



Munich Personal RePEc Archive

**On the herd behavior in the dynamic
model of closed one commodity market
with finite automata as participants**

Voronovitsky, Mark

Market Economy Institut of Russian Academy of Sciiebses

2016

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/72277/>

MPRA Paper No. 72277, posted 29 Jun 2016 11:30 UTC

М.М. Вороновицкий

О стадном поведении в динамической модели замкнутого однотоварного рынка, участниками которого являются конечные автоматы. *

В модели замкнутого однотоварного рынка, в которой агент является конечным автоматом, исследуются механизмы стадного поведения агентов, т.е. случай - когда участники, отказываясь от использования собственной информации о ситуации и последствиях своих решений, повторяют действия большинства участников коллектива. В то же время данная работа преследует достаточно скромную цель исследования возможности стадного поведения в модели замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве агентов, предложенной в нашей предыдущей работе. В предшествующей работе рассматривались случаи двух видов выбора агентами новой цены и показано, что при этом траектория системы попадает в стационарное множество, свое в каждом случае, и характеризуется почти постоянством средней цены рынка. В настоящей работе посредством компьютерного исследования модели показана возможность других двух видов стадного поведения: одного, индуцирующего рост средней цены рынка и другого, ведущего к падению средней цены рынка. При этом видно, что стадное поведение может происходить только на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: математическая модель, стадное поведение, игра на повышение, игра на понижение, замкнутый рынок, однотоварный рынок, динамика цен, траектория, стационарное множество, стационарное состояние, конечные автоматы

Классификация JEL: C51, D01...

1. Введение

Термин стадное поведение применяют в случае, когда участники коллектива, отказываясь от использования собственной информации о ситуации и последствиях своих решений повторяют, действия большинства других участников.

Стадное поведение (встречающееся во многих сферах жизни) в экономике достаточно давно отмечено не только как наблюдаемое явление, но и как существенный фактор в выборе направления развития и в динамике экономических процессов. В сфере потребления такое поведение обусловлено желанием индивида соответствовать

* Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН и финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 14-06-00110).

предпочтениям (а следовательно и потреблению других людей), а вовсе не стремлением максимизировать полезность качественных характеристик и минимизировать цены товаров. Это ярко проявляется в увлечениях и моде.

В довольно часто наблюдаемом, по крайней мере в недавние времена, массовом изъятии вкладов из банков, которое называют «нападением на банк» (run of bank), скорее всего также проявляется стадное поведение клиентов банка. Среди инвестиционных фондов, финансовых аналитиков и в прогнозах экономических ситуаций тоже иногда наблюдается стадное поведение.

Но особенно важным для экономики в целом могут оказаться проявления стадного поведения участников финансового рынка в том числе при возникновении биржевых пузырей (bubbles). Такие изменения могут быть как краткосрочными и связанными с не очень сильными изменениями ситуации, так и довольно длительными и быть связанными с большими изменениями цен и объемов торговли и производства. В последних случаях последствия стадного поведения влияют на значительные сферы экономики, и таким образом стадное поведение становится определенным элементом функционирования экономики. Чаще всего говорят о стадном поведении участников фондовых бирж, объясняя с его помощью резкие взлеты и падения биржевых цен как на длительных интервалах времени, так и кратковременные.

Следует при этом отметить что в случае финансового рынка к настоящему времени отсутствуют адекватные объяснения многим явлениям как в поведении отдельных участников рынка, так и коллектива участников в целом, хотя в последние годы в этом направлении разработаны очень перспективные теории, в частности, объясняющие отношение участников к оценке рискованности их решений, Много исследований стадного поведения участников финансового рынка носят прикладной характер. Это изучение наблюдаемых примеров стадного поведения на финансовых рынках в целях непосредственного применения результатов исследований. Менее многочисленны попытки теоретического объяснения характера этого явления, исходя из моделей поведения участников финансового рынка. Заметим, что последнее требует модельного

описания поведения и взаимодействия участников финансового рынка, а это не простая задача. Для решения этой задачи необходимо понять характер стадного поведения участников и причины возникновения такого поведения при логически оправданном и достаточно простом механизме поведения и взаимодействия участников. В последние годы уделялось много внимания стадному поведению участников финансового рынка, в частности фондовой биржи. В работах Банерджи (Abhijit V. Banerjee, 1992) и Бикчандани и др. (Sushi Bikhchandani, David Hirshleifer and Ivo Welch 1992) были разработаны и исследованные модели возникающего в коллективах агентов, принимающих решения в порядке очереди и на основе результатов последствий решений предшественников в очереди. Это быстро распространяющееся стадное поведение получило название каскадов. За упомянутыми работами последовало множество исследований, объясняющих стадное поведение участников биржи на основе теории каскадов. Наиболее интересной в ряду этих работ представляется работа Авери и Земски (Avery C., Zemsky P. 1998). Изложение основных исследований стадного поведения участников биржи можно найти в обзоре Бикчандани и Шарма (Sushi Bikhchandani and Suhil Sharma 2000) и в более позднем обзоре Вороновицкого и Цветкова (Вороновицкий М. М., Цветков В.А. 2012). В работе Р. Тополя (Topol R. 1991) математически показана возможность стадного поведения участников биржи. Наряду с серьезным математическим результатом с нашей точки зрения большой интерес представляет построенная автором модель биржи, включающая множество участников различающихся их ценами, описание поведения и взаимодействия участников. Эта модель в значительной мере соответствует возникшему позже подходу агент – ориентированного моделирования (Макаров В.Л. 2012), который использовался также и в наших моделях одотоварного открытого и замкнутого рынка. Эти модели не претендуют на достаточно полное описание реальной ситуации на рынках, а лишь на логическое оправданное математическое описание поведения и взаимодействия участников, так же как и на достаточно простое их описание, которое требуется для математического анализа описанных процессов. В последней из этих моделей

(Вороновицкий 2016) (может быть самый простой и в большой мере нереалистический случай подобной модели), в которой принятие решения участниками моделировалось, посредством конечных автоматов, предложенных в работах И.М.Гельфанда, М.Л.Цетлина и их сотрудников (Цетлин, 1969)

Эмпирическое изучение разнообразных случаев стадного поведения групп участников реальных финансовых рынков, попытки теоретического объяснения этих явлений, в частности, с помощью поведенческих моделей представляют собой крайне важную для теории и практики задачу. Цель данной работы много скромнее. Мы хотим показать возможность стадного поведения участников разработанной нами ранее агент - ориентированной модели замкнутого однотооварного рынка, которое обусловлено внешним сигналом или сигналом, связанным с внутренним с стоянием рынка.

Для этого нам придется посвятить второй раздел нашей работы краткому описанию нашей агент ориентированной модели однотооварного рынка с конечными автоматами в качестве участников. Только в третьем разделе мы сможем приступить к описанию возможной динамики коллектива участников рынка, соответствующей стадному поведению, описав при этом как алгоритмы поведения отдельных участников, так и динамику всей системы.

Мы надеемся, что предложенная нами в предшествовавших работах агент ориентированная модель замкнутого однотооварного рынка отражает, хотя бы частично, динамику фондовой биржи, в короткие периоды внешней стабильности.

Рассматривается система, состоящая из фиксированного числа элементов (участников), каждый из которых характеризуется количеством товара, денег, состоянием (статусом) и ценой. Статус участника может принимать три значения. Он может быть продавцом, покупателем и не участвовать в торговле, ожидая более выгодного соотношения цен на рынке. Количества товара и денег в системе постоянны. Система существует во времени, причем момент времени состоит как бы из двух тактов. На первом такте происходит торговля между продавцами и покупателями, причем порядок торговли определяется соотношением цен. После первого такта у продавцов возникают новые

количества товара и денег и меняется их статус (например продавцы становятся покупателями или ожидающими и наоборот), на втором такте этого момента времени исходя из результатов предшествовавшей торговли. участники назначают новые цены. Каждый участник может уменьшать или увеличивать свою цену в пределах заданной константы. При этом в его распоряжении имеются два способа изменения цены: осторожный и рискованный. Осторожный способ в большой мере гарантирует его участие в торговле в следующий момент времени. Рискованный, связан с опасностью того, что новая цена продавца будет слишком велика, или новая цена покупателя будет слишком мала, для его участия в торговле в следующий момент времени. Алгоритм выбора между осторожным или рискованным назначением цены определяется структурой конечного автомата, которой меняет свои состояния (а соответственно и действия по выбору новой цены) в зависимости от результата своего участия в торговле на первом такте. Этот результат оценивается посредством сравнения реального изменения средней цены на рынке с максимально возможным (для продавца) или минимально возможным (для покупателя). Центральный результат компьютерных экспериментов с моделью состоит в том, за что конечный период времени система попадает в стационарное множество состояний, характеризующееся постоянным (с определенной точностью) значением средней цены торговли.

В третьем разделе работы описываются возможные случаи стадного поведения участников модели замкнутого одностороннего рынка, обусловленные как внутренними, так и внешними причинами. Часто обращают внимание на стадное поведение на финансовых рынках, в том числе на фондовых биржах вызванные внешними для рынков причинами – теми или иными событиями в экономической жизни, например изменением резким изменение фундаментальной ценности (fundamental value). При этом некоторые эмпирические факты говорят о возможности стадного поведения участников рынка, вероятно, не связанными с внешними причинами, По крайней мере в некоторых наблюдаемых случаях внешние условия как бы неизменны, тогда, когда участники биржи демонстрируют стадное поведение. Не стоит забывать,

что в реальности на фондовой бирже торгуется много товаров и имеются крайне различные по манере поведения участники, тогда, как в нашей модели торгуется один товар и участники конструктивно одинаковы. Самым простым случаем стадного поведения является случай одинакового выбора цены всеми участниками.

Предполагается, что некоторый внешний параметр влияет на переход между состояниями автомата, при ненулевом значении этого параметра. При его нулевом значении наша система, включая переходы между состояниями автомата – участника действует так, как описано во втором разделе работы. При значении внешнего параметра единица все участники постепенно приходят в состояния, когда все они при всех условиях осуществляют осторожный выбор цены. При значении внешнего параметра минус единица все участники постепенно приходят в состояния, когда все они при всех условиях осуществляют рискованный выбор цены. В этих случаях, как показывают многочисленные компьютерные эксперименты траектории системы всегда попадает стационарное множество с мало меняющимся значением средней цены рынка. При этом в случае осторожного выбора эта почти постоянная средняя цена меньше по величине, чем во втором случае.

Другая ситуация возникает, когда внешний параметр равен 2 или -2. Тогда через некоторое конечное время в случае равенства внешнего параметра 2 все продавцы и ожидающие участники используют только осторожное назначение цен, а покупатели и ожидающие участника обладающие товаром используют только рискованное назначение цен. Вероятно, эта ситуации ведет к повышению средней цены обмена, в чем нас дополнительно убеждают компьютерные эксперименты. В случае внешнего параметра равного -2 ситуации похожая, но обратная, т.е. падение средней цены рынка. Несомненно, упомянутый рост или падение средней цены рынка, связанные с описанным только что стадным поведением могут быть остановлены изменением внешнего сигнала, но мы в этом разделе рассматриваем только внутренние критерии перехода от стадного поведения к обычному поведению, и наоборот. Следует отметить,

что в работе не рассматриваются начальные этапы стадного поведения появление сигнала, стимулирующего стадное поведение и распространение стадного поведения. При этом большое число компьютерных экспериментов демонстрирует влияние стадного поведения на динамику траектории модели, показывает, что при одних и тех же начальных условиях и параметрах модели средняя цена рынка сильно растет (уменьшается) при соответствующем виде стадного поведения в сравнении с траекторией той же цены при выборе между осторожной или рискованной ценами посредством конечного автомата.

В четвертом разделе обсуждаются значение работы и перспективы дальнейшего изучения финансовых рынков и стадного поведения их участников посредством агент-ориентированных моделей

2. Агент – ориентированная модель однотоварного замкнутого рынка.

Для дальнейшего исследования свойств агент – ориентированной модели замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников, начатого в предшествующей статье (Вороновицкий 2016), нам потребуется хотя бы очень краткое изложение механизма модели.

Пусть имеется N взаимодействующих между собой участников рынка – агентов. Состояние i -го агента в момент t определяется несколькими переменными: $x_i(t)$ – количеством товара, которым он обладает в момент t ; $y_i(t)$ – количеством денег, которым он обладает в момент t ; статусом $\alpha_i(t) = -1, 0, 1$, т.е. в каждый момент времени агент может быть покупателем ($\alpha_i(t) = -1$), продавцом ($\alpha_i(t) = 1$) и ждать более подходящего для участия в торговле момента ($\alpha_i(t) = 0$) ценой $v_i(t)$, которую агент запрашивает, если он продавец, предлагает, если он покупатель, или использует в качестве ориентира, если он не участвует в данный момент в торговле. Динамика модели рассматривается в конечном времени: $t = 0, 1, 2, \dots$. Замкнутость рынка означает, что на рынке присутствуют одна единица товара и одна единица денег и количества денег или товара у каждого из

участников меняются только в результате обмена между ними. Каждый момент предполагается состоящим из двух тактов. На первом такте момента t происходит процесс торговли между агентами, а на втором такте момента t каждый агент принимает решения о своем статусе и цене в момент $t+1$, причем у агента есть два способа выбора цены в момент $t+1$: осторожный и рискованный.

В процессе обмена товара на деньги, происходящем на первом такте момента времени t , каждый продавец и стремится продать весь имеющийся у него товар по наибольшей из возможных цен. В это же время каждый продавец стремится купить товар на все имеющиеся у него деньги, по наименьшей из возможных цен. Порядок сделок между продавцами и покупателями определяется соотношением цен на рынке. Пусть в момент времени t участники $i = i_1, \dots, i_k$ - продавцы и $v_{i_1}(t) \leq v_{i_2}(t) \leq \dots \leq v_{i_k}(t)$, а участники $j = j_1, \dots, j_l$ покупатели и $v_{j_1}(t) \geq \dots \geq v_{j_l}(t)$. Первая сделка происходит между продавцом с номером i_1 и покупателем с номером j_1 , причем они торгуют по цене $(v_{i_1}(t) + v_{j_1}(t))/2$. Пусть покупатель j_1 истратил все свои деньги на покупку у продавца i_1 товара. Если у продавца i_1 еще остался товар, то он предлагает его покупателю j_2 . Сделка между ними осуществляется по цене $(v_{i_1}(t) + v_{j_2}(t))/2$. Если же у продавца i_1 не осталось товара, а у покупателя j_1 еще остались деньги, то последний обращается за товаром к продавцу с номером i_2 , и сделка между ними будет происходить по цене $(v_{i_2}(t) + v_{j_1}(t))/2$. Далее, в зависимости от результата этой второй сделки, заключатся третья сделка между продавцом i_1 и покупателем j_3 или между продавцом i_2 и покупателем j_2 (аналогично: между покупателем j_1 и продавцом i_3 или покупателем j_2 и продавцом i_2). Процесс последовательного заключения сделок будет продолжаться до тех пор, пока не окажется следующая ситуация: либо у продавцов больше не осталось товара, либо у покупателей больше не осталось денег, либо цена продавца, у которого еще есть товар, больше цены покупателя, у которого еще остаются деньги.

В конце первого такта момента для участников обмена в момент t можно определить среднюю цену $w_i(t)$ состоявшегося обмена:

$$w_i(t) = (y_i(t+1) - y_i(t)) / (x_i(t) - x_i(t+1)) \text{ если } \alpha_i(t) = 1$$

$$w_i(t) = (y_i(t) - y_i(t+1)) / (x_i(t+1) - x_i(t)) \text{ если } \alpha_i(t) = -1$$

Можно также определить количество денег и товара участвовавших в обмене :

$$\Delta Y(t) = \sum_{j=j_1}^{j=j_2} (y_j(t) - y_j(t+1)); \Delta X(t) = \sum_{i=i_1}^{i=i_2} (x_i(t) - x_i(t+1))$$

и среднюю по рынку цену обмена $u(t)$: $\Delta X(t) > 0, u(t) = \frac{\Delta Y(t)}{\Delta X(t)}$

Каждый агент, как мы предполагаем, знает среднюю цену торговли на рынке в целом ($u(t)$) также как и свою цену ($w_i(t)$) на первом такте момента t и используют эти величины для принятия решения в течение второго такта момента t .

На втором такте момента t осуществляется выбор статуса в момент $t+1$ а затем и цен, относящихся к моменту $t+1$. Оправдывая себя, тем, что исследование подобной модели реализуется впервые, и руководствуясь стремлением к простоте, мы рассматриваем только два простейших характера выбора цен (два действия) – осторожный и рискованный.

Обозначим $v_i^{(c)}(t+1)$ -цену i -го агента, выбранную осторожно и $v_i^{(r)}(t+1)$ -цену i -го агента, выбранную с риском потерять возможность участвовать в торговле в момент $t+1$. Алгоритм назначения статуса и цены на втором такте имеет следующий вид.

Если $\alpha_i(t)=1, x_i(t+1)=0, u(t) \leq w_i(t)$, то $\alpha_i(t+1)=-1$, а $v_i^{(c)}(t+1)=w_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\max(w_i(t)-d, u(t-1))$.

Если $\alpha_i(t)=1, x_i(t+1)=0, u(t) > w_i(t)$, то $\alpha_i(t+1)=0$, а $v_i^{(c)}(t+1)=w_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\max(w_i(t)-d, u(t-1))$

Если $\alpha_i(t)=1, x_i(t+1)>0, u(t) \leq w_i(t), y_i(t+1)>0$, то $\alpha_i(t+1)=-1$, а $v_i^{(c)}(t+1)=w_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\max(w_i(t)-d, u(t-1))$.

Если $\alpha_i(t)=1, x_i(t+1)>0, u(t) \leq w_i(t), y_i(t+1)=0$, то $\alpha_i(t+1)=0$, а $v_i^{(c)}(t+1)=w_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\max(w_i(t)-d, u(t-1))$.

Если $\alpha_i(t)=1, x_i(t+1)>0, u(t)>w_i(t)$,,то $\alpha_i(t=1)=1, a v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)-d, v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$.

Если $\alpha_i(t)=-1$ выбор статуса и цены в момент $t+1$ происходит аналогично с заменой $x_i(t+1)$ на $y_i(t+1)$, $-d$ на $=d$ и \max на \min .

Если $\alpha_i(t)=0$ и $x_i(t)>0, v_i(y)<u(t)$, то $\alpha_i(t=1)=0, v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)-d, v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$

Если $\alpha_i(t)=0$ и $x_i(t)>0, v_i(y)\leq u(t)$, то $\alpha_i(t=1)=1, v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t), v_i^{(r)}(t+1)=\min(v_i(t)+d, u(t-1))$

Если $\alpha_i(t)=0$ и $y_i(t)>0, v_i(y)>u(t)$, то $\alpha_i(t=1)=0, v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)+d, v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$

Если $\alpha_i(t)=0$ и $y_i(t)>0, v_i(y) \geq u(t)$, то $\alpha_i(t=1)=-1, v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t), v_i^{(r)}(t+1)=\max(v_i(t)-d, u(t-1))$

d - внешняя константа модели(точность), которая является величиной возможного максимального или минимального изменения цены по отношению к $w_i(t)$ или $v_i(y)$

Частью модели поведения агента является конечный детерминированный автомат с линейной тактикой, емкостью памяти $2m$ и с двумя действиями, который в работах

М.Л Цетлина и его сотрудников обозначается $L_{2m,2}$. Поэтому $\varphi_i(t)$ состояние автомата в момент t является еще одной характеристикой агента i в момент времени t .

Автомат $L_{2m,2}$ выполняет два действия (в нашем случае это назначение цены $v_i^{(c)}$ - осторожное и $v_i^{(r)}$ –рискованное) , и имеет $2m$ состояний: $\varphi_j=\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots, \varphi_{2m}$

Риск состоит в меньшей вероятности участия в торговле в следующий момент при рискованной цене, чем при осторожной. В состояниях $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ автомат назначает

цену $v_i^{(c)}(t+1)$, а в $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots, \varphi_{2m}$ автомат назначает рискованную цену $v_i^{(r)}(t+1)$. Нам

будет удобнее обозначать состояния автомата в момент t , регулирующего выбор решения о назначении цены в момент $t+1$, двумя числами: $l_i(t)$ и $k_i(t)$. В случае

осторожного выбора $k_i=1$, в случае рискованного выбора $k_i=-1$. $l_i=1, 2, \dots, m$. Состояние обозначаемое теперь l_i, k_i соответствует состоянию автомата φ_j автомата $L_{2m,2}$, где $j= l_i$

$+(1-k_i)m/2$. Автомат воспринимает в каждый момент времени $t=1, 2, 3, \dots$ один сигнал s , принимающий два значения $s=1$ –поощрение , $s=-1$ –штраф и в зависимости от сигнала меняет свое внутреннее состояние следующим образом.

Когда $s(t)=1$ (поощрение):

$$l_i(t+1) = l_i(t) + 1 \text{ если } 1 \leq l_i(t) < m, \text{ и } l_i(t+1) = l_i(t) \text{ если } l_i(t) = m$$

Когда $s(t)=-1$ (штраф):

$$l_i(t+1) = l_i(t) - 1 \text{ если } m \geq l_i(t) > 1 \text{ и } k_i(t+1) = -k_i(t), l_i(t+1) = l_i(t) \\ \text{если } l_i(t) = 1$$

Мы рассматриваем вероятность поощрения, как некоторую оценку результата торговли i -го агента на первом такте момента t . Если это невозможно, то мы рассматриваем вероятность поощрения как характеристику всего рынка после первого такта момента t . Обозначим вероятность поощрения агента i в момент t через $p_i(t)$

Предположим, что агент i в момент времени t является продавцом ($\alpha(t)=1$) и продает в этот момент весь имеющийся у него товар ($x_i(t)$) или часть этого товара. Если $u(t) \leq w_i(t)$, то в следующий момент он становится покупателем и может купить товар по цене меньшей $w_i(t)$ (т.е. получить еще раз прибыль), иначе он попадает в число ожидающих (не участвует в торговле в момент $t+1$). Условно будем считать, что при $w_i(t)=u(t)$ вероятность поощрения или штрафа равны $1/2$. При $w_i(t) > u(t)$ действие продавца по выбору цены в момент t будем оценивать через отношение $w_i(t)-u(t)$ к максимально возможному значению этой величины. Максимальное значение величины $w_i(t)-u(t)$ возникает при торговле данного продавца с покупателем, предлагающим в момент t максимальную цену. Оно равно $(v_i(t) = \max_{\alpha_j(t)=1} v_j(t))/2 - u(t)$. В случае, если в момент $t+1$ этот агент ожидающий, то его действие в момент t мы будем оценивать через отношение разности $u(t)-w_i(t)$ к максимальному значению этой величины, которое могло бы возникнуть при торговле данного продавца с обладающим минимальной ценой в момент t покупателем, т.е. к $u(t) - (v_i(t) + u(t-1))/2$.

Обозначим для удобства:

$$F_i^s = \frac{2(w_i(t)-u(t))}{v_i + \max_{\alpha_j(t)=1} v_j(t) - 2u(t)}, G_i^s = \frac{2(u(t)-w_i(t))}{2u(t)-u(t-1)-v_i(t)}$$

Тогда мы можем определить вероятность поощрения за действия данного участника торговли в момент t следующим образом:

$$p_i(t) = \frac{1+F_i^s}{2} \text{ если } w_i(t) > u(t), p_i(t)=1/2 \text{ если } w_i(t) = u(t),$$

$$p_i(t) = \frac{1 - G_i^s}{2} \text{ если } w_i(t), < u(t),$$

Когда участник рынка является в начале момента t покупателем и на первом такте этого момента тратит все или часть его денег, то действуют симметричные рассуждения. Обозначим:

$$F_i^b = \frac{2(w_i(t)-u(t))}{v_i + \min_{\alpha_j(t)=1} v_j(t) - 2u(t)}, G_i^b = \frac{2(u(t)-w_i(t))}{2u(t)-u(t-1)-v_i(t)}$$

$$\text{Тогда : } p_i(t) = \frac{1+F_i^b}{2} \text{ если } w_i(t) < u(t), p_i(t)=1/2 \text{ если } w_i(t) = u(t),$$

$$p_i(t) = \frac{1 - G_i^b}{2} \text{ если } w_i(t), > u(t),$$

Теперь остается рассмотреть случаи, когда продавец ничего не продал, покупатель ничего не купил или агент вообще не участвовал в торговле в момент t . В этих случаях вероятность поощрения действия агента определяется через изменение цены рынка. При этом действие желающего продать товар оценивается через отношение реального изменения цены рынка к максимально и минимально возможным ее изменениям .

$$F^{sw} = \frac{2(u(t)-u(t-1))}{\max_{\alpha_j(t)=-1} v_j(t) - u(t-1)} \quad G^{sw} = \frac{2(u(t-1)-u(t))}{u(t-1) - \min_{\alpha_j(t)=1} v_i(t)}$$

$$\text{Тогда: } p_i(t) = \frac{1+F^{sw}}{2} \text{ если } u(t) < u(t-1), p_i(t) = \frac{1}{2} \text{ если } u(t) = u(t-1),$$

$$p_i(t) = \frac{1-G^{sw}}{2} \text{ если } u(t) > u(t-1)$$

Действие агента i , желающего купить товар, оценивается через отношение реального изменения цены рынка к минимально и максимально возможным ее изменениям

$$.p_i(y) = \frac{1-F^{sw}}{2} \text{ если } u(t) > u(t-1), p_i(t) = \frac{1}{2} \text{ если } u(t) = u(t-1) u(t) < u(t-1),$$

$$p_i(t) = \frac{1+G^{sw}}{1} \text{ если } u(t) > u(t-1)$$

Вероятность штрафа равна единице минус вероятность поощрения,

Итак, набор $7N$ переменных:

$$x_1(t), y_1(t), \alpha_1(t), v_1(t), l_1(t), k_1(t), x_2(t), y_2(t), \alpha_2(t), v_2(t), l_2(t), k_2(t), \dots, x_N(t), y_N(t), \alpha_N(t), v_N(t), l_n(t), k_N(t)$$

определяет состояние $r(t)$ нашей системы в момент времени t . Выбор автоматом, описывающим часть поведения участника, состояния в момент $t+1$ определяется значением случайной величины $s(t)$ (поощрением или штрафом), поэтому наша система является стохастической.

Посредством компьютерного исследования модели было показано следующее.

Существует такой момент времени τ_3 , что для всех $t > \tau_3$ имеет место $r(t) \in M_2(d)$ где для всех точек множества $M_2(d)$ будет $u_2 - R(m,d) < u(t) < u_2 + R(m,d)$. Где u_0 усредненное за большой промежуток времени значение $u(t)$ и $R(m,d) < 15d$ для всех значений m .

$$u_2 = \frac{1}{\theta} \left(\sum_{t=\tau_3}^{t=\tau_3+\theta} u(t) \right), \theta - \text{достаточно велико}$$

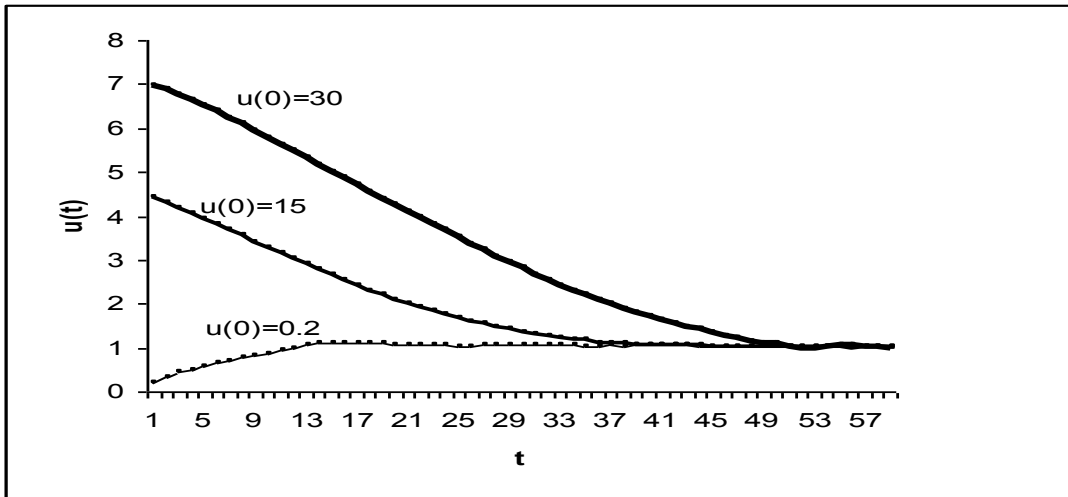


Рис. 1 .Траектории $u(t)$ в случаях различных начальных условий , где $\tau_1 > 4500$ и все участники являются автоматами $L_{2m,2}$ ($N=300, d=0.005, m=8, u(0)=30, u(0)=15, u(0)=0.2.$
 $0 < t < 5500$

3. Стадное поведение участников в агент ориентированной модели замкнутого одотоварного рынка

Стадное поведение участников является довольно часто встречающимся на финансовых рынках явлением, проявляющееся иногда на протяжении довольно длительного периода времени, а иногда оказывающееся краткосрочным. Есть немало причин полагать, что такое поведение участников возникает, как следствия событий, происходящих вне рассматриваемого финансового рынка, но иногда кажется возможным заключить, что, наблюдается краткосрочное стадное поведение участников вызванное внутренним развитием рассматриваемого рынка. Ответ на вопрос относительно характера и причин стадного поведения на реальных финансовых рынках требует кропотливых и длительных эмпирических и теоретических исследований и не является предметом этого исследования. Мы исследуем, построенную нами агент ориентированную модель замкнутого одотоварного рынка, которая . по нашему мнению отражает хотя бы некоторые черты реальной динамики рынка. Кроме того, это одна из первых подобных моделей. Необходимость ее простоты, требуемая желанием получить хоть какие - то аналитические результаты, вынуждает нас максимально упростить модель и тем уменьшить ее возможности отразить реальную ситуацию. В рамках изучения финансового рынка, мы рассматриваем не любое наблюдаемое на рынке стадное поведение, а стадное поведение агентов модели, разработанной в предыдущей статье (Вороновицкий 2016). В нашей модели участник выбирает только между всего двумя действиями осторожным и рискованным назначением цены. Простота и связанная с ней ограниченность модели, вряд позволит

нам дать практически содержательный ответ на эти и другие вопросы относительно стадного поведения участников финансового рынка. Тем не менее, мы обсудим возможности и структуру стадного поведения агентов в этой модели. Хотя существует немало причин полагать, что стадное поведение участников рынка возникает как следствие в основном внешних причин, как будет показано ниже, в нашей модели иногда такое поведение может возникнуть и на рассматриваемом нами замкнутом рынке. Наиболее распространенным в жизни видом стадного поведения является случай, когда все участники начиная с некоторого момента выбирают одно и то же действие. В предшествующей работе (Вороновицкий 2016) мы изучали модели с одним одинаковым способом выбора цены участниками, в случае, когда автомат выбирающий действие отсутствовал. Первый такой случай, когда в поведении всех агентов присутствовал только осторожный выбор. Компьютерные эксперименты показали сходимость системы при любом начальном состоянии к стационарному множеству состояний $M_0(d)$, такому, что средняя цена рынка $u(t)$ в этом множестве состояний находится в пределах между $u_0 - 5d$ и $u_0 + 5d$, где u_0 средняя величина $u(t)$ в множестве $M_0(d)$. Как мы видели в случае такого стадного поведения участников с течением времени устанавливается такая ситуация, когда средняя цена рынка мало меняется (учитывая естественно, что d мало). Второй случай, когда в поведении всех агентов присутствовал только рискованный выбор цены. Компьютерные эксперименты также показали сходимость траектории системы при любом начальном состоянии к стационарному множеству состояний $M_1(d)$, такому, что средняя цена рынка $u(t)$ в этом множестве состояний находится в пределах между $u_0 - 25d$ и $u_0 + 25d$. При этом, как видно из результатов экспериментов колебания средней цены $u(t)$ в множестве $M_1(d)$ нерегулярны и хотя и больше по амплитуде, чем в первом случае. Со стадным поведением участников связывают обычно серьезный рост или падение средних цен рынка или их значительные колебания. Оба рассмотренных нами случая можно считать стадным поведением, ибо все агенты совершают одни и те же действия по назначению новой цены, независимо от их положения на рынке. Но при этом в обоих

случаях мы течением времени имеем мало меняющиеся средние цены рынка, что делает эти разновидности не столь интересными с точки зрения изучения динамики рынка и требует рассмотрения других видов стадного поведения на моделируемом рынке. Учет различных ролей участников в каждый момент времени и рассмотрения стадного поведения участников играющих определенную роль в торговле на первом такте момента t это путь обнаружения других видов стадного поведения.

В нашей модели одотоварного замкнутого рынка с конечными автоматами в качестве участников в каждый момент времени агенты исполняют разные роли, точнее различаются статусами: продавцы, покупатели, ожидающие. Причем, как было показано ранее (Вороновицкий 2016), ожидающие четко делятся на два множества: ожидающие, имеющие только товар и желающие его продать, и ожидающие, обладающие только деньгами и поэтому желающие купить товар. Благодаря этому можно выделить две роли участников: участники имеющие статус продавцов плюс ожидающие имеющие товар и участники имеющие статус покупателей плюс ожидающие, обладающие товаром. Исходя из этого, вероятно, имеет смысл рассматривать не обычный вид поведения, а стадное поведение групп участников один вид поведения (один из двух способов назначения цены) для продавцов и ожидающих имеющих товар и другой вид поведения для покупателей для продавцов и ожидающих имеющих деньги. При этом каждый агент не всегда использует один и тот же выбор цены, а меняет эти выборы в зависимости от статуса. При этом необходимо иметь в виду, что в нашей модели замкнутого рынка, торгующие агенты получают прибыль от торговли, обусловленную и пропорциональную разности цен участников сделки. Мы рассмотрим два таких вида стадного поведения агентов, на отрицая возможность существования других видов стадного поведения¹ представляющих, может быть, большой прикладной интерес. Прежде всего мы заметим, что согласно

¹ В частности, возможно стадное поведения, когда продавцы и ожидающие, обладающие товаром осуществляют только рискованный выбор цены, а остальные участники как и прежде управляют выбором цены посредством конечных автоматов, или рискованный выбор цены осуществляют во всех случаях только покупатели и ожидающие, имеющие деньги.

определению стадного поведения при таком поведении выбор агентом действия посредством конечного автомата отсутствует, а действует жесткая зависимость действия от статуса агента, если он продавец или покупатель и наличия у него товара если он ожидающий.

Первый вид стадного поведения состоит в том, что продавцы и ожидающие обладающие товаром осуществляют осторожный выбор цены, а покупатели и ожидающие не имеющие товара (как показано ранее т.е. имеющие деньги) осуществляют рискованный выбор цены. Поскольку рискованный выбор предлагаемой цены продавцами означает ее понижение, а осторожный выбор запрашиваемой цены означают ее не понижение или неизменность, то в целом средняя цена рынка при таком стадном поведении понижается.

Второй вид стадного поведения состоит в том, что покупатели и ожидающие обладающие деньгами осуществляют осторожный выбор цены, а продавцы и имеющие товара осуществляют рискованный выбор цены. Поскольку осторожный выбор предлагаемой цены покупателями означает ее не возрастание, а рискованный выбор запрашиваемой продавцами цены означают ее понижение, то в целом средняя цена рынка при таком стадном поведении повышается.

Переход от выбора осторожного или рискованного назначения цены посредством конечного автомата к стадному поведению одного из двух описанных выше видов (включение стадного поведения) может быть инициировано изменением внешних условий (цен на других рынках или изменением фундаментальной ценности (fundamental value)) также, как и некоторыми внутренними для рынка причинами например стремлением участников получить большую прибыль за счет изменения цен на этом рынке. Точно также внешние и внутренние причины могут вызвать переход от стадного поведения одного из упомянутых выше типов к выбору осторожного или рискованного назначения цены посредством конечного автомата.

В частности переход от поведения участников, обусловленного выбором цены посредством конечного автомата, к одному из описанных видов из двух только что

описанных видов стадного поведения может произойти по внешним для системы причинам: изменению товара или денег в системе, изменению фундаментальной ценности и др. Но то же самое, как нам представляется возможным, может произойти и по внутренней причине, например, из-за желания участников получать прибыль за счет покупки товара и продаже его по более высокой цене (или наоборот). Маленькие колебания средней цены рынка в стационарном множестве $M_2(d)$ не позволяют этого, и участники рынка переходят к стадному поведению. Один из возможных критериев перехода одновременно всех участников рынка к стадному поведению мы предполагаем следующим:

$$\max_{t-\theta \leq \tau \leq t} u(\tau) - \min_{t-\theta \leq \tau \leq t} u(\tau) < ld \quad (1)$$

где l некоторая заданная константа, а θ некоторый не слишком большой период времени, также заданный заранее.

Мы предположим, что агенты при выполнении критерия (1) с равной вероятностью выбирают первый или второй из описанных выше видов стадного поведения.

Заметим, что при росте средней цены рынка, цены растут за счет роста запрашиваемых продавцами цен, а изменение предлагаемых покупателями цен сдерживает этот рост. Кроме этого, рост запрашиваемых цен в каждый момент ограничен средней ценой рынка в предыдущий момент, потому наступает момент, когда цены продавцов мало отличаются от предыдущей средней цены рынка и рост цен замедляется. Далее происходят незначительные колебания средней цены рынка на высоком уровне ее значений. Можно показать, что наступит момент $\tau^{(1)}$, начиная с которого, будет

$$\max_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t) - \min_{\alpha_i(t)=1} v_i(t) < 0.5d, t > \tau^{(1)} \quad (2)$$

Где $\tau^{(1)}$ - некоторый момент времени.

Поскольку агентам известны предлагаемые и запрашиваемые в данный момент цены на рынке, критерий (2) служит сигналом прекращения стадного поведения связанного с ростом цен и перед участниками возникает альтернатива перехода либо к стадному

поведению, связанному с понижением цен, или к выбору цен посредством конечных автоматов. Аналогично происходит в случае падения средней цены рынка при стадном поведении агентов второго вида с той лишь разницей, что в этом случае неуклонное падение средней цены рынка прекращается. Важно отметить, что при выполнении критерия (2) прибыль торгующих участников снова становится незначительной или отсутствует. Критерий (2) также служит сигналом прекращения стадного поведения связанного с падением цен и перед участниками возникает альтернатива перехода либо к стадному поведению, связанному с понижением цен, или к выбору цен посредством конечных автоматов. Сначала рассмотрим наиболее естественный, по нашему мнению, случай, когда после выполнения критерия (2) все участники возвращаются к назначению цен посредством конечных автоматов. Этот случай мы видим на рис.2, когда выбор цен

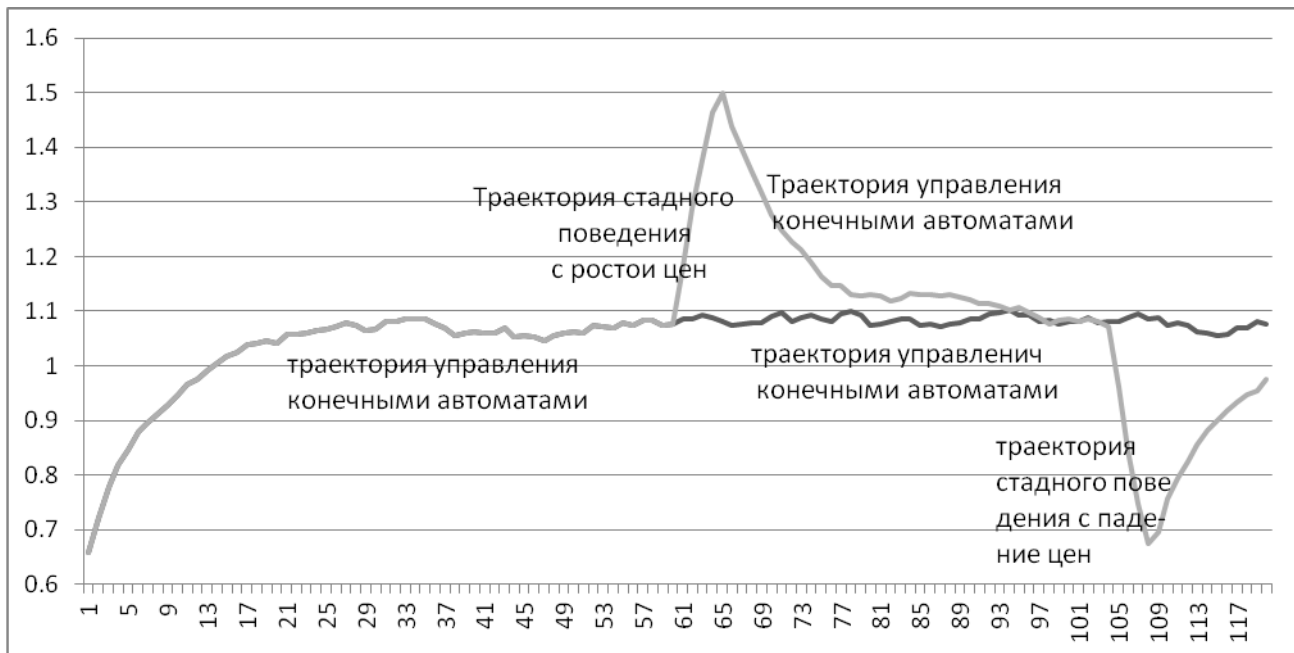


Рис. 2 Две траектории системы при общем начальном состоянии системы: одна соответствует постоянному назначению цены с помощью конечных автоматов, вторая включает стадное поведение, регулируемое критериями (1) и (2), причем при выполнении критерия (2) система однозначно переходит от стадного поведения к

назначению цены посредством конечных автоматов. ($N=300$,
 $d=0.005, u(0)=0.22, u(0)=1.9, u(0)=.3, 0 < t < 14000$).

Другим, более экзотическим вариантом, представляется случай, когда при стадном поведении и выполнении критерия (2) происходит переход к противоположному виду поведения.

На рис.3 можно видеть случай, агенты после стадного поведения, связанного с ростом цен, при выполнении критерия (2) переходят к противоположному стадному поведению, связанному с падением цен и затем снова при выполнении критерия 2 переходят к стадному поведению, связанному с ростом цен и т.д.

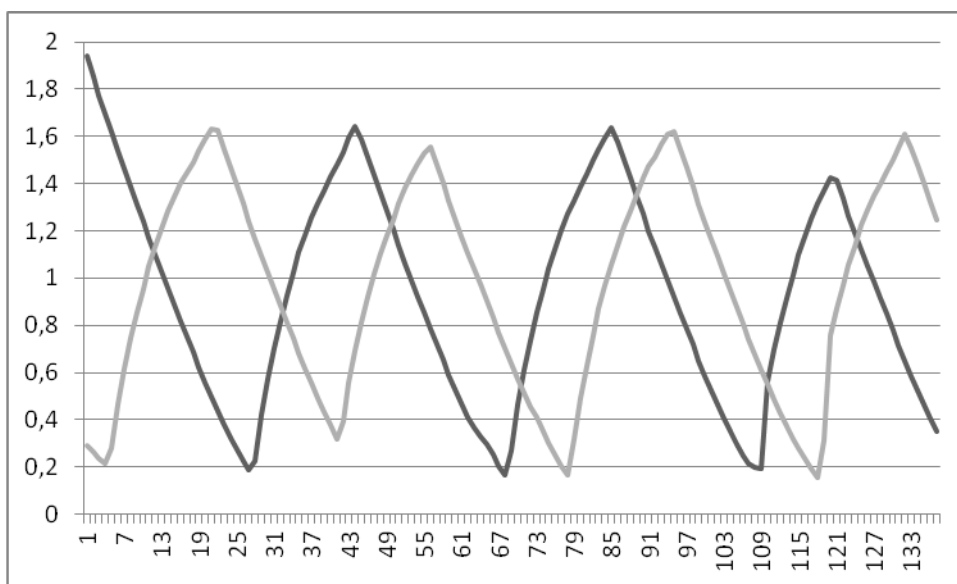


Рис. 3. Траектории $u(t)$ в случаях, когда все продавцы осуществляют рискованный выбор цены, а покупатели осуществляют осторожный выбор цены в одном интервале времени). Если эта стратегия уже не дает роста средней цены рынка они меняют стратегии, все продавцы выбирают осторожный выбор, а все покупатели осуществляют рискованный выбор во все моменты следующего интервала времени (похоже на игру на понижение(go to a bear))

Приведены как случай, когда в начальный момент имеет место стадное поведение первого вида, так и случай, когда в начальный момент имеет место стадное поведение второго. вида

($N=300, d=0.005, u(0)=0.22, u(0)=1.9, u(0)=.3, 0 < t < 14000$).

На рис.4 приведены случаи траектории системы, соответствующей назначению цены посредством конечных автоматов(обычная траектория) и двух траекторий (траектория стадного поведения), когда после первого выполнении критерии (1) все агенты переходят к стадному поведению. Приведены две траектории, которые различаются тем, что при выполнении критерия (1) агенты переходят к стадному поведению первого или второго вида. Заметим, что согласно нашему предположению переходы к стадному поведению каждого вида равновероятны.

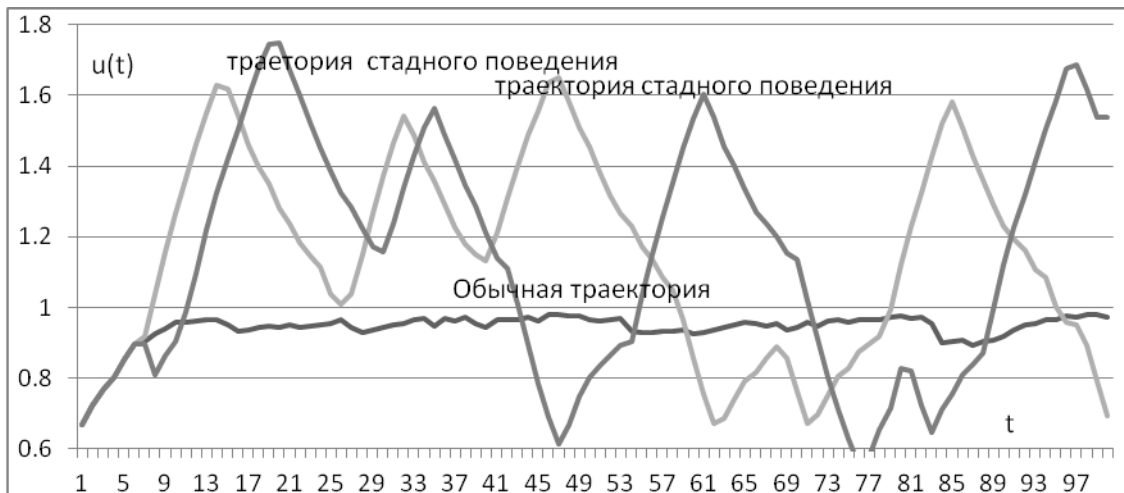


Рис. 4. Траектория $u(t)$ для модели, в которой участники являются конечными автоматами и две различные траектории $u(t)$ для модели, когда продавцы и покупатели могут использовать только один способ выбора цен (осторожный для покупателей и только рискованный для продавцов или наоборот) на том же самом интервале времени и могут перейти при условии (1) к противоположному стадному поведению($N=300, 1 < y < 10000, d=0.05$).

Все приведенные выше графики и многочисленные компьютерные эксперименты показывают, что увеличение (или уменьшение) средней цены рынка при стадном поведении многократно больше колебаний средней цены рынка внутри стационарного множества, в которое попадает и остается в течение в течении бесконечного времени траектория системы при управлении выбора цен всеми участниками с помощью конечных автоматов..

Возможность участников увеличивать свое богатство (стоимость своих активов) за счет разности цен покупателя и продавца, вероятно, увеличивается при возникновении стадного поведения. Одинаковость алгоритмов поведения участников, заложенная в модели, с необходимостью ведет к выравниванию их богатства. Вопрос состоит в скорости этого выравнивания. Вероятно, стадное поведение дает возможность некоторым участникам увеличивать свое богатство за счет увеличения возможности роста цены продажи в сравнении с ценой покупки товара или наоборот. Мы попытались косвенно проверить это предположение, поэтому мы также исследовали $S(t)$ -динамику квадратного корня из отношения квадратного корня суммы отклонений активов каждого агента от среднего актива агента в момент t

$$S(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} [x_i(t)u(t) + y_i(t) - (1 + u(t))/N]^2 \right\}^{1/2} / (1 + u(t))$$

Эта величина характеризует распределение активов между участниками рынка .

Довольно маленькое значение этой величины в случае, когда назначение цены производится конечными автоматами объясняется начальным близким к

равномерному распределением активов между участниками и однотипным механизмом принятия решений участниками. Случай стадного поведения не

показывает сильного отличия от предыдущего случая. Величина $S(t)$ также

уменьшается со временем, но стадное поведение замедляет это уменьшение. Это

замедление все таки подтверждает наше предположение о том, что при стадном

поведении некоторые участники могут увеличивать свои активы за счет длительного

увеличения или уменьшения цен на рынке, получая благодаря изменению этих цен дополнительную прибыль, что невозможно при почти постоянной средней цене рынка.

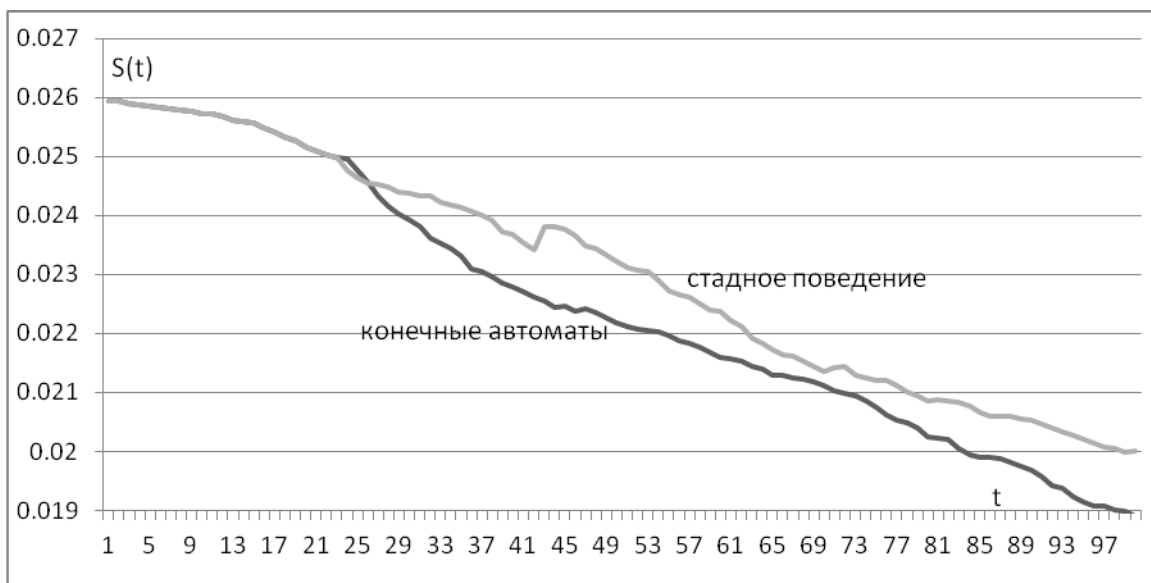


Рис.5 . Динамика отношения квадратного корня из суммы отклонений активов каждого агента к среднему активу агента $S(t)$ в момент t для случая участников, которые проявляют стадное поведение первого типа и случая когда участники выбирают цены посредством конечных автоматов. ($N=300, 1 < \gamma < 10000, d=0.05$).

4. Заключение

В этой работе мы рассмотрели возможность стадного поведения агентов в разработанной и исследованной прежде простой модели замкнутого одотоварного рынка. Простота модели с одной стороны дает нам позволяет нам исследовать закономерности динамики этой модели аналитически и с помощью компьютерного моделирования, а с другой стороны значительно ограничивает изучение многих наблюдаемых в реальности явлений функционирования рынков. Нами рассматривается в качестве возможного только один вариант взаимодействия

участников рынка и фактически только два варианта выбора ими решения о ценах: осторожное и рискованное, причем возможность риска предполагается ограниченной. Одинаковость структуры механизмов выбора решения ее участниками облегчает (а то и просто делает возможным) исследование стадного поведения участников модели, как и, впрочем, и в изучение других ее свойств . Удалось рассмотреть только четыре варианта стадного поведения: все участники предпринимают только осторожные действия, все участники предпринимают только рискованные действия, все продавцы в каждый момент действуют осторожно, тогда, как покупатели в этот момент действуют рискованно и все продавцы в каждый момент действуют рискованно, тогда, как покупатели в этот момент действуют осторожно. Ограниченность модели, связанная с ее простотой, не позволила нам изучать такие процессы как переход части агентов к стадному поведению и распространение такого поведения среди остальных агентов. Варианты стадного поведения, которые возникают по внутренним для модели причинам были изучены при помощи компьютерного моделирования. Результаты компьютерных экспериментов позволяют нам предположить , что такое явление возможно на некоторых реально замкнутых (конечно в ограниченный промежуток времени) рынках. Полученные нами результаты позволяют нам предполагать, что рассмотренные нами механизмы стадного поведения так же, как это описано здесь могут возникать и прекращаться на незамкнутых рынках при изменении например фундаментальной ценности(fundamental value) , или увеличении(уменьшении) количества денег или товара на рынке. Но, к сожалению, наши исследования не дают возможности судить о существовании этих явлений в реальной ситуации. Связь с эмпирикой в наших рассуждениях невелика, и первое место занимает стремление наиболее просто отразить черты торговли на рынке и механизмы выбора решения участниками, так ,чтобы был возможен хотя простой математический анализ поведения модели. Устранение этих недостатков связано с созданием более реалистических и поэтому, может быть , более трудных для исследования моделей.

Данная работа завершает этап нашего изучения разработанных и исследованных нами на протяжении долгого периода времени агент – ориентированных моделей однотоварного рынка. Понимая всю ограниченность полученных результатов и многие недостатки нашего описания реальных процессов торговли и принятия решения мы надеемся что наш подход к исследованию этих явлений может оказаться полезным при дальнейшем изучении динамики процессов, происходящих на финансовых рынках. Полный ответ на вопрос об адекватности динамики нашей агент ориентированной модели и реальности еще впереди. Понимая всю ограниченность полученных результатов и многие недостатки нашего описания реальных процессов торговли и принятия решения мы надеемся что наш подход к исследованию этих явлений может оказаться полезным при дальнейшем изучении динамики процессов, происходящих на финансовых рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вороновицкий М.М.(2016) Динамическая модель замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников.// Экономика и математические методы Т52. N2 .С. 57-72.

М.М. Вороновицкий, В.А. Цветков (2012). Модели стадного поведения участников рынка ИПР РАН. М. 2012.

Макаров В.Л. (2012). Искусственные общества // Экономика и математические методы Т.48. N3. С.3-20

Цетлин М.Л. (1969) Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М. Наука

Abhijit V. Banerjee (1992) “A simple Model of Herd Behavior” The Quarterly Journal Of Economics” Vol. CVII August 1992

Sushi Bikhchandany, David Hirsheifer and Ivo Welch (1992) “A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades” Journal of Political Economy, 1992, vol.100,N 5.

Avery C., Zemsky P. (1998). Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market // *American Economic Review*. Vol. 88 (4).

Sushi Bichandany and Suhil Sharma (2000) Herd Behavior in Financial Markets: A Review IMF Working paper, IMF Institute WP/00/48

Topol R. (1991) Bubbles and Volatility of Stock Prises ; Effect of Mimenic Copnyagion// The Economic Journal. Vol 101. P/ 176-809

REFERENCES (with English translation and transliteration)

Abhijit V. Banerjee (1992) “A simple Model of Herd Behavior” The Quarterly Journal Of Economics” Vol. CVII August 1992

Sushi Bichandany, David Hirshfeifer and Ivo Welch (1992) “A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades’ Journal of Political Economy, 1992 , vol.100,N 5.

Avery C., Zemsky P. (1998). Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market // *American Economic Review*. Vol. 88 (4).

Sushi Bichandany and Suhil Sharma (2000) Herd Behavior in Financial Markets: A Review IMF Working paper, IMF Institute WP/00/48

Topol R. (1991) Bubbles and Volatility of Stock Prises ; Effect of Mimetic Contagion// The Economic Journal. Vol 101. P/ 176-809

Voronovitsky M.M.(2016) The Dynamic Model of the Closed Market with One Commodity and Finite Automata as Participants. *Economika i matematichrskie mrtody* . 52,2.57-72

Voronovitsky M.M., Tsvetkov V. A. Models of Herd Behavior of Participanys of a Market. Market Economy Institute of RAS , Moscow 2012

Makarov V.L. The Artificial societies. *Economika i matematichrskie metody* . 48. 3..3-20

Tsetlin M. L. “Automaton Theory and Modeling of Biological Systems.” Front Cover.. Academic Press, Jan 1, 1973 - Bionics - 288 pages.

MM Voronoviysky

On the herd behavior in the dynamic model of closed one commodity market with finite automata as participants

We investigate the mechanisms of the herd behavior of participants in the closed model one commodity market. The herd behavior is a case of behavior when participants renounce from using of all own information and repeats the actions of majority of other participants of the collective. The rather modest problem of investigation of the herd behavior in the agent based model of a closed one commodity market, which was formulated and was investigated in our previous paper, is a object of this work. Two cases of choice by all agents of the same algorithm of definition of price was investigated in the previous paper. It was shown that in both cases trajectory of system after some time is in stationary set in which the average price of market hesitates close to its constant value. The possibility in the same model of the two other cases of herd behavior one of them is which induces the growth of the average price of market and other of them when herd behavior induces decreasing the average price of market it we have shown in this paper. It is obviously from this investigation that herd behavior can occur on the finite interval of time..

Keywords: : model, closed market, herd behavior, go to a bear, go to a bull/ one commodity market, dynamics of prices, trajectory, stationary set, steady state, rational choice, finite automata.

JEL Classification: c51, D01.