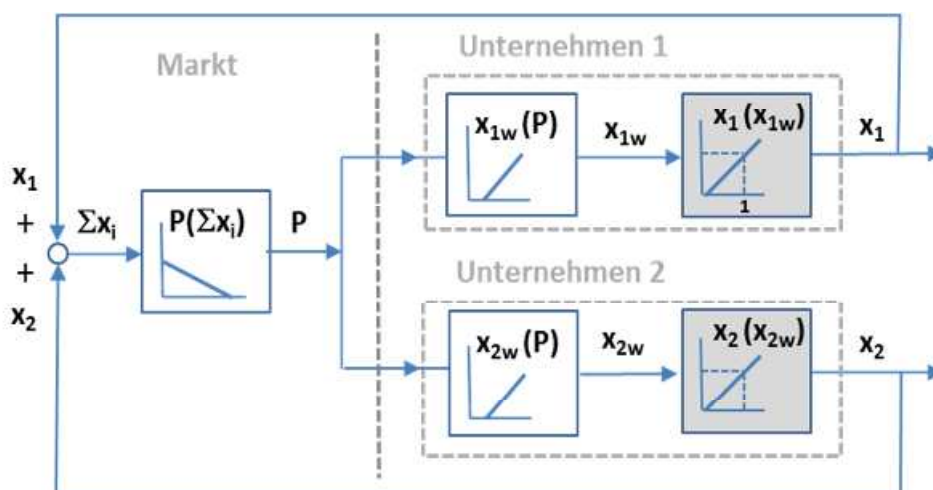
Wegen der fallenden Preisabsatzfunktion (1) und der ansteigenden Angebotsfunktionen (2) ist das Cournot-Gleichgewicht ein stabiler Gleichgewichtspunkt, d.h. bei Abweichungen der Preis-/Mengen-Paarung vom Gleichgewichtspunkt ( $P^*/X^*$ ) bewegt sich der Markt von sich aus durch beständige Preis-/Mengenanpassung in diesen Gleichgewichtspunkt zurück.

### 3. Das Cournot-Duopol in regelungstechnischer Darstellung

Wirkungszusammenhänge zwischen und innerhalb von Systemen werden in der Regelungstechnik üblicherweise als Strukturbilder dargestellt. Dabei werden die Funktionalbeziehungen als Block dargestellt. Die unabhängige Variablen oder die Eingangsgrößen werden durch gerichtete Linien symbolisiert, die in den Block hineinführen, die abhängigen Variablen oder Ausgangsgrößen durch Linien, die aus dem Block herausführen.

In Abb.1 sind die Funktionalbeziehungen [Gln (1), (2), (3)] eines Cournot- Oligopol-Marktes für  $n = 2$  in der regelungstechnischer Form als Strukturbild dargestellt.

Abb. 1: Cournot-Duopol-Modell (statisch), Strukturbild



Der Teil des Strukturbildes links der senkrechten Linie verdeutlicht das Zustandekommen des Marktpreises: Am Summationspunkt wird aus allen Angebotsmengen  $x_i$  die aggregierte Angebotsmenge  $X = \sum x_i$  erzeugt. Durch ein sogenanntes Kennlinienglied<sup>1)</sup>, welches die aggregierte Preisabsatzfunktion Gl. (1) enthält, wird der Menge  $X$  ein Marktpreis  $P(X)$  zugeordnet.

Der Marktpreis  $P$  ist die einzige Führungsgröße für die beiden, unabhängig von einander agierenden Unternehmen. Anhand des Marktpreises ermittelt jedes Unternehmen die gewinnmaximierende Menge  $x_{iw}$  [Kennlinienglied Gl. (2)].

Die tatsächliche Outputmenge  $x_i$  ist in diesem Modell identisch mit der anzustrebenden gewinnmaximierende Angebotsmenge  $x_{iw}$  [Proportionalglied Gl. (3)].

Die Outputmengen  $x_i$  der Firmen (Ausgangsgrößen) werden wiederum auf den Summationspunkt zurückgekoppelt. Die Summe der neuen Outputmengen  $X = \sum x_i$  bewirkt einen neuen Preis  $P(X)$  und damit neue gewinnmaximierende Angebotsmengen  $x_{iw}$ .

Eine Erweiterung des in Abb. 1 dargestellten Strukturbildes von zwei auf  $n$ -Firmen ist in sehr einfacher Weise möglich: für jedes weitere Unternehmen wird ein zusätzlicher Modul (gestrichelt umfasste Blöcke) eingefügt und die betreffende Angebotsmenge  $x_i$  wird zusätzlich auf den Summationspunkt zurückgeführt. Die Struktur des Marktmodells bleibt dabei erhalten.

<sup>1)</sup> Die Kennlinienglieder könnten auch nichtlineare statische Kennlinien enthalten.

### 3. Dynamisches Reaktionsverhalten der Marktakteure

Für die Modellierung des zeitlichen Ablaufs einer Preis-/Mengenanpassung hin zum Marktgleichgewicht wird das statische Cournot-Oligopol-Markt-Modell um eine zeitabhängige Beschreibung des Angebotsverhaltens der beteiligten Akteure erweitert.

Dazu wird die durch Gl. (2) bewirkte starre Verknüpfung der Outputmenge  $x_i$  mit der gewinnmaximierende Angebotsmenge  $x_{iw}$  aufgegeben und durch ein einfaches dynamisches Produktionsmodell ersetzt. Die Angebotsmenge  $x_{iw}$  entspricht dann nicht mehr unmittelbar der Outputmenge  $x_i$ , sondern wird zum Sollwert für die dynamische Anpassung des Outputs.

Für die Erstellung des Modells wird zunächst ein Produktionsprozess angenommen, dessen Output  $x_i$  sich bei einer sprungförmigen Änderung des Produktionssollwertes mit einer zeitlichen Verzögerung auf das neue stationäre Niveau bewegt.

Es ist offensichtlich, dass sich die Dynamik eines derartigen Übergangsverhaltens in einfacher Form durch die Differentialgleichung<sup>2)</sup> beschreiben lässt

$$dx_i(t) / dt + a_i * x_i(t) = u_i(t) \quad \text{mit} \quad a_i > 0 \quad (4)$$

wobei  $u_i(t)$  eine noch zu definierende Produktionssteuergröße darstellt. Bei einer sprungförmigen Erhöhung von  $u_i(t)$  ergibt sich aus Gl. (4) für  $x_i(t)$  eine exponentiell verlaufende Übergangsfunktion. Der Koeffizient  $a_i$  bestimmt dabei die Form dieser Übergangstrajektorie.

Die zeitabhängige Steuergröße  $u_i(t)$  ist nun so wählen, dass die Outputmenge  $x_i(t)$  nach einer gewissen Einschwingzeit den gewinnmaximierenden Sollwert  $x_{iw}$  auch tatsächlich erreicht.

Fragestellungen dieser Art werden als „Reglerentwurfproblem“ bezeichnet. Die Regelungstheorie bietet hierfür Lösungsmethoden (siehe hierzu /2/ oder andere Grundlagenliteratur).

Hier sei angenommen, dass „stationäre Genauigkeit“ die wichtigste Anforderung an die gesuchte Steuergröße  $u_i(t)$  ist. Die Funktion  $u_i(t)$  muss also gewährleisten, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [ x_{iw}(t) - x_i(t) ] = 0$$

gilt. Man kann zeigen (vgl. z.B. /2/) dass die Funktion  $u_i(t)$  diese Forderung dann erfüllt, wenn sie der Differentialgleichung

$$du_i(t) / dt = x_{iw}(t) - x_i(t) \quad (5)$$

genügt. Die Differentialgleichungen (4) und (5) stellen ein einfaches dynamisches Produktionsmodell dar, welches das Zeitverhalten einer Outputmengenanpassung beschreibt.

---

<sup>2)</sup> Die Wahl von Dgl. (3) für die Beschreibung der Produktionsdynamik ist willkürlich. Ebenso hätte ein Modellansatz mit Totzeit oder eine Differentialgleichung 2. Ordnung gewählt werden können, falls dies den Zusammenhang zwischen Output-Sollwert und tatsächlichem Output besser wiedergibt. Ggf. sind auch zusätzliche freie Parameter hilfreich, die eine Anpassung an gemessenes Verhalten erlauben.

Leitet man Dgl. (4) nochmals ab, so lässt sich  $u_i(t)$  durch Einsetzen von Dgl. (5) eliminieren und der funktionalen Zusammenhang zwischen  $x_i(t)$  und  $x_{iw}(t)$  wird explizit:

$$d^2x_i(t) / dt^2 + a_i * dx_i(t) / dt + x_i(t) = x_{iw}(t) \quad (6)$$

Die Übergangstrajektorie  $x_i(t)$  der i-ten Firma bei Erhöhung des Produktionssollwertes  $x_{iw}(t)$  ergibt sich somit als Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung.

Für  $a_i = a_i^{ap} = 2$  ergibt sich für ein Lösungsverlauf <sup>3)</sup> bei dem sich die Variable  $x_i(t)$  ohne Überschwingen auf das Niveau der Sollgröße  $x_{iw}(t)$  bewegt.

Sind in Dgl. (6) die zeitlich veränderlichen Terme  $d^2x_i(t) / dt^2$  und  $dx_i(t) / dt$  abgeklungen, so ändert sich der Produktionssollwert nicht mehr (stationärer Zustand); dann gilt  $x_i = x_{iw}$ , d. h. Eingangsgröße und Ausgangsgröße des Modells sind gleich. Der Einfluss der Dynamik des Produktionsmodells ist dann vollständig abgeklungen. Es gelten nur noch die statischen Zusammenhänge des Marktmodells (Cournot-Gleichgewicht).

In Abb 2 ist das Strukturbild des einfachen dynamischen Produktionsmodells dargestellt. Hierfür wurden die Dgln (4), (5) durch Laplace-Transformation<sup>4)</sup> in algebraischen Gleichungen überführt.

Aus der rückgekoppelten momentanen Produktionsmenge  $x_i$  wird die Differenz  $(x_{iw} - x_i)$  zwischen Sollmenge  $x_{iw}$  und tatsächlichen Produktionsmenge  $x_i$  gebildet. Aus dieser Regelabweichung wird durch Integration die Steuerfunktion  $u_i$  erzeugt, welche auf den Produktionsprozess einwirkt. Solange eine Regelabweichung  $(x_{iw} - x_i)$  existiert, wächst  $u(t)$  an. Erst wenn  $x_{iw} - x_i = 0$  ist, verharrt  $u(t)$  auf einem konstanten Wert, der das erreichte Produktionsniveau  $x_i = x_{iw}$  stabilisiert.

<sup>3)</sup> Aufschluss über die Lösungen der Differentialgleichung (6) geben die Wurzeln ihres charakteristischen Polynoms. Diese lauten hier

$$s_{1,2} = -a_i/2 \pm \sqrt{(a_i/2)^2 - 1}$$

Da  $a_i > 0$  vorausgesetzt wurde, sind die Realteile beider Wurzeln immer negativ und die Dgl. (6) besitzt somit nur abklingende „stabile“ Lösungen.

Für  $a_i^{ap} = 2$  ergibt sich mit einer doppelten reellen Wurzel der sogenannte „aperiodische Grenzfall“.

In diesem Fall bewegt sich die Variable  $x_i(t)$  ohne Überschwingen auf ihre Sollgröße  $x_{iw}(t)$  zu.

Für  $0 < a_i < a_i^{ap}$  ergeben sich zwei konjugiert komplexe Wurzeln und somit oszillierend abklingende Lösungen. Für  $a_i > a_i^{ap}$  entstehen schwingungsfreie, stark gedämpfte Lösungen.

<sup>4)</sup> Das Laplace-Integral einer zeitabhängigen Funktion  $f(t)$  lautet (vgl. z.B. /2/)

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) * e^{-st} dt$$

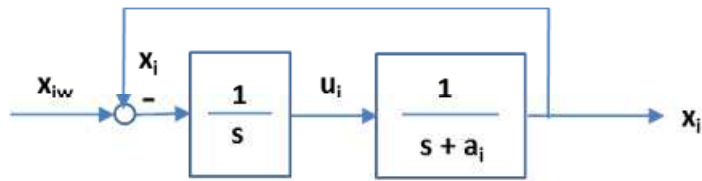
Durch die Transformation wird einer von der Zeit  $t$  abhängigen Funktion  $f(t)$  eine Funktion  $F(s)$  zugeordnet, die von der komplexen Variablen  $s = \delta + j \omega$  abhängig ist. Die Funktion  $f(t)$  wird als „Originalfunktion“ bezeichnet, die Funktion  $F(s)$  heißt „Bildfunktion“.

Die Bildfunktionen der Differentialgleichungen (3) und (4) lauten:

$$\begin{aligned} X_i(s) &= [1 / (s + a_i)] * U_i(s) \\ U_i(s) &= [1 / s] * (X_{iw}(s) - X_i(s)) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen als „Übertragungsglieder“ der Form  $Y_a(s) = G(s) * Y_e(s)$  interpretieren.  $G(s)$  bezeichnet man dabei als Übertragungsfunktion,  $Y_e(s)$  ist Eingangsgröße und  $Y_a(s)$  ist Ausgangsgröße.

Abb. 2: Dynamisches Produktionsmodell, Strukturbild



#### 4. Das dynamisches Cournot-Oligopol-Markt-Modell

Durch Einbindung dynamischer Produktionsmodelle für die  $n$  Firmen in das Cournot-Marktmodell ergibt sich das Gleichungssystem des dynamischen Oligopol-Markt-Modells:

$$P(X) = P_{\text{pro}} - b \cdot X \quad \text{mit } b > 0 \text{ und } X = \sum x_i \quad i = 1 \dots n \quad (1)$$

$$x_{iw} = 1/b \cdot [P(X) - c_i] \quad (2.i)$$

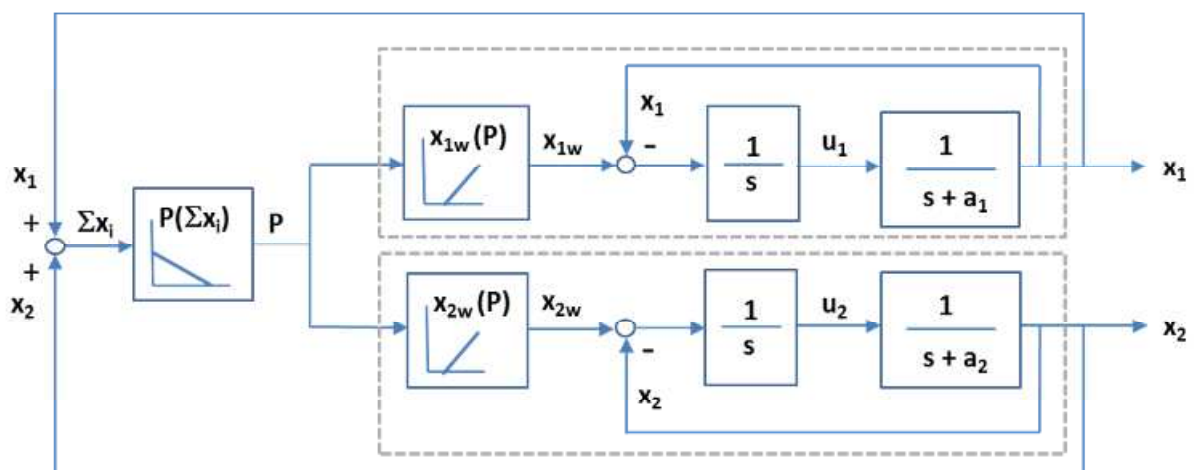
$$dx_i(t) / dt + a_i \cdot x_i(t) = u_i(t) \quad \text{mit } a_i > 0 \quad (4.i)$$

$$du_i(t) / dt = x_{iw}(t) - x_i(t) \quad (5.i)$$

Dabei sind Gl. (2.i), Dgl. (4.i) und Dgl. (5.i) für jede der  $n$  Firmen auszuführen.

Die Funktionalbeziehungen sind in Abb.3 wiederum für  $n = 2$  als Strukturbild dargestellt. An die Stelle der in Abb.1 grau hinterlegten Blöcke treten jetzt die dynamischen Produktionsmodelle der Firmen.

Abb. 3: Dynamisches Cournot-Duopol-Modell, Strukturbild



Bei der Einbindung der dynamischen Produktionsmodelle in das Cournot-Markt-Modell ist zu beachten, dass der Produktionssollwert  $x_{iw}(t)$  zu einer vom Marktpreis  $P(X)$  und damit auch von  $x_i(t)$  abhängigen Funktion wird.



Dies verändert die rechte Seite von Dgl. (6). Das dynamische Verhalten des Produktionsmodells innerhalb des Cournot-Marktmodells wird nun durch

$$d^2x_i(t)/dt^2 + a_i * dx_i(t)/dt + x_i(t) = -X(t) + 1/b * (P_{\text{pro}} - c_i] \quad (7)$$

beschrieben. Die rechte Seite von Dgl. (7) enthält mit der aggregierten Angebotsmenge  $X$  sowohl die Angebotsmenge  $x_i$  als auch die Angebotsmengen der übrigen Firmen.

Da  $X(t)$  eine lineare Funktion von  $x_i$  ist, bleibt die Struktur des Produktionsmodells als Differentialgleichung 2. Ordnung jedoch erhalten. Allerdings unterscheiden sich Dgl. (6) und Dgl. (7) hinsichtlich ihrer Dynamik: durch den zusätzlich über  $X = \sum x_i$  rückgekoppelten  $x_i$ -Anteil ändert sich der Koeffizient von  $x_i(t)$  und damit das Übergangsverhalten.

Einen Anhaltswert<sup>5)</sup> dafür, wie der Koeffizient  $a_i$  in Dgl. (7) und damit innerhalb des dynamischen Cournot-Markt-Modells zu wählen ist, damit sich aperiodisches Übergangsverhalten einstellt, liefert folgende Überlegung: wenn alle  $n$  Firmen die gleiche Menge  $x_i$  anbieten, dann beträgt die aggregierte Angebotsmenge  $X = n * x_i$ . Dgl. (7) geht dann über in

$$d^2x_i(t)/dt^2 + a_i * dx_i(t)/dt + (1+n) * x_i(t) = 1/b * (P_{\text{pro}} - c_i]$$

Aus dem charakteristischen Polynom dieser Differentialgleichung ergibt sich dann als Näherungswert für den aperiodischer Grenzfall

$$a_i^{\text{ap}} = 2 * \text{sqrt}(1 + n)$$

Der Wert von  $a_i^{\text{ap}}$  ist hier größer als beim Produktionsmodell Dgl. (6). Das bedeutet, dass eine Firma im Cournot-Markt ihre Produktionsanpassung langsamer vollziehen muss um Überproduktion zu vermeiden als in einem Markt, in welchem der Preis von der eigenen Angebotsmenge unabhängig ist.

## 5. Simulationsergebnisse

Für ein aus 3 Firmen bestehendes Oligopol wurde das dynamische Cournot-Oligopol-Markt-Modell in Excel simuliert.

Hierfür wurden die Differentialgleichungen (4.i) und (5.i) in Differenzgleichungen (vgl. z.B./3/, Numerische Differentiation) mit  $h$  als die Integrationszeitschrittweite umgeschrieben:

$$x_i(k+1) = (1 - a_i * h) * x_i(k) + h * u_i(k)$$

$$u_i(k+1) = u_i(k) + h * [x_{iw}(k) - x_i(k)]$$

Die algebraischen Gleichungen (1) und (2.i) gelten für jeden Zeitpunkt  $k$ .

---

<sup>5)</sup> Falls erforderlich, kann eine Feinjustierung des Parameters mittels Simulation erfolgen.

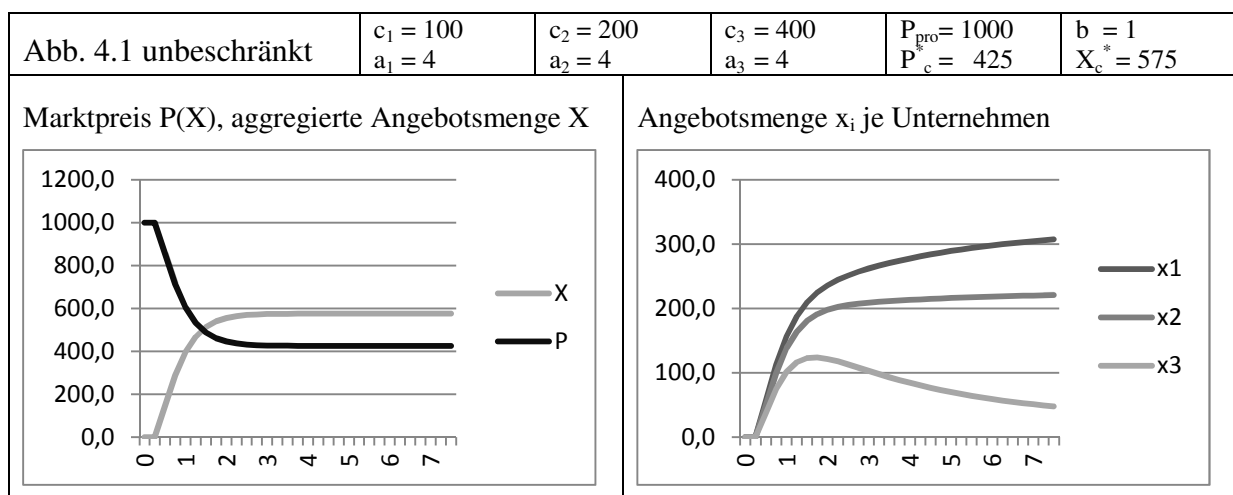
Aufgrund der Stabilität des Modells bei adäquater Wahl der Koeffizienten  $a_i$ , bewegen sich die Zustandsgrößen  $x_i$  und damit auch  $X$  und  $P$  im Laufe der Zeit stets in einen stabilen Gleichgewichtspunkt, auch wenn es sich dabei – wie im Falle beschränkter Angebotsmengen (Bsp. 2) - nicht um ein Cournot-Gleichgewicht handelt.

Für die nachfolgend vorgestellten Simulationsbeispiele wurden die Parameter des Modells variiert, Anfangswerte unterschiedlich gewählt und Angebotsmengen begrenzt.

Durch Modifikation der Kennlinienglieder ließe sich das Marktverhalten auch bei nichtlinearen Preis-Absatzfunktionen oder bei nicht Cournot-konformen Angebotsverhalten einzelner Akteure simulieren.

### Beispiel 1:

Drei Firmen mit unterschiedlichen Kosten  $c_1 < c_2 < c_3$  und gleicher Anlaufdynamik  $a_1 = a_2 = a_3$  treten zeitgleich in einen neuen Cournot-Oligopol-Markt ein.

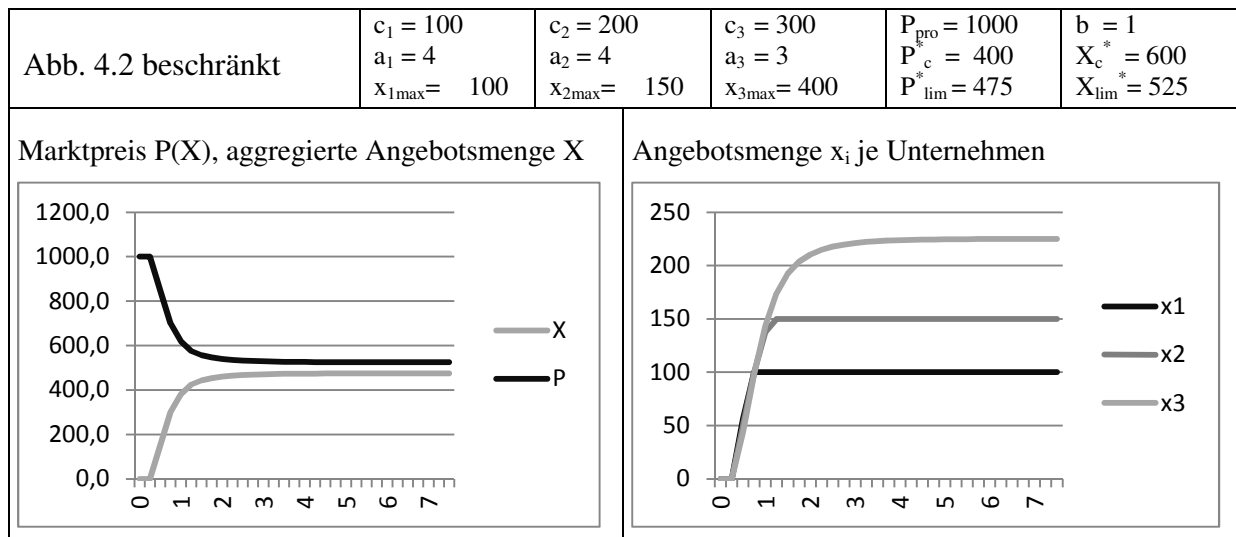


Die dargestellten Simulationsergebnisse (Abb 4.1) zeigen den jeweiligen Angebotsmengenverlauf über der Zeit und den dadurch eintretenden Rückgang des Marktpreises.

Zu Beginn der Einschwingphase können alle Firmen ihre Angebotsmengen steigern; mit sinkendem Preis gibt dann jedoch der Firma 3 (mit den höchsten Kosten) Marktanteile zu Gunsten der beiden anderen Firmen wieder ab. Marktpreis und Angebotsmengen bewegen sich aperiodisch in das Cournot-Marktgleichgewicht ( $P_c^*/X_c^*$ ).

### Beispiel 2:

Drei Firmen mit begrenzten Produktionskapazitäten  $a_{1\text{max}} < a_{2\text{max}} < a_{3\text{max}}$  treten zeitgleich in einen neuen Cournot-Oligopol-Markt ein.



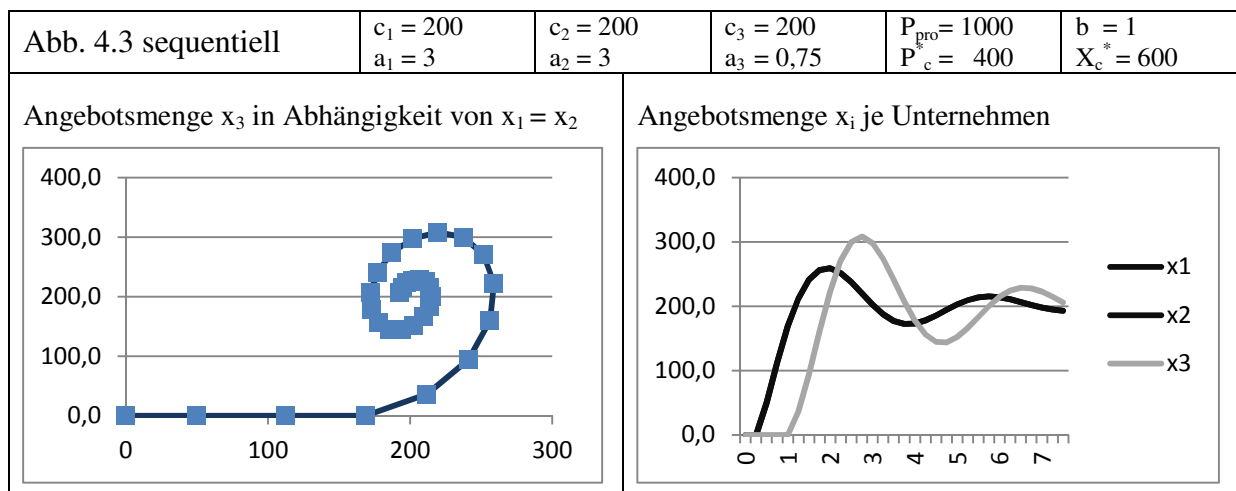
Die dargestellten Simulationsergebnisse (Abb. 4.2) zeigen den jeweiligen Angebotsmengenverlauf über der Zeit und den dabei auftretenden Marktpreisverlauf.

Noch vor Erreichen des Marktgleichgewichts stoßen die Firmen 1 und 2 an ihre Kapazitätsgrenzen. Die Angebotsmenge verharrt bei  $x_{1max}$  bzw.  $x_{2max}$ , während Firma 3 (trotz vergleichsweise höherer Kosten) weiterhin ihre gewinnoptimale Angebotsmenge an den Markt bringen kann.

Der sich im Gleichgewicht einstellende Marktpreis  $P_{lim}^*$  liegt höher und die aggregierte Angebotsmenge  $X_{lim}^*$  ist niedriger als im (unbeschränkten) Cournot-Gleichgewicht ( $P_c^*/X_c^*$ ).

### Beispiel 3:

Von drei Firmen mit gleicher Kosten  $c_i$  treten 2 Firmen zeitgleich und mit gleicher Dynamik in einen neuen Cournot-Oligopol-Markt ein. Die Firma 3 folgt später mit steilerer Anlaufkurve.



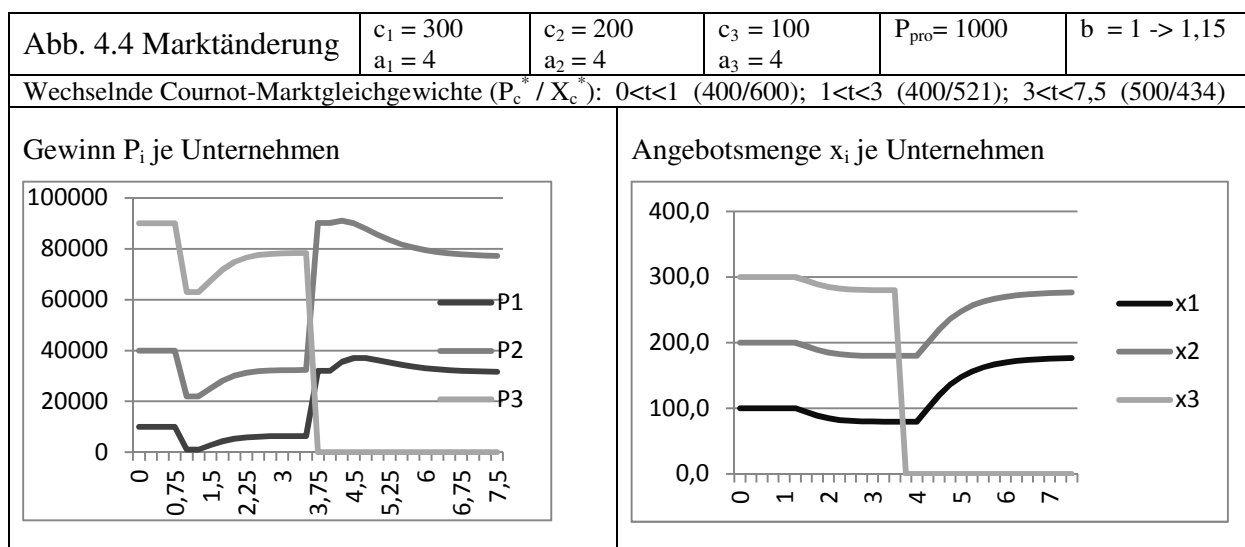
Die dargestellten Simulationsergebnisse (Abb. 4.3) zeigen den jeweiligen Angebotsmengenverlauf über der Zeit, wobei die Kurven von Firma 1 und Firma 2 identisch sind und übereinander liegen.

Nach einem Einschwingvorgang mit Überproduktion nähern sich die Angebotsmengen aller drei Firmen dem gleichen stationären Wert, der einem Drittel der Cournot-Gleichgewichtsmenge  $X^*$  entspricht.

Trägt man im zeitlichen Verlauf die Angebotsmenge  $x_3$  des Nachzüglers über den Angebotsmengen  $x_1$  und  $x_2$  der Pioniere auf, so gibt sich das schneckenförmige Diagramm. Die auf der Kurve liegenden kleinen Quadrate sind Punkte mit der gleichen zeitlicher Distanz. Im Häufungspunkt der Quadrate finden keine Veränderungen mehr statt, das Marktgleichgewicht ist erreicht.

#### Beispiel 4:

Drei Firmen liefern konstante Angebotsmengen, der Markt befindet sich im Gleichgewicht. Zum Zeitpunkt  $t=1$  reduziert sich die Marktnachfrage sprunghaft um 13% und zum Zeitpunkt  $t=3$  stellt Firma 3, die bis dato die größte Menge geliefert hat, ihre Produktion ein.



Die dargestellten Simulationsergebnisse (Abb. 4.4) zeigen den jeweiligen Angebotsmengenverlauf über der Zeit. Die Nachfragereduktion (erzeugt durch Änderung des Parameters  $b$  in der Preisabsatzfunktion) bewirkt Absatz- und Gewinnrückgänge bei allen drei Firmen. Ein neues Marktgleichgewicht stellt sich.

Nach Ausscheiden von Firma 3 steigt der Marktpreis und die Angebotsmengen der beiden am Markt verbleibenden Firmen; sie können die freigewordene Nachfrage jedoch nicht vollständig auf sich ziehen, da Firma 3 zu geringeren Kosten anbieten konnte.

Bei Firma 2, mit niedrigen Kosten als Firma 1, fällt die Gewinnsteigerung nach Ausscheiden von Firma 3 am stärksten aus.

Quellen:

/1/ Varian, Hal, R.  
Grundzüge der Mikroökonomie  
3.- Aufl. Oldenburg Verlag, München, 1995

/2/ Föllinger, Otto  
Regelungstechnik : Einführung in die Methoden und ihre Anwendung  
Kap 14.1 Mathematischer Anhang, Elemente der Laplace-Transformation  
5.Auflage, Hütig Verlag, Heidelberg, 1985

/3/ Eichholz, Wolfgang; Vilkner, Eberhard  
Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik  
5.Auflage, Hanser Verlag, Leipzig, 2009