The Consumer Microeconomics: Utility, Budget and Consumption optimum

Keita, Moussa

May 2016

LA MICROECONOMIE DU CONSOMMATEUR : utilité, budget et optimum de consommation

Par
Moussa Keita, PhD*
(Mai 2016)

Résumé

Ce manuscrit propose une discussion sur quelques notions clés de la microéconomie néo-classique en se focalisant sur la théorie du consommateur. Le travail est organisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous menons une large discussion sur la notion de préférence ainsi que sa traduction en termes de fonction d'utilité. Dans ce chapitre, plusieurs types de fonction d'utilité (définis selon le degré de substituabilité des biens) sont étudiés. Il s'agit notamment des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas (biens faiblement substituables), des fonctions de type linéaire (biens parfaitement substituables) et les fonctions de type Leontief (biens complémentaires). Le second chapitre est consacré à l'étude des contraintes budgétaires du consommateur. Dans ce chapitre, plusieurs notions sont abordées. Il s'agit notamment de la notion de droite budgétaire et d'ensemble de consommation. Nous étudions également le déplacement de droite budgétaire et la variation de l'ensemble consommation sous l'effet de politiques économiques et politiques fiscales mais aussi sous l'effet des variations exogènes des prix. Quant au troisième chapitre, il est consacré à l'étude du comportement de maximisation de l'utilité du consommateur sous sa contrainte budgétaire. Ce comportement est présenté sous forme de programme d'optimisation afin de dériver les fonctions de demandes optimales exprimée en fonction des prix et du revenu. Conscient de nombreuses limites du document qui est encore au stade primaire de sa rédaction, nous restons ouverts à toutes critiques et suggestions de nature à améliorer le contenu du travail.

*Ecole d'Economie, Université d'Auvergne clermont Ferrand 1

Contact info: Email : keitam09@ymail.com

Codes JEL: D1, D4, D5.

Mots clés: Microéconomie, Consommateur, fonction d'utilié, contrainte budgétaire, demandes optimales.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

1. Objet et méthode de la microéconomie

La microéconomie est une branche de l'économie qui étudie, d'une part, les comportements et les décisions individuels des agents, leurs interactions et d'autre part que les mécanismes qui déterminent les conditions d'allocation des ressources au sein de l'économie. Très largement influencée par la théorie néoclassique, la méthode de la microéconomie est fondée sur deux principes clés que sont *l'individualisme méthodologique* et la démarche *hypothético-déductive.*

L'individualisme méthodologique est une conception méthodologique qui suppose que tout phénomène économique doit pouvoir s'expliquer à partir de l'étude des comportements des individus. En effet, puisque seuls les individus ont des buts et des intérêts clairs et précis, les phénomènes globaux ne pourront être décrits qu'à partir des propriétés des individus et de leurs interactions. L'individu étant la substance du groupe, le collectif n'a d'essence que dans l'individuel. De ce fait, l'analyse de tout phénomène sociale ou économique devrait partir de l'individu. La microéconomie, en tant que discipline scientifique, tente de s'inscrire dans cette approche méthodologique.

Quant à la démarche scientifique hypothético-déductive, elle consiste à formuler des hypothèses sur les comportements des agents, de spécifier des restrictions sur ces comportements dans le but d'élaborer des modèles pour en tirer des conclusions et des lois économiques. En microéconomie, le déroulement d'une telle démarche fait appel à l'usage massif des mathématiques qui ont pour rôle d'assurer la cohérence interne du développement des modèles. Néanmoins, elles ne permettent aucunement de garantir la pertinence des hypothèses postulées ; celles-ci restent sous la responsabilité du seul modélisateur.

2. Les agents économiques et la rationalité

Les analyses microéconomiques font généralement intervenir deux types d'agents que sont le consommateur et le producteur. L'Etat et le Reste Du Monde sont inclus pour tenir compte soit du contexte institutionnel ou des relations avec l'extérieur.

Les comportements des agents (en particulier celui du consommateur et du producteur) sont souvent présentés sous forme de problèmes d'optimisation dans lesquels l'agent est supposé rechercher le meilleur choix parmi un ensemble d'alternatifs qui lui sont accessibles (avec des contraintes bien définies). Les agents sont alors supposés comme « rationnels ».

L'hypothèse de rationalité est une conséquence directe du l'individualisme méthodologique. En effet, en adoptant une démarche fondée sur l'analyse des comportements individuels, il doit pouvoir dégager un principe général et universel censé guider l'action de l'individu. Le postulat de rationalité répond à cette préoccupation. La rationalité suppose que l'individu "sait exactement ce qu'il veut " et il cherche par des procédures découlant de sa raison, à mettre en place les meilleures actions pour atteindre cet objectif. La rationalité suppose alors qu'à chaque occasion, l'agent prend la meilleure décision possible conformément à son intérêt individuel et égoïste, dans le but de se procurer un bénéfice maximum. Ce comportement est traduit sous le vocable *homo œconomicus.*

D'une façon générale l'agent économique sera supposé rationnel lorsqu'il respecte un certain nombre de critères dans son processus de choix. D'abord, avant de prendre sa décision, il doit énumérer tous les choix alternatifs qui lui sont potentiellement accessibles. Pour cela, il tient compte de toutes les informations disponibles à la fois sur les choix potentiels mais aussi les bénéfices potentiels associés à chacun des choix. Après cette énumération, il procède à un classement des choix selon un ordre de préférence. Cet ordre doit apparaitre à la fois cohérent et complet. Et c'est à l'issue de cet ordonnancement, qu'il choisit l'option ayant le rang le plus élevé dans le classement. En d'autres termes, il opte pour le choix qui lui procure le bénéfice maximum. Par exemple, le consommateur est supposé choisir, parmi l'ensemble des combinaisons de biens, celle qui maximise son utilité. Le producteur, quant à lui, choisit parmi l'ensemble des combinaisons d'intrants, celle qui maximise son profit (ou qui minimise ses coûts).

Cependant, il arrive que certains comportements soient non conformes à l'hypothèse de rationalité[1]. Par exemple, dans l'énumération des choix, les agents peuvent ignorer un certain nombre d'alternatifs qui, pourtant, leur sont accessibles. Ils peuvent aussi se laisser tenter par des alternatifs non réalisables. Quelquefois, ils ne prennent pas soin de collecter toute l'information nécessaire pour effectuer un choix éclairé. Ils peuvent, parfois, aussi se contredire dans le classement de certains alternatifs ou même choisir des alternatifs dont ils ont pourtant évalué la conséquence comme inférieure à d'autres. Autant d'éléments qui remettent en cause la validité de l'hypothèse de rationalité.

Toutefois, la non-vérification d'un critère particulier ne suffit pour invalider l'hypothèse de rationalité. Par exemple pour ce qui concerne le critère de complétude de l'information, la collecte d'information peut se révéler très coûteux

[1] A ce propos, l'hypothèse de rationalité a été mise à mal à plusieurs reprises notamment dans les travaux de Herbert Simon et de Kahneman et Tversky.

pour l'agent dans la mesure où celle-ci demande parfois du temps et beaucoup de ressources. De ce point de vue, la renonciation à la collecte peut relever d'une pure rationalité de l'agent.

Par ailleurs, l'hypothèse rationalité reste aussi souvent mal comprise. En effet beaucoup ont tendance à évaluer cette hypothèse uniquement d'un point de vue objectif. Or il semble que la rationalité n'est pas qu'une objective, elle peut avoir aussi une dimension subjective. En effet, il est possible qu'une décision soit *objectivement* qualifiée de non-rationnelle alors que d'un point de vue subjectif (le point de vue de l'agent) cette décision est parfaitement rationnelle mais uniquement dans des aspects qui échappent à l'observation.

Cependant, le fait d'admettre la notion de rationalité subjective ne signifie pas pour autant que tout comportement puisse être jugé comme rationnel. Si tel était le cas, cela entraînerait la dilution du concept de rationalité. De ce fait, elle perdrait toute sa pertinence dans l'analyse économique.

Au final, malgré les limites qu'elle peut présenter, l'hypothèse de rationalité est un cadre commode qui reste encore la règle dans l'analyse microéconomique. Toutefois de nombreuses études préfèrent retenir l'hypothèse de rationalité *limitée (procédurale)* plutôt que celle de la rationalité *absolue (instrumentale).*

3. Marché, prix et équilibre

L'interaction des agents pose essentiellement la question de la coordination des décisions. Dans la théorie microéconomique traditionnelle, le rôle de l'Etat étant supposé limité à la fixation des règles du jeu économique (cadre incitatif et réglementaire), la coordination des décisions des agents est assurée par le marché. Ce dernier qui représente un lieu (conceptuel) où s'effectue l'agrégation des décisions individuels des agents, en particulier les décisions d'offres et de demande.

Dans sa conception générale, le marché représente le mécanisme par lequel les offreurs et les demandeurs interagissent en vue de l'échange. Cette coordination se réalise par le biais une information synthétique qui est le prix. Celui-ci est censé être connu de tous les agents, et représente un signal suffisamment précis pour refléter la valeur fondamentale du bien faisant objet de l'échange. En cela, le prix reflète la valeur d'échange d'un bien. Il se présente comme la variable qui rend compatible l'ensemble des décisions agents (consommateur et producteurs).

En prenant le cas particulier du marché des biens et services le mécanisme de coordination se présente comme suit. Dans un premier temps, les consommateurs expriment, leurs demandes de manière décentralisée. Ces demandes sont le reflet à la fois de leurs préférences et de leurs contraintes budgétaires. En réaction à ces demandes, les producteurs font des offres (qui tiennent compte, à leur tour, des contraintes technologiques et des objectifs de maximisation de profits ou de minimisation de coûts). Ensuite, à travers un système de prix, le marché sert d'intermédiaire entre ces deux types d'agents. En effet, lorsque le prix affiché est élevé, les consommateurs revoient leurs demandes à la baisse alors que les producteurs revoient leurs offres à la hausse. L'équilibre s'obtient lorsque les quantités demandées égalisent les quantités offertes. Le prix découlant de cette égalité offre-demande correspond ainsi au prix d'équilibre. Par ailleurs, étant donné qu'il y a autant de marchés que de biens, un prix d'équilibre prévaudra sur chaque marché, fruit de la coordination des décisions des agents sur ce marché.

Notons que l'équilibre sur un marché traduit la résolution des problèmes de coordination des décisions sur ce marché. On parle alors d'équilibre partiel. Et lorsque l'ensemble des problèmes de coordination sont résolus sur l'ensemble des marchés (y compris le marché de travail et le marché de capitaux), on parle d'équilibre général. La caractéristique fondamentale d'une situation d'équilibre (par rapport à une situation de déséquilibre) est sa stabilité et son unicité. De manière générale, un équilibre est une situation dans laquelle chaque acteur individuel atteint au mieux son objectif ; une situation où aucun acteur individuel n'a d'intérêt à modifier son comportement. Ainsi à un système de prix d'équilibre, les décisions individuelles sont par définition mutuellement compatibles. Pour chaque bien, la quantité totale demandées est strictement égale à la quantité totale offerte. Le déséquilibre quant à lui, représente un état où les problèmes de coordination n'ont pas été entièrement résolus par le système de prix. On parle alors d'inefficacité du marché. Cette situation se présente sous formes généralement d'imperfections de marché ou de défaillances de marché.

CHAPITRE 1 : PREFERENCES ET UTILITE DU CONSOMMATEUR

1.1. Les relations de préférence

Une des hypothèses de base de la théorie du consommateur est de supposer que l'individu est toujours en mesure de classer et d'ordonner de manière cohérente tout ensemble des paniers de biens qui lui sont présentés afin de déterminer celui qu'il préfère. En appelant par exemple X et Y deux paniers de biens homogènes, cela signifie que le consommateur est capable d'établir un ordre de préférence clair et cohérent entre ces deux paniers X et Y. On notera par exemples par $X \succsim Y$ lorsque l'individu préfère faiblement le panier X. En revanche, on notera $X \succ Y$ lorsqu'il préfère strictement le panier X. Dans ce cas, on dira que le panier Y est strictement moins préféré à X pouvant aussi être noté $Y \prec X$. Signalons par ailleurs que lorsque l'individu est indifférent entre les deux panier X et Y, sa relation de préférence devient une relation d'équivalence simple telle que $X \sim Y$. On dit alors que le consommateur est indifférent entre les deux paniers.

1.1.1. Les axiomes caractérisant les préférences

Les préférences du consommateur sont supposées obéir à un certain nombre de propriétés exprimées sous formes d'axiomes.

Axiome 1 : La relation de préférence est une relation *complète*.
Cet axiome signifie que le consommateur est toujours en mesure de comparer deux paniers de biens quel que soit leurs dispositions. Par exemple, pour deux paniers X et Y on a : soit $X \succsim Y$, soit $Y \succsim X$, soit ($X \succsim Y$ et $Y \succsim X$) i.e $X \sim Y$.

Axiome 2 : La relation de préférence est une relation *réflexive*.
Cet axiome signifie que tout panier est au moins aussi préféré que lui-même. Ce qui suppose que pour un panier X, on a : $X \succsim X$.

Axiome 3 : La relation de préférence est une relation *transitive*.
En effet pour trois paniers X, Y et Z, si l'individu préfère Y à X et qu'il préfère Z à Y alors selon l'axiome de transitivité, il doit préférer Z à X. De ce point de vue, l'axiome de transitivité reflète le degré de cohérence du choix de l'individu. Il représente, à ce titre l'un des points clés de l'hypothèse de rationalité. Cependant cet axiome ne semble pas toujours vérifié (voir le paradoxe de Condorcet).

A ces trois principaux axiomes s'ajoutent des axiomes complémentaires. Mais ceux-ci ne caractérisent que les préférences dites *normales*.

Axiome 4 : La continuité des préférences.
Cet axiome suppose que la relation de préférence est une relation continue ; en d'autres termes, si Y est strictement préféré Z et si X est un panier suffisamment proche de Y, alors X doit être strictement préféré à Z.

Axiome 5 : La monotonicité et la non-satiété.
L'axiome de monotonicité signifie que l'individu préfère toujours une quantité supérieure d'un bien. Cet axiome ne s'applique bien évidemment pas aux biens indésirables à moins de transformer la relation de relation de préférence en une fonction opposée. La monotonicité signifie qu'un consommateur préfère toujours avoir plus. L'axiome complémentaire à la monotonicité est celui de non satiété. Selon cet axiome, il n'existe pas de point de satiété pour le consommateur, c'est-à-dire qu'il existe toujours un panier qui sera préféré au panier considéré quel que soit le degré de satisfaction de l'individu.

Axiome 6 : La convexité des préférences.
Cet axiome suppose que l'individu préfère les paniers intermédiaires aux paniers extrêmes. Par exemple, lorsqu'on présente à l'individu un panier X, un panier Y et un panier Z constitué d'un mélange de X et Y, l'individu préféra toujours le panier Z à chacun des deux paniers X et Y pris individuellement. Cela se traduit mathématiquement par les relations suivantes :

$$\lambda X + (1-\lambda)Y \succsim X$$
$$\lambda X + (1-\lambda)Y \succsim Y$$
$$\text{Avec } \lambda \in [0,1]$$

1.2. La fonction d'utilité

De façon simple, l'utilité traduit la satisfaction (psychologique) procurée par la consommation d'un bien. Elle se mesure généralement à travers une fonction d'utilité permettant d'associer à chaque panier x un niveau donné d'utilité. Cette fonction est une expression mathématique généralement notée $u(x)$.

La définition de la fonction d'utilité part du postulat que pour toute relation de préférences, il existe toujours une fonction qui permet de la représenter. De ce fait, elle constitue une reformulation des préférences du consommateur. En effet, pour deux biens x_1 et x_2 tels que $x_1 \succsim x_2$ alors l'expression de la fonction d'utilité sera telle que $u(x_1) > u(x_2)$. La fonction d'utilité respecte donc l'ordre des préférences du consommateur.

La fonction d'utilité ainsi de fournir une explication du choix fait l'individu entre le bien x_1 et le bien x_2 En effet, on peut dire que l'individu préfère le panier x_1

au panier x_2 parce ce dernier lui procure une moindre utilité par rapport au premier. Ainsi d'une manière générale, face à un ensemble de paniers, le consommateur choisit toujours celui dont l'utilité est la plus élevée c'est-à-dire qui lui procure donc la satisfaction la plus grande.

1.2.1. Notions d'utilité cardinale et d'utilité ordinale

1.2.1.1. L'utilité cardinale

Les précurseurs de la notion de fonction d'utilité (Stanley Jevons, Carl Menger, Léon Walras et Francis Edgeworth) concevaient l'utilité comme une grandeur mesurable au même titre que les autres grandeurs telles que la distance, le poids, la température, etc. Dans une telle conception, il est possible d'attribuer une valeur chiffrée à la satisfaction ressentie par un individu suite à la consommation d'un bien. C'est la conception cardinale de l'utilité[2].

Cependant, l'adoption d'une telle conception sur l'utilité pouvait s'avérer problématique sur de nombreux aspects. En effet, considérons par exemple trois biens x, y et z et une relation de préférence telle que : $x \succsim y \succsim z$. Supposons aussi que la traduction de cette préférence par une fonction d'utilité permet d'obtenir les valeurs suivantes: $u(x) = 40,\ u(y) = 20\ et\ u(z) = 10$. Dans une telle configuration, la première implication liée à l'adoption d'une conception cardinale de l'utilité réside dans l'interprétation des valeurs des utilités. En effet, dans l'exemple ci-dessus, on dira que x est 2 fois plus utile que y et 4 fois plus utile que z. Une telle conclusion peut sembler insensée dans certains contextes notamment lorsque les biens sont de natures hétérogènes. Par exemple, prenons le cas d'un individu qui entre d'une longue journée de marche en plein désert sous un soleil écrasant auquel on présente à la fois un verre d'eau pour apaiser sa soif, un repas copieux pour calmer sa faim et un temps de repos. Bien que tous ces trois biens lui soient vitaux, il semble néanmoins difficile de les mettre sur la même échelle de mesure d'utilité. On ne pourra pas dire qu'un verre d'eau lui apporte plus d'utilité ou moins d'utilité que le repas ou que le sommeil. Dès lors, la conception cardinale peut sembler impertinente.

La seconde implication de l'adoption d'une conception cardinale réside dans la possibilité de procéder à des comparaisons inter-personnelles. En effet, l'adoption de la conception cardinale de l'utilité implique que le niveau de satisfaction apportée par un bien soit le même quel que soit l'individu. En ce sens, l'utilité cardinale est une notion objective.

---

[2] A ce propos, l'unité de mesure souvent proposée pour mesurer l'utilité s'appelle *utils* qui représente l'unité de mesure psychologique de la satisfaction tirée de la consommation d'un bien

Une autre implication de la conception cardinale est l'hypothèse de l'additivité de l'utilité et la séparabilité des arguments de la fonction d'utilité. Ces hypothèses signifient par exemple que lorsqu'un individu consomme simultanément deux biens x et y, la satisfaction procurée par cette consommation est égale à la somme des utilités individuelles procurées par chacun des biens. En d'autres termes $u_{x,y} = u_1(x) + u_2(y)$. Cette formulation correspond d'ailleurs à celle qui avait été adoptée par Stanley Jevons mais qui, par la suite sera remise en cause par Edgeworth. En effet pour Edgeworth, la séparabilité ne permet pas de tenir compte de l'interdépendance entre les biens[3]. Il propose alors une nouvelle formulation beaucoup plus générale telle que $u_{x,y} = u(x, y)$.

Par ailleurs, l'un des reproches faits à la conception cardinale de l'utilité est son incapacité à préserver les rapports d'utilités suite à une transformation monotone croissante de la fonction d'utilité initiale. En effet, en reprenant le précédent exemple dans lequel $x \gtrsim y \gtrsim z$ et où $u(x) = 40,\ u(y) = 20\ et\ u(z) = 10$ et en considérant une nouvelle fonction d'utilité v égal telle que $v(u) = \sqrt{u}$, on obtient alors : $v(x) = \sqrt{40} \cong 6{,}3$ $v(y) = \sqrt{20} \cong 4{,}5$ et $v(z) = \sqrt{10} \cong 3{,}2$. Bien que l'ordre de préférences a été préservé (le consommateur préférera toujours le bien x au bien y qui sera, à son tour, préféré au bien z) , on constate, tout de même que la fonction $v(.)$ ne conserve plus les mêmes rapports d'utilité que ceux de la fonction $u(.)$. En effet l'utilité procurée par le bien x n'est plus 2 fois supérieure à celle procurée par le bien y et 4 fois supérieure à celle du bien z , dorénavant, elle est de 1,4 par rapport au bien y et de 2 par rapport au bien z.

Cependant, malgré toutes ces limites de l'approche cardinale, celle-ci reste encore largement d'usage dans de nombreux raisonnements microéconomiques. En effet, elle reste encore beaucoup utilisée dans les modèles tels que les modèles de choix inter-temporels ou les modèles de choix en environnements incertains ; puisque dans ces modèles il s'agit généralement de comparer les utilités soit entre deux dates (le présent et le futur) soit entre deux situations (situation risquée et non-risquée).

1.2.1.2. L'utilité ordinale

Proposée pour la première fois par Vilfredo Pareto qui juge l'approche cardinale à la fois injustifiée et non nécessaire, l'approche ordinale de l'utilité vise à corriger certaines limites liées à la conception cardinale. Cependant l'approche ordinale n'a pas pour but d'attribuer une valeur chiffrée à l'utilité. Elle se contente de déterminer l'ordre de préférence dans les choix du consommateur sans pour autant raisonner en valeur absolue. Elle permet de classer les paniers en

---

[3] Par exemple : biens complémentaires ou substituables, etc.

indiquant uniquement si un panier est préféré à un autre mais sans indiquer l'intensité avec laquelle celui-ci est préféré. Elle permet par exemple de dire si un consommateur préfère l'orange par rapport à la pomme mais elle ne permet pas de dire si la satisfaction retirée par la consommation de l'orange est plus élevée que celle de la pomme. L'adoption d'une conception ordinale de l'utilité suppose, à cet effet, l'abandon des comparaisons des utilités à la fois entre les biens pour un même individu et entre les individus pour un même bien.

La conception ordinale de l'utilité suppose par ailleurs que la fonction d'utilité n'est définie qu'à une transformation monotone croissante près. En effet, si u est une fonction d'utilité qui permet d'ordonner deux paniers x_1 et x_2 telle que $u(x_1) < u(x_2)$ et si v est une transformation monotone croissante, la nouvelle fonction d'utilité $v = v(u)$ conservera l'ordre des deux paniers x_1 et x_2 car $v(x_1) < v(x_2)$.

1.2.2. Fonctions d'utilité et courbes d'indifférence

Considéré comme un état psychologique, l'utilité se définit comme la satisfaction procurée par la consommation d'un ou de plusieurs biens. Cependant, du point de vue de la théorie économique pure, la satisfaction peut être considérée comme un bien final (output) qui s'obtient par la combinaison d'autres biens. A ce titre, on peut définir l'acte de consommation comme l'acte par lequel l'individu combine des biens-inputs pour produire un bien final qu'est l'utilité. De ce point de vue, la consommation est l'acte de production d'utilité. Le but du consommateur sera donc de maximiser cette production. Ainsi, dans une telle conception, la fonction d'utilité peut être exprimée dans les mêmes termes qu'une fonction de production. Dès lors, la forme fonctionnelle retenue pour traduire la fonction d'utilité sera définie selon une typologie des biens-inputs. On distingue trois grands types de relations entre les biens : les biens complémentaires, les biens parfaitement substituables et les biens faiblement substituables (ou biens imparfaitement substituables). Ce dernier cas reste le cas le plus fréquent dans l'analyse microéconomique.

1.2.2.1. La fonction d'utilité et la courbe d'indifférence dans le cas des biens faiblement substituables

Fonction d'utilité

Lorsque les biens consommés sont ***faiblement substituables*** (substitution imparfaite), la fonction d'utilité se présente sous la forme d'une Cobb-Douglas qui se présente alors comme suit :

$$u(x, y) = ax^{\alpha} y^{\beta} \tag{1}$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et du bien y. a , α et β sont des constantes. Lorsque $\alpha + \beta = 1$, on dit que la fonction d'utilité est homogènes de degré 1 signifiant ainsi qu'en doublant par exemple, en même temps les quantités du bien x et du bien y, on double systématique le niveau d'utilité. Nous reviendrons amplement sur ces aspects lorsqu'il s'agira d'analyser les fonctions de production dans l'analyse du comportement du producteur.

Exemple : Soit $u(x,y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ où x et y représentent deux biens faiblement substituables (ou substituable de façon imparfaite). Pour illustrer ce type de cas, nous pouvons reprendre l'exemple de l'orange et de la pomme. En effet, on peut concevoir, du point du consommateur, que ces deux biens soient substituables mais à un degré relativement faible. Dans ce cas, l'adoption d'une forme fonctionnelle Cobb-Douglas peut sembler bien justifier pour traduire l'utilité du consommateur.

Courbe d'indifférence

De façon simple, la courbe d'indifférence se définit comme l'ensemble des paniers qui procurent la même utilité au consommateur. Pour illustrer la notion de courbe d'indifférence, supposons un consommateur auquel on présente trois paniers contenant chacun deux biens : l'orange (x) et la pomme (y). Le premier panier noté P_1 contient 1 orange et 10 pommes $P_1(1;10)$, le second panier P_2 contient 2 oranges et 5 pommes $P_2(2;5)$ et le troisième panier P_3 contient 3 oranges et 0 pomme $P_3(3;0)$. Ainsi lorsque le consommateur se dit indifférent entre ces trois paniers, cela suppose que ces trois paniers lui procurent la même utilité. Dans ce cas, ces paniers se trouvent sur la courbe d'indifférence. Bien entendu, il existe une infinité de paniers qui procurent la même utilité au consommateur du fait que la courbe d'indifférence est une fonction continue.

Mathématiquement, la courbe d'indifférence représente le lieu géométrique de l'ensemble des paniers $(x;y)$ permettant d'obtenir un niveau d'utilité u_0. Elle est souvent qualifiée de « *iso-utilité* ». Pour définir la courbe d'indifférence d'un consommateur pour un niveau d'utilité u_0, on pose l'égalité : $u(x,y) = u_0$. Et on essaie par la suite de tirer y en fonctin de x et les autres constantes de l'équation.

Il faut noter que, tout comme pour les fonctions d'utilité, l'allure de la courbe d'indifférence dépendra de la nature des biens considérés. Dès lors, en considérant les biens faiblement substituables pour lesquels la fonction d'utilité se présente sous la forme d'une Cobb-Douglas telle que $u(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$, on pose l'égalité : $u(x,y) = u_0$. Cette égalité s'exprime alors comme :

$$ax^{\alpha}y^{\beta} = u_0 \quad (2a)$$

On peut ainsi exprimer y en fonction de x ; les autres éléments de l'équation étant des constantes. On obtient alors :

$$y = \left(\frac{u_0}{ax^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2b)$$

a,α et β étant fixes, l'allure générale de cette courbe en fonction de u_0 sera la suivante :

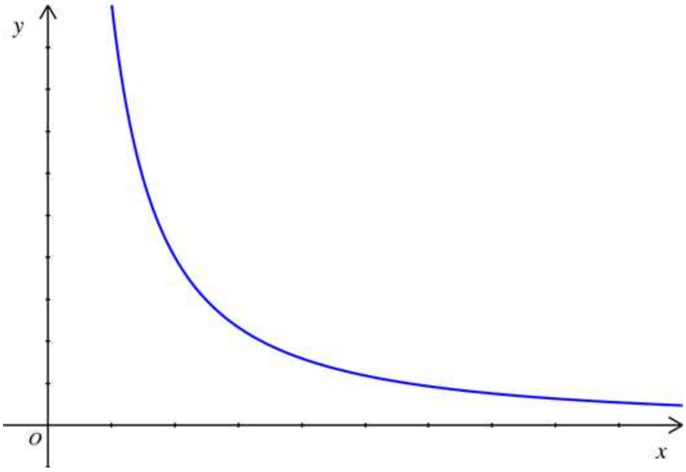


Figure 1 : Allure générale d'une courbe d'indifférence pour les biens faiblement substituables

Exemple : Soit un consommateur dont la fonction d'utilité est telle que : $u(x,y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ où x et y représentent deux biens faiblement substituables. Représenter la courbe d'indifférence pour les niveaux d'utilité u_0={2 ; 3 ;4}.

Pour répondre à ces questions, on tire d'abord, en tirant y en fonction de x ($u(x,y)$ étant maintenue fixée à u_0). Ainsi, on a : $y = \left(\frac{u_0}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = \frac{u_0^2}{\left(x^{\frac{4}{9}}\right)}$

Représentation des courbes d'indifférence :

Pour u_0=2, on a : $y = \frac{4}{\left(x^{\frac{4}{3}}\right)}$

Pou r u_0=3, $y = \frac{9}{\left(x^{\frac{4}{3}}\right)}$

Et pour u_0=4, $y = \frac{16}{\left(x^{\frac{4}{3}}\right)}$

Ces trois fonctions se trouvent représenter sur la figure 2 ci-dessous.

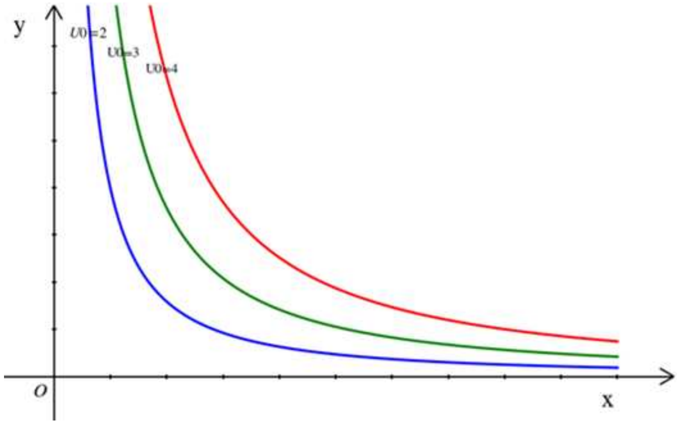


Figure 2 : Courbes d'indifférence pour différents niveaux d'utilité pour les biens faiblement substituables

Propriétés : Si l'axiome 6 est respectée (convexité des préférences), les courbes d'indifférence issues d'une même fonction d'utilité ne peuvent pas être tangentes ; en d'autre termes deux courbes d'indifférence ne se coupent pas (voir figure 2).

NB : L'ensemble des courbes d'indifférence associé à une même fonction d'utilité est appelée *carte d'indifférence* (voir figure 3 ci-dessous).

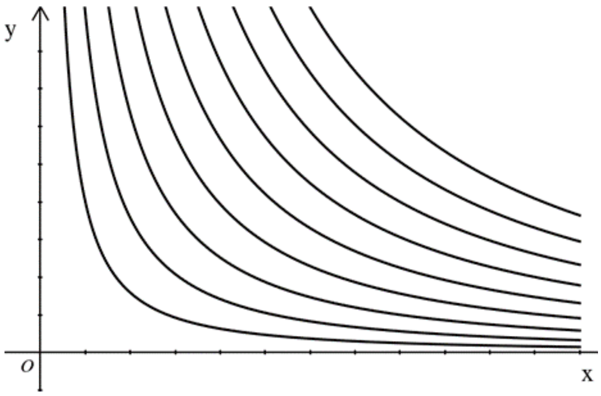


Figure 3 : Carte d'indifférence issue d'une fonction d'utilité pour les biens faiblement substituables

1.2.2.2. Fonction d'utilité et courbe d'indifférence pour les biens parfaitement substituables

Fonction d'utilité

Lorsque les biens sont ***parfaitement substituables***, la fonction d'utilité prend la forme d'une fonction affine. Dans ce cas, pour deux biens x et y, la forme générale de la fonction d'utilité est la suivante :

$$u(x, y) = ax + by \tag{3}$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et du bien y. a et b sont des constantes.

Exemple : Soit $u(x, y) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y$ où x et y représentent deux biens parfaitement substituables. Par exemple, pour étancher sa soif, l'eau potable non-minérale et l'eau minérale peuvent être considérées comme deux biens parfaitement substituables.

Courbe d'indifférence

Pour déterminer la courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité u_0, on pose l'égalité $u(x, y) = u_0$ pour ensuite exprimer y en fonction de x et les autres paramètres de l'équation. Dès lors, en posant $ax + by = u_0$, on obtient :

$$y = \left(\frac{u_0}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right)x \tag{4}$$

Cette équation traduit l'équation d'une droite dont la pente est $-\left(\frac{a}{b}\right)$ et l'ordonnée à l'origine égale à $\left(\frac{u_0}{b}\right)$. Le signe de la pente étant négatif, cela signifie que la courbe d'indifférence est décroissante.

L'allure générale d'une courbe d'indifférence pour deux biens parfaitement substituables est la suivante :

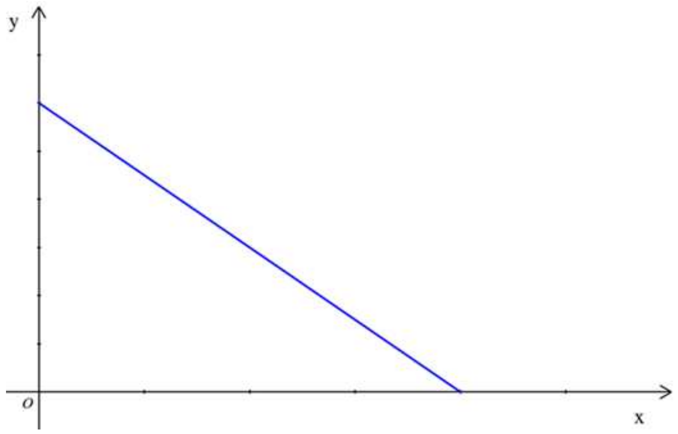


Figure 4 : Allure générale d'une courbe d'indifférence pour deux biens parfaitement substituables

Exemple : Soit un consommateur dont la fonction d'utilité est telle que : $u(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ où x et y représentent deux biens parfaitement substituables. Représenter la courbe d'indifférence pour les niveaux d'utilité u_0={2 ; 3 ;4}.

En effet, en tirant y en fonction de x, on obtient :

$$y = 3u_0 - \frac{3}{2}x$$

Ainsi, pour u_0=2, on a : $y = 6 - \frac{3}{2}x$
Pou r u_0=3, $y = 9 - \frac{3}{2}x$
Et pour u_0=4, $y = 12 - \frac{3}{2}x$
La représentation de ces trois équations de droite donne la figure 5 ci-dessous.

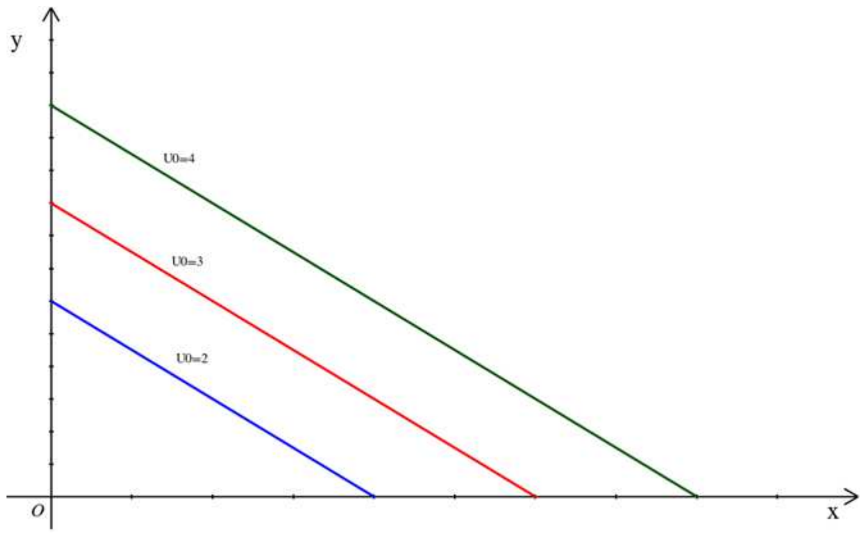


Figure 5 : Courbes d'indifférence pour différents niveaux d'utilité

1.2.2.3. Fonction d'utilité et courbe d'indifférence pour les biens complémentaires

Fonction d'utilité

Lorsque les biens sont ***complémentaires***, la forme générale de la fonction d'utilité est la suivante :

$$u(x,y) = min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right) \tag{5}$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et du bien y. a représente la quantité de bien x nécessaire pour procurer une unité d'utilité au consommateur et b représente la quantité de bien y nécessaire pour générer une unité d'utilité. Cette fonction est souvent appelée la fonction de Leontief (ou fonctions à coefficients constants).

Exemple : Soit $u(x,y) = min(x\,;\frac{1}{2}y\,)$ où x et y représentent deux biens parfaitement complémentaires. A titre illustratif, on peut, par exemple, supposer un consommateur qui, pour faire une tasse de thé a besoin d'un sachet de thé et de 2 morceaux de sucre. Le sachet de thé et le morceau de sucre apparaissent alors comme des biens complémentaires. La fonction d'utilité de ce consommateur peut donc être traduite par la fonction ci-dessus. En effet, si le consommateur dispose de 3 sachets de thé et 10 morceaux de sucre, il ne peut boire que 3 tasse de thé puisqu'une tasse de thé nécessité 1 sachet de thé et 2 morceaux de sucre. Il lui restera alors 4 morceaux de sucre inutilisés. En revanche, s'il dispose de 10 morceaux de sucre et 10 sachets de thé, il ne peut boire que 5 tasses de thé puisque la quantité de sucre ne lui permet pas.

L'une des implications de la fonction d'utilité des biens complémentaires est que le niveau d'utilité maximal atteint dépendra en priorité du bien moins abondant (bien techniquement en faible quantité).

Pour connaitre le bien en quantité faible, on divise les quantités disponibles de chaque bien par son coefficient technique que sont a et b dans l'équation (5).

En reprenant l'exemple précédent et en réécrivant la fonction $u(x,y)$ sous la forme générale, on obtient:

$$u(x,y) = mi\,n\left(x\,;\frac{1}{2}y\right) = \;min(\frac{x}{1}\,;\frac{y}{2})$$

Cette reformulation signifie que pour obtenir 1 unité d'utilité, il faut nécessairement consommer 1 unité du bien x et 2 unité du bien x. En d'autres termes, pour faire 1 tasse de thé, il nous faut 1 sachet de thé et 2 morceaux de sucre. Ainsi, pour connaître combien de tasses de thé peuvent être faits, il nous faut diviser le nombre initial de sachets de thé par 1 et le nombre initial de morceaux de sucre divisé par 2. Le minimum entre ces rapports détermine le nombre de tasse de thé pouvant être obtenu, par conséquent le niveau d'utilité pouvant être atteint. Cette procédure de calcul reste valable quelle que soit la forme spécifié. Il faut toujours ramener la fonction dans sa forme la plus générale avant de calculer les rapports.

Par exemple : soit la fonction d'utilité suivante $u(x,y) = min\left(\frac{3}{4}x\,;2y\right)$. On dispose de 20 unités du bien x et 10 unités du bien y. On se demande quel niveau d'utilité peut être atteint avec ces ressources.

D'abord, il faut réécrire la fonction d'utilité dans sa forme générale. On a :

$$u(x,y) = min\left(\frac{3}{4}x\,;2y\right) = min\left(\frac{x}{\frac{4}{3}}\,;\frac{y}{\frac{1}{2}}\right) = min\left(\frac{x}{1{,}33}\,;\frac{y}{0{,}5}\right)$$

On constate, à travers cette expression, que pour obtenir 1 unité d'utilité, il faut nécessairement 1,33 unité du bien x et 0,5 unité du bien y. Par conséquent, l'utilité maximale pouvant être atteinte par 20 unités du bien x et 10 unités du bien y est :

$$u(20{,}10) = min\left(\frac{20}{1{,}33}\,;\frac{10}{0{,}5}\right) = min(15\,;20) = 15$$

Courbe d'indifférence

Le principe de construction d'une courbe d'indifférence relative aux biens complémentaires se différencie légèrement des cas précédents car il permet de tenir compte de l'excès de biens (ou gâchis de ressources). En effet, prenons la fonction d'utilité de deux biens complémentaires x et . Celle-ci peut se présenter sous la forme $u(x,y) = min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right)$ où a et b représentent respectivement les quantités de bien x et y nécessaire pour produire 1 unité d'utilité.

Cette équation signifie que lorsque l'on dispose de b unités du bien, on peut les associer à a unités du bien x pour produire 1 unité d'utilité (u = 1); Mais lorsque l'on dispose de plus a unités du bien x alors que l'on a que b unités du bien y, il n'y aura aucune différence avec la première combinaison car le supplément de biens x ne servira à rien puisque l'on ne peut produire qu'une seule unité d'utilité. Ce supplément de bien x représente alors un excès ressources ou un gâchis. On peut tenir le même raisonnement avec a unités du bien x auxquels on associe plus de b unités du bien y. On aboutira à un excès de bien y. Cela veut dire que c'est le couple (a, b) qui correspond le mieux à la production de 1 unité d'utilité ((u = 1). Lorsque les quantités de x ou de y sont inférieures respectivement à a et b, il n'y a pas de possibilité de créer de l'utilité. Lorsque la quantité du bien x est égale à a et la quantité du bien y est supérieure à b ou lorsque la quantité du bien x est supérieure à a et la quantité du bien y est égale à b, il y a excès de l'un des deux biens. Ces situations seront donc considérées comme non optimales.

A présent, que se passe-t-il lorsque la quantité du bien x est supérieure à a et la quantité du bien y est supérieure à b ? En effet, il devient alors possible de produire plus d'une unité d'utilité (($u > 1$). Ce niveau dépendra du minimum entre $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$. Et la courbe d'indifférence sera tracée en fonction du bien pour lequel ce rapport est minimal. Ainsi, pour un niveau d'utilité donné u_0, la courbe d'indifférence sera alors $min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right) = u_0$. Deux cas se présentent alors :

Si $min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right) = \frac{x}{a}$, la courbe d'indifférence se déduit comme :

$$\frac{x}{a} = u_0 \Rightarrow x = au_0 \qquad (6a)$$

Cette équation équivaut à une droite parallèle à l'axe des ordonnées (y).

Si $min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right) = \frac{y}{b}$, la courbe d'indifférence se déduit comme

$$\frac{y}{b} = u_0 \Rightarrow y = bu_0 \qquad (6b)$$

Cette équation équivaut à une droite parallèle à l'axe des abscisses (x).

La représentation de ces deux droites permet d'obtenir la courbe d'indifférence (voir figure 6 ci-dessous).

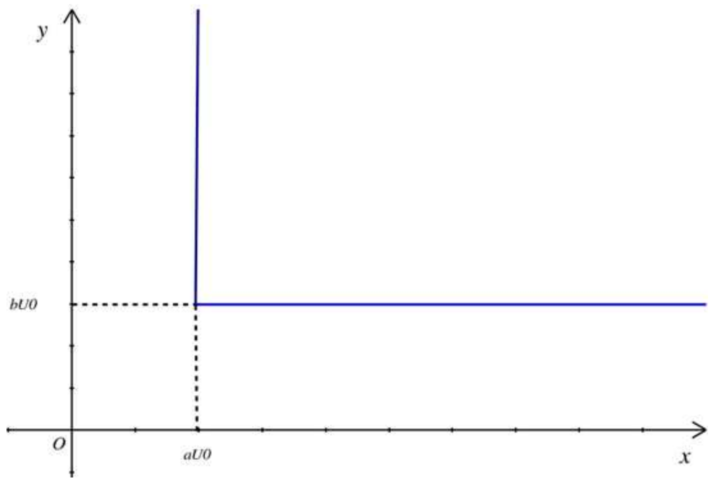


Figure 6 : Allure générale d'une courbe d'indifférence pour deux biens complémentaires

Cette courbe bleue représente l'ensemble des combinaisons des biens x et y qui procurent la même utilité u_0. Elle montre que la combinaison optimale est l'intersection entre la droite verticale et la droite horizontale. Ainsi, tout point sur la courbe différent de ce point présente un gâchis. En effet, lorsqu'il choisit une combinaison trouvant le long de la droite verticale, cela signifie que c'est le bien x qui est moins abondant. Sa quantité est au_0. Et la quantité du bien y qu'il faut associer à cette quantité pour obtenir u_0 est bu_0. Ainsi toute quantité du bien y supérieure à bu_0 est un excès car l'utilité restera toujours u_0 .

De la même manière, lorsque le consommateur choisit une combinaison qui se trouve le long de la droite horizontale, cela signifie que c'est le bien y qui est moins abondant. Sa quantité est bu_0. Et la quantité du bien x qu'il faut associer à bu_0 pour obtenir u_0 est au_0. Dès lors toute quantité du bien x supérieure à au_0 est un excès car l'utilité restera toujours u_0.

Il apparaît alors que le meilleur choix de consommation pour le consommateur sera la combinaison (au_0 ; bu_0) car cette combinaison ne présente aucun gâchis.

Exemple : Soit une fonction d'utilité telle que $u(x,y) = min\left(\frac{2}{5}x\,;3y\right)$ où x et y représentent deux biens complémentaires. Représenter la courbe d'indifférence pour les niveaux d'utilité u_0={1 ; 2 ;3}.

D'abord, cette fonction d'utilité dans sa forme générale afin d'en déduire les coefficients techniques. On a :

$$u(x,y) = min\left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\,;\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)$$

Ainsi, $a = \frac{5}{2}$ et $a = \frac{1}{3}$

En posant $u(x,y) = u_0 \Leftrightarrow min\left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\,;\frac{y}{\frac{1}{3}}\right) = u_0$

Si $min\left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\,;\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)= \frac{x}{\frac{5}{2}}$ alors on a : $\frac{x}{\frac{5}{2}} = u_0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}\,u_0$. Mais si $min\left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\,;\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)= \frac{y}{\frac{1}{3}}$ alors on a : $\frac{y}{\frac{1}{3}} = u_0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}\,u_0$. Dès lors la courbe d'indifférence sera :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}\,u_0 \\ ou \\ y = \dfrac{1}{3}\,u_0 \end{cases}$$

Cette courbe peut donc être représentée en fonction des différentes valeurs de u_0 (u_0=1 ; u_0=2 et u_0=3). La représentation de ces trois niveaux d'utilité est faite sur la figure 7 ci-dessous.

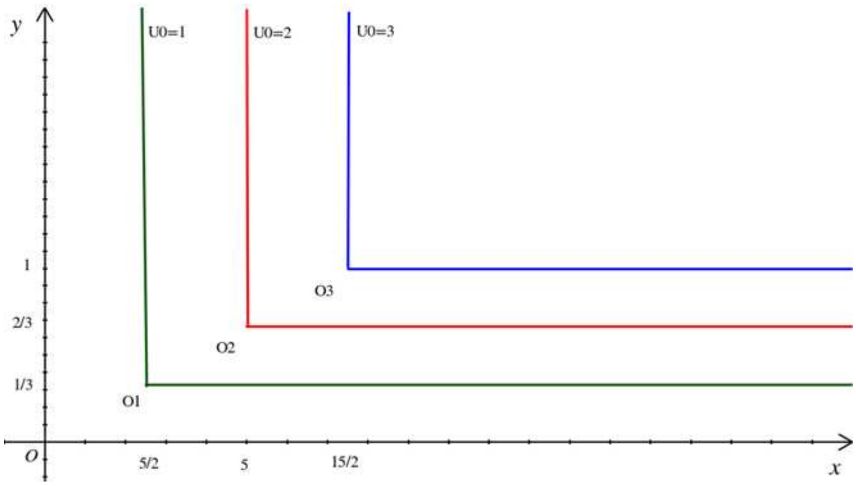


Figure 7 : Courbes d'indifférence pour différents niveaux d'utilité pour les biens complémentaires.

1.2.2.4. Fonction d'utilité généralisée : la fonction CES

Notons que les trois types de fonctions que nous venons de présenter peuvent être considérées comme des cas particuliers d'une classe dénommée fonction à élasticité de substituions constante ou encore CES (*Constant Elasticity of Substitution*). Cette fonction se présente sous la forme suivante :

$$u(x, y) = [\lambda x^{\rho} + (1-\lambda) y^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \tag{3}$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et du bien y. λ et ρ sont des constantes avec $\lambda \in [0,1]$ et $\rho = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ où ε représente l'élasticité de substitution entre le bien x et le bien y. La caractéristique de cette fonction est que lorsque ε tend vers 1 (tend vers 0) on obtient une fonction Cobb-Douglas ; lorsque ε tend vers 0 (ρ tend vers $-\infty$), on obtient la fonction de Leontief (complémentarité parfaite). Et enfin, on obtient une fonction linéaire (substituabilité parfaite) lorsque ε tend vers $+\infty$ (ρ tend vers 1).

1.2.2.5. Courbes d'indifférence particulières : cas des biens indésirables et des biens neutres

Il existe aussi des formes particulières de courbes d'indifférence lorsque le consommateur combine un bien normal avec d'autre types de biens qui peuvent être soient indésirables soient neutres.

Un bien indésirable est un bien qui exerce une influence négative sur l'utilité du consommateur mais qu'il doit pourtant consommer s'il veut profiter d'un autre

bien (qui est lui normal, désirable). Par exemple, la pollution (atmosphérique et sonore) peut être considérée comme des biens indésirables pour un individu qui s'installe au milieu d'un centre urbain pour y vivre. En effet, pour profiter pleinement de son cadre de vie (accès à plusieurs facilités), l'individu doit aussi consommer plus de bruits et d'air pollué.
La courbe d'indifférence d'un tel consommateur aura une allure croissante. En effet, s'il veut prolonger son séjour dans le centre urbain, il va nécessairement augmenter sa consommation de pollution. Et inversement s'il limite son séjour en milieu urbain, il diminue aussi sa consommation de pollution.

Un bien neutre est un bien qui, associé à un bien normal, n'a aucune incidence sur le niveau d'utilité du consommateur quelle que soit la quantité consommée. C'est un bien auquel le consommateur est insensible. Par exemple, prenons le cas d'un non-voyant qui se présente à un spectacle artistique composé de chants et de chorégraphie. En considérant les chants comme le bien x et la chorégraphie comme le bien y, on peut dire cet individu est insensible au bien y puisque quelle que soit la qualité des pas de danses et des ballets déroulés dans ce spectacle , cela n'aura aucune incidence sur son utilité car il ne perçoit rien. La satisfaction de cet individu dépendra uniquement des différentes chansons qu'il entendra. Ainsi, la chorégraphie apparaitra comme un bien neutre alors que la chanson sera le bien désirable (normal).

Les figures 8a et 8b ci-dessous illustrent les courbes d'indifférences pour les biens indésirables et les biens neutres avec un bien normal (désirable).

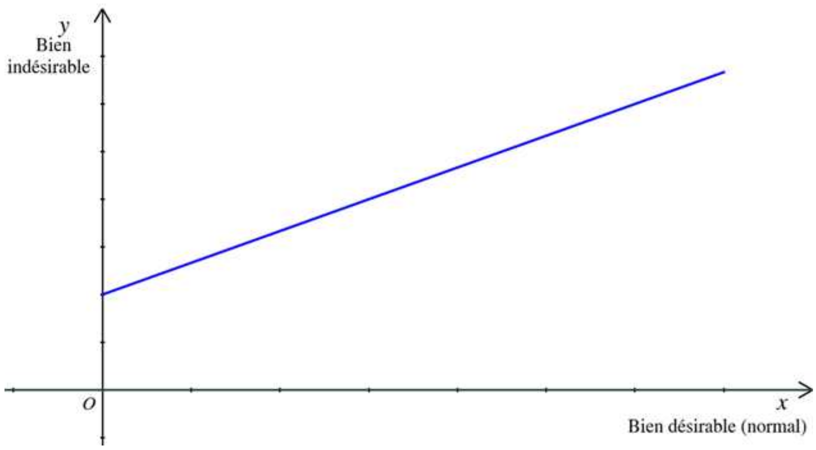


Figure 8a : Allure générale d'une courbe d'indifférence avec un bien indésirable

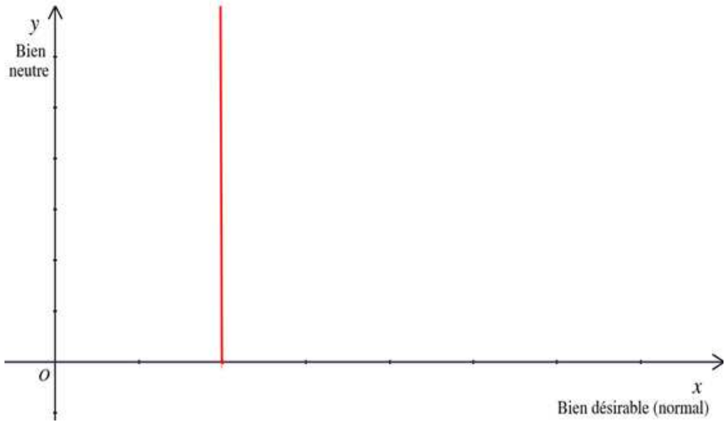


Figure 8b : Allure générale d'une courbe d'indifférence avec un bien neutre

Remarque : Sur la figure 8a, on constate que lorsque le consommateur veut diminuer la quantité du bien indésirable, il doit aussi diminuer la quantité du bien désirable pour garder le même niveau d'utilité (rester sur le courbe d'indifférence). Mais en modifiant la quantité d'un bien sans modifier celle de l'autre, il modifie aussi son niveau d'utilité. Par conséquent, il aura une nouvelle courbe d'indifférence différente de la première.

Pour ce qui concerne le cas du bien neutre, on constate qu'une modification de la quantité du bien neutre (tout en maintenant la quantité du bien désirable) ne permet pas de modifier le niveau d'utilité. C'est seulement en diminuant (ou en augmentant) uniquement la quantité du bien désirable qu'on pourra modifier le niveau d'utilité. Ainsi pour changer de niveau d'utilité, le consommateur doit modifier la quantité du bien désirable x.

Toutes ces remarques sont illustrée sur les figures 9a et 9b ci-dessous.

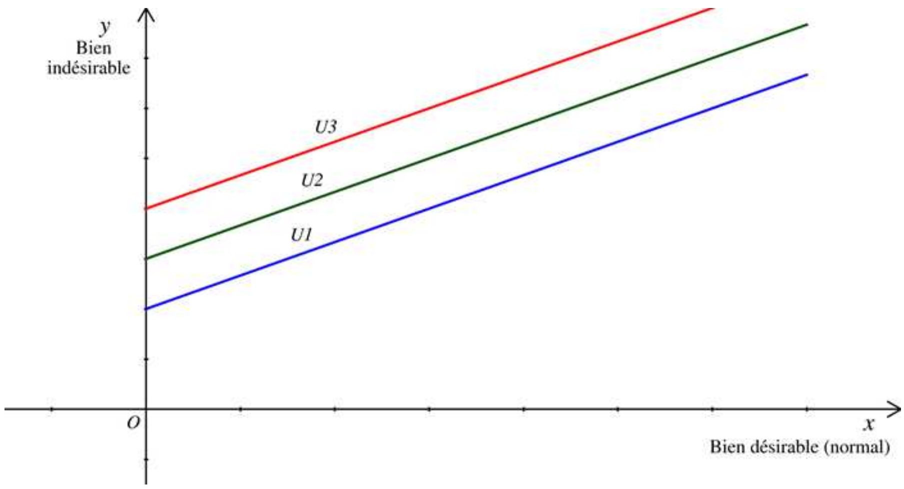


Figure 9a : Courbe d'indifférence correspondant à différents niveaux d'utilité avec un bien indésirable

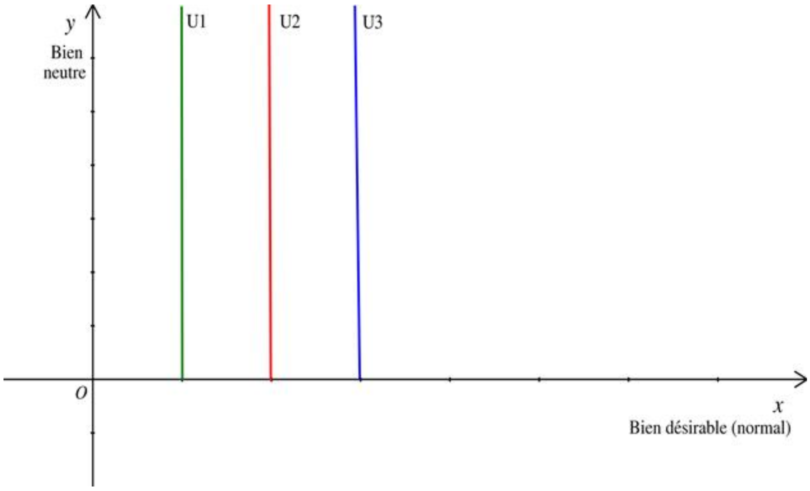


Figure 9b : Courbe d'indifférence correspondant à différents niveaux d'utilité avec un bien neutre

1.2.3. Convexité des préférences et concavité de l'utilité

Les différentes courbes d'indifférence que nous venons d'étudier et qui traduisent les préférences des consommateurs selon la typologie des biens respectent, toutes, les trois axiomes de base que sont : la complétude, la réflexivité et la transitivité. Cependant toutes ne respectent pas l'axiome de convexité qui, pourtant, est capitale à de nombreux égards. En effet de nombreuses conclusions sur les comportements du consommateur sont fondées sur l'hypothèse de convexité car elle caractérise les préférences dites normales.

L'hypothèse de convexité (qui correspond en fait à l'axiome 6 sur les préférences) suppose que toute combinaison linéaire de paniers équivalents sera préférée à l'un quelconque de ces paniers. En d'autres termes, si deux paniers A et B, sont équivalents, alors tout panier C constitué par une combinaison linéaire (moyenne pondérée) de A et B sera préférée à la fois à A et à B. Lorsque cette hypothèse se vérifie, on dit que les préférences du consommateur sont convexes.

Il faut noter que la convexité des préférences implique aussi la concavité de la fonction d'utilité. En effet la *convexité* des préférences équivaut à la *quasi-concavité* de la fonction d'utilité et la *stricte convexité* des préférences équivaut à la *stricte concavité* de la fonction d'utilité.

L'une des implications fondamentales de la convexité des préférences est l'unicité de la solution au problème de maximisation de l'utilité. En effet la multiplicité des solutions au problème de maximisation provient généralement de la non-convexité des préférences. Mais celle-ci n'est pas la seule source car certaines préférences peuvent bien être convexes (fonction d'utilité quasi-concave) sans que la solution au problème de maximisation soit unique. C'est le cas par exemple des préférences linéaires. Les préférences associées à ces types de fonctions sont convexes mais pas strictement convexes. C'est seulement avec les préférences normales c'est à dire les préférences strictement convexes (et stricte concavité de la fonction d'utilité) que l'unicité de la solution est garantie. Car le seul extremum identifié dans ce cas correspond bien au maximum de la fonction.

Les figures 10a, 10b et 10c ci-dessous illustrent trois cas de préférences (préférence convexe, préférence concave, préférence ni concave ni convexe).

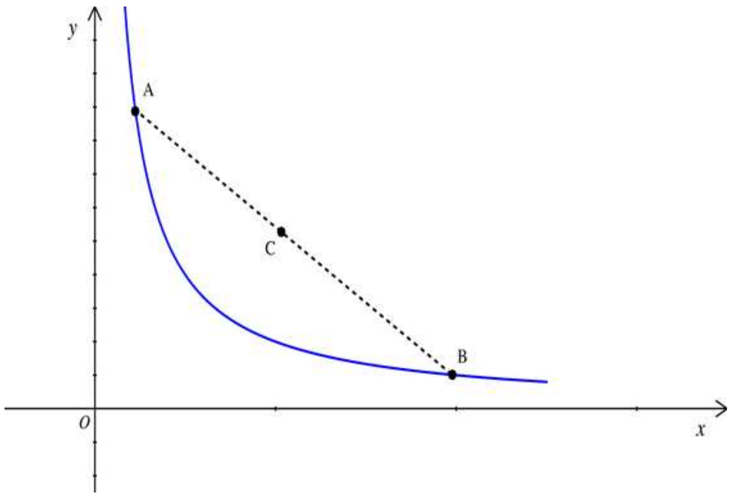


Figure 10a : Allure d'une courbe d'indifférence strictement convexe

Géométriquement, une courbe est dite convexe lorsque le segment qui lie deux points A et B appartenant à cette courbe se trouve au-dessus de la courbe[4]. Sur le plan microéconomique, ce résultat signifie que tout panier se trouvant sur un tel segment sera préféré à la fois à A et à B (A et B étant indifférents entre eux).

Les points se trouvant sur le segment [AB] sont obtenus par une combinaison linéaire du panier A et du panier B. Cette combinaison prend la forme mathématique suivante : $\lambda A + (1-\lambda)B$ avec $\lambda \in [0,1]$ équivalent à l'expression d'une moyenne pondérée de paramètre λ . Ce paramètre permet de déterminer la position d'un point quelconque point C sur ce segment. Le segment [AB] est appelé ensemble convexe.

[4] On dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si :$\forall (x;y) \in I \times I, \forall \lambda \in [0,1]$, on a : $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

On dit qu'une fonction f est quasi-convexe sur un intervalle I si et seulement si : :$\forall (x;y) \in I \times I, \forall \lambda \in [0,1]$, on a : $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \max[f(x); f(y)]$

On dit qu'une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si –(f) est convexe.

On dit qu'une fonction f est quasi-concave sur un intervalle I si et seulement si –(f) est quasi-convexe

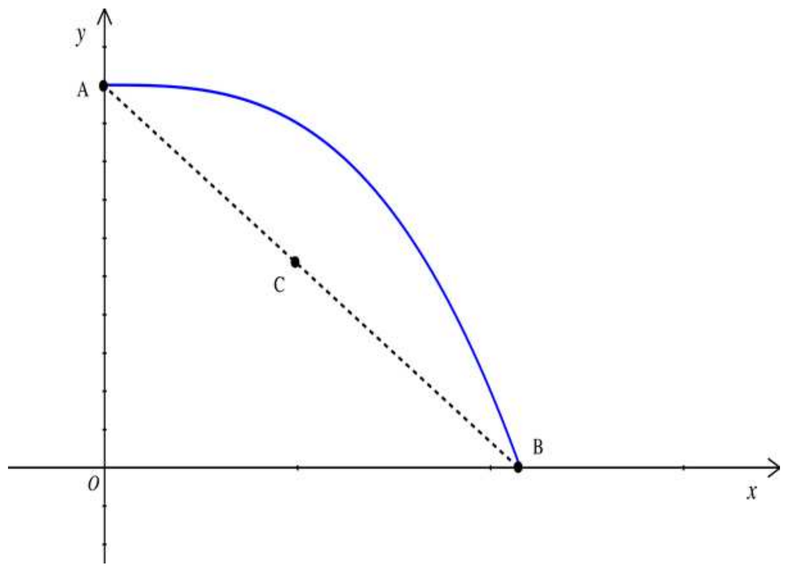


Figure 10b : Allure d'une courbe d'indifférence strictement concave

Une courbe est dite concave lorsque le segment qui lie deux points sur cette courbe se trouve en dessous de la courbe elle-même. Dans le cas d'une courbe d'indifférence, cela signifie que tout panier se trouvant sur un tel segment sera moins préféré en même temps à A et à B (A et B étant indifférents entre eux). Le consommateur préfère alors les valeurs extrêmes que les valeurs moyennes. Autrement dit, il préfère le tout A, rien de B ou il préfère le tout de B rien de A.

Tout comme pour les préférences convexes, les points se trouvant sur le segment [AB] sont obtenus par une combinaison linéaire du panier A et du panier B à travers l'expression mathématique: $\lambda A + (1-\lambda)B$ où $\lambda \in [0{,}1]$. Le segment [AB] est appelé ensemble concave.

NB : Il ne faut pas confondre une préférence concave et une utilité concave. La préférence est synonyme de courbe d'indifférence. Très, généralement quand la préférence est convexe c'est que l'utilité est concave. Mais quand la préférence est concave l'utilité n'est pas nécessairement convexe. Ce n'est donc pas une relation de réciprocité. D'ailleurs, il arrive que la courbe d'indifférence ne soit ni concave, ni convexe. Dans un tel cas, il est impossible de savoir à priori l'allure de la fonction d'utilité à moins d'étudier la fonction. La figure 10c ci-dessous illustre l'exemple d'une courbe d'indifférence ni convexe, ni concave.

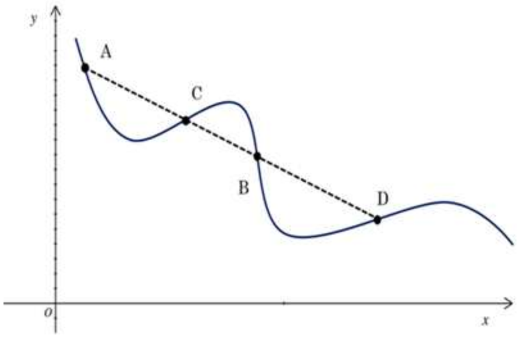


Figure 10c : Allure d'une courbe d'indifférence ni concave ni convexe

Propriétés : Pour déterminer la convexité ou la concavité d'une courbe d'indifférence, on peut se servir de ses dérivées : première et seconde :

(1) Lorsque la dérivée première de la courbe d'indifférence est négative et que la dérivée seconde est positive, cette courbe sera strictement convexe (exemple : courbe d'indifférence issue d'une Cobb-Douglas).
(2) Lorsque sa dérivée première est négative et que sa dérivée seconde est nulle, la courbe sera quasi-convexe (exemple : courbe d'indifférence issue d'une fonction linéaire).
(3) Lorsque la dérivée première est positive et sa dérivée seconde négative, la fonction sera strictement concave.
(4) Lorsque la dérivée première est positive et sa dérivée seconde est nulle, la fonction sera quasi-concave.

1.2.4. Utilité totale, utilité moyenne et utilité marginale

Connaissant la fonction d'utilité associée à une préférence et les quantités des biens consommées, on peut calculer trois indicateurs : l'utilité totale, l'utilité moyenne et l'utilité marginale.

1.2.4.1. L'utilité totale

L'utilité totale correspond au niveau de satisfaction obtenu par la consommation d'un panier de biens. En supposant par exemple un panier de biens $(x; y)$ tel que $x = 16$ et $x = 25$ et en supposant une fonction d'utilité telle que $(x; y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, la l'utilité totale procurée par ce paner est $u(16; 25) = (16^{\frac{1}{2}})(25^{\frac{1}{2}}) = 20$. Ainsi, l'utilité totale est de 20.

1.2.4.2. L'utilité moyenne

L'utilité moyenne représente le niveau d'utilité par unité de bien consommé (la quantité de l'autre bien étant maintenue fixe). Elle s'exprime comme suit :

$$uM_x = \frac{u(x;\bar{y})}{x} \tag{7a}$$

$$uM_y = \frac{u(\bar{x};y)}{y} \tag{7b}$$

Où uM_x et uM_y représentent respectivement l'utilité moyenne du bien x et du bien y.

Par exemple, avec un panier $(x;y)$ tel que $x = 16$ et $x = 25$ procurant une utilité totale de 20, l'utilité moyenne du bien x est $\frac{20}{16} = 1{,}25$ et l'utilité moyenne du bien y est $\frac{20}{25} = 0{,}8$. Ces chiffres signifient que, pour une utilité totale égale à 20, la consommation du bien x apporte en moyenne 1,25 alors que la consommation du bien y apporte 0,8.

Il faut noter que toutes ces valeurs précédemment calculées n'ont, pour l'instant, pas de pertinence interprétative dans la mesure où ils ne tiennent pas compte des prix des biens ni du revenu du consommateur. Ces aspects seront abordés dans les prochaines sections

1.2.4.3. L'utilité marginale

L'utilité marginale d'un bien représente l'accroissement de l'utilité totale suite à la consommation d'une unité supplémentaire de ce bien (la quantité de l'autre bien étant maintenu fixe). Par exemple, en reprenant la fonction précédente $u(x;y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ et le panier $x = 16$ et $x = 25$, on constate que l'utilité totale est de 20. On se demande par la suite de combien croitra l'utilité totale lorsque la quantité du bien x augmente en passant de 16 à 17 ? En effet, avec cette augmentation, l'utilité totale devient $u(17;25) = (17^{\frac{1}{2}})(25^{\frac{1}{2}}) \cong 20{,}62$.

On peut ainsi calculer l'utilité marginale du bien x en faisant la différence entre l'utilité totale avant variation et l'utilité totale après variation. Ce qui correspond à $20{,}62 - 20 = 0{,}62$. L'utilité marginale du bien x est de 0,62.

De même, on peut calculer l'utilité marginale du bien y en faisant $u(16;26) - u(16;25) = 20{,}39 - 20$. L'utilité marginale du bien y est 0,39.

Ainsi de façon algébrique, l'utilité marginale d'un bien peut être calculée à travers les formules suivantes :

$$um_x = u(x+1;\bar{y}) - u(x;\bar{y}) \tag{8a}$$

$$um_y = u(\bar{x}; y+1) - u(\bar{x}; y) \qquad (8b)$$

Où um_x et um_y représentent respectivement l'utilité moyenne du bien x et du bien y.

Ces formules algébriques peuvent être généralisées quel que soit le niveau d'accroissement que subit le bien considéré. Les formules deviennent alors :

$$um_x = \frac{\Delta u(x; \bar{y})}{\Delta x} \qquad (8c)$$

$$um_y = \frac{\Delta u(\bar{x}; y)}{\Delta y} \qquad (8d)$$

De façon analytique, lorsque la fonction d'utilité est dérivable sur ses arguments x et y, l'utilité marginale s'obtient en prenant les dérivée premières. Les formules des utilités marginales deviennent alors :

$$um_x = \frac{du(x; y)}{dx} = \frac{\partial u(x; y)}{\partial x} \qquad (8e)$$

$$um_y = \frac{du(x; y)}{dy} = \frac{\partial u(x; y)}{\partial y} \qquad (8f)$$

1.2.4.4. Liens entre l'utilité totale, l'utilité moyenne et l'utilité marginale

La relation entre l'utilité totale, l'utilité moyenne et l'utilité marginale peut s'appréhender à travers leur mode de croissance suite à l'augmentation de la quantité d'un bien (par exemple le bien x). La figure 11 ci-dessous illustre la relation entre les trois indicateurs d'utilité.

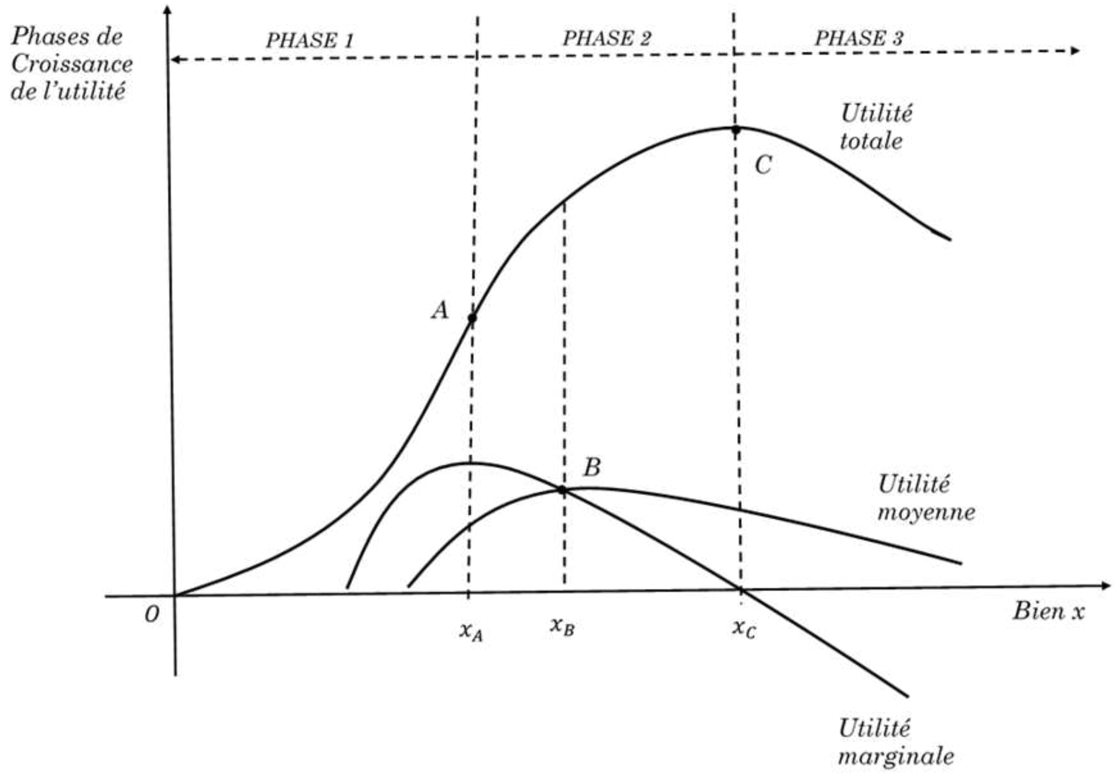


Figure 11 : Relation entre l'utilité totale, l'utilité moyenne et l'utilité marginale

D'une manière générale, la croissance de l'utilité suit une loi connue sous le nom de loi de Gossen[5]. Selon cette loi, l'utilité croît d'abord dans un premier temps jusqu'à atteindre un niveau maximal et ensuite commence à décroitre et finit par devenir nulle si la consommation se prolonge infiniment. Par exemple, pour un consommateur qui a soif, les premières quantités d'eau bues font accroître son utilité de manière très marquée. Mais après avoir complètement étanché sa soif, toute quantité d'eau supplémentaire fait diminuer son utilité et finit même par lui nuire lorsqu'il boit une quantité déraisonnable. La loi de Gossen est aussi appelée «loi de l'intensité décroissante des besoins » ou «la loi satiabilité des besoins ».

Sur la figure 11 ci-dessus, on peut constater que la croissance de l'utilité totale se fait en trois étapes. Dans la première phase, l'utilité totale croit à taux croissant. Dans cette phase où l'accroissement de l'utilité est très rapide et très marquée l'utilité marginale et l'utilité moyenne sont aussi positives et croissantes. Cette première phase peut s'illustrer par exemple sur un consommateur qui boit son premier verre d'eau après une grande soif. Cette phase de croissance de l'utilité

[5] Loi énoncée par Hermann Heinrich Gossen (1810 - 1858)

se poursuit jusqu'à l'atteinte d'un point d'inflexion[6]. Ce point correspond au point A sur la figure. Le point d'inflexion correspond aussi au point où l'utilité marginale atteint son maximum. Pour ce qui concerne l'utilité moyenne, elle demeure positive et croissante. C'est à partir du point d'inflexion A que débute la seconde phase. Dans cette phase l'utilité totale croît toujours positivement mais cette fois à taux décroissant; c'est-à-dire qu'elle augmente mais cet accroissement de plus en plus faiblement. En effet, l'utilité marginale ayant déjà atteint son maximum commence à décroitre. La décroissance de l'utilité marginale signifie que chaque unité supplémentaire du bien x apportera moins d'utilité que l'unité précédente. Cette étape correspond, par exemple, à l'utilité procurée au consommateur par le deuxième verre d'eau.

Il faut noter que durant la seconde phase, il existe un point où l'utilité marginale est égale à l'utilité moyenne. C'est le point de croisement entre les deux courbes. Il correspond au point B sur la figure. Sur cette figure, on peut constater qu'avant ce point B l'utilité marginale est supérieure à l'utilité moyenne. Mais à partir de ce point, l'utilité moyenne devient plus grande que l'utilité marginale. Il faut aussi noter que le point B correspond au maximum de l'utilité moyenne. Ce qui signifie qu'à partir de ce point, l'utilité moyenne commence à décroitre. La seconde phase se poursuit jusqu'à ce que l'utilité totale atteigne un niveau maximal appelé aussi point de satiété. Ce point correspond au point C sur la figure.

Cependant, à partir du point C, on entre dans une troisième phase qui marque la décroissance de l'utilité totale. Déjà, en ce point l'utilité marginale est nulle. Cela signifie que la quantité supplémentaire qui a permis d'atteindre x_c n'a apporté aucune utilité supplémentaire. De plus, puisque l'utilité marginale devient négative à partir du point C, cela signifie quantité supplémentaire consommée fera baisser l'utilité totale. Ce qui paraît cohérent avec la loi de Gossen. Par exemple, on peut supposer que quand le consommateur étanche complètement sa soif avec le deuxième verre d'eau, tout verre d'eau supplémentaire fait baisser son utilité.

Par ailleurs, il faut noter que les préférences dites normales (préférences convexes) s'inscrivent uniquement dans la seconde phase. Les phases 1 et 2 ne correspondent pas aux caractéristiques des préférences normales. En effet dans la première phase l'utilité est convexe et dans la troisième phase l'utilité est concave mais sa concavité est tournée vers le bas.

[6] Le point d'inflexion est un point où la courbe change de concavité. C'est le point où la dérivée seconde de la fonction s'annule.

1.3. Le taux marginal de substitution (TMS)

1.3.1. Définition du TMS

Dans les sections précédentes, nous avons défini la courbe d'indifférence comme l'ensemble des combinaisons qui procurent au consommateur le même niveau d'utilité. Pour l'illustrer, nous avons alors pris l'exemple de trois paniers contenant deux l'orange et la pomme notée respectivement par x et$y$. Le premier panier noté P_1 contient 1 orange et 10 pommes $P_1(1; 10)$, le second panier P_2 contient 2 oranges et 5 pommes $P_2(2; 5)$ et le troisième panier P_3 contient 3 oranges et 0 pomme $P_3(10; 0)$. Ainsi pour que le consommateur se dit indifférent entre ces trois paniers, il faut que l'accroissement de la quantité soit fait de telle sorte à compenser la baisse de la quantité de l'autre bien. On dit alors qu'on substitue les biens. Mais la question qui reste poser serait de savoir à quel taux se fait cette substitution. En d'autre termes, combien d'unités du bien y faut-il donner au consommateur pour compenser la perte d'unité du bien x. Dans l'exemple précédent, on constate que le consommateur est prêt à échanger contre 1 orange contre 5 pommes. On dit alors que le taux marginal de substitution de la pomme à l'orange est de 5.

En résumé, le taux marginal de substitution entre deux biens x et y correspond à la quantité du bien y auquel le consommateur est prêt à renoncer pour obtenir une unité du bien x. Elle est notée $TMS_{y/x}$.

1.3.2. Calcul du TMS par la méthode algébrique

Algébriquement, le TMS se calcule comme la valeur absolue de la variation du bien y sur la variation du bien x.

$$TMS_{y/x} = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \tag{9a}$$

$$TMS_{x/y} = \left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| \tag{9b}$$

Propriétés :
Puisque l'augmentation de la quantité d'un bien implique la diminution de l'autre bien, cette diminution rend négatif le TMS qu'il faut prendre en absolue. Cependant cette écriture en valeur absolue se fait par commodité sinon, elle n'est pas nécessaire. On pouvait simplement se limiter à prendre l'opposé du TMS en utilisant le signe moins à la place de la valeur absolue. Dans ce cas $TMS_{y/x} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $TMS_{x/y} = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Par ailleurs, puisque $TMS_{y/x}$ est l'inverse de $TMS_{x/y}$, alors par définition on a : $TMS_{y/x} \times TMS_{x/y} = 1$

1.3.3. Calcul du TMS par la méthode graphique

Les formules du TMS peuvent également être illustrées à partir de la représentation graphique de la courbe d'indifférence (voir figure 12 ci-dessous).

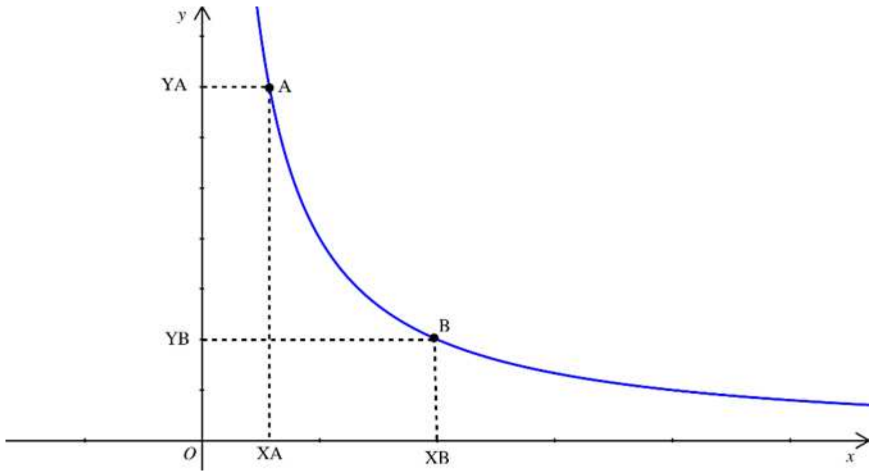


Figure 12 : Calcul du TMS par la méthode graphique

Soient A et B, deux points sur la courbe d'indifférence de coordonnées respectives $(X_A; Y_A)$ et $(X_B; Y_B)$, le taux marginal de substitution du bien y au bien x se calcule comme suit :

$$TMS_{y/x} = \left| \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \right| \qquad (9c)$$

NB : En réalité, le TMS calculé par la méthode algébrique et la méthode est appelé Taux de substitution. Elle devient le taux marginal de substituions lorsque les variations deviennent infinitésimales. D'où l'intérêt d'une méthode de calcul analytique. Cependant, la méthode de calcul analytique se base soit la courbe d'indifférence soit sur la fonction d'utilité.

1.3.4. Calcul du TMS par la méthode analytique

1.3.4.1. Calcul du TMS connaissant la courbe d'indifférence

Par ailleurs, lorsque la courbe d'indifférence est continue et dérivable, le TMS peut être calculé pour toute variation infinitésimale du bien de l'un ou de l'autre bien. Par sachant la courbe d'indifférence telle que $y = g(x)$ ou telle que $x = g^{-1}(y)$ les TMS s'obtiennent à travers les dérivées suivantes :

$$TMS_{y/x} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (9c)$$

$$TMS_{x/y} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\partial x}{\partial y} \qquad (9d)$$

1.3.4.2. Calcul du TMS connaissant la fonction d'utilité

Connaissant la fonction d'utilité, le taux marginal de substitution du bien y au bien x se calcule comme le rapport entre l'utilité marginal du bien x et l'utilité marginal du bien y. Sachant que l'utilité marginale d'un bien correspond à la dérivée première de la fonction d'utilité par rapport à ce bien, on peut définir le taux marginal de substitution du bien y au bien x comme suit :

$$TMS_{y/x} = \frac{\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}\right)} = \frac{um_x}{um_y} \qquad (9e)$$

$$TMS_{x/y} = \frac{\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}\right)} = \frac{um_y}{um_x} \qquad (9f)$$

NB : Les formules de calcul du TMS que nous venons de présenter ne sont valables que lorsque les biens substituables (parfaitement ou imparfaitement). Mais lorsque la fonction d'utilité se présente sous la forme d'une Leontief (cas de biens complémentaires), le TMS est soit égal à 0 soit indéfinie.

1.4. Exercices de synthèse du chapitre 1

1.4.1. Enoncés

Exercice 1 : Soit un consommateur auquel on présente cinq paniers de biens. Les relations de préférence de consommateur sont telles que : $P_1 \succ P_3$; $P_5 \succ P_4$; $P_5 \prec P_3$; $P_4 \sim P_2$; $P_1 \prec P_5$; $P_5 \sim P_2$.
Ce consommateur peut-il être considéré comme rationnel ?

Exercice 2 : Soient quatre consommateurs dont les préférences sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_1(x;y) = 3x + 5y$$
$$U_2(x;y) = x + lny$$

$$U_3(x;y) = x^{\frac{1}{4}}\, y^{\frac{3}{4}}$$
$$U_4(x;y) = 2\min(\frac{1}{3}x + 2y)$$

- a) Identifier la nature de chacune des fonctions d'utilité compte tenu de la typologie des biens.
- b) Exprimer et représenter les courbes d'indifférence lorsque chacun de ces consommateurs se fixe un niveau d'utilité égal à 4.
- c) Calculer (si possible), les taux marginaux de substitution du bien y au bien x aux points $x = 2$ et au point $x = 3$

Exercice 3: Soit un consommateur ayant une préférence pour les mélanges plutôt que les paniers extrêmes. Donner une fonction d'utilité qu'on peut potentiellement attribuer à ce consommateur. Calculez le $TMS_{y/x}$ pour ce consommateur au point (*x*=*3 ; y*=*5*). Interprétez ce résultat.

1.4.2. Résolutions

Exercice 1 : En effet, les préférences de ce consommateur ne respectent pas l'hypothèse de transitivité (axiome 3 sur les préférences). Le consommateur dit préférer le panier 1 au panier 3 lequel est, à son tour, moins préféré au panier 5. Cette situation est incohérente avec le fait de préférer moins le panier 1 au panier 5. D'autre part, le consommateur dit préférer le panier 5 au panier 4 mais se dit indifférent entre le panier 4 et le panier 2. Dans ce cas, il apparaît illogique qu'il se dise indifférent entre le panier 5 et le panier 2. Compte tenu donc du non-respect de l'axiome de transitivité, les préférences de ce consommateur peuvent être considérées comme non rationnelles.

Exercice 2 :

Consommateur 1 : $U_1(x;y) = 3x + 5y$

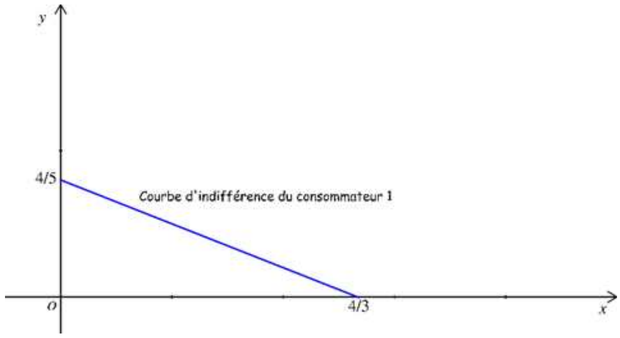
Nature de la fonction d'utilité

La fonction d'utilité pour ce consommateur est de la forme $ax + by$ où $a = 3$ et $b = 5$. Cette fonction exprime donc une fonction d'utilité des biens parfaitement substituables.

Expression de la courbe d'indifférence et représentation graphique

La courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité égal à 4 se détermine en posant l'équation $U_1(x;y) = 4$ et en tirant y.

Ainsi en posant $3x + 5y = 4$, on obtient $y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$. Cette équation représente celle d'une droite de pente $-\frac{3}{5}$. C'est donc une fonction décroissante (voir figure ci-dessous).



Calcul du TMS aux points x=2et x=3

On peut calculer le TMS soit en utilisant l'expression de la courbe d'indifférence soit en utilisant la fonction d'utilité.

En utilisant la courbe d'indifférence, le TMS se calcule par la formule suivante : $TMS_{y/x} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial y}{\partial x}$. Dans ce cas sachant que $= \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$, alors $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3}{5}$. Ainsi :

$$TMS_{y/x} = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

En utilisant la fonction d'utilité, le TMS se calcule comme le rapport des utilités marginales um_x et um_y qui sont respectivement les dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à x et par rapport à y. Ainsi :

$$TMS_{y/x} = \frac{um_x}{um_y} = \frac{\left(\frac{\partial U_1(x;y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial U_1(x;y)}{\partial y}\right)} = \frac{3}{5}$$

Propriété: Pour les biens parfaitement substituables, le TMS est constant et égal à l'opposé de la pente de la courbe d'indifférence et cela quelles que soient les quantités des biens x et y appartenant à la courbe d'indifférence. Ainsi $TMS_{y/x} = -\frac{a}{b}$ $\forall\, (x;y) \in C$. Ce chiffre représente ce taux auquel la substitution parfaite entre x et y est pleinement assurée.

Ainsi, pour le consommateur 1, le TMS entre le bien y et le bien x reste $\frac{3}{5}$ aussi bien aux points x=2 et qu'au point x=3.

Au final, le TMS étant égal à $\frac{3}{5}$ (0,6), cela signifie que le consommateur est prêt à renoncer à une unité du bien x contre 0,6 unité du bien y soit un rapport de 10 x contre 6 y.

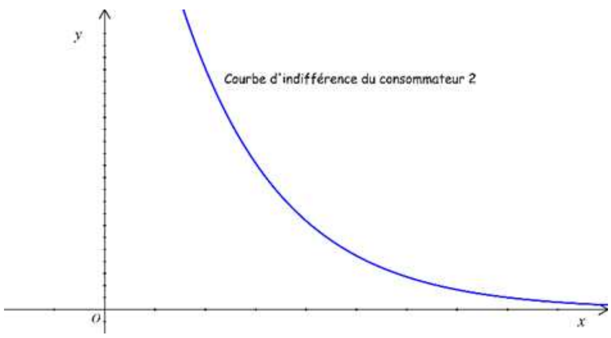
Consommateur 2 : $U_2(x; y) = x + lny$

Nature de la fonction d'utilité

On peut constater que la fonction d'utilité pour ce consommateur ne correspond à aucune forme fonctionnelle usuelle. Cependant, ne nous fions pas aux apparences, cette fonction traduit bien une préférence normale c'est-à-dire une préférence exprimée en fonction des biens imparfaitement substituables. En effet, la fonction est strictement concave en fonction du bien y (dérivée première positive et dérivée seconde négative). Ce qui signifie que la préférence est strictement convexe. Pour démontrer la convexité de la préférence, il suffit de montrer que la dérivée première de la courbe d'indifférence (en fonction de *x*) est négative et que la dérivée seconde est positive (voir ci-dessous).

Expression de la courbe d'indifférence et représentation graphique

Avec un niveau d'utilité égal à 4, la courbe d'indifférence du consommateur 2 est: $y = e^{(4-x)}$. Cette courbe est représentée sur la figure ci-dessous.



Calcul du TMS aux points x=2 et x=3

Tout comme pour le consommateur 1, on peut calculer le TMS pour le consommateur 2 soit en utilisant l'expression de la courbe d'indifférence soit en utilisant celle de la fonction d'utilité.

En utilisant la courbe d'indifférence sachant que $y = e^{(4-x)}$, le TMS s'obtient par la formule: $TMS_{y/x} = -\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(-e^{(4-x)}\right) = e^{(4-x)}$. Ainsi :

$$TMS_{y/x} = e^{(4-x)}$$

En utilisant la fonction d'utilité, le TMS se calcule comme le rapport des utilités marginales um_x et um_y Ainsi on a:

$$TMS_{y/x} = \frac{um_x}{um_y} = \frac{\left(\frac{\partial U_2(x;y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial U_2(x;y)}{\partial y}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = y$$

Ici, pour connaître le TMS, il faut d'abord connaître y. Mais sachant que $y = e^{(4-x)}$, on montre aisément que :

$$TMS_{y/x} = e^{(4-x)}$$

Ce qui correspond à l'expression du TMS obtenue par la courbe d'indifférence.

Ainsi au point x=2, le $TMS_{y/x} = e^2 = 7{,}39$
Et au point x=3, le $TMS_{y/x} = e^1 = 2{,}72$

On constate que le TMS diminue lorsque x augmente.

Propriété : Pour une préférence normale, le TMS est toujours décroissant. En effet lorsque le consommateur dispose d'un bien en quantité importante, il est prêt à renoncer à ce bien sans en demander plus en échange. Dans l'exemple précédent, lorsque le consommateur disposait de x=2, pour qu'il lâche une unité de ce bien, il fallait en échange 7,39 unités du bien y. Mais dès lors lorsqu'il dispose de x= 3, il n'en demande plus 2,72 unités. C'est la loi de la décroissance du taux marginal de substitution.

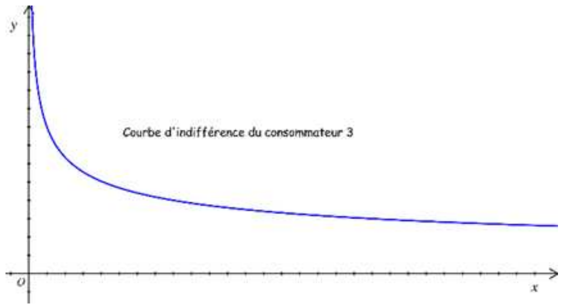
Consommateur 3 : $U_3(x;y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$

Nature de la fonction d'utilité

Les préférences du consommateur 3 sont représentées par une fonction d'utilité de biens imparfaitement substituables. Cette fonction est exprimée à travers une Cobb-Douglas dont la forme générale est : $u(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$ avec $a = 1$, $\alpha = 1/4$ et $\beta = 3/4$.

Expression de la courbe d'indifférence et représentation graphique

Avec un niveau d'utilité égal à 4, la courbe d'indifférence du consommateur 3 est: $y = 4^{\frac{4}{3}}x^{-\left(\frac{1}{3}\right)}$. Cette courbe est représentée sur la figure ci-dessous.



Calcul du TMS aux points x=2 et x=3

$TMS_{y/x} = -\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(-\frac{1}{3}4^{\frac{4}{3}}x^{-\left(\frac{4}{3}\right)}\right) = \frac{1}{3}4^{\frac{4}{3}}x^{-\left(\frac{4}{3}\right)}$. Ainsi :

$$TMS_{y/x} = \frac{1}{3}4^{\frac{4}{3}}x^{-\left(\frac{4}{3}\right)}$$

En calculant le TMS se calcule comme le rapport des utilités marginales, on obtient :

$$TMS_{y/x} = \frac{1}{3}\frac{y}{x} = y$$

Mais sachant que $y = 4^{\frac{4}{3}}x^{-\left(\frac{1}{3}\right)}$, on montre aisément que :

$$TMS_{y/x} = \frac{1}{3}4^{\frac{4}{3}}x^{-\left(\frac{4}{3}\right)}$$

Ainsi au point *x*=2, le $TMS_{y/x} = \frac{1}{3}4^{\frac{4}{3}}2^{-\left(\frac{4}{3}\right)} = 0{,}84$

Et au point *x*=3, le $TMS_{y/x} = \frac{1}{3}4^{\frac{4}{3}}3^{-\left(\frac{4}{3}\right)} = 0{,}49$

Consommateur 4 : $U_4(x;y) = 2\min(\frac{1}{3}x + 2y)$

Nature de la fonction d'utilité

Les préférences du consommateur 4 sont représentées par une fonction d'utilité des biens complémentaires. Elle est exprimée par une Leontief dont la forme générale est : $u(x,y) = min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right)$ avec $a = 3$ et $= 1/2$, toutefois avec un coefficient multiplicateur. En reformulant $U_4(x;y)$ on obtient :

$$U_4(x;y) = 2min(\frac{x}{3};\frac{y}{\frac{1}{2}}).$$

Expression de la courbe d'indifférence et représentation graphique

Avant de tenter d'exprimer la courbe d'indifférence, procédons d'abord à une décomposition de la fonction $U_4(x;y)$ selon les valeurs de l'opérateur min(.). En effet deux cas se présentent :

- Si $min(\frac{x}{3};\frac{y}{\frac{1}{2}})=\frac{x}{3}$, alors la fonction d'utilité sera :

$$U_4(x;y)=2\frac{x}{3}=\frac{2}{3}x$$

Dans ce cas la courbe d'indifférence se calcule comme :

$$\frac{2}{3}x=u_0 \;\Rightarrow\; x=\frac{3}{2}u_0$$

Avec $u_0=4$, cette équation devient :

$$x=6$$

- A l'inverse, si $min(\frac{x}{3};\frac{y}{\frac{1}{2}})=\frac{y}{\frac{1}{2}}$, alors la fonction d'utilité sera :

$$U_4(x;y)=2\frac{y}{\frac{1}{2}}=4y$$

Dans ce cas la courbe d'indifférence se calcule comme :

$$4y=u_0 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{4}u_0$$

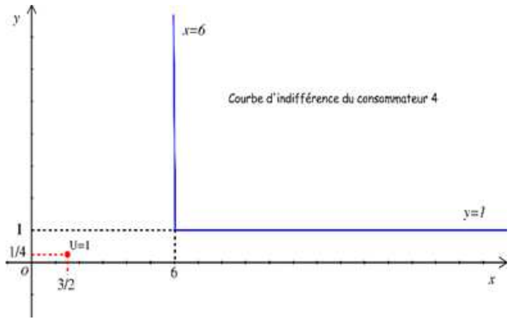
Avec $u_0=4$, cette équation devient :

$$y=1$$

Ainsi, dans les deux configurations, la courbe d'indifférence du consommateur 4 se présente comme suit :

$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

La fonction $x=6$ traduit l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées et la fonction $y=1$ traduit l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses. Ces deux droites se trouvent représenter la figure ci-dessous.



Calcul du TMS aux points x=2 et x=3

Avant d'évoquer les possibilités de calcul du TMS pour les biens complémentaires, il faut d'abord signaler que ni le point *x*=2 ni le point *x*=3 ne permettent au consommateur 4 d'atteindre un niveau d'utilité égal à 4. En effet compte tenu des paramètres de la courbe d'indifférence, il faudrait au minimum 6 unités du bien x et 1 unité du bien y pour produire une utilité égal à 4. Par conséquent les points spécifiés ne suffisent pas.

Il faut par ailleurs noter que compte tenu de la présence du coefficient multiplicateur dans la forme générale de la fonction d'utilité, ce ne sont pas les paramètres a et de b qui déterminent la quantité du bien x et la quantité du bien y qu'il faut pour produire une unité d'utilité ($a = 3$ et $b = \frac{1}{2}$). En effet, la fonction d'utilité étant définie telle que $U_4(x; y) = 2min(\frac{x}{a}; \frac{y}{b})$, pour produire une unité d'utilité, il faut simplement $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$ c'est à dire $\frac{3}{2}$ unité du bien x et $\frac{1}{4}$ du bien y (voir figure ci-dessus).

Pour ce qui concerne le calcul TMS, les biens x et le bien y étant complémentaires, leur possibilité de substituions est par construction est soit nul soit indéterminée. En effet, le TMS étant calculé comme $TMS_{y/x} = \frac{um_x}{um_y} = \frac{\left(\frac{\partial U_4(x;y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial U_4(x;y)}{\partial y}\right)}$, lorsque les biens x et y sont complémentaires, deux cas se présentent selon la valeur de l'opérateur min(.) :

- Si $min\left(\frac{x}{3}; \frac{y}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{y}{\frac{1}{2}} \Rightarrow U_4(x; y) = 4y$ alors $TMS_{y/x} = \frac{0}{4} = 0$
- A l'inverse si $min\left(\frac{x}{3}; \frac{y}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x}{3} \Rightarrow U_4(x; y) = \frac{2}{3}x$ alors $TMS_{y/x} = \frac{\frac{2}{3}}{0} = \infty$

Ainsi, ces deux relations permettent de montrer l'impossibilité de substitution entre le bien x et y.

Exercice 3 :

Choix d'une fonction d'utilité

Lorsque le consommateur a une préférence pour le mélange, cela veut dire ses préférences sont strictement convexes. Dans ce cas, on peut donc lui attribuer une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas. Nous choisissons alors une fonction simple telle que :

$$u(x, y) = x.y$$

Où x et y représente respectivement la quantité du bien x et du bien y.

Calcul du TMS

$$TMS_{y/x} = \frac{um_x}{um_y} = \frac{\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}\right)} = \frac{y}{x}$$

$$TMS_{y/x} = \frac{y}{x}$$

Ainsi, au point x=3 et y=5, on a : $TMS_{y/x} = \frac{5}{3} = 1{,}67$

Le TMS étant supérieur à 1 ($TMS_{y/x} = 1{,}67$), cela signifie que le consommateur valorise beaucoup plus le bien x par rapport au bien y. Ce rapport signifie également que l'utilité marginale apportée par le bien x est plus élevée que celle apportée par du bien y. Ce qui explique le fait que le consommateur accorde beaucoup plus de valeur au bien x plus qu'au bien y.

Il faut cependant noter que, plus la quantité du bien x augmente, plus son utilité marginale décroit. A ce moment, le consommateur sera prêt à céder le bien x pour une quantité faible du bien y.

CHAPITRE 2 : CONTRAINTE BUDGETAIRE DU CONSOMMATEUR

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les notions de préférences et d'utilité du consommateur. Cependant, ces notions ne suffisent pas à elles seules pour expliquer les choix du consommateur. En effet, d'autres facteurs entrent en ligne de compte notamment le niveau des prix des biens et le revenu dont dispose le consommateur. Ce second chapitre vise à présenter comment ces facteurs influencent-ils le choix du consommateur dans le processus de maximisation de l'utilité.

2.1. Définition de la contrainte budgétaire

Soit un consommateur disposant d'un revenu R cherchant à maximiser son utilité par la consommation de deux biens x et y. Les prix de ces deux biens sont supposés être p_x et p_y. On appelle contrainte budgétaire l'ensemble des paniers accessibles à ce consommateur compte tenu de son revenu et du niveau des prix. C'est l'ensemble des combinaisons $(x\ ;\ y)$ parmi lesquelles le consommateur peut choisir dans la limite de son revenu compte des prix des deux biens. La contrainte budgétaire donc est définie essentiellement par les prix des biens et le revenu du consommateur. Elle est traduite par l'expression suivante :

$$p_x x + p_y y \leq R \tag{2.1}$$

Où x et y représentent respectivement les quantités des biens x et y de prix respectifs p_x et p_y. Il apparaît alors que $p_x x$ est la dépense totale en bien x et $p_y y$ la dépense totale en bien y. R représente le revenu du consommateur.

Les prix et le revenu font objet d'un certain nombre d'hypothèses. En effet, les prix sont supposés être des donnés pour le consommateur. On dit dans ce cas que le consommateur est preneur de prix (*price taker).* Autrement dit, il n'a aucune possibilité d'influer sur leurs niveaux (les prix des biens sont exogènes).

Quant au revenu, il est supposé être prédéterminé. Car à ce stade de l'analyse on ne se préoccupe pas de l'origine du revenu (qui peut être soit l'offre de travail ou le recours au crédit ou à emprunt, etc..). On ne se préoccupe pas non plus de l'épargne, car cette dernière étant généralement considérée comme fruit d'un arbitrage entre la consommation présente et futur, elle fait appel à une analyse intertemporelle. Pour le moment, dans une analyse de type statique comparative, le revenu est supposé net de l'épargne et de l'endettement.

2.2. Droite de budget et ensemble de consommation

Avant de développer la notion de *droite de budget* et *d'ensemble de consommation*, il paraît important d'évoquer la notion d'ensemble des possibilités de consommation. En effet, l'*ensemble des possibilités de consommation* représente l'espace des choix envisageables par le consommateur. C'est possibilité pour le consommateur d'acheter toute quantité imaginable d'un bien. Bien entendu la réalisation de cet achat dépendra de la contrainte budgétaire. L'ensemble des possibilités de consommation sera limité uniquement par des contraintes d'ordre physique et institutionnel. Par exemple, l'impossibilité d'acheter une quantité négative d'un bien ou l'impossibilité d'acheter un bien non disponible dans l'économie à cause de l'absence de production ou d'importation, ou cause des interdictions.

Dès lors, en l'absence de contraintes physiques ou institutionnelles, l'ensemble des possibilités de consommation d'un individu peut être infini car il ne dépend ni des prix ni du revenu. Dans cette conception, *la contrainte budgétaire* sera redéfinie comme le sous-ensemble de possibilité de consommation atteignable par le consommateur compte de son revenu et des prix des biens. De ce point de vue, la contrainte budgétaire est une réduction de l'ensemble des possibilités de consommation.

La contrainte budgétaire permet aussi de définir la notion de *droite de budget.* Celle-ci représente les différentes combinaisons du bien x et y qui, lorsqu'elles sont choisies, amène le consommateur à dépenser tout son revenu. Dans ce cas, l'inégalité de la contrainte budgétaire se transforme en une équation telle que :

$$p_x x + p_y y = R \qquad (2.2a)$$

A travers cette équation, la droite s'obtient en tirant y. Ce qui permet alors de retrouver l'équation (2.2b) ci-dessous :

$$y = \left(\frac{R}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right) x \qquad (2.2b)$$

Dans cette équation, le rapport $\frac{R}{p_y}$ représente l'ordonnée à l'origine de la droite du budget alors que $\frac{p_x}{p_y}$ (représentant le rapport de prix ou prix relatif) définit la pente de la droite du budget. La pente d'une droite définit le degré d'inclinaison. Lorsque sa valeur absolue est élevée, la droite est plus raide tendant alors vers une droite verticale. En revanche lorsque la valeur absolue est faible, la droite tend vers une droite horizontale. Le signe de la pente définit l'allure de la droite.

Un signe négatif (ce qui est généralement le cas d'une droite de budget), signifie que la droite est décroissante ; en d'autres termes compte tenu du rapport de prix et du revenu, toute augmentation de la quantité d'un bien (x) se traduit par une baisse de la quantité de l'autre bien (y).

Le tracé de la droite de budget permet de définir l'e*nsemble de consommation* ou *ensemble de budget* qui représente, en fait, l'espace délimitée par la droite de budget et les axes (x=0 et y=0).

Le graphique (2.1) ci-dessous illustre les notions d'ensemble de possibilités de consommation, de droite de budget et d'ensemble de consommation.

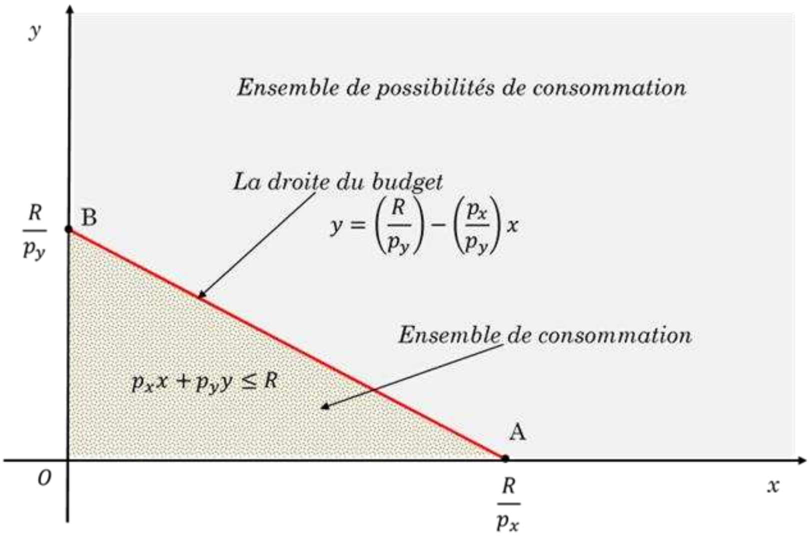


Figure 2.1 : Droite de budget et ensemble de consommation

La droite de budget définie par l'équation $y = \left(\frac{R}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right)x$ coupe l'axe des abscisses au point A et l'axe des ordonnées au point B. Ces deux points correspondent chacun à la consommation d'un seul bien. En effet, le point A représente le panier où le consommateur dépense tout son revenu à l'achat du bien x. Cette situation se traduit le point A($\frac{R}{p_x}$;0). De même, le point B représente le panier où le consommateur dépense tout son revenu à l'achat du bien y avec B(0 ; $\frac{R}{p_y}$).

Le triangle OAB, défini par la droite de budget et les axes, représente les paniers de consommation qui satisfont la contrainte. Ce triangle s'appelle *ensemble de consommation* ou *ensemble de budget*. Pour tous les points se trouvant à l'intérieur du triangle, la dépense est inférieure au revenu. En revanche, pour les points se trouvant sur la droite de budget la dépense est égale au revenu.

L'aire située au-dessus de la droite de budget correspond à l'ensemble des paniers inaccessibles compte tenu de la contrainte budgétaire (prix et revenu).

2.3. Déplacement de la droite de budget sous l'effet des politiques économiques

La droite de budget se déplace (et l'ensemble de consommation se modifie) suite à la variation du revenu ou à un changement du rapport de prix (variation du prix d'au moins un bien). Ces différentes éventualités sont examinées dans les sections ci-dessous

2.3.1. Effets d'une modification du revenu

Lorsque le revenu du consommateur augmente passant de R à R' dans une proportion τ telle que $R' = (1+\tau)R$ et que les prix relatifs restent inchangés, la droite de budget se déplace vers le haut parallèlement à la droite initiale (voir figure 2.2 ci-dessous).

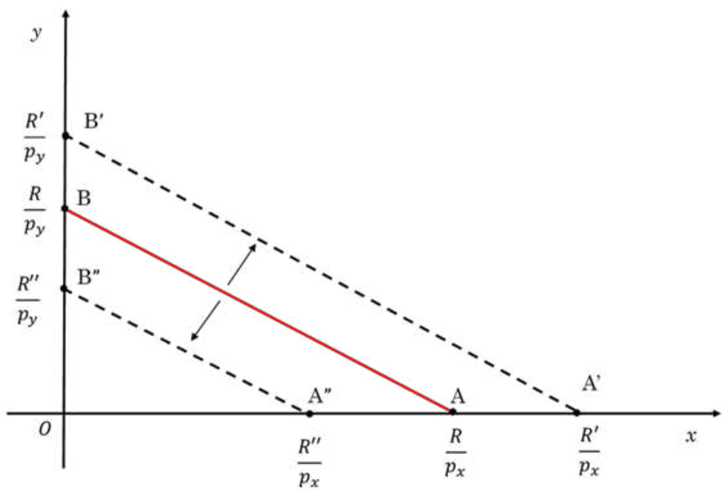


Figure 2.2 : Déplacement de la droite de budget suite à une variation du revenu.

Suite à l'augmentation du revenu, le point A et le point B qui définissent la droite de budget se déplacent respectivement vers les point A' et B'. Dans cette situation l'ensemble de consommation augmente puisque l'espace disponible sous la droite budgétaire devient grand.

En revanche lorsque le revenu du consommateur baisse passant de R à R'' dans une proportion τ telle que $R'' = (1-\tau)R$ et que les prix relatifs sont inchangés, alors la droite de budget se déplace vers le bas parallèlement à la droite initiale.

Le point A se déplace vers le point A" et le point B vers le point B". Dans cette situation l'ensemble de consommation diminue puisque l'espace disponible sous la droite budgétaire devient faible.

Il faut noter qu'une variation du revenu entraîne uniquement une modification de l'ordonnée à l'origine de la droite mais n'a aucun effet sur la pente.

2.3.2. Effets d'une modification du rapport des prix

Si le prix du bien x baisse dans une proportion τ telle que $p'_x = (1-\tau)p_x$, le revenu et le prix du bien y étant inchangés, cela entraine une modification de la pente de la pente (qui baisse en valeur absolue). Ainsi, la droite devient moins raide, le point A se déplace vers le point A' et l'ensemble de consommation augmente (voir figure 2.3 ci-dessous).

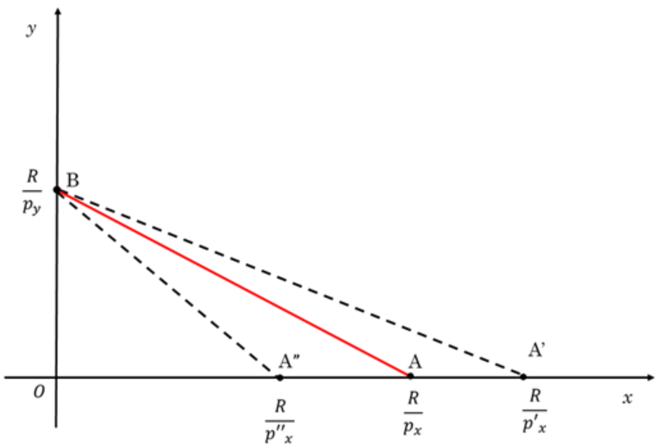


Figure 2.3 : Déplacement de la droite de budget suite à une modification du prix relatif

A l'inverse si le prix du bien x augmente dans une proportion τ telle que $p''_x = (1+\tau)p_x$ et que le revenu et le prix du bien y restent inchangés, cela entraine une modification de la pente (qui augmente en valeur absolue). La droite devient plus raide, le point A se déplace vers le point A". Dans cette situation l'ensemble de consommation diminue.

On constate que dans tous les deux cas de déplacement, le point B est fixe.
Il faut aussi noter que le même raisonnement peut être tenu suite à une variation du prix du bien y.

De façon générale, une baisse de prix entraîne l'augmentation de l'ensemble de consommation alors qu'une hausse de prix diminue l'ensemble de consommation

2.3.3. Effets d'une variation proportionnelle des prix

Si les prix des deux biens baissent dans une même proportion τ telle que $p'_x = (1-\tau)p_x$ et $p'_y = (1-\tau)p_y$ et que le revenu reste inchangé, dans cette situation, bien que le rapport de prix ne soit pas modifié, on assiste quand même à un déplacement de la droite de budget. En effet, la baisse concomitante du prix du bien y et du bien x entraine respectivement une augmentation de l'ordonnée à l'origine $\frac{R}{p'_y}$ et une augmentation de l'abscisse en 0 ($\frac{R}{p'_x}$). Dans cette situation, le point A se déplace vers le point A' et le point B vers le point B'. Cela correspond ainsi à un déplacement parallèle de la droite de budget vers le haut entrainant une augmentation de l'ensemble de consommation (voir figure 2.4 ci-dessous).

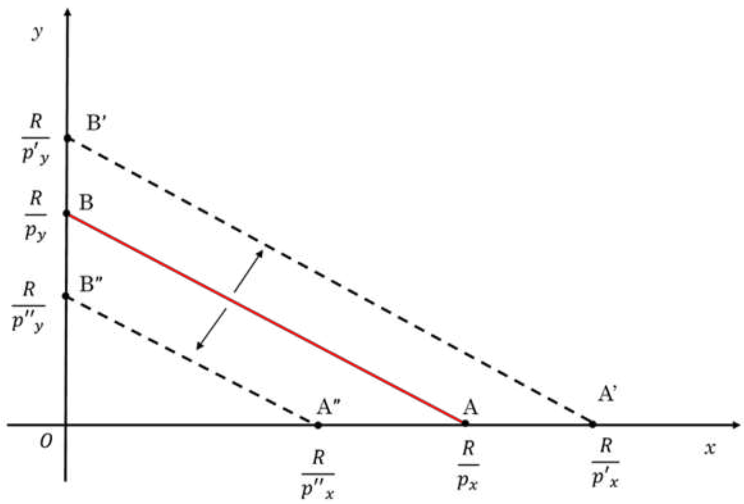


Figure 2.4 : Déplacement de la droite de budget suite à une variation proportionnelle des prix

De la même manière, si les prix des deux biens augmentent dans une même proportion τ telle que $p''_x = (1+\tau)p_x$ et $p''_y = (1+\tau)p_y$ et que le revenu reste inchangé, dans cette situation, le rapport de prix ne sera pas modifié. Mais on assiste à une diminution de l'ordonnée à l'origine $\frac{R}{p''_y}$ et une diminution de l'abscisse en 0 ($\frac{R}{p''_x}$). Ces deux diminutions entrainent alors un déplacement du point A vers A" et le point B vers le point B". Ce qui correspond ainsi à un déplacement parallèle de la droite de budget vers le bas entrainant alors une baisse de l'ensemble de consommation.

Ces deux résultats permettent alors de démontrer qu'une variation des prix dans les mêmes proportions entraine les mêmes effets qu'une variation en sens opposé dans la même proportion du revenu. Par exemple, une augmentation de tous les prix de 5% équivaut à une baisse du revenu dans cette même proportion.

2.3.4. Effets d'une variation non proportionnelle des prix

Dans les variations non proportionnelles, trois cas peuvent être distingués : soit les prix baissent simultanément mais dans des proportions différentes ; soit les prix augmentent simultanément mais dans des proportions différentes ou les prix varient en sens opposés.

Dans chacun de ces trois cas, il se produit un déplacement strict de la droite du budget c'est-à-dire un déplacement à la fois du point A et du point B. Mais néanmoins ce déplacement ne sera pas parallèle à la droite de budget initial. En effet la variation simultanée des prix modifie à la fois l'ordonnée à l'origine et l'abscisse en 0. Cette variation modifie aussi le prix relatif lorsque les variations ne sont pas proportionnelles.

Au final, une variation non proportionnelle des prix (à revenu constant) entraine l'apparition d'une nouvelle pente de la droite de budget, une nouvelle ordonnée à l'origine et une nouvelle abscisse en 0. Ce qui implique un déplacement non parallèle de la droite. Celle-ci se déplace vers le bas en se rapprochant de l'origine lorsque les prix augmentent et se déplace vers le haut lorsque les prix baissent.

2.3.5. Effets d'une variation simultanée et proportionnelle des prix et du revenu

Une variation simultanée et proportionnelle des prix et du revenu n'a aucun effet sur la droite du budget car la baisse (l'augmentation) du pouvoir d'achat provoquée par l'augmentation (la baisse) des prix sera totalement compensée par la hausse (la baisse) du revenu. En effet, si les prix et le revenu augmentent dans une même proportion τ telle que $p'_x = (1+\tau)p_x$, $p'_y = (1+\tau)p_y$ et $R'_y = (1+\tau)R$ ou s'ils baissent dans une même proportion τ telle que $p''_x = (1-\tau)p_x$, $p''_y = (1-\tau)p_y$ et $R''_y = (1-\tau)R$, il n'y aura aucun déplacement de la droite de budget. Car, ni la pente de la droite, l'ordonnée à l'origine ni l'abscisse en 0 ne seront modifiées. Ainsi les points A' et A" se confondent au point A et les points B' et B" se confondent au point B. Un tel résultat reflète une absence d'***illusion monétaire*** chez le consommateur (voir 2.5 ci-dessous).

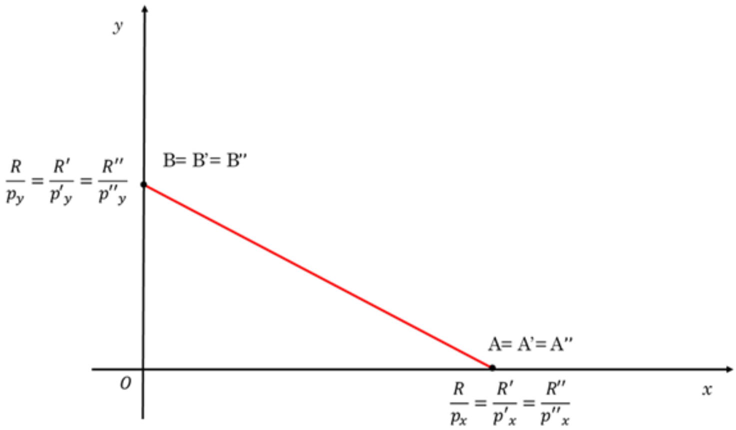


Figure 2.5 : Variation proportionnelle des prix et du revenu et absence d'illusion monétaire

2.4. Déplacement de la droite de budget sous l'effet des politiques fiscales

La politique fiscale agit sur la contrainte budgétaire à travers des effets prix et des effets revenu. Trois principaux canaux peuvent être identifiés : les impôts directs, les impôts indirects et les subventions.

2.4.1. Effet de l'impôt sur le revenu

Une augmentation de l'impôt sur le revenu n'a pas d'influence sur les prix relatifs. En entrainant une baisse du revenu consommable, l'impôt sur le revenu entraine un déplacement de la droite de budget vers le bas parallèlement à la droite initiale. Cela se traduit par une réduction de l'ensemble de consommation. En revanche une baisse des impôts produira l'effet contraire c'est-à-dire un déplacement parallèle de la droite vers le haut. Ce qui équivaut à une augmentation de l'espace de consommation (voir figure 2.2. ci-haut).

2.4.2. Effet des impôts indirects (TVA, etc.)

D'une manière générale, une variation du taux d'imposition indirecte telle que la TVA, se traduit par modification des prix relatifs lorsque les pourcentages de variations ne sont pas équivalents. En effet si les biens sont imposés à des taux différents, alors la droite de budget se déplace vers le bas en se rapprochant de l'origine lorsqu'il s'agit d'une augmentation des taux. Ce qui se traduit par une baisse de l'ensemble de consommation. En revanche lorsqu'il s'agit d'une baisse des taux, la droite de budget se déplace vers le haut et l'ensemble de consommation s'accroit.

Lorsque l'accroissement du taux d'imposition est le même pour tous les biens, aucune modification n'est observée dans les rapports de prix. C'est l'ordonnée à l'origine et l'abscisse en 0 de la droite qui se modifie. Ce qui signifie donc qu'en cas d'augmentation des taux de taxation, la droite de budget se déplace vers le bas parallèlement à la droite initiale. En revanche en cas de baisse de taux, la droite de budget se déplace vers le haut parallèlement à la droite initiale.

Au final lorsque les taux de taxation des biens varient dans les mêmes proportions, l'effet sur la droite de budget est équivalent à l'effet d'une augmentation proportionnelle de tous les prix (voir figure 2.4. ci-haut).

2.4.3. Effet des subventions des prix

Une subvention est généralement considérée comme un impôt négatif. La subvention, lorsqu'elle porte sur les prix, correspond à la prise en charge par l'Etat d'une partie du prix à payer par le consommateur. Dans ce cas, elle équivaut à diminution du prix effectif du bien. Ainsi, la mise en place d'une subvention entraine une modification du prix relatif se traduit par un déplacement de la droite de budget vers le haut. Cependant ce déplacement est un déplacement non parallèle car la subvention modifie la pente de la droite alors que l'ordonnée à l'origine reste inchangée. Par exemple, lorsque la subvention porte sur le bien x à un taux τ tel que $p'_x = (1-\tau)p_x$, on obtient la droite A'B telle que illustrée sur la figure 2.3 ci-haut.

2.5. Effets des politiques redistributives sur la droite de budget

2.5.1. Effets des prestations sociales directes

Les prestations sociales directes comme les transferts de revenu ou les politiques d'allocations familiales exercent sur la droite de budget les mêmes effets qu'une baisse de l'imposition sur le revenu. En effet, ces prestations peuvent être considérées comme une augmentation du revenu effectif. Ce qui aura pour conséquence un déplacement parallèle de la droite de budget vers le haut par rapport à la droite initiale. Par conséquent, une augmentation des prestations sociales directes entraine une augmentation de l'ensemble budgétaire (voir figure 2.2 ci-haut).

2.5.2. Effets de la distribution des bons d'achats

Afin de soutenir le pouvoir d'achat de certaines catégories de ménages, l'Etat peut décider de distribuer des bons d'achats pour certains types de biens (généralement les biens dits de premières nécessités). On peut alors analyser l'effet de cette politique en termes de déplacement de la droite du budget et de la modification de l'ensemble de consommations des ménages bénéficiaires. Cependant, il faut signaler ces effets dépendent d'abord du mode de distribution de ces bons.

En effet, on peut envisager plusieurs modes de distribution des bons : le bon intégral ou le bon subventionné.

- Le bon intégral permet à son détenteur de couvrir intégralement le prix du bien à acheter. Il permet d'acquérir le bien dans une quantité équivalente à la valeur du bon. Par exemple si la valeur du bon est 100, son détenteur peut acheter le bien d'une valeur de 100 sans frais supplémentaire. Le bon couvre intégralement le prix.

- Quant au bon subventionné, il permet à son détenteur de payer les biens à un prix inférieur au prix du marché dans une limite équivalente à la valeur du bon. A la différence du bon intégral où la totalité de l'achat est couverte par le bon, le détenteur du bon subventionné bénéficie uniquement d'une réduction de prix sur les achats d'un montant maximal fixé. Par exemple pour un bon d'une valeur de 100 subventionné à 50%, le consommateur bénéficie d'une réduction de 50% lorsqu'il achète un montant égal à 100.

Le bon, qu'il soit intégral ou subventionné, peut avoir une implication en termes de formulation de la contrainte budgétaire du consommateur.

2.5.2.1. Contrainte budgétaire dans le cas du bon intégral

En supposant x le bien concerné par le bon et V la valeur monétaire du bon octroyé à l'individu, la quantité totale du bien x pouvant être achetée par le bon compte tenu de son prix p_x est $(\frac{V}{p_x})$. Deux cas se présentent pour le consommateur:

- Si la consommation en bien x souhaitée est inférieure ou égale à la quantité pouvant être acquise par le bon ($x \leq \frac{V}{p_x}$), il consacre tout son revenu R à l'achat du bien y. Car la valeur du bon suffit à couvrir toute sa dépense en x. Dès lors, la quantité totale du bien y peut atteindre $\frac{R}{p_y}$. Dans ce cas la droite budgétaire est une constante $y = \frac{R}{p_y}$. On obtient alors une droite horizontale.

- En revanche, si sa consommation en bien x est supérieure à la quantité pouvant être acquise par le bon ($x > \frac{V}{p_x}$), alors une fraction du revenu sera utilisée pour l'achat de quantité supplémentaire. Dès lors sa droite de budget s'écrit :

$$\frac{V}{p_x}p_x + \left(x - \frac{V}{p_x}\right)p_x + p_y y = R + V \qquad (2.3a)$$

En reformulant cette équation, on retrouve :

$$p_x x + p_y y = R + V \qquad (2.3b)$$

En tirant y de cette expression, on trouve :

$$y = \left(\frac{R + V}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right)x \qquad (2.3c)$$

Il apparaît alors que lorsque $x > \frac{V}{p_x}$ la droite de budget a une pente égale à $\frac{p_x}{p_y}$

Ces deux situations sont illustrées sur la figure 2.6 ci-dessous.

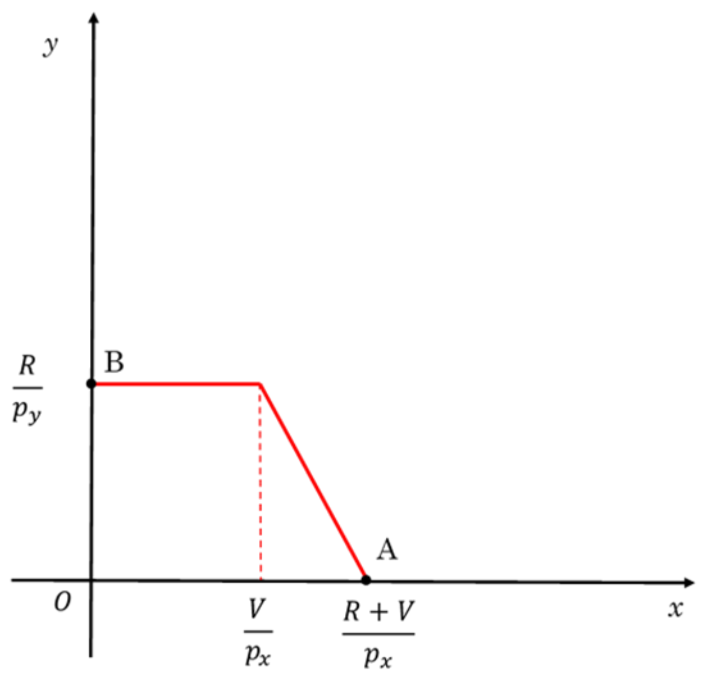


Figure 2.6 : Droite de budget dans le cas d'une distribution de bon intégral

2.5.2.2. Contrainte budgétaire dans le cas d'un bon subventionné

Dans le cas d'un bon subventionné d'une valeur V, l'individu paye un prix égal à $(1-\tau)p_x$ inférieur au prix du marché tant que la valeur du bon n'est pas atteinte[7]. Ainsi, à ce prix subventionné, il peut acheter, au maximum, $\frac{V}{(1-\tau)p_x}$ unités de biens x. Mais au-delà il paie le prix normal p_x.

Dès lors deux se présente pour la formulation de la contrainte budgétaire.

- Si $x \leq \frac{V}{(1-\tau)p_x}$ la droite budgétaire sera exprimée comme suit :

$$(1-\tau)p_x x + p_y y = R \qquad (2.4a)$$

On retrouve alors une droite dont la pente est $(1-\tau)\frac{p_x}{p_y}$ inférieure donc a $\frac{p_x}{p_y}$

En revanche, si $x > \frac{V}{(1-\tau)p_x}$, la contrainte budgétaire devient :

$$\frac{V}{(1-\tau)p_x}(1-\tau)p_x + \left(x - \frac{V}{(1-\tau)p_x}\right)p_x + p_y y = R \qquad (2.4b)$$

En réarrangeant cette expression et en tirant y, on trouve :

$$y = \left(\frac{R - \frac{\tau}{(1-\tau)}V}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right)x \qquad (2.4c)$$

Sur cet intervalle, la droite de budget a donc la même pente que la droite de budget initiale (sans distribution de bons).
Les deux situations sont illustrées sur la figure 2.7 ci-dessous.

[7] τ représente le taux de reduction par rapport au prix du marché.

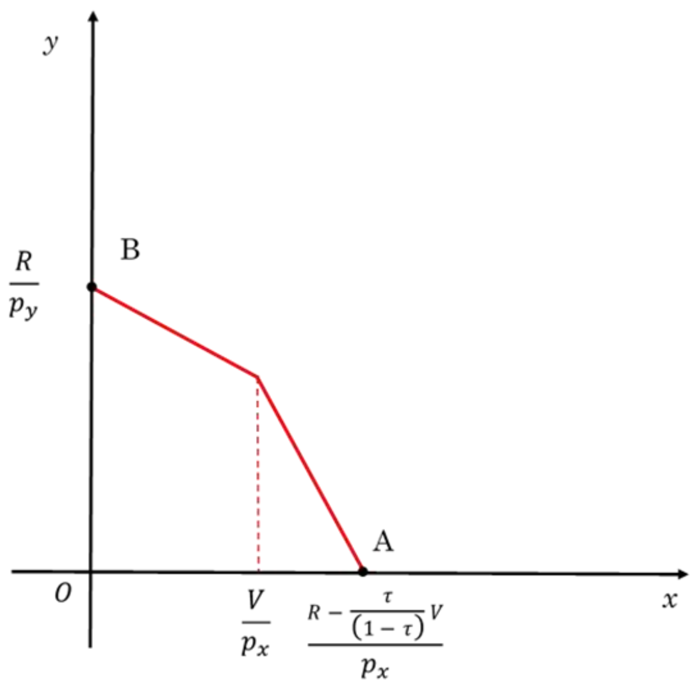


Figure 2.7 : Droite de budget dans le cas d'une distribution de bon subventionné

2.6. Contraintes institutionnelles et droite de budget

Parmi les contraintes institutionnelles ou réglementaires qui peuvent modifier la droite de budget du consommateur, on dénote généralement le contingentement de la consommation ou la levée de taxe différenciée. Ces politiques ont principalement pour effets le rationnement de la consommation d'un bien. On dit alors que le consommateur est rationné.

En effet, un consommateur est rationné sur la quantité d'un bien lorsqu'il ne peut acquérir au prix affiché toute la quantité qu'il souhaite. On distingue le rationnement absolu et le rationnement suppléé. Dans le rationnement absolu, l'individu n'a aucune possibilité dépassé la quantité maximale autorisée alors que dans le rationnement suppléé, l'individu a la possibilité de compléter ses achats mais en payant une taxe sur chaque unité supplémentaire acheté. Il a encore la possibilité de compléter ses achats en s'approvisionnant sur un marché parallèle toutefois avec à un prix plus élevé.

2.6.1. Effets d'un rationnement absolu

Le rationnement signifie qu'il existe une contrainte physique sur le bien telle que sa consommation ne peut pas dépasser une quantité fixée à l'avance. En supposant que c'est le bien x qui fait objet de rationnement absolu, la quantité demandée par le consommateur sera telle que : $x \leq \bar{x}$.

Dès lors, le consommateur fait face à deux éventualités.

- Tant que le niveau de rationnement n'est pas atteint c'est à dire tant que $x < \bar{x}$, la contrainte budgétaire reste normale. Elle se présente comme suit :

$$p_x x + p_y y = R \tag{2.5a}$$

Dans ce cas, la droite de budget s'écrit comme :

$$y = \left(\frac{R}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right) x \tag{2.5b}$$

En revanche, dès que le niveau de rationnement est atteint c'est à dire lorsque $x = \bar{x}$, ce niveau ne pouvant pas être dépassé, la contrainte budgétaire s'écrit :

$$p_x \bar{x} + p_y y = R \tag{2.5c}$$

En tirant y on trouve :

$$y = \frac{R - p_x \bar{x}}{p_y} \tag{2.5d}$$

Cette équation étant une constante, cela signifie que y atteint aussi son niveau maximal au point $\bar{x}$. Cette situation est illustrée sur la figure 2.8 ci-dessous

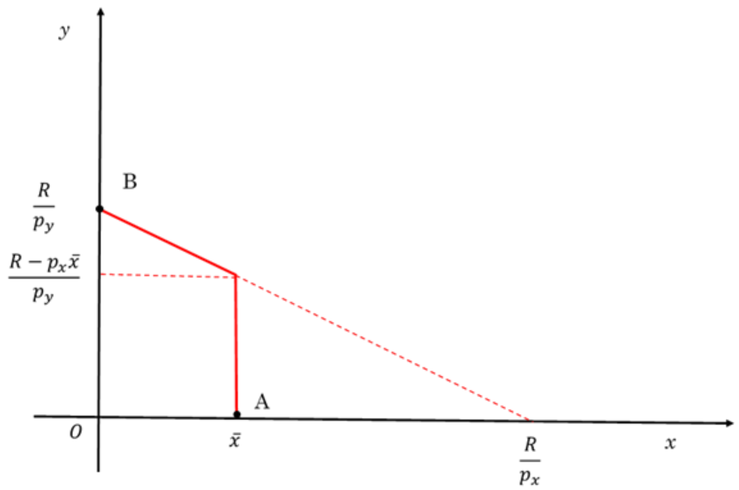


Figure 2.8 : Droite de budget dans le cas de rationnement absolu

2.6.2. Effets d'un rationnement par la taxation différenciée

On peut considérer le cas où l'Etat décide de lever une taxe à taux unitaire t sur le bien x lorsque la quantité demandée dépasse la quantité rationnée $\bar{x}$. Ainsi deux situations se présentent pour le consommateur.

- Si la quantité demandée est inférieure ou égale à la norme ($x \leq \bar{x}$), la contrainte budgétaire de l'individu reste normal. Elle sera donnée par l'expression :

$$p_x x + p_y y = R \tag{2.6a}$$

Dans ce cas, la droite de budget s'écrit comme :

$$y = \left(\frac{R}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right) x \tag{2.6b}$$

- En revanche, dès que le niveau de rationnement est dépassée c'est à dire lorsque $x > \bar{x}$, toute quantité supplémentaire sera taxée. Dès lors la contrainte budgétaire s'écrit :

$$p_x \bar{x} + p_x(1+t)(x - \bar{x}) + p_y y = R \tag{2.6c}$$

Ainsi, en tirant y on trouve :

$$y = \left(\frac{R + tp_x\bar{x}}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}(1+t)\right) x \tag{2.6d}$$

On constate alors que le rationnement par la taxe différenciée modifie la pente de la droite de budget qui devient alors plus raide. Cette situation est illustrée sur la figure 2.9 ci-dessous.

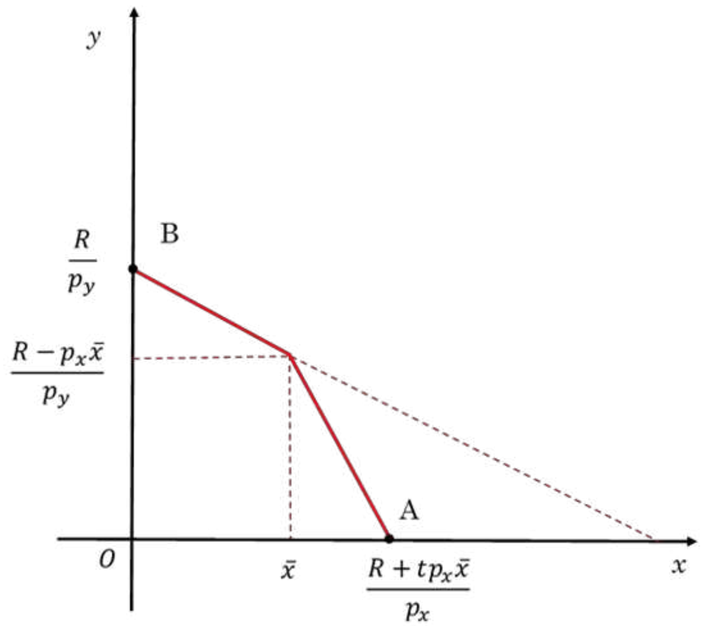


Figure 2.9: Droite de budget dans le cas de rationnement par taxation

2.6.3. Effet d'un rationnement suppléé par le marché parallèle

Lorsque le rationnement du bien x est suppléé par le marché parallèle, l'individu paie deux prix p_x^0 et p_x^1 qui représentent respectivement le prix sur le marché rationné et celui sur le marché parallèle. L'individu peut acheter jusqu'à $\bar{x}$ au prix p_x^0 et au-delà, il paye le prix p_x^1. Dès lors, la contrainte budgétaire du consommateur sera évaluée en fonction de ces deux éventualités.

- Si $x \leq \bar{x}$, la contrainte budgétaire sera :

$$p_x^0 x + p_y y = R \qquad (2.7a)$$

En tirant y, l'équation de la droite de budget devient :

$$y = \left(\frac{R}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x^0}{p_y}\right) x \qquad (2.7b)$$

- Mais dans le cas où $x > \bar{x}$, la contrainte s'écrit comme :

$$p_x^0 \bar{x} + (x - \bar{x}) p_x^1 + p_y y = R \qquad (2.7c)$$

En réarrangeant cette expression et en tirant y, on trouve :

$$y = \left(\frac{R + (p_x^1 - p_x^0)\bar{x}}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x^1}{p_y}\right) x \qquad (2.7d)$$

On constate alors que la pente de la droite de budget se modifie sur les deux intervalles. La droite est plus raide lorsque $x > \bar{x}$ car la pente augmente en valeur absolue par rapport au cas où $x \leq \bar{x}$. Ces deux situations sont illustrées sur la figure 2.10 ci-dessous.

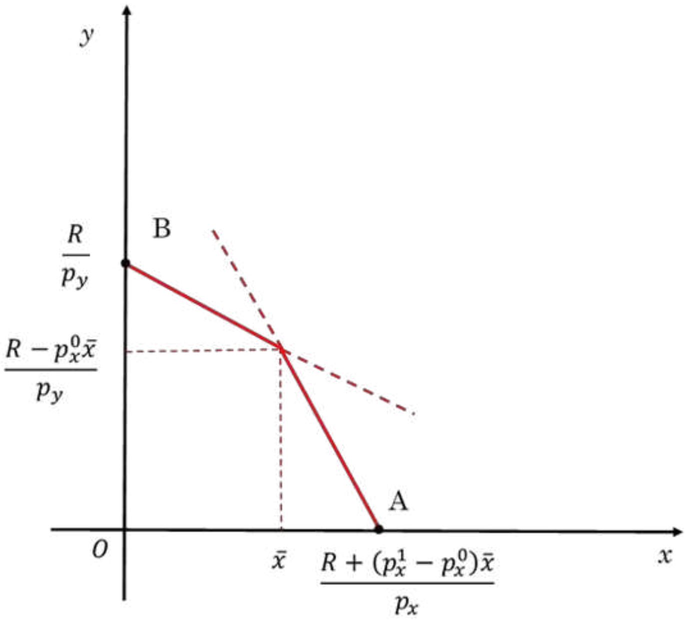


Figure 2.10 : Droite de budget dans le cas de rationnement suppléé par le marché parallèle

2.7. Exercices de synthèse du chapitre 2

2.7.1. Enoncés

On considère un individu qui gagne 1200, en tant que salarié dans une entreprise. Cet individu consacre tout son revenu à l'achat de deux biens x et y dont les prix respectifs sont 20 et 40.

1) Exprimer la contrainte budgétaire de cet individu. En déduire la droite de budget et tracer cette droite dans un repère orthonormé à l'échelle 1/10.

2) Quel est l'effet d'une augmentation du prix du bien x de 25% sur la droite de budget. Illustrer à travers une représentation graphique dans le même plan. Illustrer à travers une représentation graphique.

3) Dans une période de crise, la direction propose à l'individu une baisse de salaire de 100 pour éviter le licenciement. Quelle est l'effet d'une telle décision sur la droite budgétaire (les prix étant inchangés).

4) On suppose que l'individu bénéficie d'une politique d'indexation de salaire qui faut son salaire est réévalué à la mesure de la variation des prix. En supposant que tous les prix ont augmenté de 5%, quel est l'effet sur la droite de budget. Illustrer à travers une représentation graphique.

5) L'individu reçoit un bon intégral d'une valeur de 200 utilisable uniquement pour l'achat du bien y. Quel est l'effet sur la droite budgétaire de l'individu. Illustrer à travers une représentation graphique.

6) L'individu bénéficie d'une réduction de 50% sur les 30 premières unités achetés du bien x. Quel est l'effet de cette réduction sur la droite de budget du consommateur. Illustrer à travers une représentation graphique.

2.7.2. Résolutions

1) La contrainte budgétaire de l'individu s'écrit :

$$20x + 40y \leq 1200 \Leftrightarrow x + 2y \leq 60$$

Ainsi, l'équation de la droite budgétaire s'exprime comme suit :

$$y = 30 - 0{,}5x$$

2) Avec une augmentation de 25 % le prix du bien x passe de 20 à 25. Ainsi l'équation de la droite budgétaire devient :

$$25x + 40y = 1200 \Leftrightarrow y = 30 - 0{,}625x$$

3) Avec la baisse de salaire de 100, la contrainte budgétaire devient :

$$20x + 40y = 1100 \Leftrightarrow y = 27{,}5 - 0{,}5x$$

4) Suite à une augmentation concomitante des prix et du revenu de 5%, la contrainte budgétaire du consommateur se présente :

$$20(1 + 0{,}05)x + 40(1 + 0{,}05)y = 1200(1 + 0{,}05)$$

Ainsi, après simplification on retrouve $y = 30 - 0{,}5x$. Ce qui montre que l'augmentation concomitante et proportionnelle des prix et du revenu n'a aucune incidence sur la droite du budget.

5) Avec l'attribution d'un intégral sur le bien y d'une valeur de 200, permet d'acheter au maximum 5 unités du bien y ($\frac{200}{40}$). Dès lors, deux cas se présentent pour le consommateur :
Si la quantité consommée en bien y est inférieure ou égale à 5, le consommateur consacre tout son salaire à l'achat du bien x. Dans ce cas, la quantité consommée du bien x sera égale à $\frac{1200}{20}$ (soient 60 unités).
En revanche, si la quantité consommée en bien y est supérieure à 5, le consommateur devra utiliser une fraction de son salaire pour l'achat de ces

quantités supplémentaires. Dès lors sa contrainte budgétaire s'écrit comme suit :

$$20x + 40(y - 5) = 1200$$

Ainsi l'équation de la droite peut être explicitée comme suit :

$$y = 35 - 0{,}5x$$

6) Pour ce qui concerne l'effet d'une réduction de 50% sur le prix des 30 premières unités achetés en bien x, la formulation de la contrainte dépendra de deux situations :

Si la quantité achetée est inférieure à 30, la contrainte budgétaire s'écrit:

$$20(1 - 0{,}5)x + 40y = 1200 \Rightarrow y = 30 - 0{,}25x$$

Mais si la quantité achetée est supérieure à 30, la contrainte budgétaire s'écrit:

$$20(1 - 0{,}5) * 30 + 20x + 40y = 1200 \Rightarrow y = 22{,}5 - 0{,}5x$$

L'ensemble des cas évoqués sont illustrées sur la figure 2.11 ci-dessous.

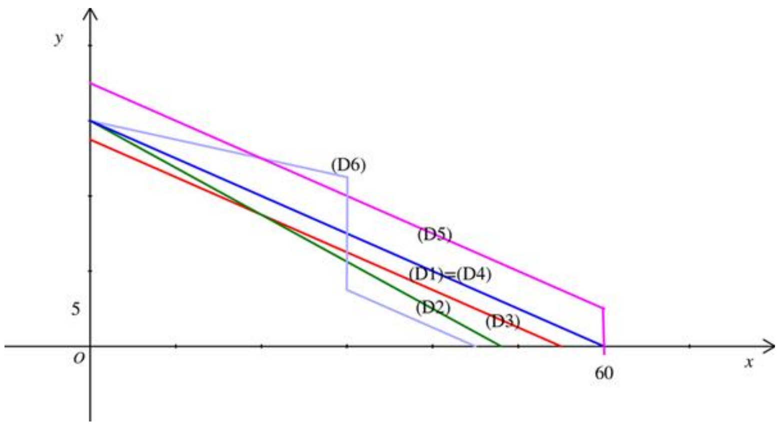


Figure 2.11 : Allure de la droite de budget dans les six cas

CHAPITRE 3 OPTIMUM DU CONSOMMATEUR

La notion d'optimum du consommateur renvoie à une situation d'équilibre dans lequel le consommateur atteint le niveau d'utilité qu'il souhaite compte tenu de sa contrainte budgétaire (prix et revenu). L'optimum est une situation d'équilibre qui découle directement de la résolution du programme du consommateur.

Le but de ce chapitre est de présenter successivement le programme du consommateur, les différentes approches de résolution de ce programme ainsi que la nature des différentes fonctions de demande découlant de ces résolutions.

3.1. Le programme du consommateur

Conceptuellement, le programme du consommateur se définit comme un cadre dans lequel les objectifs du consommateur sont mis en relation avec ses contraintes afin de déterminer les choix optimaux. De façon simple, on dira que le programme permet d'associer les fins aux moyens.

Le programme du consommateur peut se présenter sous deux formes différentes. Dans la première, le consommateur cherche à obtenir le maximum d'utilité compte du revenu qu'il dispose et des prix des biens. Dans la seconde approche, le consommateur cherche à minimiser sa dépense en se fixant un niveau d'utilité donné. Le premier type de programme est aussi appelé programme primal du consommateur (ou programme Marshallien) alors que le second type de programme est qualifié de programme dual (ou programme Hicksien). Dans l'approche Marshallienne, on dira que la fin justifie les moyens alors que dans l'approche Hicksienne, ce sont plutôt les moyens qui justifient la fin.

Bien que n'étant pas obtenues dans les mêmes logiques, les solutions du programme primal sont (rigoureusement) les mêmes que celles du programme dual dans la mesure où le consommateur est supposé dépenser tout son revenu R. Les sections ci-dessous fournissent les détails sur ces deux approches de formulation du programme du consommateur.

3.1.1. Le programme primal (approche Marshallienne)

Dans l'approche Marshallienne, le consommateur cherche à maximiser son utilité sous sa contrainte budgétaire en choisissant le panier de biens qu'il préfère dans son ensemble budgétaire. En prenant le cas de deux biens x et y, le programme du consommateur se formule comme suit :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases} \tag{3.1a}$$

Où $U(x, y)$ est la fonction d'utilité (dépendant des quantités du bien x et y). p_x et p_y représente les prix des biens x et y. R représente le revenu disponible du consommateur.
Ce programme est constitué de deux parties : $Max\, U(x, y)$ qui représente la fonction objective du consommateur et $p_x x + p_y y = R$ qui représente la contrainte budgétaire. L'association de ces deux parties forme donc le programme primal du consommateur.

3.1.2. Le programme dual (approche Hicksienne)

Dans l'approche Hicksienne, le consommateur se fixe un certain niveau d'utilité et cherche alors minimiser le niveau de dépense en choisissant le panier de biens lui permettant d'atteindre le niveau d'utilité souhaité. Cette approche est qualifiée de programme dual qui peut se formuler comme suit :

$$\begin{cases} Min\ \ p_x x + p_y y \\ \\ s.c: \quad U(x, y) \ = \ U_0 \end{cases} \qquad (3.1b)$$

Où $U(x, y)$ est la fonction d'utilité (dépendant des quantités du bien x et y). U_0 est le niveau souhaité d'utilité ; p_x et p_y représente les prix des biens x et y. Tout comme pour le programme primal, le programme dual est aussi constitué de deux parties : $Min\ \ p_x x + p_y y$ qui représente la fonction objective et $U(x, y) \ = \ U_0$ qui représente la contrainte technique. Mais contrairement au programme primal, la fonction objective est définie en fonction de la droite budgétaire alors que la contrainte est définie en fonction de la fonction d'utilité.

3.2. Résolution du programme du consommateur et détermination de la demande optimale

La résolution du programme du consommateur consiste à choisir le(s) panier(s) de biens qui satisfont la fonction objective du consommateur tout en respectant les contraintes définies. C'est la détermination des quantités optimales des biens (encore appelées demandes optimales.

Cette section vise à présenter les différentes méthodes de résolution du programme du consommateur. Ces méthodes diffèrent non seulement selon le type de programme (primal ou dual) mais aussi en fonction de la nature de la fonction d'utilité (fonction définie selon que les biens soient substituables ou complémentaires).

D'une manière générale, trois méthodes de résolution sont présentées dans chaque cas : la méthode de résolution graphique, la méthode résolution par le lagrangien et la méthode de "l'égalité du TMS au rapport des prix".

3.2.1. Détermination des demandes optimales dans le cas des biens imparfaitement substituables

3.2.1.1. Résolution du programme par la méthode graphique

D'une manière générale, la résolution du programme du consommateur par la méthode graphique consiste à égaliser la pente de sa droite de budget à la pente de sa courbe d'indifférence. En d'autres termes, la résolution consiste à choisir les paniers correspondant au point tangent entre la droite de budget et la courbe d'indifférence. La position de ce point sur le graphique dépend de la nature du programme du consommateur (primal ou dual).

Cas du programme primal

Dans le cas du programme primal (dans lequel le consommateur cherche à maximiser son utilité sous contrainte de son budget), le point optimal correspond au point tangent entre la droite de budget et la courbe d'indifférence la plus élevée atteignable.

Notons que dans le programme primal, la droite de budget a une position fixe, c'est la courbe d'indifférence qui peut évoluer. Cette situation est illustrée sur le graphique 3.1 ci-dessous :

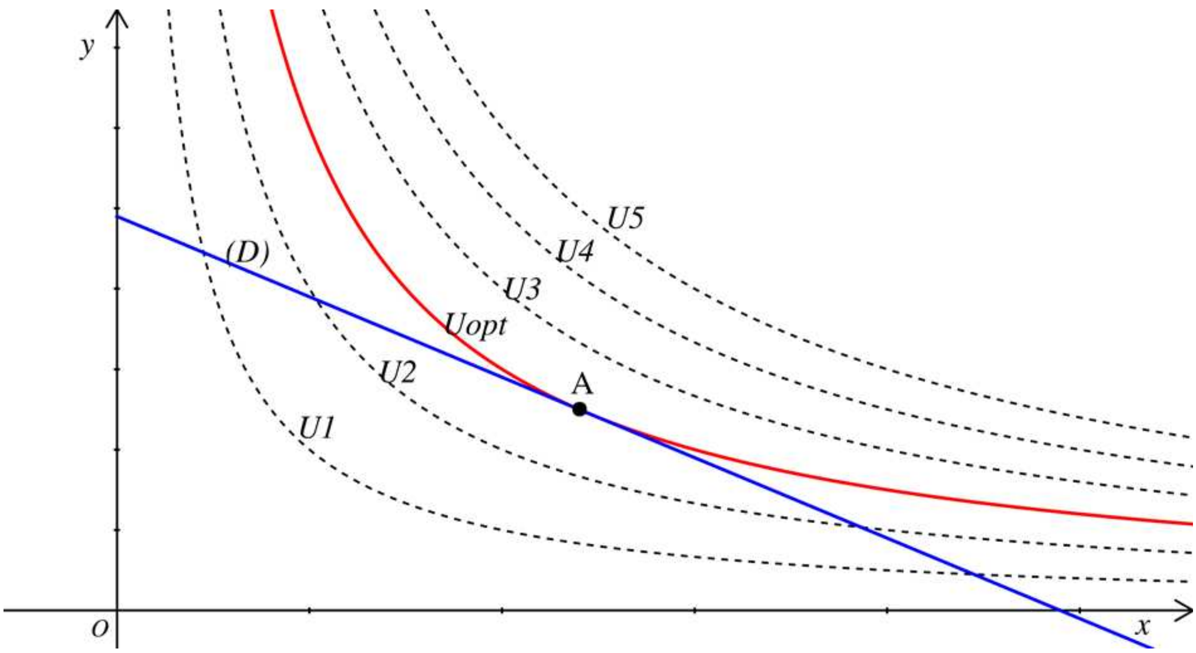


Figure 3.1 : Programme primal pour le cas des biens faiblement substituables : méthode graphique de résolution

Comme on peut le constater sur cette figure, les niveaux d'utilité représentés par les courbes U_1 et U_2 ne sont pas optimales car le consommateur a encore la possibilité d'augmenter son utilité en choisissant des niveaux supérieurs tout en respectant sa contrainte budgétaire. En revanche, bien que les niveaux d'utilité représentés par les courbes U_3, U_4 et U_5 sont meilleurs pour le consommateur mais ces niveaux d'utilité sont inatteignables compte tenu de la contrainte de budget. Seule la courbe U_{opt} est optimale. Le point A correspond au point tangent entre la courbe U_{opt} et la droite de budget (D). Ce point représente ainsi le panier optimal. Il permet de maximiser l'utilité du consommateur tout en respectant sa contrainte budgétaire.

Cas du programme dual

Dans le cas du programme dual (dans lequel le consommateur cherche à minimiser sa dépense en se fixant un niveau d'utilité), le point optimal correspond au point tangent la courbe d'indifférence U_0 et entre la droite de budget la plus basse.

Notons qu'à la différence du programme primal, c'est la droite de budget qui bouge dans le programme dual alors que la position de la courbe d'indifférence reste fixe. Cette situation est illustrée sur le graphique 3.2 ci-dessous :

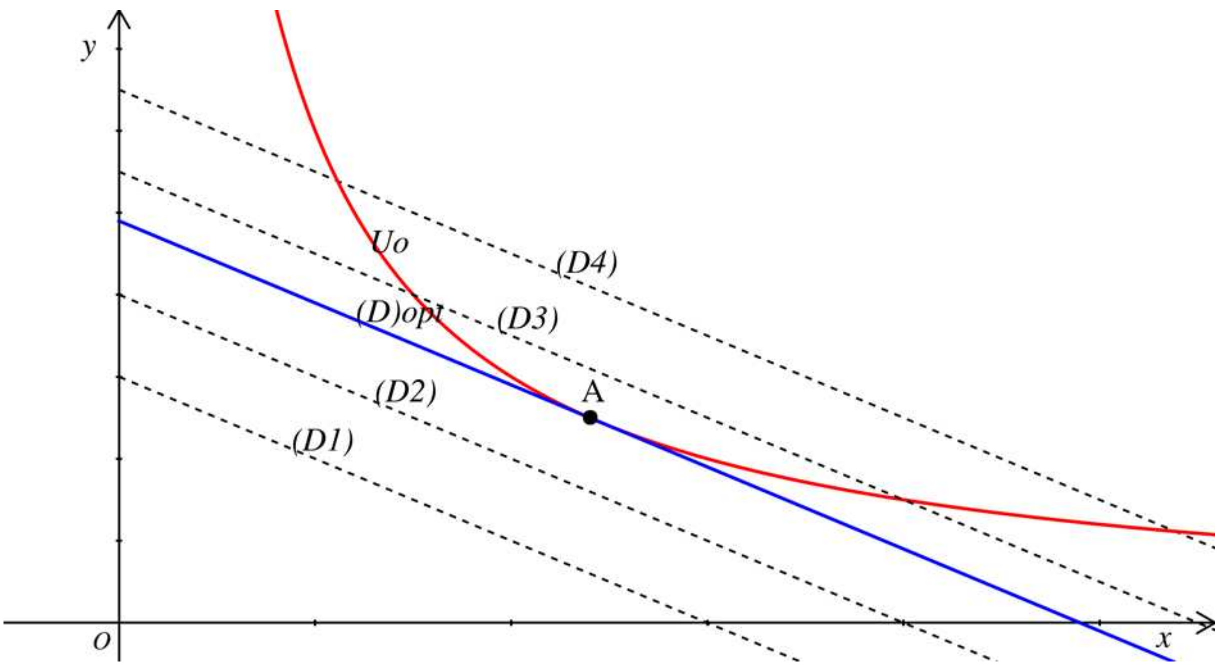


Figure 3.2 : Programme dual pour le cas des biens faiblement substituables : méthode graphique de résolution

Bien que les droites de budget représentées par D_1 et D_2 sont meilleures pour le consommateur (car elles sont minimales) mais elles ne lui permettent pas d'atteindre le niveau d'utilité désiré (U_0). Les droites de budget représentées par D_3 et D_4 ne sont pas optimales car elles sont supérieures aux dépenses nécessaires pour acquérir U_0. Seule la droite D_{opt} apparait optimale car ayant un point tangent avec la courbe U_0. Ce point représente donc le panier optimal est ce point qui permet donc d'atteindre le niveau d'utilité souhaité tout en respectant la contrainte budgétaire.

3.2.1.2. Résolution du programme par le lagrangien

La méthode du lagrangien est une méthode de résolution analytique qui consiste résoudre un système d'équations construit à partir des conditions de premiers ordre. Cette section est consacrée à la présentation de la méthode de résolution par le lagrangien selon qu'il s'agisse du programme primal ou du programme dual.

Cas du programme primal

Soit un consommateur dont la fonction d'utilité est se présente tel que :

$$u(x, y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et y. Et a, α et β sont des paramètres (Cf. section 1.2.2.1.). On Soient p_x et p_y les prix du bien x et du bien y.

En supposant par ailleurs que ce consommateur dispose d'un revenu R entièrement consommable, le programme Marshallien de ce consommateur peut se présente comme suit :

$$\begin{cases} Max\ U(x, y) = ax^{\alpha}y^{\beta} \\ \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases} \qquad (3.2a)$$

Connaissant ainsi la nature du programme, on peut formuler le Lagrangien qui est une équation se présentant comme suit :

$$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(R - p_x x - p_y y) \qquad (3.2b)$$

Le lagrangien L est donc une fonction analytique qui dépend de x, de y ainsi que d'un paramètre λ. Le paramètre λ est appelé multiplicateur de Lagrange. Economiquement, le paramètre λ s'interprète comme l'utilité marginale du revenu c'est-à-dire la variation du niveau d'utilité suite à la variation d'une unité du revenu.

Pour résoudre le programme (3.2a), on dérive d'abord le lagrangien en fonction de ses trois paramètres x, y et λ. Ce qui permet de retrouver le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} - \lambda p_x & (I) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} - \lambda p_y & (II) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = R - p_x x - p_y y & (III) \end{cases}$$

Ce système équivaut à cette nouvelle formulation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = Um(x) - \lambda p_x & (I) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = Um(y) - \lambda p_y & (II) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = R - p_x x - p_y y & (III) \end{cases}$$

Où $Um(x)$ et $Um(y)$ représentent respectivement l'utilité marginale du bien x et du bien y.
En égalant à zéro chaque équation de ce système, on obtient les conditions de premiers :

$$\begin{cases} Um(x) - \lambda p_x = 0 & (I) \\ Um(y) - \lambda p_y = 0 & (II) \\ R - p_x x - p_y y = 0 & (III) \end{cases}$$

En remplaçant les utilités marginales par leur expressions (étant donné que la fonction d'utilité est $U(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$), les conditions de premier ordre s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \alpha a x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda p_x = 0 & (I) \\ \beta a x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 & (II) \\ R - p_x x - p_y y = 0 & (III) \end{cases}$$

Pour déterminer le panier optimal, il faut donc résoudre ce système en adoptant la méthode de substitution. La démarche est donc la suivante :

$$\begin{cases} \alpha a x^{\alpha-1} y^{\beta} = \lambda p_x & (I) \\ \beta a x^{\alpha} y^{\beta-1} = \lambda p_y & (II) \\ p_x x + p_y y = R & (III) \end{cases}$$

On divise (I) par (II) afin d'éliminer λ. Ainsi, on a :

$$\frac{\alpha a x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta a x^{\alpha} y^{\beta-1}} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y}$$

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$y = \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right) x \qquad (3.3)$$

L'équation (3.3) est appelée sentier d'expansion du revenu. C'est l'ensemble des combinaisons des quantités des biens x et y qui assurent l'équilibre du consommateur et cela quel que soit le niveau du revenu. Le sentier d'expansion du revenu dépend uniquement des rapports de prix et des paramètres α et β.

Pour continuer la résolution, il faut remplacer le sentier d'expansion du revenu (la valeur de y) dans l'équation (III). Ainsi, on a :

$$p_x x + p_y \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha} x\right) = R$$

$$p_x x + \frac{p_x \beta}{\alpha} x = R$$

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_x x = R$$

$$x = \frac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_x}$$

Cette expression représente la quantité optimale du bien x. Et pour trouver la quantité optimale du bien y, on remplace l'expression de x dans l'expression du sentier d'expansion.

$$y = \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)\left(\frac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_x}\right)$$

$$y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_y}\right)$$

$$y = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} \frac{R}{p_y}$$

$$y = \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \frac{R}{p_y}$$

Les solutions du problème de maximisation de l'utilité du consommateur sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) p_x} \\ y^* = \dfrac{\beta}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \dfrac{R}{p_y} \end{cases}$$

Où x^* et y^* représentent les quantités optimales du bien x et y. Ces expressions représentent également les fonctions de demandes (marshalliennes) optimales. Elles dépendent uniquement du revenu et des prix des biens.

Exemple d'application : Soit un consommateur cherchant à maximiser la fonction d'utilité $U(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$. Déterminer les fonctions de demandes optimales de ce consommateur sachant que son revenu R=1200 et que le prix du bien x p_x est 200 et celui du bien y p_y est 300.

Le programme du programme de ce consommateur se présente comme suit :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases}$$

Ce qui permet de formuler le lagrangien suivant :

$$L(x,y,\lambda) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} + \lambda\left(R - p_x x - p_y y\right)$$

Ce lagrangien permet ensuite d'obtenir les conditions de premier ordre en dérivant respectivement la fonction $L(x,y,\lambda)$ par rapport à ses trois arguments.

$$\begin{cases} \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} y^{\frac{1}{3}} - \lambda p_x = 0 & (I) \\ \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}-1} - \lambda p_y = 0 & (II) \\ R - p_x x - p_y y = 0 & (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \lambda p_x & (I) \\ \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = \lambda p_y & (II) \\ p_x x + p_y y = R & (III) \end{cases}$$

En divisant (I) par (II), on retrouve l'égalité suivante :

$$\frac{2y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

Cette égalité permet d'obtenir le sentier d'expansion du revenu en tirant la valeur de y comme suit :

$$y = \frac{p_x}{2p_y} x$$

On remplace l'expression du sentier d'expansion dans l'équation (III) :

$$p_x x + p_y \left(\frac{p_x}{2p_y} x \right) = R$$

En arrangeant cette équation on obtient la quantité optimale du bien x telle que :

$$x = \frac{2}{3} \frac{R}{p_x}$$

Pour retrouver la quantité optimale du bien y, on remplace la valeur x par son expression dans l'équation du sentier d'expansion du revenu.

$$y = \frac{p_x}{2p_y} \left(\frac{2}{3} \frac{R}{p_x} \right)$$

En arrangeant cette expression, on obtient :

$$y = \frac{R}{3p_y}$$

Les fonctions de demandes optimales se présentent alors comme suit :

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{2}{3} \dfrac{R}{p_x} \\ y^* = \dfrac{R}{3p_y} \end{cases}$$

En remplaçant p_x, p_y et R par leur valeur, on obtient :

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1200}{200} = 4 \\ y^* = \dfrac{1200}{3 \times 300} = 2 \end{cases}$$

Utilisation du lagrangien dans le cas du programme dual

Soit le programme Hicksien suivant :

$$\begin{cases} Min\ \ p_x x + p_y y \\ s.c: \quad U(x, y) \ = \ U_0 \end{cases} \tag{3.4a}$$

Avec $u(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$ représentant la fonction d'utilité du consommateur définie en fonction des quantités du bien x et y. U_0 est le niveau souhaité d'utilité ; p_x et p_y représente les prix des biens x et y. Et où $Min\ \ p_x x + p_y y$ représente la fonction objective.

Le lagrangien de programme se présente comme suit :

$$L(x,y,\lambda) = p_x x + p_y y + \lambda\big(U_0 - U(x,y)\big) \qquad (3.4b)$$

En dérivant la fonction $L(x,y,\lambda)$ par rapport à ses trois arguments x , y et λ, on obtient les conditions de premier ordre telles que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = p_x - \lambda\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = p_y - \lambda\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = 0 & (II) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = U_0 - U(x,y) = 0 & (III) \end{cases}$$

Ce système d'équations peut encore être reformulé comme suit :

$$\begin{cases} p_x - \lambda Um(x) = 0 & (I) \\ p_y - \lambda Um(x) = 0 & (II) \\ U_0 - U(x,y) = 0 & (III) \end{cases}$$

Où $Um(x)$ et $Um(y)$ représentent respectivement l'utilité marginale du bien x et du bien y.
En remplaçant ces dernières par leur expression (étant donné que la fonction d'utilité est $U(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$), les conditions de premier ordre s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} p_x - \lambda\alpha a x^{\alpha-1}y^{\beta} = 0 & (I) \\ p_y - \lambda\beta a x^{\alpha}y^{\beta-1} = 0 & (II) \\ U_0 - ax^{\alpha}y^{\beta} = 0 & (III) \end{cases}$$

La détermination du panier optimal nécessite donc résoudre ce système par la méthode de substitution. La démarche est la suivante :

$$\begin{cases} p_x = \lambda\alpha a x^{\alpha-1}y^{\beta} & (I) \\ p_y = \lambda\beta a x^{\alpha}y^{\beta-1} & (II) \\ ax^{\alpha}y^{\beta} = U_0 & (III) \end{cases}$$

On divise (I) par (II)pour éliminer λ. Ainsi, on a :

$$\frac{\alpha a x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta a x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$y = \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right) x \tag{3.5}$$

Tout comme l'équation (3.3) définie précédemment, l'équation (3.5) est appelée sentier d'expansion du revenu. C'est le lieu géométrique de tous les points d'équilibre du consommateur en fonction de son revenu.

Pour trouver la quantité optimale du bien x, on remplace l'expression du sentier d'expansion dans l'équation (III) tel que :

$$a x^{\alpha} \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha} x\right)^{\beta} = U_0$$

$$x^{\alpha+\beta} = \frac{U_0}{a\left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)^{\beta}}$$

$$x = \left[\frac{U_0}{a\left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Et pour trouver la quantité optimale du bien y, on remplace l'expression de x dans l'expression du sentier d'expansion (3.5).

$$y = \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)\left[\frac{U_0}{a\left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Les solutions du problème de maximisation de l'utilité du consommateur sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x^* = \left[\dfrac{U_0}{a\left(\dfrac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ y^* = \left(\dfrac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)\left[\dfrac{U_0}{a\left(\dfrac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{cases}$$

Exemple d'application : Soit un consommateur cherchant à minimiser ses dépenses tout en se fixant un niveau d'utilité $U_0 = 12$. Sachant que la fonction d'utilité de ce consommateur est $U(x, y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ et que le prix du bien x p_x est 2 et celui du bien y p_y est 3, déterminer les demandes optimales de ce consommateur.

Le programme du programme de ce consommateur se présente comme suit :

$$\begin{cases} Min\, p_x x + p_y y \\ s.c: \; x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = U_0 \end{cases}$$

Ce qui permet de formuler le lagrangien suivant :

$$L(x, y, \lambda) = p_x x + p_y y + \lambda\big(U_0 - U(x, y)\big)$$

En dérivant la fonction $L(x, y, \lambda)$ par rapport à ses trois arguments x , y et λ, on obtient les conditions de premier ordre telles que :

$$\begin{cases} p_x - \lambda\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 0 & (I) \\ p_y - \lambda\dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = 0 & (II) \\ U_0 - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 0 & (III) \end{cases}$$

En réarrangeant ce système on retrouve :

$$\begin{cases} p_x = \lambda\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} & (I) \\ p_y = \lambda\dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} & (II) \\ x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = U_0 & (III) \end{cases}$$

On divise (I) par (II)pour éliminer λ, on obtient :

$$\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Après simplification et réarrangement de l'expression, on trouve :

$$\frac{2y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$y = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)x$$

Cette expression représente le sentier d'expansion du revenu. Pour trouver la quantité optimale du bien x, on remplace cette expansion dans l'équation (III) tel que :

$$x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{p_x}{2p_y}x\right)^{\frac{1}{3}} = U_0$$

$$x\left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{1}{3}} = U_0$$

$$x = \frac{U_0}{\left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Et pour trouver la quantité optimale du bien y, on remplace l'expression de x dans l'expression du sentier d'expansion du revenu.

$$y = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)\frac{U_0}{\left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$y = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)\left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{-\frac{1}{3}}U_0$$

$$y = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{2}{3}}U_0$$

Les solutions du problème de maximisation de l'utilité du consommateur sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x^* = \left(\dfrac{p_x}{2p_y}\right)^{-\frac{1}{3}} U_0 \\ \\ y^* = \left(\dfrac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{2}{3}} U_0 \end{cases}$$

En remplaçant finalement p_x, p_y et U_0 par leur valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x^* = \left(\dfrac{2}{2 \times 3}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 12 = 17{,}3 \\ \\ y^* = \left(\dfrac{2}{2 \times 3}\right)^{\frac{2}{3}} \times 12 = 5{,}76 \end{cases}$$

3.2.1.3. Résolution selon le principe de l'égalité du TMS au rapport des prix

La méthode de résolution selon le principe de l'égalité du Taux marginal de substitution (TMS) au rapport des prix est une méthode définie à partir de la condition d'équilibre du consommateur. En effet, indépendamment de la contrainte budgétaire du consommateur, celui-ci est à l'équilibre lorsque le $TMSy_{/_x}$ égalise le rapport de prix $\frac{p_x}{p_y}$. Cette condition d'équilibre est exprimée selon l'égalité suivante :

$$TMSy_{/_x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.6a}$$

Où $TMSy_{/_x}$ est le taux marginal de substitution du bien y au bien x. Mais sachant par ailleurs que le $TMSy_{/_x}$ est égal au rapport des utilités marginales, on peut reformuler la condition d'équilibre comme suit :

$$\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.6b}$$

La condition (3.6b) peut également s'écrire comme suit :

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \tag{3.6c}$$

Les deux membres de cette égalité sont appelée utilités marginales pondérées. Ils représentent l'utilité marginale pour chaque unité monétaire dépensée. Bien entendu le consommateur augmente la consommation du bien pour lequel cette valeur est élevée. Et il est à l'équilibre lorsque l'égalité entre les deux valeurs est atteinte. En effet, puisque les biens sont faibles faiblement substituables, on peut distinguer deux particuliers en comparant les utilités marginales pondérées. Dans le cas où $\frac{Um_x}{p_x} > \frac{Um_y}{p_y}$, le consommateur augmente la quantité du bien x tout en diminuant la quantité du bien y de façon à retrouver l'égalité $\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y}$. Et dans le cas où $\frac{Um_x}{p_x} < \frac{Um_y}{p_y}$, le consommateur augmente la quantité du bien y tout en diminuant la quantité du bien x de façon à retrouver l'égalité $\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y}$

Au final le consommateur est à l'équilibre lorsque $\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y}$. C'est le principe de l'égalité de l'égalité du TMS au rapport des prix (ou encore la condition de l'égalité des utilités marginales pondérées).

Partant ainsi de cette condition d'équilibre et en remplaçant les utilités marginales par leur expression, on en déduit le sentier d'expansion du revenu.

Notons qu'une fois l'expression du sentier d'expansion obtenue, le reste de la méthode de résolution se confond avec la méthode du lagrangien car, il reste simplement à remplacer l'expression du sentier d'expansion dans la contrainte (définie selon la nature du programme). Pour le cas du programme primal, la contrainte est représentée par la droite budgétaire tandis que dans le programme la contrainte est représentée par l'égalité entre la fonction d'utilité et le niveau d'utilité fixe U_0.

Résolution dans le cas du programme primal

Supposons que le consommateur ait un programme tel que :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta} \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases}$$

En utilisant le principe de l'équilibre ($TMS_{y/x} = \frac{\boldsymbol{Um_x}}{\boldsymbol{Um_y}} = \frac{p_x}{p_y}$), on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{\alpha a x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta a x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$y = \left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)x$$

En remplaçant cette expression dans la contrainte budgétaire, on a :

$$p_x x + p_y\left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}x\right) = R$$

$$p_x x + \frac{p_x\beta}{\alpha}x = R$$

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)p_x x = R$$

$$x = \frac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)p_x}$$

On retrouve la quantité optimale du bien x. Et pour déterminer la quantité optimale du bien y, on remplace l'expression de x dans l'expression du sentier d'expansion précédemment définie. Ainsi, on a :

$$y = \left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)\left(\frac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)p_x}\right)$$

$$y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)p_y}\right)$$

$$y = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)}\frac{R}{p_y}$$

$$y = \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)}\frac{R}{p_y}$$

Au final les solutions du programme du consommateur sont:

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{R}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)p_x} \\ y^* = \dfrac{\beta}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)}\dfrac{R}{p_y} \end{cases}$$

Où x^* et y^* représentent les quantités optimales du bien x et y (demandes marshalliennes). Ces demandes sont équivalentes à celles obtenues avec la méthode du lagrangien.

Cas du programme dual

Soit le programme Hicksien suivant :

$$\begin{cases} Min\ \ p_x x + p_y y \\ \\ s.c: \quad U(x,y) \ = \ U_0 \end{cases}$$

Où $U(x,y) = ax^{\alpha} y^{\beta}$

En utilisant le principe de l'équilibre ($TMSy/_x = \frac{\boldsymbol{Um_x}}{\boldsymbol{Um_y}} = \frac{p_x}{p_y}$), on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{\alpha a x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta a x^{\alpha} y^{\beta-1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$y = \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right) x \tag{3.5}$$

En remplaçant cette expression dans la contrainte (technique), on a :

$$a x^{\alpha} \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha} x\right)^{\beta} = U_0$$

$$x^{\alpha+\beta} = \frac{U_0}{a\left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)^{\beta}}$$

$$x = \left[\frac{U_0}{a\left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Et pour trouver la quantité optimale du bien y, on remplace l'expression de x dans l'expression du sentier d'expansion.

$$y = \left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)\left[\frac{U_0}{a\left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Les solutions du problème de maximisation de l'utilité du consommateur sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x^* = \left[\frac{U_0}{a\left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ y^* = \left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)\left[\frac{U_0}{a\left(\frac{p_x\beta}{p_y\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{cases}$$

Comme on peut constater, quelle que soit la nature du programme du consommateur (primale ou duale), la méthode résolution selon le principe de l'égalité du TMS au rapport des prix est un raccourci de la méthode du lagrangien.

3.2.1.4. Résolution par la méthode de substitution

Soient x et y les deux inconnues du programme du consommateur, la résolution par la méthode de substitution se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on tire la valeur d'une des deux inconnues à partir de l'équation de la contrainte (soit y cette inconnue). Dans un second temps, on remplace l'expression de y obtenue dans la fonction objective. Dans un troisième temps, on dérive la fonction objective pour déterminer la condition de premier ordre.

Lorsqu'il s'agit du programme primal, en réarrangeant la condition de premier ordre, on retrouve toujours l'expression suivante :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = Um(x) + \frac{\partial y}{\partial x}Um(y) = 0$$

Et sachant que $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p_x}{p_y}$ on a :

$$Um(x) - \frac{p_x}{p_y}Um(y) = 0$$

Cette expression permet ainsi d'obtenir la condition d'équilibre :

$$\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Cette condition d'équilibre permet de déterminer le sentier d'expansion du revenu. Ainsi connaissant l'expression de y (voir première étape), on égalise le sentier d'expansion à cette expression pour trouver la valeur de x. Une fois qu'on obtient la valeur de x, on peut alors calculer la valeur optimale de y, soit en utilisant le sentier d'expansion soit en utilisant la premières expression tirée de la contrainte.

Cependant cette démarche reste valable uniquement lorsqu'il s'agit du programme primal du consommateur. La démarche est légèrement différente pour le cas du programme dual (voir les deux exemples suivants).

Exemples d'application : méthode de substitution :

Cas du programme primal

Soit un consommateur dont la fonction d'utilité est $U(x, y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ et disposant d'un revenu R=1200. Le prix du bien x est $p_x = 200$ et celui du bien y est p_y =300. Déterminer les fonctions de demandes optimales de ce consommateur en utilisant la méthode de substitution.

Le programme du programme du consommateur se présente comme suit :

$$\begin{cases} Max\ U(x, y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \\ s.c: \ p_x x + p_y y = R \end{cases}$$

Etape 1 : Tirons la valeur de y à partir de l'équation de la contrainte :

$$y = \frac{R}{p_y} - \left(\frac{p_x}{p_y}\right)x$$

Etape 2 : Remplaçons la valeur de y dans la fonction objective (qui est ici la fonction d'utilité) :

$$U(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{\frac{1}{3}}$$

Etape 3 : Dérivons cette fonction par rapport à x pour ensuite former la condition de premier ordre :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{\frac{1}{3}}\right] - \left(\frac{p_x}{p_y}\right)\left[\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{-\frac{2}{3}}\right] = 0$$

On remarque que : $\left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(y)^{\frac{1}{3}} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = Um(x)$

$$\left[\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{-\frac{2}{3}}\right] = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(y)^{-\frac{2}{3}} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Um(y)$$

Et que $-\left(\frac{p_x}{p_y}\right) = \frac{\partial y}{\partial x}$ (voir étape 1)

Ainsi la condition de premier ordre peut se réécrire telle que :

$$Um(x) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)Um(y) = 0$$

Cette égalité permet ainsi de formuler la condition d'équilibre du consommateur telle que :

$$Um(x) = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)Um(y)$$

$$\frac{Um(x)}{Um(y)} = \frac{p_x}{p_y}$$

Etape 4: On utilise cette égalité pour déterminer le sentier d'expansion du revenu (en remplaçant les utilités par leur expression et en tirant la valeur de y) :

$$y = \frac{p_x}{2p_y}x$$

Etape 5: On égalise cette expression y à celle obtenu à l'étape 1 pour trouver la valeur de x :

$$\frac{p_x}{2p_y}x = \frac{R}{p_y} - \left(\frac{p_x}{p_y}\right)x$$

$$\left(\frac{p_x}{2p_y} + \frac{p_x}{p_y}\right)x = \frac{R}{p_y}$$

$$x = \frac{2}{3}\frac{R}{p_x}$$

Et pour retrouver la quantité optimale du bien y, on remplace la valeur de x par son expression soit dans l'équation du sentier d'expansion du revenu ou dans l'équation de y tirée à l'étape 1. On obtient finalement

$$y = \frac{R}{3p_y}$$

Les fonctions de demandes optimales se présentent alors comme suit :

$$\begin{cases} x^* = \frac{2}{3}\frac{R}{p_x} \\ y^* = \frac{R}{3p_y} \end{cases}$$

En remplaçant p_x, p_y et R par leur valeur, on obtient :

$$\begin{cases} x^* = \frac{2}{3} \times \frac{1200}{200} = 4 \\ y^* = \frac{1200}{3 \times 300} = 2 \end{cases}$$

Cas du programme dual

Soit un consommateur cherchant à minimiser ses dépenses tout en se fixant un niveau d'utilité $U_0 = 12$. Sachant que la fonction d'utilité de ce consommateur est $U(x,y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ et que le prix du bien x p_x est 2 et celui du bien y p_y est 3, déterminer les demandes optimales de ce consommateur par la méthode de substitution.

Le programme du programme de ce consommateur se présente comme suit :

$$\begin{cases} Min\, p_x x + p_y y \\ \\ s.c: \; x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = U_0 \end{cases}$$

Les étapes de la résolution de ce programme sont les suivantes.

Etape 1 : Tirer la valeur de y à parti de la contrainte technique :

$$y = \frac{{U_0}^3}{x^2}$$

Etape 2 : Remplaçons la valeur de y dans la fonction objective (qui est ici la droite de budget) :

$$B(x) = p_x x + p_y \frac{{U_0}^3}{x^2}$$

Etape 3 : Dérivons cette fonction par rapport à x pour ensuite former la condition de premier ordre :

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = p_x - 2p_y \frac{{U_0}^3}{x^3} = 0$$

Etape 4 : On résout cette équation pour trouver la valeur optimale de x :

$$2p_y \frac{{U_0}^3}{x^3} = p_x$$

$$p_x x^3 = 2p_y {U_0}^3$$

$$x = \left(\frac{2p_y {U_0}^3}{p_x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \left(\frac{2p_y}{p_x}\right)^{\frac{1}{3}} U_0$$

Etape 5: On remplace cette expression de x dans l'équation obtenue à l'étape 1 pour trouver la valeur de y :

$$y = \frac{{U_0}^3}{x^2} = \frac{{U_0}^3}{\left(\left(\frac{2p_y}{p_x}\right)^{\frac{1}{3}} U_0\right)^2}$$

$$y = \frac{U_0}{\left(\frac{2p_y}{p_x}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{2}{3}} U_0$$

Les solutions du problème de maximisation de l'utilité du consommateur sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x^* = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{-\frac{1}{3}} U_0 \\ y^* = \left(\frac{p_x}{2p_y}\right)^{\frac{2}{3}} U_0 \end{cases}$$

En remplaçant finalement p_x, p_y et U_0 par leur valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x^* = \left(\frac{2}{2 \times 3}\right)^{-\frac{1}{3}} \times 12 = 17{,}3 \\ y^* = \left(\frac{2}{2 \times 3}\right)^{\frac{2}{3}} \times 12 = 5{,}76 \end{cases}$$

3.2.1.5. Bref aperçu sur la notion du sentier d'expansion du revenu (cas des biens faiblement substituables)

Pour illustrer la notion du sentier d'expansion du revenu (ou chemin d'expansion du revenu), considérons un consommateur ayant une fonction d'utilité de forme $U(x, y) = ax^{\alpha}y^{\beta}$ disposant initialement d'un revenu R. Les prix de biens x et y sont respectivement p_x et p_y. L'optimisation du programme de ce consommateur permet de retrouver les demandes optimales x^* et y^*. Il faut simplement signaler que le point formé par le couple (x^*, y^*) correspond au point tangent entre la courbe d'indifférence et la droite du budget (Cf. méthode de résolution graphique).

Supposons maintenant que ce consommateur dispose d'un nouveau montant de revenu R' supérieur à R. Les prix étant restés inchangés, cela correspond à un déplacement de la droite de budget vers le haut à droite parallèlement à la droite de budget correspondant R. Ce déplacement de la droite du budget dégage donc des possibilités pour le consommateur pour accroitre son utilité. Il se retrouve alors sur une nouvelle courbe d'indifférence au-dessus de la courbe d'indifférence initiale. Le nouvel équilibre obtenu correspond au point A' formé par le couple $(x^{*\prime}, y^{*\prime})$ qui correspond au point tangent entre la nouvelle droite budgétaire et la nouvelle courbe d'indifférence.

Dans un troisième scénario, supposons que le consommateur dispose maintenant d'un revenu R'' inférieur à R. Les prix étant restés toujours inchangés, cela correspond à un déplacement de la droite de budget vers le bas à gauche parallèlement à la droite de budget correspondant R. Ce déplacement de la droite du budget rétrécit l'ensemble budgétaire du consommateur. Dans ce cas, il choisir un niveau d'utilité inférieur à celui correspondant au revenu R. Il se retrouve alors sur une nouvelle courbe d'indifférence en dessous de la courbe d'indifférence initiale. Le nouvel équilibre obtenu correspond au point A'' formé par le couple $(x^{*\prime\prime}, y^{*\prime\prime})$ qui correspond au point tangent entre la nouvelle droite budgétaire et la nouvelle courbe d'indifférence.

De façon simple, on peut définir le sentier d'expansion du revenu comme la courbe qui lie tous les points d'équilibre du consommateur. Cette définition est illustrée sur le graphique 3.3 ci-dessous :

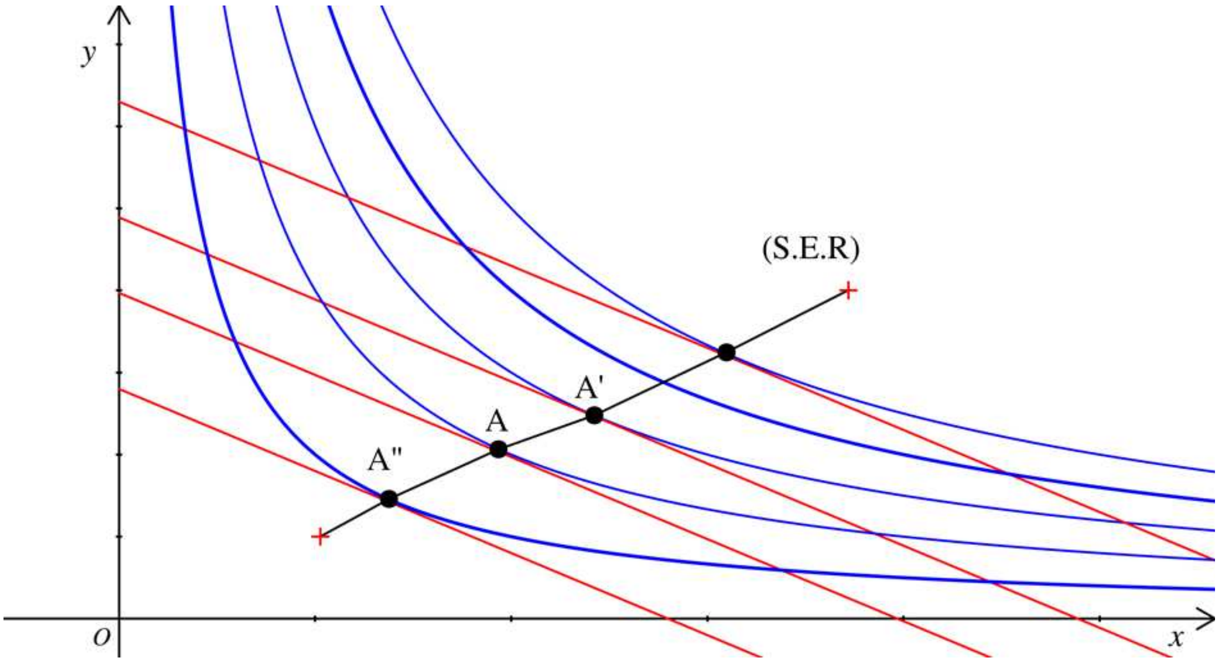


Figure 3.3 : Variation du revenu, équilibre et sentier d'expansion du revenu (cas des biens faiblement substituables)

Le sentier d'expansion du revenu (SER) est le lieu géométrique de tous les points d'équilibre du consommateur lorsque le revenu varie.

Pour déterminer l'expression analytique du sentier d'expansion du revenu, on part de la condition d'équilibre :

$$\frac{Um(x)}{Um(y)} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.7}$$

En remplaçant les utilités marginales par leur expression, cette égalité permet ainsi de tirer y en fonction x pour retrouver la courbe dont la représentation graphique correspond au chemin d'expansion du revenu.

Le sentier d'expansion du revenu est également courbe consommation-revenu.

Notons qu'il existe plusieurs autres notions de sentier d'expansion dont celle du sentier d'expansion du prix. En effet, le sentier d'expansion du prix représente le lieu géométrique de tous les points d'équilibre obtenus suite à une variation du prix d'un bien (le revenu et le prix de l'autre bien étant maintenu fixe). Tout comme pour le sentier d'expansion du revenu, les points d'équilibre correspondent aux points tangents entre les nouvelles courbes d'indifférence et les nouvelles droites budgétaires obtenues à la suite de la variation. Mais il faut noter que la variation du prix d'un bien entraîne une modification du prix relatif. Ce qui crée un déplacement de la droite de budget mais pas de façon parallèle à la droite initiale (Cf. section 2.3.2).

3.2.2. Détermination de la demande optimale pour les biens parfaitement substituables

A la section 1.2.2, nous avons montré que la fonction d'utilité du consommateur pour les biens *parfaitement substituables* peut se présenter sous la forme suivante :

$$u(x, y) = ax + by$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et du bien y et où a et b sont des constantes.
Nous avons également montré que la courbe d'indifférence associée à une telle fonction d'utilité peut se présenter comme suit :

$$y = \left(\frac{u_0}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right) x$$

Où u_0 est le niveau d'utilité considéré.

La courbe d'indifférence des biens parfaitement substituables est donc une droite dont la pente est $-\left(\frac{a}{b}\right)$ et l'ordonnée à l'origine égale à $\left(\frac{u_0}{b}\right)$. Le signe négatif de la pente signifie que la courbe d'indifférence est décroissante (Cf. figure 4).

D'un autre côté, la contrainte budgétaire du consommateur se présente toujours sous la forme :

$$p_x x + p_y y = R$$

Où p_x , p_y et R représentent respectivement le prix du bien x, le prix du bien y et le revenu du consommateur.
En tirant y, on obtient la droite budgétaire suivante :

$$y = \left(\frac{R}{p_y}\right) - \left(\frac{p_x}{p_y}\right) x$$

Où $\frac{R}{p_y}$ représente l'ordonnée à l'origine et $\frac{p_x}{p_y}$ (équivalent prix relatif) définit la pente de la droite du budget. Son signe négatif signifie que la droite du budget est décroissante (Cf. figure 2.1).

Connaissant ainsi la fonction d'utilité (resp. la courbe d'indifférence) et la contrainte budgétaire (resp. la droite de budget), on peut déterminer les demandes optimales du consommateur en bien x et y.

Pour ce qui concerne les méthodes de résolution, elles restent fondamentalement les mêmes que celles développées pour le cas des biens imparfaitement substituables. Toutefois des différences méthodologiques majeures apparaissent compte tenu du caractère linéaire de la fonction d'utilité. En effet, la courbe d'indifférence étant une droite, celle-ci se recoupe nécessairement avec les deux axes. Ce qui n'est pas le cas dans le cas d'une fonction d'utilité convexe.

Par ailleurs, puisque que le point d'équilibre du consommateur correspond au point tangent entre la courbe d'indifférence et la droite du budget, il devient alors possible que la solution du programme du consommateur soit une solution de « coin ». La solution de coin correspond à la situation où le consommateur reporte toute sa consommation sur un seul bien en y consacrant tout son revenu.

En effet, trois cas se présentent dans la détermination du point d'équilibre du consommateur. Le premier cas correspond à la situation où la pente de la droite d'indifférence est supérieure à la pente de la droite de budget ($\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$). Le second cas correspond à la situation où la pente de la droite d'indifférence est inférieure à la pente de la droite de budget ($\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$). Et le troisième cas correspond à la situation où la pente de la droite d'indifférence est égal à la pente de la droite de budget ($\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$). Rappelons simplement que la pente d'une droite définit son degré d'inclinaison (sa raideur). Plu la pente est élevée, plus la droite est raide tendant vers une droite verticale. En revanche plus la pente est faible, plus la droite tend vers une droite horizontale.

Partant de cette propriété, on peut aussi montrer que si $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$ alors la courbe d'indifférence est plus raide que la droite du budget. Lorsque $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$, alors la courbe d'indifférence est moins raide que la droite du budget. Et lorsque $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$, les deux droites ont la même raideur. Par conséquent, elles sont parallèles.

La différence de raideur (inclinaison) entre les deux droites a une implication directe en termes de position du point d'équilibre. Mais d'une manière générale, on peut tirer les propriétés suivantes :

- Lorsque la pente de la droite d'indifférence est supérieure à la pente de la droite de budget, on obtient alors une solution de coin correspondant au point de croisement entre la droite budgétaire, la droite d'indifférence et l'axe des abscisses x. Dans cette situation, le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x. Les quantités optimales sont alors égales à $(x^* = \frac{R}{p_x}\ ; y^* = 0)$

- Lorsque la pente de la droite d'indifférence est inférieure à la pente de la droite de budget, on obtient également une solution de coin correspondant au point de croisement entre la droite budgétaire, la droite d'indifférence et l'axe des ordonnées y. Dans ce cas, le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y. Les quantités optimales seront alors égales à $(x^* = 0\ ; y^* = \frac{R}{p_y})$
- Lorsque la pente de la droite d'indifférence est égale à celle de la droite de budget, les deux droites étant alors parallèles, le consommateur choisira un niveau d'utilité dont la représentation en droite d'indifférence se confond avec la droite de budget. Dans ce cas, le consommateur peut choisir n'importe quel point compris entre les deux solutions de coin $(x^* = 0\ ; y^* = \frac{R}{p_y})$ et $(x^* = 0\ ; y^* = \frac{R}{p_y})$. En d'autres termes, tout point situé sur la droite budgétaire est optimal pour le consommateur.

En adoptant une démarche hautement pédagogique, le but de cette section est d'illustrer les différents points d'équilibre en utilisant les différentes méthodes de détermination (méthode graphique, le Lagrangien, la méthode de l'égalité du TMS au rapport des prix et la méthode de substitution). Nous nous efforçons donc de présenter ces différentes méthodes en faisant une distinction sur la nature du programme du consommateur : maximisation de l'utilité ou minimisation des dépenses (coûts).

3.2.2.1. Résolution du programme par la méthode graphique

Comme nous l'avons montré dans les sections précédentes, la résolution par la méthode graphique consiste à trouver le point qui égalise la pente de la droite de budget celle de la courbe d'indifférence. Comme pour les bien » parfaitement substituables, la courbe d'indifférence est plutôt « une droite d'indifférence », alors, la résolution consistera à trouver le point tangent entre les deux droites.

Cependant, la démarche pour retrouver la position de ce point sur le graphique dépendra de la nature du programme: maximisation de l'utilité (programme primal) ou minimisation des dépenses (programme dual).

Cas du programme primal

$$\begin{cases} Max\ U(x, y) = ax + by \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases} \qquad (3.8a)$$

Dans le cas du programme primal, le point optimal correspond au point tangent entre la droite de budget et la droite d'indifférence la plus élevée (atteignable). Ainsi, comme la droite de budget a une position fixe, il faut alors faire évoluer la droite d'indifférence jusqu'à trouver le point tangent avec la droite du budget. Comme nous venons de le montrer trois cas se présentent : le cas où $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$, le cas où $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$ et le cas où $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$

Premier cas : $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$ (droite d'indifférence plus raide que la droite du budget)

La figure 3.4a ci-dessous illustre la situation où la droite d'indifférence a une pente plus élevée que celle de la droite du budget.

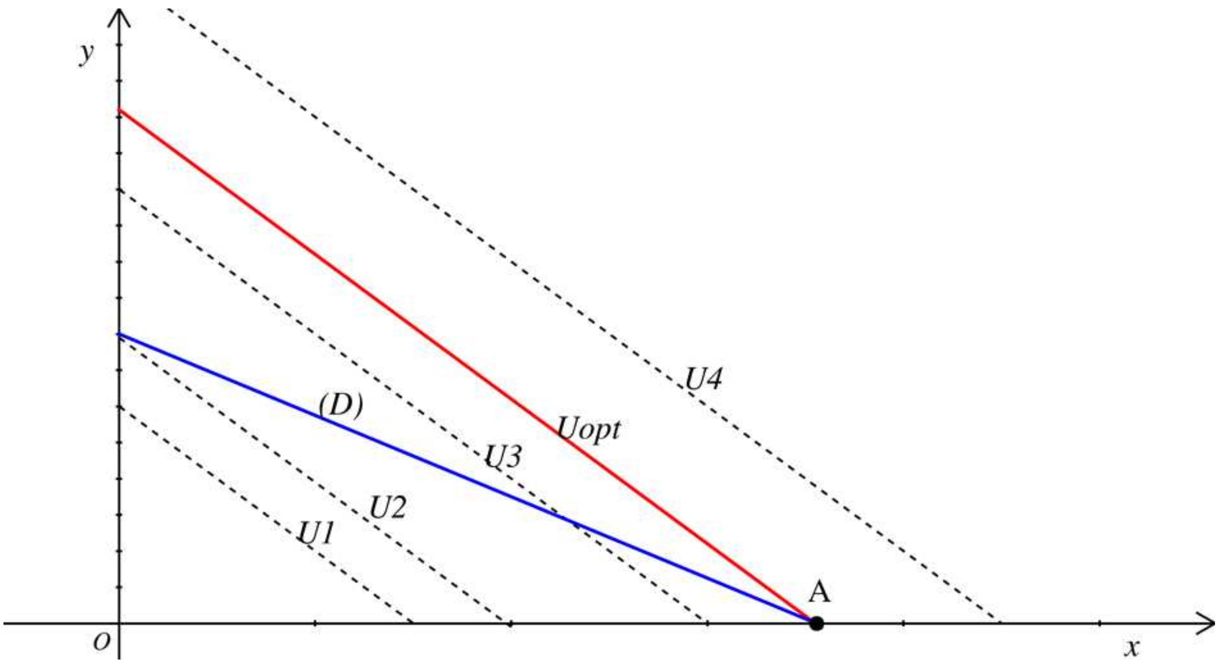


Figure 3.4a : Cas où la courbe d'indifférence est plus raide que la droite du budget

La droite de budget est représentée par la droite (D) en bleu alors que les droites U1, U2, U3, Uopt et U4 représentent les courbes d'indifférence du consommateur pour différents niveaux d'utilité.

Comme on peut constater, la droite U_1 étant beaucoup trop basse, elle ne peut donc donner aucun point de croisement avec la droite de de budget (D). Ce niveau d'utilité n'est donc pas optimal pour le consommateur. Pour ce qui concerne la droite U_2, elle apparait bien sûr tangente avec la droite de budget. En ce point tangent le consommateur pourra consacrer tout son revenu à l'achat du bien y. Cependant, la solution représentée par ce point n'est pas optimale dans la mesure où le consommateur a encore la possibilité d'augmenter son niveau d'utilité tout en respectant sa contrainte budgétaire (droite U3 et Uopt). Toutefois, bien que le niveau d'utilité U3 soit supérieur à U2, il ne peut pas non plus être considéré comme optimal car la droite U3 n'est pas tangent avec la droite (D). De plus le consommateur (tout en respectant sa contrainte budgétaire) a encore la possibilité d'augmenter son utilité en acquérant plus de bien x.

La solution optimale sera finalement donnée par le point tangent entre la droite Uopt en rouge et la droite (D) en bleu. Cette solution est représentée par le point A sur la figure 3.4a. Il correspond au point tangent entre la droite budgétaire et le plus haut niveau d'utilité atteignable. Notons simplement que le niveau d'utilité correspondant à la droite U4 est hors de l'ensemble budgétaire du consommateur. Ce niveau est donc inatteignable compte tenu de la contrainte budgétaire.

Ce graphique confirme bien que lorsque la pente de la droite d'indifférence est plus grande que celle de la droite budgétaire, le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x (solution de coin sur l'axe x).

<u>Deuxième cas :</u> $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$ (droite d'indifférence moins raide que la droite du budget)

La figure 3.4b ci-dessous illustre la situation où la droite d'indifférence a une pente plus faible que celle de la droite du budget.

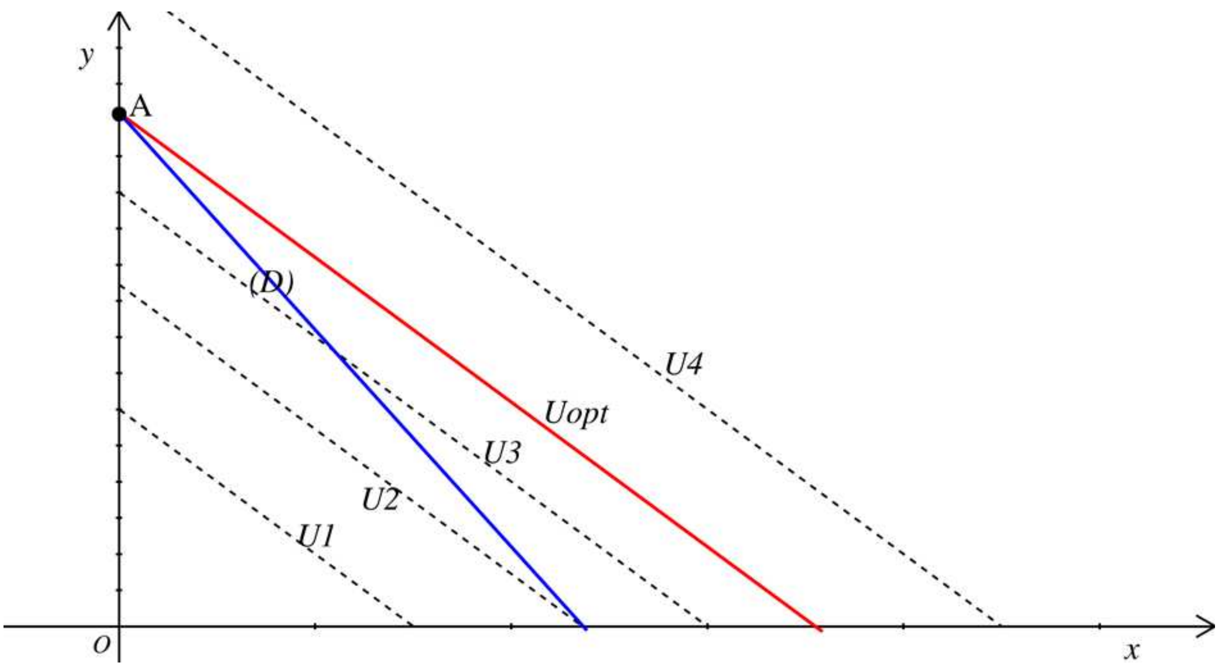


Figure 3.4b : Cas où la courbe d'indifférence est moins raide que la droite du budget

Sur la figure 3.4b, la droite de budget est représentée par la droite (D) en bleu alors que les droites U1, U2, U3, Uopt et U4 représentent les courbes d'indifférence du consommateur pour différents niveaux d'utilité.

La droite U_1 étant trop basse, elle ne peut donner aucun point de croisement avec la droite de de budget (D). Il n'existe donc aucun point optimal pour ce niveau d'utilité. Pour ce qui concerne la droite U_2, elle apparait bien sûr tangente avec la droite de budget. En ce point tangent le consommateur pourra consacrer tout son revenu à l'achat du bien x. Mais cette solution n'est pas optimale car le consommateur peut encore augmenter son niveau d'utilité tout en respectant sa contrainte budgétaire (droite U3 et Uopt). Toutefois, bien que le niveau d'utilité U3 soit supérieur à U2, il ne peut pas être considéré comme optimal dans la mesure où la droite U3 n'est pas tangent avec la droite (D). De plus le consommateur (tout en respectant sa contrainte budgétaire) a encore la possibilité d'augmenter son utilité en acquérant plus de bien y.

La solution optimale sera finalement donnée par le point tangent entre la droite Uopt en rouge et la droite (D) en bleu. Cette solution est représentée par le point A sur la figure 3.4b. Il correspond au point tangent entre la droite budgétaire et le plus haut niveau d'utilité atteignable. On peut aussi signaler que le niveau d'utilité correspondant à la droite U4 est hors de l'ensemble budgétaire du consommateur. Ce niveau est donc inatteignable compte tenu de la contrainte budgétaire.

Le graphique 3.4b permet par ailleurs de confirmer que lorsque la pente de la droite d'indifférence est plus grande que celle de la droite budgétaire, le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y (solution de coin sur l'axe y).

<u>Troisième cas :</u> $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$ (droite d'indifférence moins raide que la droite du budget)

La figure 3.4c ci-dessous illustre la situation où la droite d'indifférence a la même pente que la droite du budget.

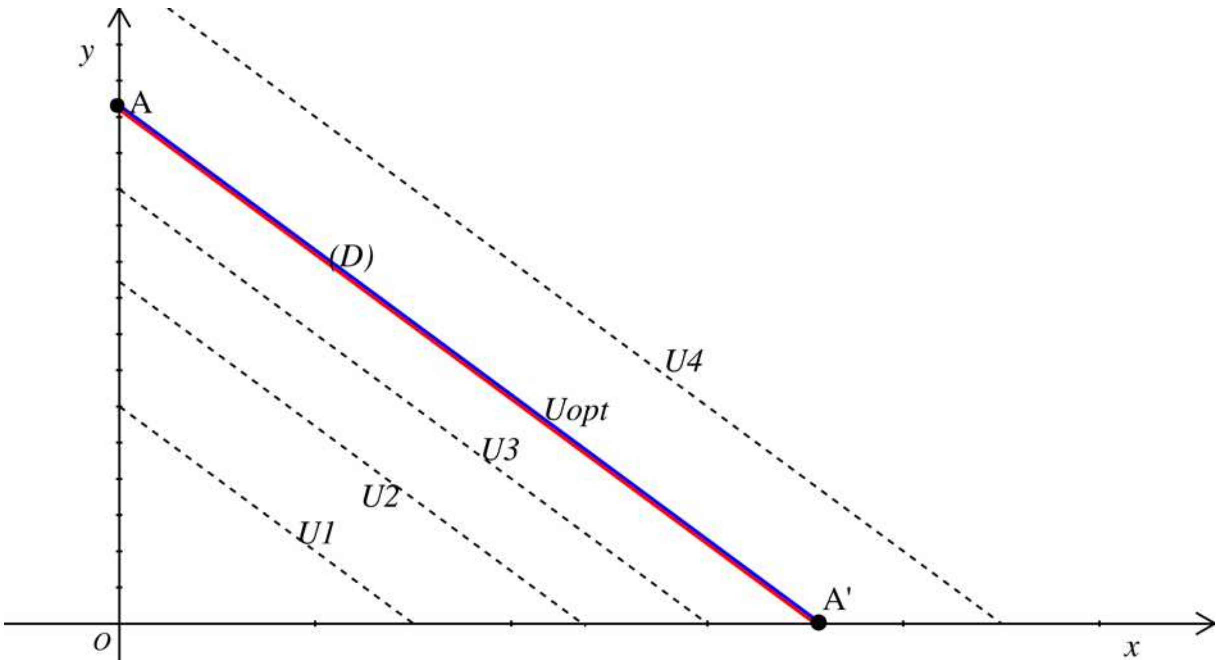


Figure 3.4c : Cas où la courbe d'indifférence a la même pente que la droite du budget

Lorsque la droite de budget a la même pente que la droite d'indifférence, la situation optimale pour le consommateur est celle où la courbe d'indifférence se confond avec la droite de budget (voir sur la figure 3.4 c). En effet, la droite de budget est représentée par la droite (D) en bleu alors que le niveau d'utilité optimale est représenté par la droite Uopt en rouge qui se confond avec (D).

Les droites U1, U2, U3, Uopt et U4 représentent les courbes d'indifférence du consommateur pour différents niveaux d'utilité. Les droites U1, U2, U3 étant trop basses par rapport à la droite budgétaire, il n'existe pas de point optimal pour ces niveaux d'utilité. Quant à la droite U4, elle est située au-delà de l'ensemble budgétaire, donc inatteignable par le consommateur. Au final, seule la droite Uopt fournit des solutions optimales, étant donné qu'elle se confond avec la droite budgétaire. Tout point situé sur cette droite est donc une solution optimale. Cet ensemble de solution inclut à la fois les solutions de coin mais aussi les solutions intérieures situées sur le segment de droite AA' (voir figure 3.4c).

Le graphique 3.4c permet de confirmer que lorsque la pente de la droite d'indifférence est égale à celle de la droite budgétaire, tout point situé sur la droite budgétaire (sur la courbe d'indifférence) est un point optimal pour le consommateur.

Cas du programme dual

Le programme dual du consommateur se présente comme suit :

$$\begin{cases} Min\ \ p_x x + p_y y \\ \\ s.c: \quad U(x,y) \ = \ U_0 \end{cases} \tag{3.8b}$$

Avec $u(x,y) = ax + by$

Dans le cas du programme dual, le consommateur est supposé minimiser sa dépense en se fixant un niveau d'utilité. Le point optimal correspond au point tangent la droite d'indifférence U_0 et entre la droite de budget la plus basse.

Ainsi contrairement au programme primal (où c'est la droite d'indifférence qui se déplace tandis que la droite de budget est fixe), dans le programme dual, c'est la droite de budget qui bouge alors que la position de la courbe d'indifférence reste fixe.
Cependant la position du point d'équilibre dépend de l'importance de la pente de la droite d'indifférence par rapport à la droite de budget. Trois cas peuvent se présenter :
le cas où $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$, le cas où $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$ et le cas où $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$

<u>Premier cas :</u> $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y}$ (droite d'indifférence plus raide que la droite du budget)

La figure 3.5a ci-dessous illustre la situation où la droite d'indifférence a une pente plus élevée que celle de la droite du budget.

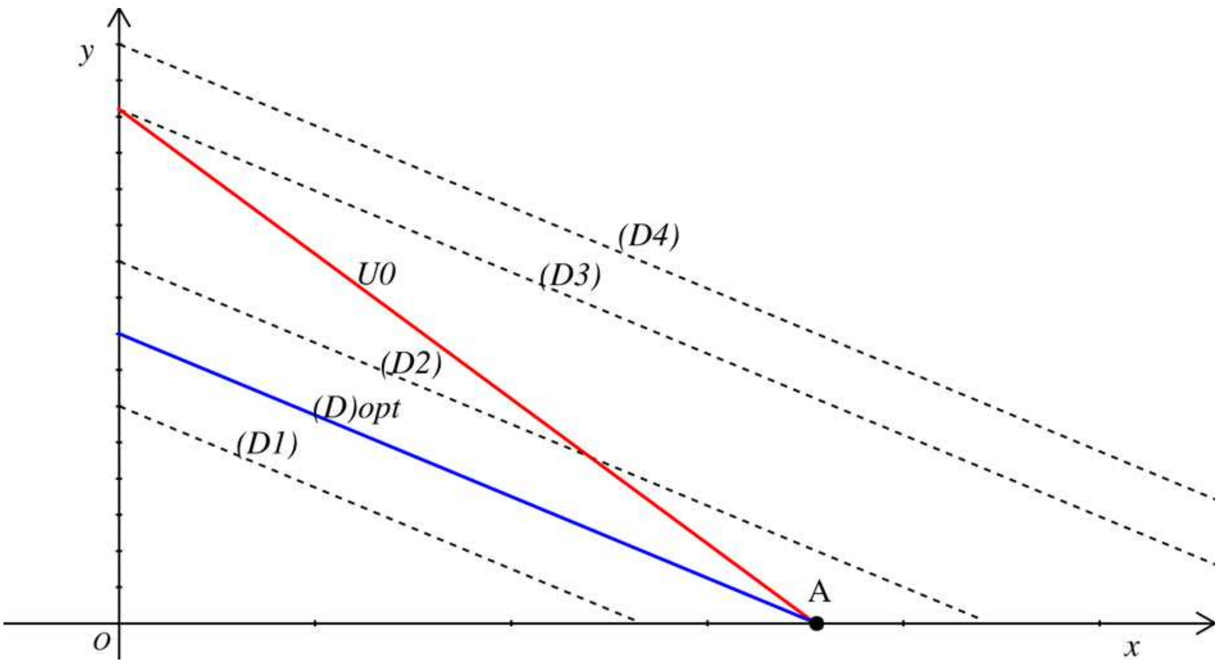


Figure 3.5a : Cas où la courbe d'indifférence est plus raide que la droite du budget

La droite d'indifférence est représentée par la droite (U0) en rouge alors que les droites (D1), (D2), (D3), (D4) et (D)opt représentent les droites budgétaires du consommateur pour différents niveaux de revenu.

Le but du consommateur étant de minimiser sa dépense tout en se fixant le niveau d'utilité U0, il peut dans un premier temps envisager un niveau de dépense correspondant à (D1) qui représente le niveau de dépense le plus faible. Cependant, ce niveau de dépense n'est pas optimal car il ne lui permet pas d'atteindre U0. Ce qui amène le consommateur à revoir ses dépenses à la hausse. Il choisit alors le niveau (D2). Ce niveau de dépense n'est pas optimal car non tangent avec la droite d'indifférence. En effet, le consommateur a la possibilité d'avoir le même niveau d'utilité U0 avec un niveau de dépense plus faible que (D2). Il s'agit du niveau (Dopt). La droite (Dopt) est tangente avec la droite U0. Et il n'existe aucun autre niveau de dépense inférieur à (Dopt) qui permet au consommateur d'atteindre le niveau d'utilité U0. Le point A est donc la solution optimale bien qu'il soit une solution de coin.

Il faut simplement remarquer la droite (D3) est bien tangente avec la droite U0, mais elle ne fournit pas de solutions optimales puisque qu'il existe d'autres droites budgétaires avec des niveaux de dépenses inférieures et permettant d'atteindre le niveau d'utilité U0. Il s'agit en l'occurrence des droites (D2) et (Dopt). Mais seule (Dopt) fournit une solution optimale. Quant à la droite (D4), elle ne peut pas fournir de solutions optimales car ne répondant pas à l'objectif de minimisation des dépenses du consommateur.

A travers les différents éléments présentés, on peut alors annoncé la propriété selon laquelle que lorsque la pente de la droite d'indifférence est plus grande que celle de la droite budgétaire, le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x.

<u>Deuxième cas :</u> $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y}$ (droite d'indifférence moins raide que la droite du budget)

La figure 3.5b ci-dessous illustre la situation où la droite d'indifférence a une pente plus faible que celle de la droite du budget.

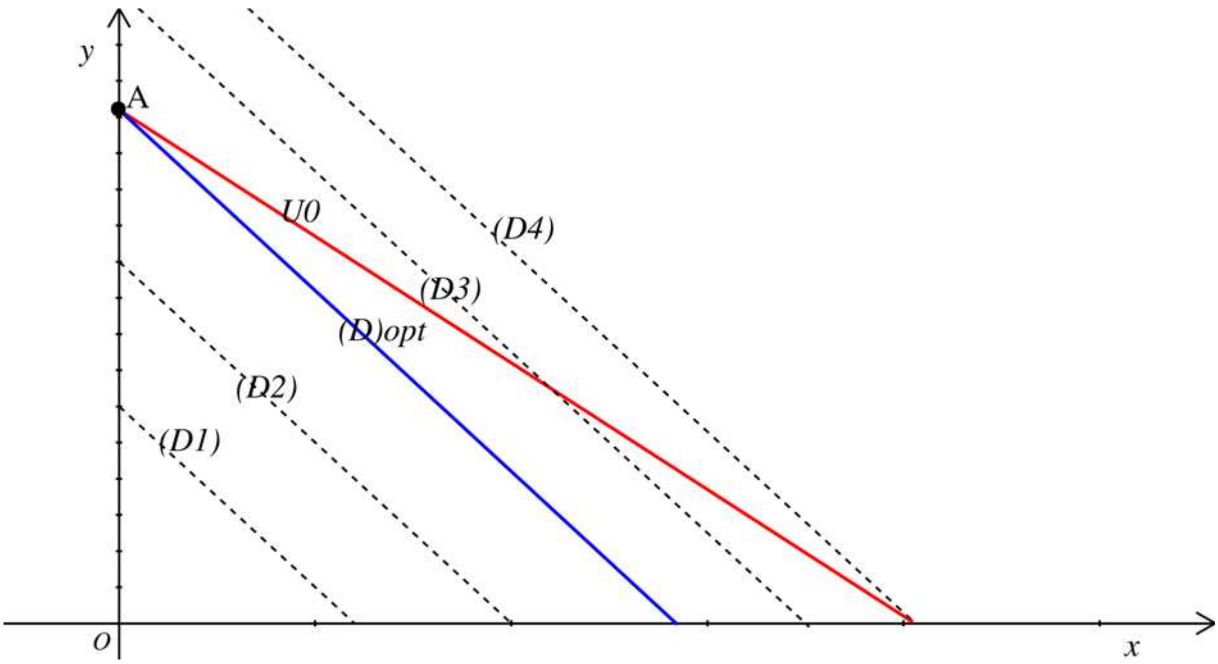


Figure 3.5b : Cas où la courbe d'indifférence est moins raide que la droite du budget

La droite d'indifférence est toujours représentée par la droite (U0) en rouge alors que les droites (D1), (D2), (D3), (D4) et (D)opt représentent les droites budgétaires du consommateur pour différents niveaux de revenu.

Le but du consommateur étant de minimiser sa dépense, il envisage dans un premier temps de choisir un niveau de dépense correspondant à (D1) ou à (D2). Mais étant donné que ces niveaux ne lui permettent pas de satisfaire le niveau U0, il revoit alors ses dépenses à la hausse en choisissant le niveau (D3). Mais ce niveau de dépense n'est pas non plus optimal car non tangent avec la droite d'indifférence. La dépense optimale pour le consommateur s'avère donc être le niveau de dépense (Dopt) car il offre la possibilité au consommateur d'avoir le même niveau d'utilité U0 avec un niveau de dépense plus faible que (D3). Ainsi, le point A apparait comme la solution optimale bien qu'il soit une solution de coin.

Il faut simplement signaler que même si la droite (D4) est tangente avec la droite U0, elle ne fournit pas de solutions optimales puisque qu'il existe d'autre droites budgétaires avec des niveaux de dépenses inférieure et permettant d'atteindre le niveau d'utilité U0. Il s'agit en l'occurrence des droites (D2) et (Dopt). Mais seule (Dopt) fournit une solution optimale. La droite (D4 ne répond donc pas au critère de minimisation des dépenses du consommateur.

A travers les différents éléments présentés, on peut alors annoncé la propriété selon laquelle que lorsque la pente de la droite d'indifférence est plus faible que celle de la droite budgétaire, le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y.

<u>Troisième cas :</u> $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y}$ (droite d'indifférence moins raide que la droite du budget)

La figure 3.5c ci-dessous illustre la situation où la droite d'indifférence a la même pente que la droite du budget.

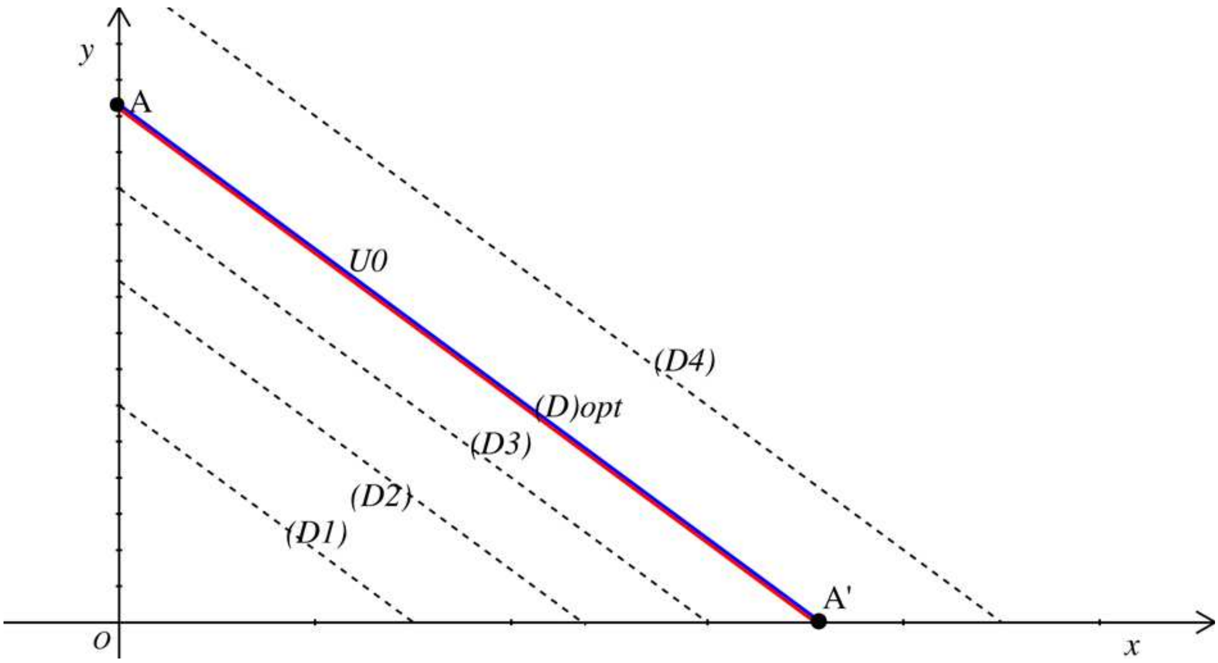


Figure 3.5c : Cas où la courbe d'indifférence a la même pente que la droite du budget

Lorsque la droite de budget a la même pente que la droite d'indifférence, la situation optimale pour le consommateur est celle où la courbe d'indifférence se confond avec la droite de budget. En effet, la droite d'indifférence est représentée par la droite (U0) en bleu alors que la droite de budget optimale est représentée par la droite (Uopt) en rouge qui se confond avec (U0).

Les droites D1, D2, D3, Dopt et D4 représentent les droites budgétaires du consommateur pour différents niveaux de dépenses (revenu). Les droites D1, D2, D3 étant trop basses par rapport à U0, ces niveaux de dépense ne sont pas optimaux. Quant à la droite U4, elle est située au-delà de l'ensemble budgétaire, donc inatteignable par le consommateur. Au final, seule la droite Dopt fournit des solutions optimales, étant donné qu'elle se confond avec la droite d'indifférence. Tout point situé sur cette droite est donc une solution optimale. Cet ensemble de solution inclut à la fois les solutions de coin mais aussi les solutions intérieures situées sur le segment de droite AA' (voir figure 3.5c).

Tout comme le graphique 3.4c, le graphique 3.5c permet de confirmer que lorsque la pente de la droite d'indifférence est égale à celle de la droite budgétaire, tout point situé sur la droite budgétaire est un point optimal pour le consommateur.

3.2.2.2. Résolution du programme selon le principe de l'égalité du TMS au rapport des prix

La résolution du programme du consommateur selon le principe de l'égalité du TMS au rapport des prix consiste à comparer le taux marginal de substitution du bien y au bien x avec le prix relatif du bien x. En effet, les deux biens étant parfaitement substituables, le consommateur fera son choix en fonction de l'utilité marginale pondérée de chaque bien ($\frac{Um_x}{p_x}$ et $\frac{Um_y}{p_y}$). Si $\frac{Um_x}{p_x} > \frac{Um_y}{p_y}$, le consommateur choisira de consommer uniquement le bien x. Si $\frac{Um_x}{p_x} < \frac{Um_y}{p_y}$, le consommateur choisira de consommer uniquement le bien y. Et lorsque $\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y}$ le consommateur peut choisir n'importe quelle combinaison des quantités de deux biens appartenant à la droite budgétaire.

Cette propriété de comparaison des utilités marginales pondérées provient de l'égalité suivante :

$$TMS_{y/x} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.9a)$$

Où $TMS_{y/x}$ est le taux marginal de substitution du bien y au bien x. Mais sachant que le $TMS_{y/x}$ est égal au rapport des utilités marginales, on peut reformuler la conditions (3.9a) comme suit :

$$\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.9b)$$

La condition (3.9b) peut également s'écrire comme suit :

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \qquad (3.9c)$$

Les deux membres de cette égalité sont appelée utilités marginales pondérées. Ils représentent l'utilité marginale pour chaque unité monétaire dépensée. Bien entendu le consommateur augmente la consommation du bien pour lequel cette valeur est élevée. Il atteint l'équilibre lorsqu'il y a égalité entre les deux valeurs.

Toutefois, les biens étant parfaitement substituables, le consommateur consacrera tout son revenu à l'achat du bien pour le l'utilité marginale pondérée est la plus élevée. Ainsi, plusieurs cas peuvent se présenter :

1er cas : lorsque $\frac{Um_x}{Um_y} > \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{Um_x}{p_x} > \frac{Um_y}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x. Les demandes optimales du consommateur seront donc :

$$\begin{cases} x^* = \frac{R}{p_x} \\ y^* = 0 \end{cases} \quad (3.10a)$$

Signalons aussi que puisque $Um_x = a$ et $Um_y = b$ (voir expression de la fonction d'utilité), le premier cas correspond donc à la situation où la pente de la droite d'indifférence ($\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$) est supérieure à celle de la droite du budget ($\frac{p_x}{p_y}$). Ce qui confirme donc les résultats obtenu par la méthode graphique.

2ième cas : lorsque $\frac{Um_x}{Um_y} < \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{Um_x}{p_x} < \frac{Um_y}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y. Les demandes optimales du consommateur seront donc :

$$\begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = \frac{R}{p_y} \end{cases} \quad (3.10b)$$

Et sachant que $Um_x = a$ et $Um_y = b$, ce second cas correspond donc à la situation où la pente de la droite d'indifférence ($\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$) est inférieure à celle de la droite du budget ($\frac{p_x}{p_y}$).

3ième cas : lorsque $\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y}$ alors le consommateur peut choisir n'importe quel point situé sur la droite budgétaire. L'ensemble des solutions optimales se présente alors comme suit :

$$S = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}_{/\, y^* = \frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x^* \ et\ y^* = \frac{u_0}{b} - \frac{a}{b}x^*} \in \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{p_y} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{R}{p_x} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3.10c)$$

Sachant que $Um_x = a$ et $Um_y = b$, ce troisième cas correspond donc à la situation où la pente de la droite d'indifférence ($\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$) est égale à celle de la droite du budget

($\frac{p_x}{p_y}$). Les conclusions restent donc les mêmes que celles faites dans les méthodes de résolutions graphiques.

Il faut aussi signaler que la démarche de résolution par l'égalité du TMS au rapport de prix reste valable quelle que soit la nature du programme du consommateur. Elle s'applique donc indifféremment selon qu'il s'agisse du programme Marshallien ou du programme Hicksien.

3.2.2.3. Résolution du programme par le lagrangien

La résolution du programme du consommateur par la méthode du lagrangien n'est pas d'un intérêt majeur pour le cas de biens parfaitement substituables. Connaissant la fonction d'utilité et la droite budgétaire, il est plus pratique t plus simple d'utiliser le principe de l'égalité du TMS au rapport des prix plutôt de formuler le lagrangien. Néanmoins, pour des raisons pédagogiques, nous présentons cette méthode afin de montrer qu'elle reste bien valable même lorsque la courbe d'indifférence est linéaire.

Cas du programme primal

Soit le programme marshallien suivant :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) = ax + by \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases}$$

Le Lagrangien de ce programme peut être formulé comme suit :

$$L(x,y,\lambda) = ax + by + \lambda(R - p_x x - p_y y)$$

En dérivant cette fonction respectivement par rapport à x, y et λ, on trouve le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = a - \lambda p_x = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = b - \lambda p_y = 0 & (II) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = R - p_x x - p_y y = 0 & (III) \end{cases}$$

Où a et b représentent respectivement l'utilité marginale du bien x et du bien y.
Il apparait donc que :

$$\begin{cases} a = \lambda p_x & (I) \\ b = \lambda p_y & (II) \\ p_x x + p_y y = R & (III) \end{cases}$$

Et en divisant (I) par (II) afin d'éliminer λ, on retrouve l'égalité suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.11a}$$

Cette égalité correspond bien à celle du principe de l'égalité du TMS au rapport de prix. En effet, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.11b}$$

Ce qui peut encore se reformuler pour donner la forme suivante :

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}}{p_x} = \frac{b}{p_y} \tag{3.11c}$$

On passe ainsi de l'égalité du TMS au rapport des prix à l'égalité des utilités marginales pondérées. Et puisque les biens sont parfaitement substituables, on peut alors énoncer les mêmes résultats que ceux obtenus dans les autres méthodes. En effet, trois cas se présentent :

Lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} > \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} > \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x. Ses demandes optimales seront alors :

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{R}{p_x} \\ y^* = 0 \end{cases} \tag{3.12a}$$

Lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} < \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} < \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y. Les demandes optimales seront alors :

$$\begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = \dfrac{R}{p_y} \end{cases} \tag{3.12b}$$

Et finalement lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} = \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur peut choisir n'importe quel point situé sur la droite budgétaire. L'ensemble des solutions optimales se présente alors comme suit :

$$S = \begin{pmatrix} x^* \\ \\ y^* \end{pmatrix}_{/\, y^*=\frac{R}{p_y}-\frac{p_x}{p_y}x^* \; et \; y^*=\frac{u_0}{b}-\frac{a}{b}x^*} \in \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \frac{R}{p_y} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{R}{p_x} \\ \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad (3.12c)$$

Sachant que $Um_x = a$ et $Um_y = b$, ce troisième cas correspond donc à la situation où la pente de la droite d'indifférence ($\frac{a}{b}$) est égale à celle de la droite du budget ($\frac{p_x}{p_y}$). Les conclusions restent donc les mêmes que celles faites dans les méthodes de résolutions graphiques.

Utilisation du lagrangien dans le cas du programme dual

Soit le programme Hicksien suivant :

$$\begin{cases} Min \;\; p_x x + p_y y \\ \\ s.c: \quad ax + by \; = \; U_0 \end{cases}$$

Le lagrangien de ce programme se présente comme suit :

$$L(x, y, \lambda) = p_x x + p_y y + \lambda(U_0 - ax + by)$$

En dérivant la fonction $L(x, y, \lambda)$ par rapport à ses trois arguments , y et λ, on obtient les conditions de premier ordre telles que :

$$\begin{cases} p_x = a & (I) \\ p_y = a & (II) \\ ax + by = U_0 & (III) \end{cases}$$

Et en divisant (I) par (II) afin d'éliminer λ, on retrouve finalement l'égalité :

$$\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.13a)$$

Ce qui correspond au principe de l'égalité du TMS au rapport de prix.

$$\frac{a}{b} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.13b)$$

On retombe alors sur la même expression que celle obtenu dans le cas du programme primal telle que :

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}}{p_x} = \frac{b}{p_y} \qquad (3.13c)$$

Cette expression permet ainsi de passer de l'égalité du TMS au rapport des prix à l'égalité des utilités marginales pondérées. On peut alors tirer les mêmes conclusions que celles dans le précédent cas. Lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} > \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} > \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x. Ses demandes optimales seront alors : $\begin{pmatrix} x^* = \frac{R}{p_x} \\ \\ y^* = 0 \end{pmatrix}$. Lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} < \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} < \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y. Les demandes optimales seront alors : $\begin{pmatrix} x^* = 0 \\ \\ y^* = \frac{R}{p_y} \end{pmatrix}$.Et finalement lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} = \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur peut choisir n'importe quel point situé sur la droite budgétaire.

Au final, on peut remarquer la méthode lagrangien se confond avec la méthode du TMS après avoir dérivée les conditions de premier ordre. C'est pourquoi cette n'a pas un très intérêt dans le cas des biens parfaitement substituables.

3.2.2.4. Résolution du programme par la méthode de substitution

Sachant les deux inconnues du programme du consommateur x et y pour appliquer la méthode de substitution, on tire dans un premier temps, la valeur de y à partir de l'équation de la contrainte. Et dans un second temps, on remplace cette expression dans la fonction objective. Dans un troisième temps, on dérive la fonction objective pour déterminer la condition de premier ordre. Cette condition de premier ordre permet ensuite de formuler la condition de l'égalité du TMS au rapport de prix.

Cas du programme primal

Soit le programme suivant :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) = ax + by \\ \\ s.c: \ \ p_x x + p_y y = R \end{cases}$$

Etape 1 : Tirons la valeur de y à partir de l'équation de la contrainte :

$$y = \frac{R}{p_y} - \left(\frac{p_x}{p_y}\right) x$$

Etape 2 : Remplaçons la valeur de y dans la fonction objective (qui est ici la fonction d'utilité) :

$$U(x) = ax + b\left(\frac{R}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)$$

$$U(x) = \left(a - \frac{bp_x}{p_y}\right)x + \frac{bR}{p_y}$$

Etape 3 : Dérivons cette fonction par rapport à x pour ensuite former la condition de premier ordre :

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = a - \frac{bp_x}{p_y} = 0$$

Cette égalité permet ainsi de reformuler de telle sorte à retrouver la condition d'équilibre :

$$\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.14a)$$

Cette expression correspond au principe de l'égalité du TMS au rapport de prix.

$$\frac{a}{b} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.14b)$$

On peut alors adopter les reformulations qui permettent de passer de l'égalité du TMS au rapport des prix à l'égalité des utilités marginales pondérées.

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \Leftrightarrow \frac{a}{p_x} = \frac{b}{p_y} \qquad (3.14c)$$

On peut alors tirer les mêmes conclusions que celles dans les précédents cas. En effet, lorsque $\frac{a}{b} > \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} > \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x. Ses demandes optimales seront alors : $\begin{pmatrix} x^* = \frac{R}{p_x} \\ y^* = 0 \end{pmatrix}$. Et lorsque $\frac{a}{b} < \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} < \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y. Les demandes optimales seront alors : $\begin{pmatrix} x^* = 0 \\ y^* = \frac{R}{p_y} \end{pmatrix}$. Et enfin le consommateur peut choisir n'importe quel point situé sur la droite budgétaire lorsque $\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} = \frac{b}{p_y}$.

Cas du programme dual

Soit le programme suivant :

$$\begin{cases} Min\, p_x x + p_y y \\ s.c: \ \ ax + by = U_0 \end{cases}$$

Les étapes de la résolution de ce programme sont les suivantes.

Etape 1 : Tirer la valeur de y à parti de la contrainte technique :

$$y = \frac{U_0}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)x$$

Etape 2 : Remplaçons la valeur de y dans la fonction objective (qui est ici la droite de budget) :

$$B(x) = p_x x + p_y\left(\frac{U_0}{b} - \frac{a}{b}x\right)$$

$$B(x) = \left(px - \frac{p_y a}{b}\right)x + \left(p_y\frac{U_0}{b}\right)$$

Etape 3 : Dérivons cette fonction par rapport à x pour ensuite former la condition de premier ordre :

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = px - \frac{p_y a}{b} = 0$$

Cette égalité permet ainsi de reformuler de telle sorte à retrouver la condition d'équilibre :

$$\frac{a}{b} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.15a)$$

Ce qui, comme précédemment, équivaut à la condition de l'égalité du TMS au rapport de prix.

$$\frac{a}{b} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (3.15b)$$

Il devient alors possible de faire les reformulations permettant de passer de l'égalité du TMS au rapport des prix à l'égalité des utilités marginales pondérées.

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}}{p_x} = \frac{b}{p_y} \qquad (3.15c)$$

L'équation (3.15c) permet ainsi tirer les mêmes conclusions que celles dans les précédents cas. Trois situations se présentent. lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} > \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} > \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien x. Ses demandes optimales seront alors : $\begin{pmatrix} x^* = \frac{R}{p_x} \\ y^* = 0 \end{pmatrix}$. Et lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} < \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} < \frac{b}{p_y}$ alors le consommateur consacre tout son revenu à l'achat du bien y. Les demandes optimales seront alors : $\begin{pmatrix} x^* = 0 \\ y^* = \frac{R}{p_y} \end{pmatrix}$. Et enfin le consommateur peut choisir n'importe quel point situé sur la droite budgétaire lorsque $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b}{p_y} = \frac{b}{p_y}$.

Au final, on il faut remarquer la méthode de substitution, tout comme la méthode de lagrangien, se confond avec la méthode de l'égalité du TMS au rapport des prix après avoir obtenu les conditions de premier ordre.

3.2.3. Détermination des demandes optimales dans le cas des biens complémentaires

Signalons d'entrée que pour résoudre le programme du consommateur dans le cas des biens complémentaires, on ne peut plus faire appel à la notion de taux marginal de substitution. Par conséquent, toute méthode de résolution faisant référence à cette notion n'est plus valable. C'est pourquoi, il faut privilégier la méthode graphique de résolution qui reste, en effet, valable quelle que soit la nature du programme ou la nature des biens.

Nous avons montré à la section 1.2.2 que la forme générale de la fonction d'utilité pour les biens complémentaires se présente sous la forme suivante :

$$u(x, y) = min\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}\right)$$

Où x et y représentent respectivement la quantité du bien x et du bien y. Et où a représente la quantité de bien x nécessaire pour procurer une unité d'utilité au consommateur et b représente la quantité de bien y nécessaire pour générer une unité d'utilité.

Pour un niveau d'utilité donné u_0, la courbe d'indifférence sera :
$min\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}\right) = u_0$.

On peut alors envisager deux cas:

Si $min\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}\right) = \frac{x}{a}$, la courbe d'indifférence sera

$$\frac{x}{a} = u_0 \Rightarrow x = au_0$$

Si $min\left(\frac{x}{a};\frac{y}{b}\right) = \frac{y}{b}$, la courbe d'indifférence est :

$$\frac{y}{b} = u_0 \Rightarrow y = bu_0$$

Dans le premier cas, on aboutit à une droite parallèle à l'axe des ordonnées (y) et dans le second cas, on obtient une droite parallèle à l'axe des abscisses (x).

On peut ainsi montrer que pour le consommateur, la combinaison optimale reste toujours le point d'intersection entre la droite verticale et la droite horizontale. Et tout autre point sur l'une des deux droites différent du point d'intersection est une solution non optimale car présentant des gâchis.

Pour retrouver la position du point optimal en utilisant la méthode graphique, on suit les mêmes démarches que celles présentées pour les autres types de biens. En effet, lorsqu'il s'agit pour le consommateur de maximiser l'utilité (programme primal), il faut retenir le point de tangence entre la droite budgétaire et la courbe d'indifférence le plus haut atteignable. Et lorsqu'il s'agit pour le consommateur de minimiser les dépenses en se fixant un niveau d'utilité U0, il faut alors retenir le point de tangence entre la courbe d'indifférence U0 et la droite budgétaire la plus basse possible (voir figure 3.6 ci-dessous).

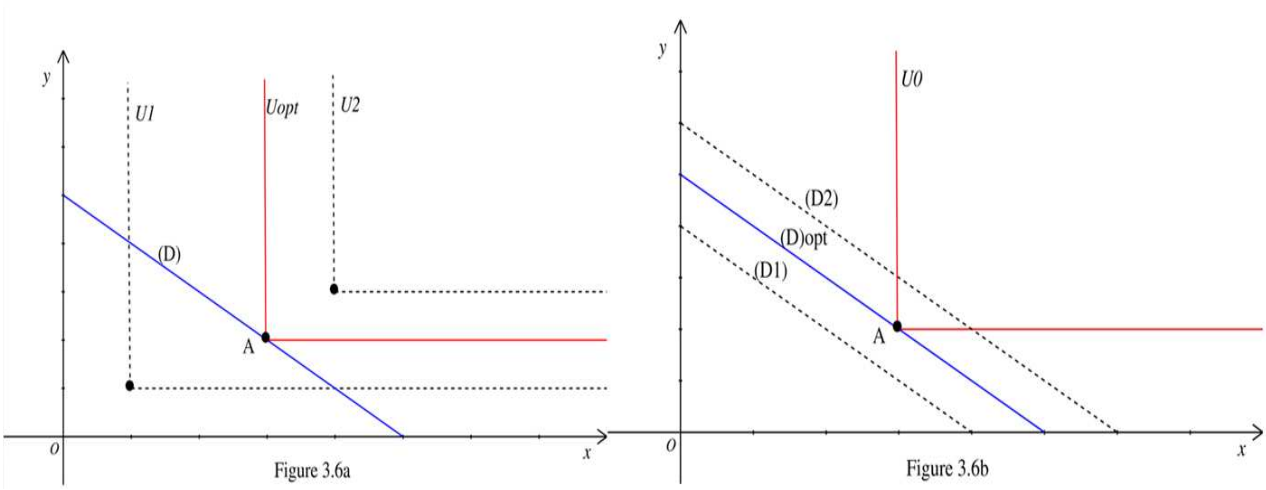


Figure 3.6 : Résolution graphique du programme du consommateur pour les biens complémentaires.

Les figures 3.6a et 3.6b présentent respectivement les solutions du programme primal et dual.

Sur la figure 3.6a, la droite (D) représente la droite budgétaire alors que les courbes U1, Uopt et U2 représentent les courbes d'indifférence du consommateur pour différents niveaux d'utilité.

La courbe U1 n'est pas optimale dans la mesure où le consommateur peut encore augmenter son utilité tout en respectant sa contrainte budgétaire. Pour cela, il suffit qu'il choisisse le point A (appartenant en effet à la courbe Uopt située au dessus de la courbe U1). En revanche, il ne peut pas atteindre le niveau d'utilité U2 car la courbe correspondant à ce niveau est située en dehors de l'ensemble budgétaire. Le point d'équilibre pour le consommateur reste donc le point A qui est le point tangent entre la droite budgétaire et la courbe d'indifférence la plus haute atteignable. Rappelons que pour le cas des biens complémentaires, le point optimal se trouve toujours à l'angle droit représenté par le point A.

Pour la figure 3.6b, contrairement à la précédente, il s'agit de faire déplacer la droite de budget tandis que la courbe d'indifférence reste fixée à un niveau U0. Comme on peut le constater seule la droite (D)opt fournit une solution optimale représenté par le point A. En effet, la courbe (D1) ne permet pas d'atteindre le niveau d'utilité U0, alors que la droite (D2) bien qu'elle permet d'atteindre le niveau U0 n'est pas non optimale. Car, cette droite coupe la courbe U0 en deux points où chacun présente des gâchis car n'étant pas situé à l'angle droit. Le point A reste donc la solution optimale.

Références

Archibald G. C., 1966, Refutation or comparison ? British Journal for the Philosophy of Science, 17:279—296,

Debreu, G.,1954, Representation of a preference ordering by a numerical function In R. L. D. R. M. Thrall, C. H. Coombs, editor, Decision Processes, pages 159—165. Wiley, New York, 1954.

Kreps D. M, 1990,. A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1990.

Malinvaud E., 1982, Lecons de Théorie Microéconomique. Dunod, Paris, 4ème edition, 1982.

Wold. H., 1943, A synthesis of pure demand analysis. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 26:85—118, 220—263.

Colin Camerer,1995, Individual DecisionMaking, In Kagel et Roth, chapitre 8, pages 587–703.

Gérard Debreu, 1966, Théorie de la valeur, analyse axiomatique de l'équilibre économique. Dunod.

Ghislain Deleplace. Histoire de la pensée économique. Dunod, 1999.

Peter C. Fishburn, 1988, Nonlinear Preferences and Utility Theory. The Johns Hopkins University Press.

Bernard Guerrien, 1996, Dictionnaire d'analyse économique. Éditions La Découverte, 1996.

Baumol, Panzar and Willig, 1982, Contestable markets and the theory of industry structure, Harcourt Brace Jovanovich.

Sharkey, 1982, The theory of natural monopoly, Cambridge University Press, 1982.

Mas Colell A. et al.1995, Microeconomic theory, Oxford University Press, 1995