The dynamic model of the closed market with one commodity and with finite linear automata as participants

Voronovitsky, Mark

Market Economy Institute of Russian Academy of Scienses

2015

М.М. Вороновицкий

Динамическая модель замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников. [*]

В работе исследуется динамическая модель замкнутого однотоварного рынка, рассматриваемого как объединение автономных взаимодействующих участников. Замкнутость рынка означает, что количество товара и количество денег на рынке одни и те же во все моменты времени. В каждый момент времени каждый участник может иметь только один из трех из статусов: продавец, покупатель или не участвовать в торговле Взаимодействие осуществляется посредством торговли. Используя информацию о результатах своей торговли в предыдущий момент времени, и стремясь обеспечить себе максимальную прибыль, участники переходят в новые статусы и назначают новые цены. Главным результатом этой работы представляется включение в модель конечных автоматов в качестве алгоритмов выбора степени риска при назначении цены участниками торговли. Посредством компьютерного исследования модели показана сходимость средней цены рынка к окрестности некоторого ее усредненного значения. Также изучается влияние емкости памяти автоматов, представляющих участников рынка, на поведение всей системы.

Ключевые слова: математическая модель, замкнутый рынок, однотоварный рынок, динамика цен, траектория, стационарное множество, стационарное состояние, конечные автоматы

Классификация JEL: C51, D01.

Введение

Процесс торговли на рынках регламентируется некоторыми правилами и нормами, включающими в качестве одного из основных элементов ограниченность информации, которую используют участники при принятии решения так же . как и их автономность в принятии решения. Решения агентов в таких системах определяют несколько логически связанных обменов, направленных на извлечение прибыли за счет разницы в ценах на товар в последовательные моменты времени. Результатом деятельности таких рынков оказывается формирование экономических параметров влияющих на функционирование экономики. Большой интерес со стороны экономической науки к описанию и изучению таких систем порожден именно этим влиянием. Один из подходов к изучению подобных рынков состоит в

[*] Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН и финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 14-06-00110).

создании модели описывающей взаимодействия между участниками и механизм назначения участниками своих личных переменных, определяющих их участие в процессе в следующий момент времени, исходя из результатов торговли в данный момент, касающихся именно этого участника. Такие модели должны включать в себя простые, но существенные и логически оправданные черты взаимодействия агентов и механизма принятия ими решений, отражающие основные, по нашему мнению, черты механизмов рыночной торговли и принятия решений участниками реальных рынков. Дальнейшее усложнение моделей позволяет последовательно включить в них механизмы взаимодействия и принятия решения с одной стороны, являющиеся более сложным, но с другой стороны, более точно отражающие реальную ситуацию. Этот подход представляет собой изучение данного процесса на уровне микроописания и его можно рассматривать как частное приложение общей теории агент-ориентированных моделей , представленной например в работе (Макаров, 2012).

Работы И.М. Гельфанда, М.Л. Цетлина и их сотрудников (Цетлин, 1969), в которых были сформулированы и исследованы как поведение конечного автомата в случайной среде, так и модели поведения коллектива конечных автоматов, включая исследование игр автоматов, являются источником нашего подхода к формулированию и исследованию моделей рынка. Эти работы послужили ориентиром для описания взаимодействия и индивидуального поведения участников при разработке нами моделей однотоварного незамкнутого рынка, где рынок представлен, как система взаимодействующих простейших автоматов. (Вороновицкий 1974) . При исследовании этих моделей было доказано, что при любом начальном состоянии рынка, траектория средней цены на рынке за некоторое время всегда приходит в окрестность состояния системы, в котором спрос и предложение на этом рынке почти равны. Рынок исследованный с помощью этой модели не был замкнутым- в каждую единицу времени на него поступало и в него уходило некоторое количество товара и денег.

Модель однотоварного рынка Ричарда Тополя (Topol, 1991) использует некоторые элементы совпадающие с элементами описанной выше модели незамкнутого однотоварного рынка. Модель финансового рынка, на котором предлагается лишь один актив, рассматривается как система взаимодействующих посредством торговли участников. При этом, в зависимости от своего положения на рынке каждый участник может быть то продавцом, то покупателем. Каждый продавец запрашивает в каждый момент времени свою собственную цену продажи, а каждый покупатель предлагает свою собственную цену покупки, которые он основывает не только на информации о предыдущей торговле, но также и на оценке агентом фундаментальной ценности (fundamental value) – «агент-эффективной цене». Торговля на рынке моделируется посредством парных сделок и осуществляется, если цена, предлагаемая покупателем, не менее цены, запрашиваемой продавцом. Алгоритм перехода от состояния в данный момент времени к состоянию в следующий момент времени включает в себя также правила корректировки участником своих цен, в которых также как и в определении торгующих пар продавец-покупатель, присутствует элемент случайности. Поэтому поведение участников биржевых торгов моделируется непростым случайным процессом. Главный результат этой работы демонстрация возможности стадного поведения участников биржи, т.е. поведения, когда выбор участников определяется не собственной информацией, а известной каждому участнику данными о поведении большинства других участников.

Агент-ориентированная модель биржи известная под названием модель искусственной биржи Санта Фе (Santa Fe Artificial Stock Market), имитирует динамику рынка, связанную с индивидуальной оценкой агентами текущего состояния рынка и обучением участников (LeBaron, Brian, Palmer, 1999). Стремление авторов учесть большое количество факторов, влияющих на выбор решения участниками рынка и взаимодействие между ними, делает эту модель трудно поддающейся аналитическому исследованию.

Попытки создать модель рынка хотя бы некоторыми чертами напоминающего биржу, которая бы отражала основные (по мнению автора) черты биржи и в то же время позволяла надеяться на успех аналитического исследования хотя бы части ее характерных черт, привели к разработке модели замкнутого однотоварного рынка

(Вороновицкий, 2014). Под замкнутым однотоварным рынкам в этой работе понимается рынок одного товара, на котором во все моменты времени имеется одно и то же количество денег и одно и то же количество товара. Рассматривается дискретное время. Кроме имеющихся у него в данный момент количеств денег и товара и назначаемой им цены товара состояние участника характеризуется также его статусом. Участники торговли в каждый момент времени могут быть продавцами, покупателями или ожидающими (т.е. временно не участвовать в торговле). В каждый момент времени участники рынка изменяют свой статус и меняют свои цены(запрашиваемые для продавцов, предлагаемые для покупателей и ориентировочные для ожидающих), используя только свою собственную информацию о торговле в предыдущий момент времени. Механизм взаимодействия между продавцами и покупателями посредством торговли в этой модели такой же, как и в модели незамкнутого однотоварного рынка (Вороновицкий, 1974) притом, что разделение участников рынка по статусам и механизмы индивидуального поведения продавцов, покупателей и ожидающих появляются только в новой модели. В этой модели принятие решения участников состоит из двух последовательных стадий: выбор своего статуса в следующий момент времени, и затем выбор своей цены (запрашиваемой, предлагаемой или ориентировочной) также в следующий момент времени. Если из и условия логичности выбора выбор статуса представляется одним и тем же для различных модификаций этой модели, то выбор цены может характеризоваться как рациональностью и осторожностью или ограниченным риском, так и иррациональностью. Стоит отметить, что принятие участником решения о выборе статуса и цены в следующий момент не удается представить как действие по максимизации или увеличению какой-либо функции цели. В процессе торговли продавец продает по цене не меньшей запрашиваемой им, покупатель, когда он участвует в торговле, покупает по цене меньшей предлагаемой. Поэтому каждый из них получает при этом определенную прибыль, и действует в следующий так, чтобы с одной стороны получить как можно большую прибыль, но с другой стороны продавец остерегается назначить в следующий момент слишком высокую цену, а покупатель остерегается назначить слишком низкую цену ибо при таких ценах каждый их них может выбыть из числа торгующих. Ожидающие стремятся включиться в процесс торговли в качестве продавцов или покупателей с наилучшими перспективами торговли. Таким образом при выборе статуса и цены в следующий момент участники стремятся увеличить прибыль и при этом гарантировать свое участие в последующей торговле.

В работе (Вороновицкий, 2015) рассматривается только осторожный выбор цены в этой модели замкнутого однотоварного рынка. Оказывается что, при предположениях о рациональности выбора цены можно аналитически исследовать динамику множества цен всех участников рынка. В работе удалось доказать, что , начиная с некоторого момента времени все цены на рынке мало отличаются от средней цены рыночной торговли в предыдущий момент времени. Кроме этого с помощью компьютерной реализации модели удалось установить, что при различных начальных (в момент t=0) количествах денег, количествах товара и ценах участников через определенное время средняя цена торговли мало отличается от некоторой константы.

Немало работ посвящено изучению рационального, рискованного и иррационального выбора экономических агентов. В то же время на пути исследования влияния риска и иррационального выбора участников на поведения коллектива сделаны только первые шаги.

Изучению поведения коллектива участников замкнутого однотоварного рынка при возможности назначения цены участником двумя способами посвящена предлагаемая работа. Причем оба способа назначения цены в последующий момент характеризуются логической оправданностью решения, но при этом различна степень риска не участвовать в торговле в последующий момент из-за слишком высокой цены ,запрашиваемой продавцом, или слишком низкой цены, предлагаемой покупателем. Самым важным в данной работе, по мнению автора, является то, что выбор действия (одной из двух степеней риска) в модели осуществляется предложенными М.Л. Цетлиным простейшими конечными автоматами с линейной тактикой и целесообразным поведением, а также отличной от единицы памятью одной и той же для всех участников рынка. Выбор действия участником моделируется в работе посредством простого конечного автомата с линейной тактикой, для которого входной переменной является величина равная 1 или 0 (поощрение или штраф за предшествующее действие). Стационарная случайная среда характеризуется неизменными вероятностями поощрения за каждое действие автомата. В работах М. Л. Цетлина было показано, что такой автомат при взаимодействии со стационарной случайной средой демонстрирует целесообразное поведение, т.е. его конструкция индуцирует стремление получить максимально частые поощрения. Описанная нами система исследовалась посредством компьютерной реализации модели. Было показано, что при любых начальных условиях, при ценах выбираемых рационально, хотя и с определенной долей риска для некоторых участников, начиная с некоторого момента времени, средняя цена торговли оказывается все время близкой к некоторой константе (не зависящей от начальных условий). При этом оказывается, что при достаточно большой памяти автоматов в течение процесса, автоматы используют только часть своей памяти. В этой модели автоматы не знают заранее последствий набора действий (своих и остальных) участников, кроме этого результаты предыдущего взаимодействия автоматов является исходной ситуацией для последующего взаимодействия участников, что отличает эту ситуацию и от ситуации теории игр и от ситуации характерной для игр автоматов. Наконец конечный автомат с линейной тактикой (Цетлин,1969) выбран нами потому, что он не только целесообразно (в смысле максимизации выигрыша) взаимодействует со стационарной случайной средой, но успешно проявляет себя в изучавшихся ранее (Цетлин, 1969) играх автоматов. При выборе характера назначения цены в следующий момент времени прибыль от торговли играет существенную роль, так как вероятность того или иного сигнала на входе автомата в момент t полагается зависящей от того какой была его прибыль от торговли в предшествующий момент по сравнению с максимально возможной.

Вероятность перехода автомата из одного состояния в другое зависит от предыдущих выборов участника и прибыльности предшествующей торговли. Эта зависимость определяет поведение всей системы и может быть выражена в различной форме. В этой модели выбрана одна из простейших форм такой зависимости.

В каждый момент времени участник модели характеризуется пятью переменными: количеством товара и количеством денег, которыми он обладает в этот момент, его статусом в этот момент, его ценой в данный момент (запрашиваемой, предлагаемой или ориентировочной в зависимости от его статуса), и характеристикой выбора цены в следующий момент времени (осторожной или рискованной). Каждый момент времени предполагается состоящим из двух тактов. Механизм обмена товара на деньги действует в течение первого такта каждого момента времени.

Во втором разделе статьи сформулирована модель взаимодействия участников замкнутого однотоварного рынка, которая в части описания взаимодействия участников в основном совпадает с соответствующей частью предыдущей работы (Вороновицкий,2015).

Механизм обмена товара на деньги действует в течение первого такта каждого момента времени. Соотношение цен всех покупателей и всех продавцов определяет последовательность торговых сделок. В результате торговли у каждого участника рынка оказываются новые количества денег и товара, средняя цена, по которой он торговал и также возникает средняя цена торговли на рынке в течение первого такта этого момента времени. Это рассматривается как личная информация участника, на основе которой на втором такте этого момента он принимает решении о величинах своих остальных переменных.

Алгоритм выбора решения участником на втором такте данного момента времени, которое он принимает на основе личной информации и средней цены на рынке, собственно и представляет собой его поведение.

В третьем разделе описывается модель выбора участником замкнутого однотоварного рынка своего статуса (продавец, покупатель, ожидающий) в следующий момент времени. В предыдущей работе (Вороновицкий, 2015) использовалась подобная этой модель поведения участников, но при одном способе выбора цены, называемом в этой работе «осторожным». При назначении своего нового статуса участник нашей модели руководствуется тем, что при выборе статуса продавца его новая цена должна быть больше средней цены рынка, определенной в результате торговли на предшествовавшем такте, а в случае выбора статуса покупателя его новая цена должна быть меньше этой средней цены. Если выполнение этих условий невозможно, то агент выбирает статус ожидающего.

В четвертом разделе описывается механизм выбора участником рынка одного из двух возможных вариантов действия состоящего в назначения своей цены в следующий момент времени при уже выбранном статусе. При осторожном действии участник назначает цену в следующий момент равную средней цене его сделок в предыдущий момент. При рискованном поведении продавец пытается назначить цену, превышающую его среднюю цену сделки, а покупатель пытается назначить цену меньшую его средней цены сделки в предшествующий момент. Вводится параметр модели, означающий шаг повышения или понижения цены. Сказанное относится к случаю, когда продавец продал весь свой товар или покупатель истратил все свой деньги. В остальных случаях роль ориентира, которым в предыдущем рассмотрении была средняя цена сделок участника, играет его цена в момент t. После выбора статуса участник выбирает одно действие из имеющегося набора возможных действий и затем в соответствие с выбранным действием назначает свою цену в следующий момент времени. Этот выбор моделируется посредством простого конечного автомата с линейной тактикой $L_{2m,2}$, с емкость памяти 2m способного выполнять два действия, причем за каждым действием закреплены m состояний. Переход из одного состояния автомата в другое(или в себя) осуществляется в зависимости от поощрении или штрафа за предшествующее действие.

Вероятность штрафа пропорциональна при этом прибыли от торговли для участвовавшего в торговле или улучшению его положения на рынке вследствие изменения средней цены рыка для участников, не принимавших участия в торговле, в предшествовавший момент времени. После выбора действия (осторожного и ли рискованного) этот выбор реализуется в назначении цены в следующий момент времени и на этом процесс, относящийся к данному моменту времени заканчивается. Исходя из результатов торговли в этот момент времени, такой же процесс повторяется и в следующий момент времени

В пятом разделе работы приводятся результаты исследований динамики нашей модели посредством компьютерных экспериментов. Напоминается что в предыдущей работе (Вороновицкий, 2015) была описана динамика нашей модели в случае, когда все участники во все моменты времени назначают цену в следующий момент времени посредством осторожного действия. При этом в компьютерных экспериментах наблюдалось, что с некоторого момента средняя цена по рынку все время находится в некотором фиксированном интервале своих значений. Такой же результат только с намного более широким диапазоном изменения цены обнаружен и для модели однотоварного рынка, когда все участники во все моменты времени назначают цену в следующий момент времени посредством рискованного действия. И наконец в случае, когда выбор действия участником осуществляется автоматом $L_{2m,2}$, меняющим свои состояния в зависимости от поощрения или штрафа, средняя цена рынка начиная с некоторого момента находится в некотором интервале своих значений большем соответствующего интервала в случае выбора осторожных действий и меньшем соответствующего интервала в случае выбора рискованных действий. Также в этом разделе дано сравнения динамики средней цены при различной емкости памяти 2m конечных автоматов $L_{2m,2}$.

В шестом разделе (заключении) обсуждаются перспективы дальнейшего развития аналитического и компьютерного исследований однотоварного рынка с помощью агент-ориентированных моделей.

2 .Модель взаимодействия участников рынка.

Будем считать время t дискретным(t=0,1,2,3…). Предположим также, что каждый момент времени как бы состоит из двух тактов. На первом такте момента t участники обменивают товар на деньги посредством последовательных актов торговли – осуществляется процесс взаимодействия участников. На втором такте этого момента каждый участник принимает решения о своем статусе, характере выбора цены и цене в следующий момент времени.

Пусть имеется N участников рынка, и они пронумерованы индексами i (i=1,2,…N) и в момент времени t участник с номером i обладает товаром в количестве $x_i(t)$ и деньгами $y_i(t)$. Для определенности предположим, что на рынке присутствуют одна единица товара и одна единица денег. Т.е.: $\sum_{i=1}^{i=N} x_i(t) = 1; \sum_{i=1}^{i=N} y_i(t) = 1.$

Статус i- го участника в момент t обозначим $\alpha_i(t)$. При этом если $\alpha_i(t)$.=-1 , то в момент t i-ый участник рынка является покупателем, $\alpha_i(t)$=1 означает, что он является продавцом товара, а $\alpha_i(t)$=0 означает, что i-ый участник рынка в данный момент не участвует в торговле, ожидая более выгодной ситуации. Наконец каждый участник характеризуется ценой $v_i(t)$ и характером выбора цены $k_i(t)$. При этом если . i-ый участник является в момент t продавцом товара, то $v_i(t)$ означает цену, ниже которой он не согласиться продать свой товар. Если $\alpha_i(t)$=-1, т.е. i-ый участник является в момент t покупателем товара, то $v_i(t)$ означает цену, больше которой он не согласиться заплатить за свой товар. Если $\alpha_i(t)$=0, то цена этого участника имеет смысл ориентира при выборе решения о переходе в другой статус.

Опишем происходящий на первом такте момента t процесс, состоящий из сделок между продавцами и покупателями. В этом процессе каждый продавец предлагает покупателям весь имеющийся у него товар и стремится продать его по наибольшей из возможных цен. Каждый продавец предназначает все имеющиеся у него деньги для покупки товара и стремиться купить товар по наибольшей из возможных цен. Порядок сделок между продавцами и покупателями определяется соотношением цен на рынке в данный момент. Предположим, что в момент времени t участники $i = i_1, \ldots, i_k$ - продавцы и $v_{i_1}(t) \le v_{i_2}(t) \le \ldots \le v_{i_k}(t)$, а участники $j = j_1, \ldots, j_l$ покупатели и $v_{j_1}(t) \ge \ldots \ge v_{j_l}(t)$. В этой ситуации первая сделка происходит между продавцом с номером i_1 и покупателем с номером j_1, причем они торгуют по цене $(v_{i_1}(t) + v_{j_1}(t))/2$. Предположим, что покупатель j_1 истратил все свои деньги на покупку у продавца i_1 товара. Если у продавца i_1 еще остался товар, то он предлагает его покупателю j_2. Сделка между ними осуществляется по цене $(v_{i_1}(t)+v_{j_2}(t))/2$. Если же у продавца i_1 не осталось товара, а у покупателя j_1 еще остались деньги, то последний обращается за товаром к продавцу с номером i_2, и сделка между ними будет происходить по цене $(v_{i_2}(t)+v_{j_1}(t))/2$. Далее, в зависимости от результата этой второй сделки, заключатся третья сделка между продавцом i_1 и покупателем j_3 или между продавцом i_2 и покупателем j_2 (аналогично: между покупателем j_1 и продавцом i_3 или покупателем j_2 и продавцом i_2). Такой процесс последовательного заключения сделок будет продолжаться до тех пор, пока не окажется следующая ситуация: либо у продавцов больше не осталось товара, либо у покупателей больше не осталось денег, либо цена продавца, у которого еще есть товар, больше цены покупателя, у которого еще остаются деньги.

В описании процесса торговли мы до сих пор предполагали, что цены всех продавцов, так же как и цены всех покупателей различны. Если же имеется несколько продавцов, или несколько покупателей с одинаковой ценой или оба случая присутствуют одновременно, то предполагается, что обмен происходит между одним обобщенным покупателем с данной ценой покупки и одним обобщенным продавцом с данной ценой продажи. Положим $v_{i_1}(t)=...=v_{i_k}(t)=v(t)$, $x_{i_1}(t)\ge...\ge x_{i_k}(t)$ $x_{i_1}(t)+...+x_{i_k}(t)=X_k(t)$ и; продавцы $i_1,i_2,\ldots,i_k$ торгуются с покупателем (или с несколькими покупателями с одинаковой ценой), предлагающим за товар цену $V(t)$ и обладающим $Y_k(t)$ денег. Предположим, что $X_k(t)(v(t)+V(t))/2>Y_k(t)$, тогда не все продавцы могут полностью продать весь свой товар, и в этом случае существует такие $l < k$ и $H(t)$:

$$(x_{i_k}(t)+x_{i_{k-1}}(t)+...+x_{i_{l+1}}(t)+(k-l)H(t))(v(t)+V(t))/2=Y_k(t)$$
$$x_{i_1}(y)>H(t),x_{i_2}(t)>H(t),...,x_{i_l}(t)>H(t),x_{i_{l+1}}(t)\le H$$

При этом, l продавцов реализуют весь свой товар, а остальные k- l продавцов реализуют только часть своего товара (причем одинаковое количество)

По такому же алгоритму происходит распределение затрат между покупателями с одинаковой ценой. Таким образом полностью описан алгоритм торговли между продавцами и покупателями товара в течение перового такта момента t.

После завершения первого такта для агентов принявших участие в торговле мы имеем $x_i(t+1)<x_i(t),y_i(t+1)>y_i(t)$ если $\alpha_i(t)=1$ и $x_i(t+1)>x_i(t),y_i(t+1)<y_i(t)$ если $\alpha_i(t)=-1$. Для не принявших участие в торговле, включая ожидающих будет $x_i(t+1)=x_i(t),y_i(t+1)=y_i(t)$

Для участников обмена в момент t можно определить среднюю цену $w_i(t)$ состоявшегося обмена:

$$w_i(t)=(y_i(t+1)-y_i(t))/(x_i(t)-x_i(t+1)), \text{ если } \alpha_i(t)=1;$$
$$w_i(t)=(y_i(t)-y_i(t+1))/(x_i(t+1)-x_i(t)), \text{ если } \alpha_i(t)=-1.$$

Можно также выделить общие характеристики обмена на этом такте

$$\Delta Y(t)=\sum_{j=j_1}^{j=j_l}(y_j(t)-y_j(t+1)); \quad \Delta X(t)=\sum_{i=i_1}^{i=i_k}(x_i(t)-x_i(t+1))$$

и среднюю по рынку цену обмена для случая, когда такой обмен произошел: $\Delta X(t)>0,\ u(t)=\dfrac{\Delta Y(t)}{\Delta X(t)}$.

Мы предполагаем, что средняя цена торговли на первом такте момента t становится известной каждому участнику и он может использовать эту величину наряду со своей личной информацией(с индексом i) для принятия решения в течение второго такта момента t .

3. Модель принятия решений о статусе и цене

Обозначим: $\sigma(t)=\min_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t)-\max_{\alpha_i(t)=1} v_i(t)$ Эта величина в предыдущих наших работах называется расхождением спектра цен (множества всех цен). Если $\sigma(t)\geq 0$, то в момент t все цены продавцов меньше любой цены покупателей. Наша модель выбора статуса и цен в следующий момент состоит в таком назначении статуса и цен, чтобы в момент t+1 имело место $\sigma(t+1)\geq 0$. Это вероятно одна из простейших, но не единственная возможная модель поведения.

Агент i выбирает значения своих переменных ($\alpha_i(t+1)$, $v_i(t+1)$) в зависимости от имеющихся у него после первого такта момента t количеств товара и денег $x_i(t+1)$,$y_i(t+1)$ и $\alpha_i(t)$-своего статуса в момент t. Он осуществляет этот выбор сравнивая среднюю цену на рынке u(t) со средней ценой своих последних сделок $w_i(t)$ или со своей ценой $v_i(t)$.

Рассмотрим механизм выбора статуса в момент t+1. Если в результате торговли на первом такте момента t продавец($\alpha_i(t)=1$) реализовал весь свой товар($x_i(t+1)=0$), то в случае $w_i(t)>u(t)$ в момент t+1 он становится покупателем ($\alpha_i(t+1)=-1$), а в случае $w_i(t)\leq u(t)$ он становится ожидающим ($\alpha_i(t+1)=0$). Если в результате торговли на первом такте момента t продавец($\alpha_i(t)=1$) реализовал только часть своего товара или совсем не участвовал в торговле($x_i(t+1)>0$), то в случае $v_i(t)>u(t)$ он становится покупателем ($\alpha_i(t+1)=-1$) , если он обладает деньгами($y_i(t+1)>0$) и становится ожидающим($\alpha_i(t+1)=0$),, если у него нет денег($y_i(t+1)=0$), а в случае $v_i(t)\leq u(t)$ в момент t+1он остается продавцом($\alpha_i(t+1)=1$). Аналогично, если в результате торговли на первом такте момента t покупатель($\alpha_i(t)=-1$) истратил все свои деньги ($y_i(t+1)=0$), то в случае $w_i(t)<u(t)$ в момент t+1 он становится продавцом ($\alpha_i(t+1)=1$), а в случае $w_i(t)\geq u(t)$ он становится ожидающим ($\alpha_i(t+1)=0$). Если в результате торговли на первом такте момента t покупатель($\alpha_i(t)=-1$) истратил только часть своих денег или совсем не участвовал в торговле($y_i(t+1)>0$), то в случае $v_i(t)<u(t)$ он становится продавцом ($\alpha_i(t+1)=1$) , если он обладает товаром($x_i(t+1)>0$) и становится ожидающим($\alpha_i(t+1)=0$), если у него нет товара($x_i(t+1)=0$), а в случае $v_i(t)\geq u(t)$ в момент t+1он остается покупателем($\alpha_i(t+1)=-1$).

Ожидающие участники рынка($\alpha_i(t)=0$) естественно не участвуют в торговле, но ценность их товара и денег определяется величиной средней цены на рынке u(t) и величиной собственной оценки $v_i(t)$. Если оказывается, что после первого такта момента t стало $v_i(t)\leq u(t)$ и $x_i(t)=x_i(t+1)>0$, то ожидающий участник в момент t+1 становится продавцом($\alpha_i(t+1)=1$). Если же стало $v_i(t)>u(t)$ и $x_i(t)=x_i(t+1)>0$, то ожидающий участник в момент t+1 остается ожидающим($\alpha_i(t+1)=0$). Если оказывается, что после первого такта момента t стало $v_i(t)\geq u(t)$ и $x_i(t)=x_i(t+1)=0$, то ожидающий участник в момент t+1 становится покупателем($\alpha_i(t+1)=1$). Если же стало $v_i(t) > u(t)$ и $x_i(t)=x_i(t+1)=0$, то ожидающий участник в момент t+1 остается ожидающим($\alpha_i(t+1)=0$).

Вслед за выбором своего статуса в следующий момент времени участники рынка должны выбрать свои цены, относящиеся к следующему моменту времени

Естественно можно рассмотреть модели поведения участников рынка с многими способами выбора цен, относящихся к следующему моменту времени, с различной степенью риска не принять участие в торговле в следующий момент (в том числе и алогичные, каким, в частности, является стадное поведение). Но оправдывая себя, тем, что это исследование подобной модели реализуется впервые, и руководствуясь стремлением к простоте, мы рассмотрим только два простейших характера выбора цен (два действия) – осторожный и рискованный.

При осторожном выборе продавец, продавший весь товар в момент t, назначает в следующий момент цену $v_i(t+1)=w_i(t)$, а при рискованном способе он назначает в следующий момент цену $v_i(t+1)=\min(w_i(t)-d,u(t))$. Здесь величина d означает наименьшее возможное изменение цены и является параметром модели.

В случае осторожного назначения цены вероятность того, что этот участник будет участвовать в торговле в момент t+1 выше, чем при рискованном выборе. Это происходит потому, что при осторожном выборе цена покупателя больше (а цена продавца меньше), чем цена при рискованном выборе. Будем считать, что при осторожном выборе i-го участника рынка переменная этого участника, обозначающая характер его выбора цены, равна единице ($k_i(t)=1$), а при рискованном выборе эта же переменная равна минус единице ($k_i(t)=-1$). При рискованном выборе продавец назначает (если это возможно) цену на d большую, чем при осторожном выборе цены, а покупатель назначает(если это возможно) цену на d меньшую, чем при осторожном выборе цены. Таким образом, участник стремится получить большую прибыль от предстоящей торговли, но рискует совсем не принять участие в торговле. В случае осторожного выбора ($k_i(t+1)=1$) покупатель ($\alpha_i(t+1)=-1$) при $\alpha_i(t)=-1$, $y_i(t+1)>0$ назначает цену $v_i(t+1)=v_i(t)+d$ (он вынужден повысить цену, чтобы получить возможность участвовать в торговле в момент t+1), тогда как при рискованном выборе ($k_i(t+1)=-1$) он полностью подчиняется стремлению купить в следующий момент дешевле и назначает цену $v_i(t+1)=v_i(t)-d$, если $v_i(t)-d \geq u(t)$ и $u(t)$ в противоположном случае. В случае $\alpha_i(t)=1$, $x_i(t+1)=0$ покупатель ($\alpha_i(t+1)=-1$) при осторожном выборе ($k_i(t+1)=1$) назначает цену $v_i(t+1)=w_i(t)$, а при рискованном выборе ($k_i(t+1)=-1$) он подчиняется стремлению купить в следующий момент подешевле и назначает цену $v_i(t+1)=w_i(t)-d$, если $w_i(t)-d \geq u(t)$ и $u(t)$ в противоположном случае. В остальных случаях покупатель ($\alpha_i(t+1)=-1$) при осторожном выборе ($k_i(t+1)=1$)назначает цену $v_i(t+1)=v_i(t)$, а при рискованном выборе ($k_i(t+1)=-1$) он подчиняется стремлению купить в следующий момент подешевле и назначает цену $v_i(t+1)=v_i(t)-d$, если $v_i(t)-d \geq u(t)$ и $u(t)$ в противоположном случае. Совершенно аналогично в случаях $k_i(t+1)=1$ и $k_i(t+1)=-1$ поступает продавец.

Если в момент t+1 участник рынка из продавца или покупателя стал ожидающим, то происходит следующее. При осторожном выборе ($k_i(t+1)=1$), если он продал весь свой товар или истратил все свои деньги ($x_i(t+1)=0$ или $y_i(t+1)=0$), он назначает в качестве цены в момент среднюю цену предыдущей торговли ($v_i(t+1)=w_i(t)$). Если же в этом случае ($k_i(t+1)=1$) оказывается $x_i(t+1)>0$ или $y_i(t+1)>0$, то он назначает цену в момент t=1 равную своей последней цене ($v_i(t+1)=v_i(t)$). При рискованном выборе ($k_i(t+1)=-1$) он назначает цену на d большую цены осторожного выбора, если $x_i(t+1)>0$, и на d меньшую осторожного выбора, если $x_i(t+1)=0$. Если ожидающий участник ($\alpha_i(t)=0$) в момент t+1 становится продавцом или покупателем, то происходит следующее. При осторожном выборе цены($k_i(t+1)=1$) он назначает цену в момент t+1 равной своей цене в момент t. При рискованном выборе ($k_i(t+1)= -1$) назначает цену на d большую своей цены в момент t, если становится продавцом (при этом, если $v_i(t)+d>u(t)$, то $v_i(t+1)=u(t)$), и цену на d меньшую, если становится покупателем (при этом, если $v_i(t)+d<u(t)$, то $v_i(t+1)=u(t)$) .

Наконец, если ожидающий участник и в момент t также был ожидающим, то для него естественно приблизится к ситуации, когда сможет участвовать в торговле(стать продавцом и покупателем) с выгодной для него ценой. Поэтому при осторожном выборе ($k_i(t+1)=1$) он назначает цену $v_i(t+1)=v_i(t)-d$, если $x_i(t+1)>0$ и

$v_i(t+1)=v_i(t)+d$ если $x_i(t+1)>0$, а при рискованном выборе($k_i(t+1)=-1$) он оставляет свою цену неизменной $v_i(t)=v_i(t)$.

В предыдущей работе для случай осторожного выбора цены всегда и всеми участниками были доказаны некоторые утверждения о динамике множества цен участников рынка. Доказательства этих утверждений легко переносятся на случай, когда каждый отдельный участник, независимо от остальных, выбирает осторожное или рискованное назначение цены в следующий момент t+1. Пусть :

$$\rho(t)=\max_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t)-\min_{\alpha_i(t)=1} v_i(t) \text{ ширина спектра цен },$$

$$\eta_1(t)=u(t-1)-\min_{\alpha_i(t)=1} v_i(t),$$

$$\eta_{-1}(t)=\max_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t)-u(t-1),$$

$$\nu_x(t)=\max_{\alpha_i(t)=0, x_i(t)>0} v_i(t)-u(t-1), \xi_x(t)=u(t-1)-\min_{\alpha_i(t)=0, x_i(t)>0} v_i(t),$$

$$\nu_y(t)=\max_{\alpha_i(t)=0, y_i(t)>0} v_i(t)-u(t-1), \xi_y(t)=u(t-1)-\min_{\alpha_i(t)=0, y_i(t)>0} v_i(t),$$

Тогда имеют место следующие факты.

Утверждение 1. Начиная с некоторого момента T_0, будет $\sigma(t)\geq 0, t > T_0$, *. Если* $\alpha_i(t)=0$*, то для* $t>T_0$ *будет: либо* $x_i(t)=0$*, либо* $y_i(t)=0$.

Утверждение 2. Для $t>T_0+1$ мы имеем:

$$\eta_1(t)\geq 0,\ \eta_{-1}(t)\geq 0,\ 0\leq \xi_x(t)\leq d,\ 0\leq \nu_y(t)\leq d,\ 0\leq \xi_y(t),\ 0\leq \nu_x(t).$$

Утверждение 3. Существует такое $T_1 > T_0$, что для всех $t > T_1$ будет

$$\rho(t)\leq 5d+\beta,\ \eta_1(t)\leq 3{,}5d+\beta/2,\ \eta_{-1}(t)\leq 3{,}5d+\beta/2,$$

где β *– сколь угодно малая, но постоянная величина.*

Для полного описания поведения участника рынка остается определить целесообразный (в смысле прибыли участника) механизм изменения характера выбора цены – $k_i(t+1)$ для каждого участника т.е переход от $k_i(t)$ к $k_i(t+1)$, исходя из изменений личных переменных участника и изменения средней цены рынка в результате торговли в предыдущий момент времени. В качестве такого механизма предлагается использовать конечные автоматы с линейной тактикой.

4. Модель принятия решения о характере выбора цены

В нашей модели поведения участника рынка мы используем конечный детерминированный автомат с линейной тактикой, емкостью памяти 2m и с двумя действиями, который в работах М.Л Цетлина и его сотрудников обозначается $L_{2m,2}$. Автомат $L_{2m,2}$ может производить два действия f_1 и f_{-1} и имеет 2m состояний: $\varphi_1,\varphi_2,,...,\varphi_m ,\varphi_{m+1},\varphi_{m+2},,...,\varphi_{2m}$; (число 2m называется емкостью памяти автомата), при этом в состояниях $\varphi_1,\varphi_2,,...,\varphi_m$ автомат производит действие f_1 (осторожное назначение цены в момент t+1), а в состояниях $\varphi_{m+1},\varphi_{m+2},,...,\varphi_{2m}$ автомат производит действие f_{-1} (рискованное назначение цены в момент t+1). Автомат воспринимает в каждый момент времени t=1,2,3,…один сигнал s, принимающий два значения s=1 – поощрение , s=-1 –штраф и в зависимости от сигнала меняет свое внутреннее состояние. В зависимости от значения s (поощрение или штраф) наш автомат меняет свое состояние следующим образом.

Когда s(t)=1 (поощрение) изменение состояния описывается следующими равенствами:

$\varphi(t+1)=\varphi_{i+1}$ *если* φ(t)=φ_i *и* i=1,2,3,...,m-1,m+1,2m-1

$\varphi(t+1)=\varphi_i$ если φ(t)=φ_i и i=m или i=2m

Когда s(t)=-1 (штраф) изменение состояния автомата описывается следующими равенствами:

$\varphi(t+1)=\varphi_{i-1}$ если φ(t)=φ_i и i=2,3,...,m,m+2,..2m

$\varphi(t+1)=\varphi_{m+1}$ если φ(t)=φ_1 и φ(t+1)=φ_1 если φ(t)=φ_{m+1}

Матрицу перехода из состояния φ_i в состояние φ_j при s=1 обозначим $A_{i,j}$ (1), а матрицу перехода из состояния φ_i в состояние φ_j при s=-1 обозначим $A_{i,j}(-1)$.

Каждая строка этих матриц содержит ровно один элемент равный единице, а остальные элементы равны нулю.

Мы будем говорить, что автомат $L_{2m,2}$ находится в стационарной случайной среде $C(p_1,p_{-1})$, если действие автомата f_1, произведенное в момент t, влечет за собой в момент t+1 значение его сигнала s равное единице (s=1). с вероятностью $p_1=(1+\alpha_1)/2$ и равное нулю (s=-1) с вероятностью $1-p_1$ а действие автомата f_{-1}, произведенное в момент t, влечет за собой в момент t+1 значение его сигнала s равное единице (s=1) с вероятностью $p_{-1}=(1+\alpha_{-1})/2$ и равное минус единице (s=-1)с вероятностью $1-p_{-1}$. Вероятность перехода автомата из состояния φ_i в состояние φ_j равна $p_{i,j}=p_i A_{i,j}(1)+(1-p_i) A_{ij}(-1)$, где $p_i=p_1$, если $1\le i\le m$ и $p_i=p_{-1}$ если $m<i\le 2m$.

Таким образом поведение автомата $L_{2m,2}$ в стационарной случайной среде описывается цепью Маркова, которая в нашем случае оказывается эргодической. Поэтому, существуют финальные вероятности состояний автомата $r_1, r_2, \ldots, r_{2m}$. Обозначим ω_1 сумму $r_1+r_2+\ldots+r_m$ и обозначим ω_{-1} сумму $r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots+r_{2m}$. ω_1 и ω_{-1} - вероятности действий f_1 и f_{-1} в нашей случайной среде. Ожидаемый выигрыш W_m автомата $L_{2m,2}$ в этой случайной среде выразится формулой $W_m=\omega_1\alpha_1+\omega_{-1}\alpha_{-1}$.. Очевидно, целесообразность поведения автомата заключается в его стремлении к увеличению ожидаемого выигрыша. Доказано, что в частности автомат $L_{2m,2}$ обладает целесообразным поведением в стационарной случайной среде в том смысле что $W_m>(\alpha_1+\alpha_{-1})/2$. Наряду с этим из доказанных общих фактов следует, что последовательность автоматов $L_{2m,2}$ (m=1,2,…) является асимптотически-оптимальной т.е $W=\lim_{m\to\infty} W_m=\max(\alpha_1,\alpha_{-1})$., конечно, при условии, что $\max(\alpha_1, \alpha_2)\ge 0$. Наряду с этим И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин и их сотрудники рассматривали случай игры с многими участниками, когда участники не обладают априорной информацией о выигрышах при любых наборах стратегий участников (в отличие от классического случая, когда игроки заранее знают последствия своих действий и действий противников). На примерах некоторых игр, участниками которых являются автоматы, было показано, что конечные автоматы с линейной тактикой могут успешно(в смысле выигрыша) участвовать в этих играх.

Все вышеизложенное явилось причиной нашей попытки использовать простейшие конечные линейные автоматы для моделирования выбора участником рынка характера назначения цены в следующий момент времени.

Мы будем полагать, что поведение i-го участника рынка, касающееся выбора характера назначения им цен в момент t+1, определяет конечный автомат с линейной тактикой $L^{(i)}_{2m,2}$ обладающий 2m состояниями $\varphi^{(i)}_1,\varphi^{(i)}_2,...,\varphi^{(i)}_{2m}$. При этом в состояниях $\varphi^{(i)}_1,\varphi^{(i)}_2,...,\varphi^{(i)}_m$ автомат производит действие $f^{(i)}_1$- , а в состояниях $\varphi^{(i)}_{m+1},\varphi^{(i)}_{m+2},...,\varphi^{(i)}_{2m}$ он производит действие $f^{(i)}_{-1}$. Будем предполагать, что в момент времени t автомат соответствующий i-ому участнику находится с состоянии, $\varphi^{(i)}_j(t)$ и при j≤m он производит действие $f^{(i)}_1$, т.е. осуществляет осторожный выбор цены в момент t+1, а при j>m он производит действие $f^{(i)}_{-1}$, т.е. осуществляет рискованный выбор цены в момент t+1. Переходы от состояния в момент t к состоянию в момент t+1 так, как это было описано выше, зависят от входного сигнала s(t) в момент t. Таким образом, для полного определения динамики автомата (а следовательно и цен i-го участника) нам необходимо определить вероятности поощрения и штрафа i-го участника, находящегося в момент t в состоянии $\varphi^{(i)}_j(t)$ и соответствующим образом назначившего цену $v_i(t)$. Возможно, вероятность поощрения является некоторой оценкой результата его торговли на первом такте момента t.

Рассмотрим сначала случай продавца, цена которого в момент t равна $v_i(t)$, продавшего часть своего товара или весь свой товар на первом такте момента t, по средней цене $w_i(t)$. Соотношение средней цены продавца $w_i(t)$ и средней цены по рынку u(t) на первом такте момента t определяет его статус в момент t+1. Если $w_i(t)>u(t)$(учитывая, что $v_i(t)\le w_i(t)$, он получает при этом некоторую прибыль), то в следующий момент он становится продавцом и может купить товар по цене меньшей $w_i(t)$(т.е. получить еще раз прибыль) в противном случае он становится ожидающим и не участвует в торговле в момент t+1. Условно будем считать, что при $w_i(t)=u(t)$ вероятность поощрения или штрафа равны ½. В случае $w_i(t)>u(t)$ будем оценивать его действия в момент t через отношение разности $w_i(t)-u(t)$ к максимальному значению этой величины, которое могло бы возникнуть при торговле данного продавца с покупателем обладающим максимальной ценой в момент t т.е. к $(v_i(t)+\max_{\alpha_j(t)=1} v_j(t))/2-u(t)$. Когда же $w_i(t)<u(t)$ (в момент t+1 он не участвует в торговле) будем оценивать его действия в момент t через отношение разности $u(t)-w_i(t)$ к максимальному значению этой величины, которое могло бы возникнуть при торговле данного продавца с покупателем обладающим минимальной ценой в момент t (а такой ценой в момент t согласно *утверждению 1* является u(t-1)) т.е. к $u(t)-(v_i(t)+u(t-1))/2$.

Обозначим для удобства:

$$F_i^s=\frac{2(w_i(t)-u(t))}{v_i(t)+\max_{\alpha_j(t)=-1} v_j(t)-2u(t)},G_i^s=\frac{2(u(t)-w_i(t))}{2u(t)-u(t-1)-v_i(t)}$$

Тогда мы можем определить вероятность поощрения за действия данного участника торговли в момент t следующим образом:

$$p_i(t)=(1+F^s)/2 \text{ если } w_i(t)>u(t)$$
$$p_i(t)=1/2 \qquad \text{ если } w_i(t)=u(t)$$
$$p_i(t)=(1-G^s)/2 \text{ если } w_i(t)<u(t)$$

Когда участник рынка является в начале момента t покупателем и на первом такте этого момента тратит все или часть его денег, то действуют симметричные рассуждения.

Обозначим:

$$F_i^b=\frac{2(w_i(t)-u(t))}{v_i(t)+\min_{\alpha_j(t)=-1} v_j(t)-2u(t)},G_i^b=\frac{2(u(t)-w_i(t))}{2u(t)-u(t-1)-v_i(t)}$$

Тогда :

$$p_i(t)=(1+F^b)/2 \text{ если } w_i(t)<u(t)$$
$$p_i(t)=1/2 \qquad \text{ если } w_i(t)=u(t)$$
$$p_i(t)=(1-G^b)/2 \text{ если } w_i(t)>u(t)$$

В случаях, когда продавец ничего не продал, покупатель ничего не купил на первом такте момента времен t или участник имел статус ожидающего агента, то вероятность поощрения можно определить только через тенденцию изменения возможных цен продажи (когда участник продавец или ожидающий агент имеющий товар), или возможных цен покупки (когда участник покупатель или ожидающий агент имеющий деньги). В этих случаях реализованное приращение цены в момент t т.е u(t)-u(t-1) сравнивается с своим максимально возможным и своим минимально возможным значением при ценах в момент t.

В случае продавца или ожидающего участника, обладающего товаром, обозначим:

$$F^{sw} = \frac{2(u(t)-u(t-1))}{\max_{\alpha_j(t)=-1} v_j(t) - u(t-1)}$$

$$G^{sw} = \frac{2(u(t-1)-u(t))}{u(t-1) - \min_{\alpha_j(t)=1} v_i(t)}$$

Тогда:

$$p(t) = (1+F^{sw})/2 \text{ если } u(t) > u(t-1)$$
$$p(t) = 1/2 \qquad \text{ если } u(t) = u(t-1)$$
$$p(t) = (1-G^{sw})/2 \text{ если } u(t) < u(t-1)$$

В другом случае(покупатель или ожидающий с деньгами) вероятности поощрения имеют следующий вид

$$p(t) = (1-F^{sw})/2 \text{ если } u(t) < u(t-1)$$
$$p(t) = 1/2 \qquad \text{ если } u(t) = u(t-1)$$
$$p(t) = (1+G^{sw})/2 \text{ если } u(t) > u(t-1)$$

Наконец заметим, что во всех случаях вероятность штрафа равна единице минус вероятность поощрения, В каждый момент времени t состояния, в которых находятся разные автоматы, могут быть различными.

Таким образом, полностью описан алгоритм поведения (конечно достаточно упрощенный и один из, вероятно, возможных алгоритмов)

5.Исследование модели посредством компьютерных экспериментов.

В предыдущих разделах была полностью описана система представляющая собой микроописание замкнутого однотоварного рынка. К пяти переменным, описывающих состояние участника, при рассмотрении нескольких (двух) возможностей характера изменения цены в описание необходимо добавить переменную, обозначающую номер состояния, в котором находится i –ый участник в момент времени t. Нам будет удобно в случае рассматриваемого нами автомата $L_{2m,2}$ обозначать номер состояния $\varphi_{\lambda}^{(i)}(t)$, в котором находится i –ый участник в момент времени t , через два числа $l_i(t)$ и $k_i(t)$, так , что $l_i(t)=\lambda$ и $k_i(t)=1$, если $\lambda\le m$ и $l_i(t)=\lambda-m$ и $k_i(t)=-1$, если $\lambda>m$, где 2m емкость памяти нашего автомата. Итак, набор 7N переменных

$$x_1(t), y_1(t), \alpha_1(t), v_1(t), l_1(t), k_1(t), x_2(t), y_2(t),_2(t), v_2(t), l_2(t), k_2(t), ..., x_N(t), y_N(t), \alpha_N(t),$$
$$v_N(t) l_N(t), k_N(t)$$

определяет состояние r(t) нашей системы в момент времени t. Динамика системы, (алгоритм перехода от r(t) к r(t+1)) полностью описана в предыдущих разделах. Выбор автоматом, описывающим часть поведения участника, состояния в момент t+1 определяется значением случайной величины s(t)(поощрением или штрафом), поэтому наша система является стохастической. Это делает возможность аналитического исследования еще более проблематичной.

Состояние системы r называется стационарным , если из r(t)=r следует r(t+1)=r. Скорее всего, для этой системы таких состояний не существует. Множество состояний M называют стационарным множеством состояний, если из $r(t)\in M$ следует $r(t+1)\in M$. В дальнейшем посредством компьютерных экспериментов будет показано, что для рассматриваемой системы существуют стационарные множества.

Все последующие результаты о динамике нашей модели однотоварного, замкнутого рынка получены посредством компьютерного моделирования, причем рассматривалось естественное множество начальных состояний r(0), конечно же, не охватывающее все возможные начальные состояния. В качестве начального состояния системы выбирались состояния $r(0)$, для которых распределение единицы товара и единицы денег между покупателями близко к равномерному распределению, каждый участник с вероятностью 1/3 мог в нулевой момент находиться в любом из возможных статусов и равномерно выбрать цену на отрезке (0,V). Начальные величины $l_i(0)$ и $k_i(0)$ выбирались с равной вероятностью среди чисел 1,2,…,m и 1,-1.

Случай исследовавшийся в предыдущей работе(Вороновиций, 2015) соответствует модели поведения, в которой автомат $L_{2m,2}$ отсутствует и величины $l_i(t)$,$k_i(t)$ не меняются со временем, Более точно $k_i(t)=1$ для i=1,2,…,N,t=0,1,2,…. В этом случае посредством компьютерного исследования модели было показано следующее.

Существует такой момент τ_1 , что для всех $t>\tau_1$ имеет место $r(t)\in M_0(d)$, где для всех точек множества $M_0(d)$ имеют место неравенства $u_0-5d<u(t)<u_0+5d$. Где u_0 усредненное за большой промежуток времени значение $u(t)$. ($u_0 = \frac{1}{\Theta}(\sum_{t=\tau_1}^{t=\tau_1+\Theta} u(t)$, Θ-достаточно велико)

Кроме ограниченности функции u(t) сверху и снизу для $t>\tau_1$ нам не удалось, к сожалению, обнаружить других свойств $M_0(d)$, хотя они, возможно, существуют.
На рис 1 показаны две траектории средней цены рынка для различных начальных значений этой цены при $k_i(t)=1$, i=1,2,…,N,t=0,1,,…10000..

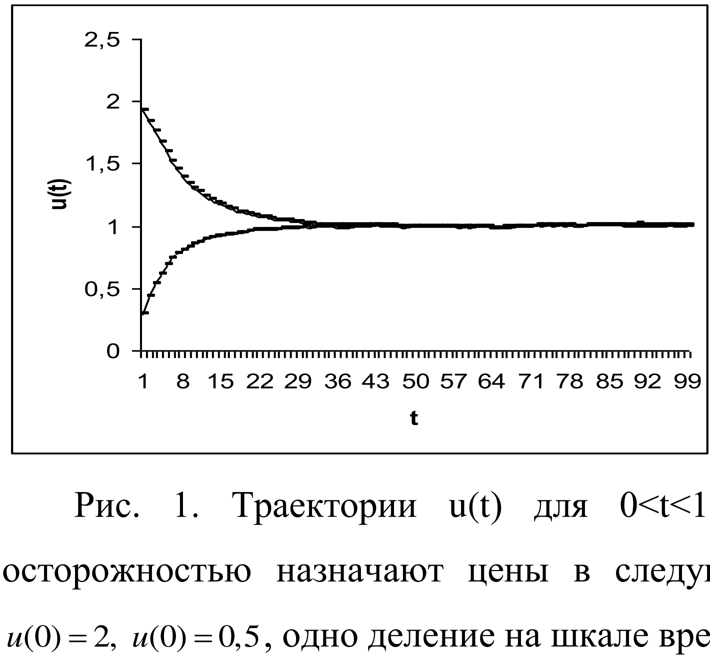

Рис. 1. Траектории u(t) для 0<t<10000, когда все участники всегда с осторожностью назначают цены в следующий момент (N = 300, d = 0,005, $u(0) = 2,\ u(0) = 0,5$, одно деление на шкале времени равно 100 моментам времени)

В данном исследовании мы вначале провели эксперименты с компьютерной моделью замкнутого однотоварного рынка, не отличающейся от предыдущей, т.е. автомат $L_{2m,2}$ отсутствует, и величины $l_i(t)$,$k_i(t)$ не меняются со временем. В этих экспериментах все участники во все моменты времени выбирают только рискованное назначение своей цены ($k_i(t)=-1$ $i=1,2,\dots,N$, $0<t<\infty$). В этом случае траектория средней цены рынка после некоторого момента времени τ_2 значительно отличается от случая рассмотренного в предыдущей работе, хотя также ограничена снизу и сверху. Имеет место следующий, обнаруженный в экспериментах факт.

Существует такой момент τ_2*, что для всех* $t>\tau_2$ *имеет место* $r(t)\in M_1(d)$*, где для всех точек множества* $M_1(d)$ *имеют место неравенства* $u_1-25d<u(t)<u_1+25d$*, где* u_1 *усредненное за большой промежуток времени значение* $u(t)$ ($u_1=\frac{1}{\Theta}(\sum_{t=\tau_2}^{t=\tau_2+\Theta}u(t)$, Θ-достаточно велико).

Следует заметить, что также как и в предыдущей работе не удалось обнаружить никаких других характеристик множества $M_1(d)$ кроме ограниченности функции $u(t)$ сверху и снизу для t> $t>\tau_2$. На рис 2 показаны две траектории средней цены рынка для различных начальных значений этой цены при $k_i(t)=-1$, $i=1,2,\dots,N$, $t=0,1,,\dots 10000$.

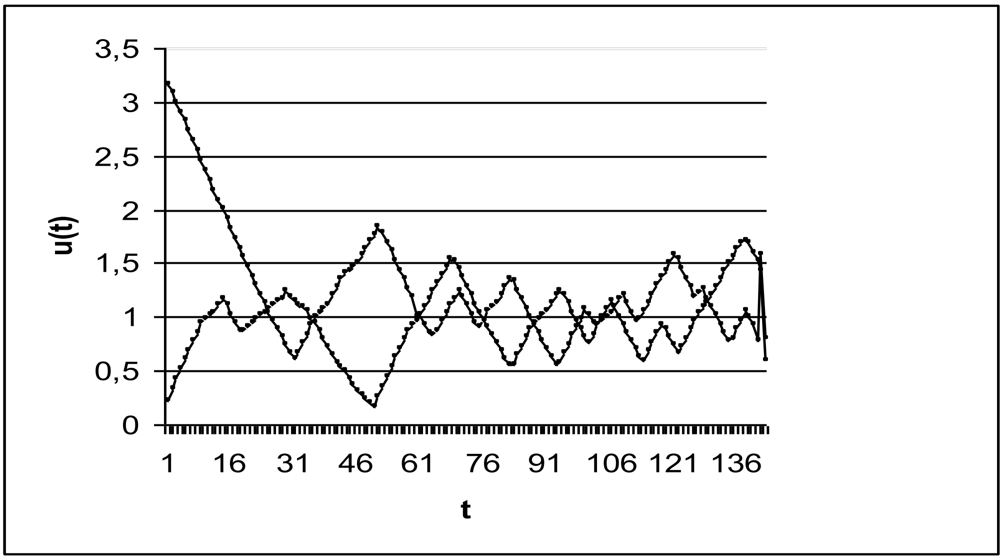

Рис.2 .Траектории средних цен рынка , когда все участники постоянно склонны к ($N=500$, $d=0.005$,$u(0)=0.2$, $u(0)=3.3$. $0<t<14000$).

Как показывают эксперименты, колебания u(t) при больших значениях t значительно сглаживаются, когда ровно половина участников всегда осуществляет осторожный выбор, а другая половина участников всегда осуществляет рискованный выбор.

Теперь приведем некоторые результаты компьютерного исследования модели замкнутого однотоварного рынка, предлагаемой в данной работе. Она отличается от изучавшихся выше моделей тем, что участники рынка постоянно используют два действия по назначению цены в момент t+1: осторожное назначение цены и рискованное назначение цены. Выбор характера действия по назначению цены осуществляется посредством конечного автомата с линейной тактикой $L_{2m,2}$ и автомат меняет состояния в зависимости от результатов предыдущего действия, как это описано выше. В этом случае, также как и в предыдущих случаях, независимо от начального состояния системы имеет место следующий факт.

Существует такой момент времени τ_3, *что для всех* $t > \tau_3$ *имеет место* $r(t) \in M_2,(d)$ *где для всех точек множества* $M_2\ (d)$ *будет* $u_2 - R(m,d) < u(t) < u_2 + R(m,d)$. *Где* u_0 *усредненное за большой промежуток времени значение* $u(t)$ *и* $R(m,d) < 15d$ *для всех значений* m.

$$(\ u_2 = \frac{1}{\Theta} (\sum_{t=\tau_3}^{t=\tau_3+\Theta} u(t), \ \Theta\text{-достаточно велико})$$

Рис.3 и рис.4 показывают, что при различных значениях u(0) с все значения u(t) становятся близкими к u_2 и остаются такими во все последующие моменты времени, причем рис. 4 демонстрирует ограниченные по амплитуде нерегулярные колебания величин u(t), соответствующих разным начальным условиям,

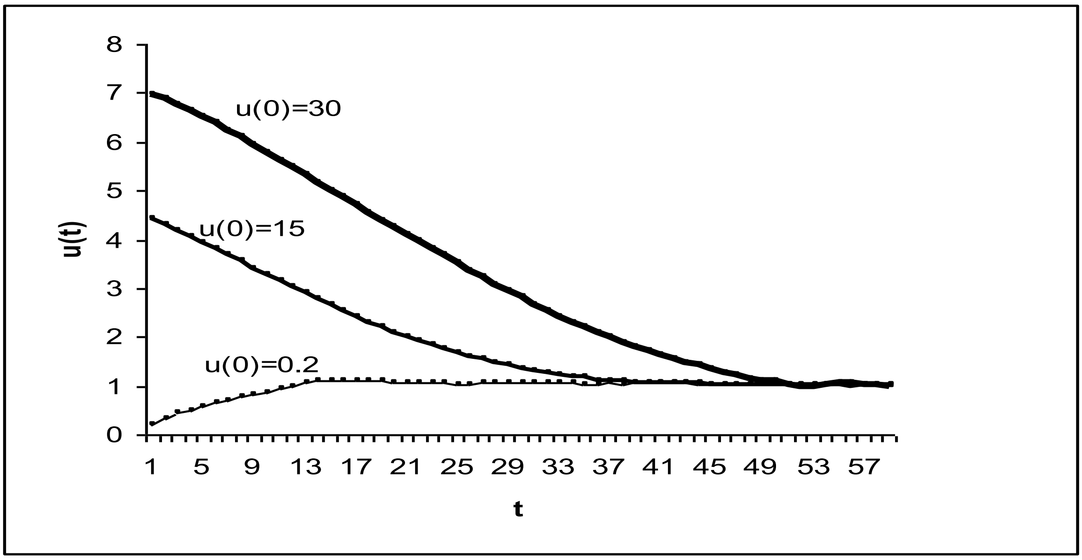

Рис. 3 .Траектории u(t) в случаях различных начальных условий , где $\tau_1 > 4500$ и все участники являются автоматами $L_{2m,2}$ (N=300, d=0.005,m=8,u(0)=30,u(0)=15,u(0)=0.2. 0<t<5500).

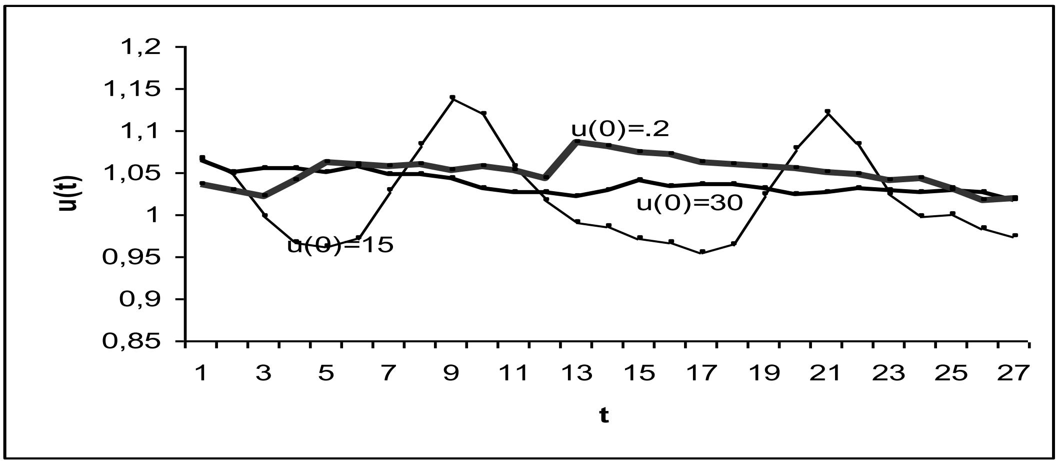

Рис. 4. Траектории of u(t) для 8500<t<10000 для случаев в которых начальные условия различны, но емкость памяти у автоматов одна и та же и равна 16.(N=300, d=0.005,m=8,u(0)=30,u(0)=15,u(0)=0.2. 0<t<5500).

Интересным представляется вопрос о зависимости поведения нашей системы(точнее траектории u(t)) при различной емкости памяти автоматов.

При этом следует заметить, что с одной стороны автомат $L_{2m,2}$ является асимптотически оптимальным(т.е. его ожидаемый выигрыш при взаимодействии со стационарной случайной средой стремится с ростом его памяти к максимально возможному), но с другой стороны, хотя подобные автоматы довольно успешно взаимодействуют с нестационарной случайной средой и хорошо проявляют себя в некоторых играх автоматов, с ростом памяти эффективность их функционирования в подобных средах после какой-то величины емкости памяти начинает уменьшаться. В рассматриваемом нами случае посредством компьютерных экспериментов удалось установить, что при различных значениях m траектории средней цены, начиная с некоторого момента времени, мало отличаются по величине, хотя и не совпадают, даже если все начальные условия при разных m одни и те же. Из наших компьютерных экспериментов мы получили следующие соотношения величин R(m,d) при различных значениях m и различных начальных условия при каждом m.

R(1,d)>R(2,d)>R(4,d)<R(8,d)<R(16,d).

Более того, при росте m для m>8 величина R(m,d) почти не изменяется, а величина $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} l_i(t)$ начиная с некоторого $t > \tau_3$ и m>4 всегда остается меньше 4.

Так на рис 5 приведена часть траекторий средней цены при m=8, m=4, m=2 на интервале 4000<t <10000,.

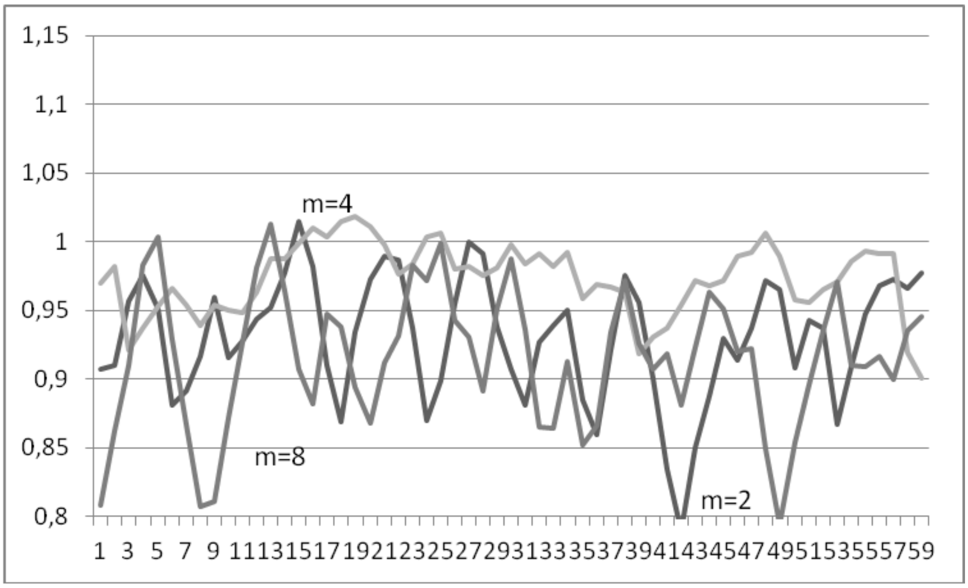

Рис.5. Траектория u(t) для 3000<t<9000 при m=8,4,2. (N=300, d=0.005, u(0)=15,).

Этот рисунок иллюстрирует вывод о зависимости R(m,d) от m , сделанный нами на основе большого числа компьютерных экспериментов. Можно также отметить, что эксперименты показывают, что почти во все моменты времени после $t=\tau_3$ число участников, выбирающих осторожный характер назначения цены в следующий момент времени больше числа участников выбирающих рискованный характер назначения цены.

Зависимость поведения всей системы от памяти автоматов выбирающих цены в следующий момент времени еще предстоит детально изучить. Предстоит ответить на множество вопросов, связанных с поведением и структурой описанной выше системы, также как и на вопросы о возможностях ее модификации и приближения к реальности. В данном исследовании сделан лишь первый шаг в предлагаемом подходе к описанию структуры и динамики однотоварного замкнутого рынка.

6.Заключение

Настоящая работа посвящена формулировке и исследованию динамики сложной системы, в которой отражены (по нашему мнению) некоторые основные черты замкнутого однотоварного рынка. Первая часть описания системы это формулировка механизма взаимодействия агентов, в котором мы стремились зафиксировать основные черты рыночной торговли. Введен порядок взаимодействия, а именно - последовательное обращение продавца к покупателям в порядке возрастания их цен, и покупателя к продавцам в порядке убывания их цен Описание поведения участника рынка включает в себя определение статуса участника(продавец, покупатель, ожидающий) в следующий момент времени, однозначно зависящее от результатов его торговли в предыдущий момент, и случайный выбор участником его цены в следующий момент. При моделировании выбора цены, может быть впервые, в имеющих отношение к экономике моделях используются конечные автоматы с линейной тактикой. При этом вероятность входного сигнала для этих автоматов определяется удачностью сделок в предыдущий момент. Такая модель, реализованная посредством компьютерной программы, позволяет нам видеть, что усредненные характеристики такой системы (например, средняя цена) демонстрируют динамику основных характеристик системы, которые, во всяком случае, не противоречат наблюдаемым в реальности свойствам некоторых рынков.

Надежда на возможность аналитического исследования модели вынуждает нас максимально упростить формальное описание ее элементов. Мы исследуем динамику нашей системы только при одном классе начальных состояний, выбор которого представляется логически оправданным. Тем не менее, о поведении системы при других, более экзотических ее начальных состояниях пока нам ничего не известно.

Проведенное аналитическое исследование модели, также как и ее изучение, посредством компьютерных экспериментов, позволяют нам указать на некоторые полезные модификации сформулированной здесь модели, которые позволят (по нашему мнению) приблизить поведение модели к реальной ситуации на замкнутом рынке. Прежде всего, это относится к определениям вероятностей штрафа в разных ситуациях. Действительно эти вероятности определены, как отношение удельной прибыли от торговли в предыдущий момент к максимально возможной прибыли в этот момент. С одной стороны это определение довольно простое и, возможно, оно допустимо при первом исследование модели, но с другой стороны оно отражает далеко не все черты реальной ситуации. Имеет смысл рассмотреть изменение прибыли за два предшествующих шага(продажа-покупка, покупка продажа, ожидание покупка и т.п.) и желательно включать в оценку двух предыдущих выборов не удельную прибыль, а полную прибыль участника. При таком подходе поведению участников оказывается в большей мере управляемым их стремлением увеличить свое богатство, т.е сумму имеющихся денег плюс количество товара умноженное на среднюю цену на рынке. Не менее важно включить в модель больше вариантов характера выбора цены не только максимально осторожное, но и варианты выбора с различной степенью риска, может быть и иррациональный выбор, такой как, например, стадное поведение. Нам представляется не только полезным, но и возможным продолжение аналитического исследования нашей модели, доказательство ее свойств, установленных ранее, посредством компьютерного моделирования. Нам не удалось получить доказательство сходимости состояния системы к стационарному множеству М, но мы не считаем, что нельзя получить это доказательство в дальнейшем. То же касается и свойств стационарного множества. Даже компьютерная модель не позволила нам дать полное описание этого множества, она лишь позволила установить сходимость траектории средней цены рынка к значениям этой цены в точках стационарного множества. При этом, мы не считаем невозможным установить аналитически необходимые и достаточные условия принадлежности состоянии системы к этому множеству.

Можно указать направления значительной модификации этой модели, которые возможно повысят адекватность отражения в нашей новой модели реальной ситуации замкнутого рынка с большим числом участников.

Например, существенно влияющее на ход нашего исследования требование того, чтобы в каждый момент минимальная цена покупателей была не меньше максимальной цены продавцов, значительно упрощает аналитическую часть исследования, но не представляется абсолютно естественным. Это требование с нашей точки зрения означает рациональный и максимально осторожный выбор участниками своего статуса в момент t+1. Отказ от этого требования может сделать поведение участника, связанного с выбором его статуса в следующий момент неоднозначным и возможно стохастическим, что в свою очередь сделает выбор цены в следующий момент времени более близким к реальной ситуации. При этом для описания поведения участников, касающегося многовариантного выбора статуса, можно также использовать конечные автоматы. Наконец полезным представляется введение в модель механизма прогноза участниками на основе своей личной информации средней цены рынка, относящейся к последующим моментам времени.

Правда, эти улучшения связаны с формулировкой и исследованием в рамках нашего подхода к изучению поведения коллектива участников фактически новых моделей,.

При всем сказанном , хочется заметить, что первые шаги в нашем исследовании Агент-ориентированных моделей замкнутого однотоварного рынка при всех сложностях и недостатках этого подхода позволяют надеяться на получение в конце концов адекватного понимания механизмов действующих на реальных рынках.

Литература

Цетлин М.Л. «Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем», Издательство «Наука», М., 1969.

Макаров В.Л. «Искусственные общества» // Экономика и Математические методы, 2012, том 48, №3, . 3–20.

Вороновицкий М.М. «Об одной модели обмена» // Автоматика и телемеханика», №8, 1974.

Вороновицкий М.М. «Агент - ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка» Экономика и математические методы .2014, том 50, №2.

Вороновицкий М.М. «Агент ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка при рациональном предпочтении участников» Экономика и математические методы, 2015, том 51, № 3,

Blake LeBaron, W. Brian Arthur, and Richard Palmer «Time Series Properties of an Artificial Stock Market Model» Journal of Economic Dynamics and Control 23 (1999).

Topol R. (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prices; Effect of Mimetic Contagion // The Economic Journal. Vol. 101. P. 786–809

M.M. Voronovitsky

The dynamic model of the closed market with one commodity and with finite linear automata as participants

The dynamic model of closed market with one commodity, which is some combination of autonomous and interacting participants, is a goal of investigating of this paper. Closure of the market means that quantity of the commodity and amount of money on the market are constant in the all moments of time. Each partner of the market in the one moment of time can be in one of three status: to be buyer, be

seller and do not take part in trade in this moment of time. The interaction is realized by the trade. Partners of market change their statuses and prices, by using the personal information of each of them about trade in the previous moment of time only and trying to secure their partnership in trade in the next moment. The finite automata model the choice of the degree of risk at definition of new prices by participants The finite automata model the choice of the degree of risk at definition of new prices by participants. So we study the closed market with one commodity as a system interacting finite automata. We showed by the computer investigation the convergence of the average price of the market to a neighborhood of some his average value. We investigated also the role of volume of automata's memory, which represent of the participants of market, in the behavior of all our system.

.Keywords: mathematical model, closed market, one commodity market, dynamics of prices, trajectory, stationary set, steady state, rational choice, finite automata.
JEL Classification: c51, D01.

.