Nonlinear Price-Consumption Paths for Quasilinear preferences

Arango, Efraín

Universidad Autónoma Latinoamericana

12 September 2014

Curvas de Oferta-Precio No lineales para el caso de preferencias de consumo Cuasi-lineales

Resumen

En la mayoría de textos de Microeconomía Intermedia o Teoría Microeconómica, cuando se analiza el tema de la demanda de los individuos, específicamente las curvas de Oferta-Precio y curvas de Oferta-Renta, se presentan ejemplos en los cuales las funciones de utilidad corresponden a preferencias regulares, es decir, las ecuaciones que describen el comportamiento de estas curvas, corresponden a líneas rectas. El objetivo de este documento consiste en mostrar mediante un ejemplo práctico, que sucede en el caso en el que las variaciones de los precios de alguno de los bienes involucrados en el análisis (Para nuestro caso dos bienes), afecten de manera simultánea las cantidades consumidas de ambos bienes. En los manuales de microeconomía (de los cuales existen muchos y muy buenos) no se lleva a cabo una exposición detallada de la forma de calcular las ecuaciones que corresponden a estas curvas (Oferta-Precio y Oferta-Renta) si estas no corresponden a funciones lineales. El documento abarcará los conceptos fundamentales a los que se enfrenta un lector a la hora de resolver estos problemas de optimización restringida, haciendo hincapié en el método de cálculo de la ecuación de la curva de Oferta-Precio.

Abstract

In most of the Intermediate Microeconomics or Microeconomic Theory texts, when the demand of individuals subject is analyzed, especially the Price-Consumption paths and Income-Expansion paths , Examples are presented in which the utility functions correspond to regular preferences, that is, the equations describing the behavior of the curves, correspond to straight lines. The purpose of this paper is to demonstrate through a practical example, what happens in the case where the variations in the prices of any of the goods involved in the analysis (for our case two goods), simultaneously affect the quantities consumed of both goods. In microeconomics textbooks (of which there are many and very good ones) is not performed a detailed exposition of how to calculate the equations corresponding to these curves (Price Consumption path and Income Expansion path) if these do not correspond to linear functions. The document will cover the fundamental concepts that the reader faces when solving these restricted optimization problems, emphasizing the calculation method of the Price-Consumption path equation.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Palabras Clave: Demanda, Lagrange, Curva oferta-precio, Interpolación, Polinomio.

Clasificaciones *JEL:* D00, D11, C00, C61.

Vamos a suponer para nuestro caso particular, que el individuo consume solamente dos bienes $x\ e\ y$, y que la función de utilidad que describe su comportamiento frente a estos dos bienes corresponde a $U(x\,,y) = x + ln(y)$ con $y > 0$. Si suponemos además, que el individuo posee una renta dada de m (unidades monetarias) y se enfrenta a unos precios de los bienes $x\ e\ y$ dados por $(p_x\,,p_y)$, entonces su problema puede ser escrito como un problema de optimización restringida de la siguiente forma:

$$Maximizar\ U(x\,,y) = x + ln(y)$$

$$Sujeto\ a\ \ m = p_x x + p_y y$$

Resolviendo este problema, el lagrangiano resultante es:

$$\mathcal{L} = \ x + ln(y) - \lambda\big[\,m - p_x x - p_y y\big]$$

$$\mathcal{L} = \ x + ln(y) - \lambda m + \lambda p_x x + \lambda p_y y$$

Cuyas condiciones de primer orden corresponden a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 + \lambda p_x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} + \lambda p_y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -m + p_x x + p_y y = 0 \qquad (3)$$

Despejando λ de las ecuaciones (1) y (2) e igualando, se obtiene la ecuación que representa la demanda Marshalliana del bien (y), además de la ecuación (3) tenemos la restricción presupuestaría del individuo, veamos:

$y = \frac{p_x}{p_y}$, también $m = p_x x + p_y y$, basta reemplazar el valor de (y) en la restricción presupuestaría, para obtener la función de demanda Marshalliana para el bien x, como sigue:

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

$m = p_x x + p_y\left(\frac{p_x}{p_y}\right)$, luego la demanda del bien x está dada por $x = \frac{m-p_x}{p_x}$. Analicemos las funciones de demanda que obtuvimos. La demanda del bien (y) solo depende de los precios de ambos bienes es decir $(p_x\,, p_y)$, no depende de la renta del individuo, lo cual ya nos da una pista acerca del comportamiento de la curva de Oferta-Renta (es una línea recta) ya que las cantidades demandadas de (y) permanecen constantes ante variaciones en el nivel de renta de los individuos. Por otro lado observamos que la demanda de (x), depende tanto de la renta como del precio propio del bien, si utilizamos el concepto de tasas de variación resulta más sencillo analizar su comportamiento.

$\frac{\Delta x}{\Delta p_x} = \left(-\frac{m}{p_x^2}\right) < 0$, se observa que el bien (x) es un bien ordinario, es decir, se comporta de acuerdo a la ley de la demanda (cuando aumenta su precio disminuyen las cantidades demandadas del mismo). Dicho de otra forma la función de demanda de (x) tiene pendiente negativa.

$\frac{\Delta x}{\Delta m} = \left(\frac{1}{p_x}\right) > 0$, en este caso la tasa de variación de la demanda con respecto a la renta es positiva para el bien (x), lo que da cuenta de su comportamiento normal, es decir, incrementos en el nivel de renta de los individuos provocan incrementos en las cantidades demandadas del bien (en este caso, decimos que el bien x es un bien normal).

$\frac{\Delta x}{\Delta p_y} = 0$, este resultado no parece sorprendente pues la demanda del bien (x) no depende del precio del bien (y).

En el caso del bien (y), las tasas de variación correspondientes son:

$\frac{\Delta y}{\Delta p_x} = \left(\frac{1}{p_y}\right) > 0$, dada la forma que adopta la función de demanda del bien (y), resulta sencillo interpretar esta tasa de variación, a medida que el precio del bien (x) se incrementa, las cantidades demandadas de (y) aumentan, es decir, existe algún tipo de sustituibilidad entre los bienes (x) e (y).

$\frac{\Delta y}{\Delta p_y} = \left(-\frac{p_x}{p_y^2}\right) < 0$, se observa en primer lugar que la función de demanda del bien (y) no es lineal, además su tasa de variación respecto a su precio es negativa, lo que indica que el bien (y) es un bien ordinario, es decir, se comporta de acuerdo a la ley de la demanda (cuando aumenta su precio disminuyen las cantidades

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

demandadas del mismo). Dicho de otra forma la función de demanda del bien (y) tiene pendiente negativa.

$\frac{\Delta y}{\Delta m} = 0$, esta tasa de variación indica simplemente que la demanda del bien (y), no está supeditada al nivel de renta del individuo, depende única y exclusivamente de la relación de precios de ambos bienes.

Ejemplificación

Partiendo del ejemplo propuesto inicialmente, vamos a suponer que el individuo se enfrenta a unas condiciones iniciales dadas por: $m = \$3000 \qquad p_x = \$20 \qquad p_y = \$10$, y su función de utilidad sigue siendo la planteada al comienzo del documento.

Por lo cual el problema de optimización se convierte en,

$$Maximizar\ U(x\,, y) = x + ln(y)$$

$$Sujeto\ a\ \ 3000 = 20x + 10y$$

Bajo estas condiciones la cesta óptima de consumo por parte del individuo está dada por el par ordenado $\left(\frac{m-p_x}{p_x}\,, \frac{p_x}{p_y}\right) = (149,\ 2)$ y la utilidad correspondiente asciende a $U(x, y) = x + \ln y \quad \rightarrow U(149,2) = 149 + \ln 2 = 149.6931\ \ utiles.$

Ahora, vamos a suponer variaciones sobre el precio del bien (x) y a partir de los cambios en las cantidades demandadas (Cestas óptimas), construiremos la curva de oferta-precio para nuestro caso, utilizando para tal fin el concepto de interpolación de LaGrange o polinomio interpolador de LaGrange.

Inicialmente vamos a suponer que el precio del bien (x) cambia a \$40 y posteriormente cambia a \$60, la información correspondiente a estas variaciones en las condiciones iniciales del problema se resumen en la siguiente tabla:

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Tabla. Cestas Óptimas y Utilidades Máximas ante cambios en el precio del bien (x)

$\boldsymbol{m = p_x x + p_y y}$	$(\boldsymbol{x^*, y^*})$	$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x^*, y^*})$
$3000 = 20x + 10y$	$(149{,}2)$	149.6931
$3000 = 40x + 10y$	$(74{,}4)$	75.3862
$3000 = 60x + 10y$	$(49{,}6)$	50.7917

En este punto es posible determinar la curva de oferta-precio, es decir, podemos determinar la ecuación que describe su comportamiento sin necesidad de recurrir a la utilización de algún software especializado. El método de interpolación de LaGrange permite estimar el o los valores que desconocemos de una función en un punto dado, mediante el cálculo de la media ponderada de valores conocidos de la función en puntos cercanos al dado. En nuestro caso los puntos dados son las cestas optimas que se obtuvieron después de llevar a cabo las variaciones en el precio del bien (x). La potencia o bondad del método de interpolación de LaGrange la constituye el hecho de que permite determinar polinomios de grado (n), a partir de (n+1) pares ordenados. Dado que poseemos tres pares ordenados, utilizaremos el polinomio interpolador cuadrático, cuya fórmula está descrita por:

$$P = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ahora, si llamamos $(x_0\,, y_0)\,, (x_1\,, y_1)\,, (x_2\,, y_2)$ a las cestas optimas despues de la varición del precio del bien (x), es decir, $(x_0\,, y_0) = (149{,}2)$, $(x_1\,, y_1) = (74{,}4)$, $(x_2\,, y_2) = (49{,}6)$. Podemos determinar la ecuación que describe el comportamiento de la oferta-precio. Reemplazando los valores en la formula se obtiene:

$$P = 2\frac{(x - 74)(x - 49)}{(149 - 74)(149 - 49)} + 4\frac{(x - 149)(x - 49)}{(74 - 149)(74 - 49)} + 6\frac{(x - 149)(x - 74)}{(49 - 149)(49 - 74)}$$

$$P = \frac{x^2 - 273x + 22226}{1875}$$

Sea P el polinomio que describe el comportamiento de la curva de oferta-precio, es decir, este polinomio atraviesa todos los puntos (cestas optimas) después de llevar a cabo variaciones en el precio del bien (x), manteniendo constantes, el nivel de renta de los individuos y el precio del bien (y).

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

$x(p_x, \overline{p_y}, \overline{m})$

$y(p_x, \overline{p_y}, \overline{m})$

Gráficamente,

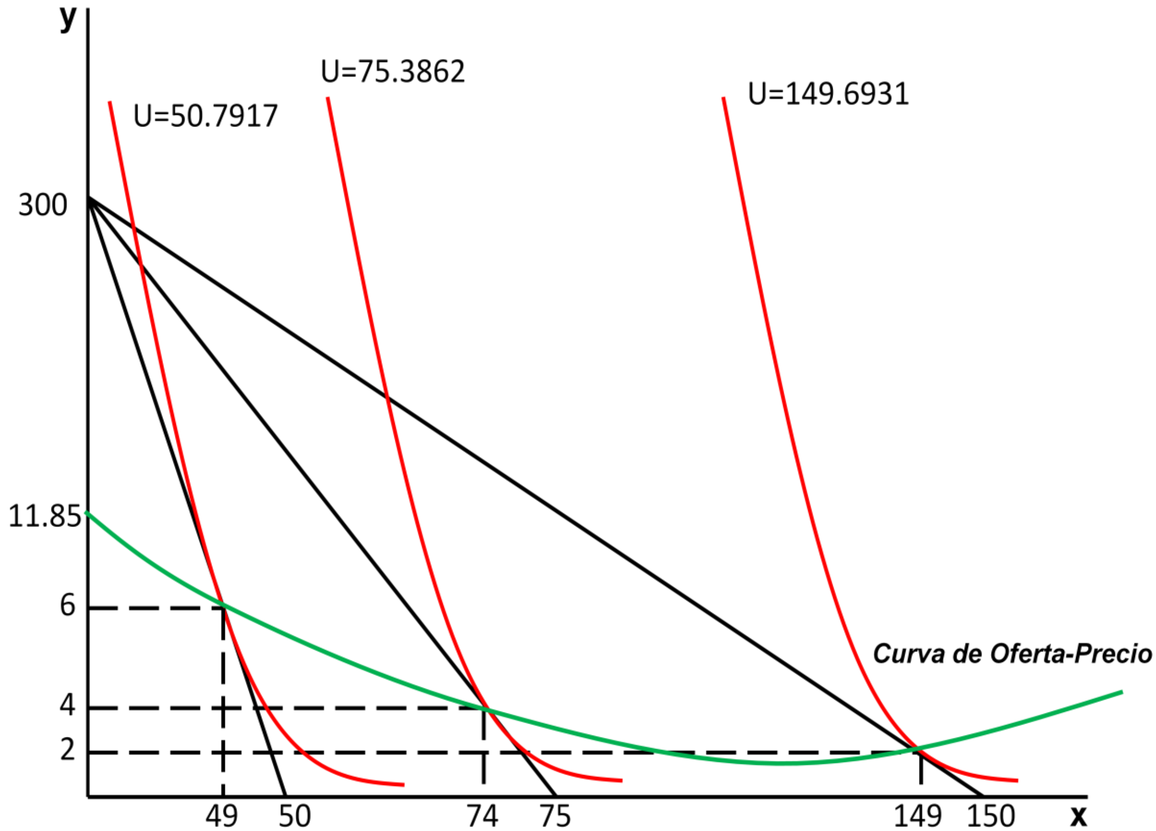

Grafico. Derivación de la curva de Oferta-Precio. Fuente: Elaboración Propia.

En la gráfica se aprecia claramente como en algunos casos, el comportamiento de las curvas de oferta-renta u oferta-precio es distinto a los que se presentan en la mayoría de libros. El método que se utilizó en este caso puede extenderse a muchas funciones de utilidad, las cuales pueden no comportarse o cumplir con la característica de Homoteticidad, es decir, las preferencias pueden no ser regulares.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

El objetivo de este documento es pedagógico, busca proveer a los estudiantes de una herramienta práctica, cuyas aplicaciones se extienden a infinidad de campos o ramas dentro de la economía, además en el estudio de otras ciencias. También puede servir de apoyo a los docentes en sus cursos de microeconomía básica o intermedia, según sea el caso.

En el caso de un curso de Principios de Microeconomía, esta metodología podría resultar útil al momento de calcular la ecuación que describe los comportamientos de las curvas de oferta y demanda no lineales, es decir, cuando tenemos pares ordenados que no guardan relación alguna (simetrías en los deltas), ya sean de precios o de cantidades.

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)

Referencias Bibliográficas

VARIAN R. HAL. (2006). Microeconomía Intermedia Un enfoque actual. (7ª Edición). Barcelona: Antoni Bosch

NICHOLSON WALTER. (2009). Teoría Microeconómica Principios Básicos y Ampliaciones. (9ª Edición). Mexico: Cengage Learning

HENDERSON M. JAMES, QUANDT E. RICHARD. (1973). Teoría Microeconómica Una Aproximación Matemática. (2ª Edición Revisada y Aumentada). Barcelona: Editorial Ariel

PINDYCK S. ROBERT, RUBENFIELD L. DANIEL. (2009). Microeconomía. (7ª Edición). Madrid: Pearson Educación S.A

FRANK H. ROBERT. (2008). Microeconomics And Behavior. (Seventh Edition). New York: McGraw Hill

*Efraín Arango Sánchez
Docente Tiempo Completo
Facultad de Economía
UNAULA (efrain.arango@unaula.edu.co)