



Munich Personal RePEc Archive

# **Randomness, Determinism and Undecidability in the Business Cycle Theory.**

Escañuela Romana, Ignacio

10 August 2016

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/72978/>  
MPRA Paper No. 72978, posted 12 Aug 2016 11:46 UTC

## **Azar, Determinismo e Indecidibilidad en la Teoría del Ciclo Económico.**

Escañuela Romana, Ignacio<sup>1</sup>.  
Agosto 9, 2016.

### **Abstract.**

The scientific literature that studies the economic cycles contains a historical debate between random and deterministic models. On the one hand, models with explanatory variables that follow a stochastic trajectory and produce, through transmission mechanisms, the observed cycles. Its rationale: the so-called Slutsky-Yule effect. In addition, models in which the system state at time  $t$  fixes, *ceteris paribus* condition applying, the state at time  $t + 1$ . The cycle would be the product of variables, making it possible to predict and enabling economic policies to combat recessions. The thesis of this paper is as follows. The application of the theorems of Chaitin of undecidability shows that it is not possible to conclude that debate. It is impossible to determine with absolute certainty whether the observed cycles follow a deterministic or stochastic model. To reach this result, I outline the fundamental theories of the business cycle, providing a classification and examples of mathematical models. I review the definition of randomness, and I consider the demonstration of Chaitin about the impossibility of deciding whether a data set is stochastic or not. A consequence, he says, of Gödel incompleteness theorems. I conclude that to consider a series of economic data, aggregated or not, as random or deterministic, depends on the theory. This applies to all cyclical phenomena of any kind. Specific mathematical models have observable consequences. But probabilism and determinism are only heuristic programs that guide the advancement of knowledge.

### **Abstract.**

La literatura científica que estudia los ciclos económicos contiene un debate histórico entre modelos aleatorios y determinísticos. Por una parte, se construyen modelos con variables explicativas que siguen una trayectoria estocástica y producen, mediante mecanismos de transmisión, los ciclos observados. Su fundamento: el llamado efecto Slutsky-Yule. Por otra, modelos en los que el estado del sistema en el momento  $t$  fija, aplicando la condición *ceteris paribus*, el estado en el momento  $t+1$ . El ciclo sería el producto de factores que permiten predecir, posibilitando políticas económicas para combatirlo. La tesis de este trabajo es la siguiente, la aplicación de los teoremas de indecidibilidad de Chaitin nos demuestra que no es posible concluir ese debate. Es imposible decidir con certeza absoluta si los ciclos observados siguen un modelo determinístico o estocástico. Para llegar a este resultado, esbozo las teorías fundamentales del ciclo económico, aportando una clasificación y ejemplos de los modelos matemáticos. Repaso la definición de azar, y la demostración de Chaitin acerca de la imposibilidad de decidir si una serie de datos es aleatoria o no. Consecuencia, afirma, de los teoremas de Gödel de incompletitud. Concluyo que considerar a una serie de datos económicos, agregada o no, como aleatoria o determinística, depende de la teoría. Lo que se aplica a todo fenómeno cíclico de cualquier naturaleza. Los modelos matemáticos específicos tienen consecuencias observables. Pero probabilismo y determinismo son sólo programas con valor heurístico que orientan el avance del conocimiento.

---

<sup>1</sup> E-mail: ignacioesro@gmail.com

**JEL classification:** B40, D50, E32.

**AMS classification:** 03F40.

**Keywords:** Randomness; business cycle theories; undecidability; heuristic.

## 1. Probabilismo y determinismo en las teorías del ciclo económico.

El ciclo económico consiste en las variaciones que la actividad de variables económicas agregadas, como la renta nacional y el empleo, tiene a lo largo del tiempo, en torno a una tendencia a largo plazo de la que se desvía. Este movimiento se da tanto en valores nominales, como, deflactando, en cantidades reales. La segunda característica del ciclo radica en el hecho de que las distintas series económicas muestran una correlación, positiva, o negativa, en el ciclo. Es decir, que hay un movimiento conjunto a lo largo de las variaciones (Diebold y Rudebusch, 1996: 67). Un comovimiento que se repite de ciclo en ciclo. En definitiva, la recurrencia histórica de fluctuaciones permite y exige una teoría general del ciclo. Teoría que explique y, preferentemente, prediga.

Sin embargo, los ciclos, aunque son recurrentes, son también irregulares en fase, amplitud y tiempo de repetición. Lo que pone en duda la existencia de movimientos cíclicos determinados y hace, como mínimo, difícil diseñar modelos que hagan posible la predicción.

El ciclo es, asimismo, un rasgo problemático, porque la teoría construye modelos en que los agentes económicos, actuando racionalmente, alcanzan una posición de equilibrio mutuo. ¿Por qué los ciclos, que manifiestan desequilibrio, no dejan de repetirse?

¿Podemos hacer una teoría uniforme que permita describir adecuadamente los diferentes ciclos observados históricamente? Kindleberger (1985) lo niega. No obstante, considero que no puede haber avance en la ciencia económica sin el intento constante de refinar modelos matemáticos generales que permitan describir y predecir, con generalidad y exactitud, los sucesos económicos. Matemática y ciencia moderna van de la mano porque la matemática le permite conocer, pronosticar y promover los hechos y procesos que quieran alcanzarse (Frey, 1972: 177).

Siendo la teoría del ciclo económico necesaria, hasta ahora no se ha alcanzado consenso acerca de un modelo conceptual y matemático general. Existen programas de investigación alternativos. En la literatura científica hay, al menos, tres perspectivas (Ekkehard y Stockhammer, 2003: 1). La teoría keynesiana de carencia de demanda agregada efectiva, que explica los ciclos económicos como fallos de mercado debidos a rigideces en precios y/o salarios, u otros factores, pudiendo llegar a alto desempleo involuntario.

En segundo lugar, la teoría clásica de retorno al equilibrio de pleno empleo a través del funcionamiento de los mercados. La economía se encuentra siempre en un equilibrio walrasiano: conjunto de precios y cantidades que igualan oferta y demanda en los diferentes mercados de la economía, simultáneamente. Los agentes económicos deciden maximizar su satisfacción, en el horizonte temporal, con las restricciones que existan en las posibilidades de producción y límites de recursos.

Explica el ciclo económico como un producto bien de imperfecciones del mercado (información asimétrica, incertidumbre, oligopolios, intervenciones públicas), o bien de shocks exógenos aleatorios que no pueden ser previstos (Tobin, 1995: 32). Se trata, por lo tanto, de factores exógenos imprevisibles, o de elementos institucionales eliminables. Nada sustancial al mercado. Los agentes económicos actúan con expectativas racionales y van eligiendo las mejores

posiciones posibles. Los mercados tienden por sí mismos a un equilibrio donde se vacían en tasas naturales.

Tercero, la teoría austríaca, relativamente menor en la literatura científica, basada en la modificación de los precios intertemporales que se alejan de las preferencias. Cambios en la política económica, y/o modificaciones en el crédito bancario, que llevan a tipos de interés monetarios alejados de los tipos de interés naturales, y que conducen a las fluctuaciones por ineficaz asignación de recursos. Una política monetaria correcta y mejoras institucionales, especialmente en el sector financiero, pueden llevarnos al mundo descrito por la teoría clásica.

La teoría clásica afirma que sólo los precios y salarios reales determinan las cantidades reales de producción y empleo, pues los agentes comprenden el impacto de los precios y lo descuentan. La economía está permanentemente en el equilibrio del sistema de ecuaciones walrasianas. Mientras que la teoría keynesiana sigue postulando equilibrios reales clásicos (Tobin, 1995: 33), basados en la igualdad de la productividad marginal del trabajo y la desutilidad marginal del trabajo, determinando así los salarios reales y el volumen de empleo y output. Pero en ese punto los mercados no vacían y puede haber desempleo involuntario. Los ciclos económicos son persistentes y no pueden explicarse sólo por la evolución de variables reales. La clave explicativa es el lento ajuste en precios y salarios. Si bien se han propuesto mecanismos que producirían el mismo resultado incluso con completa flexibilidad de precios y salarios. Greenwald y Stiglitz (1986) investigan el impacto general de las externalidades (mercados institucionalmente incompletos y con información imperfecta) sobre el equilibrio económico global.

A la teoría clásica actual se le denomina teoría de los ciclos económicos reales (“Real Business Cycles Theory, RBC), o también modelos generales de equilibrio estocástico dinámico (“Dynamic Stochastic General Equilibrium Models”, DSGE). Las aportaciones claves son Kydland y Prescott (1982), Long y Plosser (1983) y King, Plosser y Rebelo (1988). Introduce en un modelo neoclásico de crecimiento, con optimización racional por todos los agentes, factores aleatorios y exógenos como impulsos del ciclo. Fundamentalmente shocks tecnológicos.

La teoría clásica lo es del equilibrio en tasas naturales. La keynesiana lo es del desequilibrio en precios y cantidades, o equilibrio sin vaciamiento. La clásica afirma la dicotomía entre variables reales y nominales. La keynesiana no.

Las teorías del ciclo las analizo y agrupo en este trabajo en función de su carácter determinístico o estocástico. Discutiré si la inclusión de variables endógenas o exógenas tiene relación con este carácter. Clasificaré las teorías en función de estos dos criterios.

Lo que se plantea es si el modelo matemático explicativo de los ciclos observados supone el equivalente a un programa corto que nos permite deducir el programa largo o conjunto de datos. Si a partir de ese conjunto de variables, enlazadas en ecuaciones, podemos averiguar cómo se ha producido y se producirá el ciclo. Si podemos predecirlo.

Chatterjee (2000) afirma que hay una evolución en la teoría del ciclo económico. Los primeros análisis se basarían en postular factores que producirían fluctuaciones determinísticas. Factores del sistema económico que provocarían auges y crisis de manera endógena y unívoca. Mientras que teorías posteriores pasaron a atribuir los ciclos al efecto acumulativo de perturbaciones aleatorias. Aunque la identificación de estos shocks habría sido, hasta ahora, ambigua o inexacta. Este autor afirma que se da una evolución desde la primera hasta la segunda forma de explicar el ciclo, y un casi consenso actual acerca de que una serie de shocks aleatorios son la clave. Slutsky habría demostrado en los años 20 que fluctuaciones aleatorias pueden estar a la base de los ciclos. Analizo más adelante la tesis de Slutsky o efecto Slutsky-Yale. De modo similar, Benhabib y Farmer (1999) afirman que la macroeconomía moderna se basa en los

modelos DSGE diseñados por la teoría de los ciclos económicos reales. En mi opinión, sin embargo, ambas perspectivas o programas estocástico y determinístico coexisten y debaten (Mankiw, 1989), con diversas propuestas de modelos matemáticos.

La tesis final de este trabajo radica en que, debido a la imposibilidad de dar contenido procedimental empírico a los conceptos azar y determinismo, el debate fundamental es irresoluble y se dará siempre en la teoría económica. Podrán aceptarse provisionalmente modelos, y descartarse otros, en función de su acuerdo con la teoría y con los datos, pero no las ideas relacionadas con el azar o su negación.

## **2. Un criterio simple para analizar la aplicación empírica de las teorías económicas. El posible valor heurístico.**

Cuando afirmamos que un suceso se produce al azar, es aleatorio, ¿este enunciado admite una prueba empírica, o es una conclusión no contrastable, ni falsable, a partir de los datos?

El criterio que aplico para saber si un concepto científico es observable, sigue al operacionalismo de Bridgman. Por ello, considero que azar es un concepto con referencia observable si y sólo si hay una operación, o conjunto de operaciones, por las que podemos hallar, medir, con exactitud dicha referencia. Las operaciones pueden ser físicas o mentales (Bridgman, 1927: 36).

No exijo que los conceptos tengan contenido empírico, no es el tema de este trabajo. Sí se exige que, para tener contenido empírico, debe existir un procedimiento operativo. Este criterio es restrictivo, y es eficaz para decidir el contenido empírico del concepto azar. Además, equivale, en el ámbito de este trabajo, a otras formulaciones como la de Hempel: un enunciado con el concepto “azar” tendría significado empírico si es expresable “in terms of observable characteristics of physical objects” (Hempel, 1950: 10).

En definitiva, un concepto tiene significado empírico “if we can assign numerical values to particular instances of it – if we can, in effect measure it under certain circumstances” (Gillies, 1972: 8). Si no, “azar” no tendrá esta referencia y formará enunciados de otro tipo, sin fundamento empírico.

Sin referencia empírica, y fuera de enunciados analíticos (tautologías), algunos conceptos (pero pocos) pueden tener, no obstante, una función positiva en la ciencia. Su funcionalidad sería heurística: conceptos fundamentales que dan base a programas de investigación, a propuestas alternativas. Deben, pues, contener principios que permiten construir modelos alternativos sí contrastables y falsables.

El valor heurístico de un concepto se da en un entorno de incertidumbre epistémica, cuando no hay una solución final y completa al problema planteado. En esa situación, sería esencial la construcción de programas que contienen posibles soluciones alternativas. Los modelos matemáticos son falsables, pero no conceptos como azar y determinación.

## **3. El determinismo.**

Siguiendo a Ernest Nagel (2006: 371-441), y traduciendo al ámbito social lo que afirma de la ciencia física, un conjunto de leyes es determinístico para un sistema de variables, relativo a una clase de propiedades, si un estado del sistema determina unívocamente su estado en cualquier otro instante. La teoría permite conocer qué sucederá al sistema considerado, si conocemos todas las condiciones iniciales. Indeterminístico sería el modelo matemático que no nos permite conocer el siguiente estado del sistema con exactitud.

Es decir, el sistema es determinístico si existe una función  $F$  (modelo) que, conocidos los valores de las variables en tiempo  $t_1$ , da valores a esas variables en tiempo  $t_2$ , y entonces en tiempo  $t_3$  y sucesivamente (Bricmont, 2004: 3). Implica predictibilidad una vez conozcamos los valores en  $t_1$ . Bajo el supuesto *ceteris paribus*: las variables no incluidas en el modelo no se desplazan.

Esta definición de determinismo permite alejarse de la polémica acerca de si determinismo y causalidad tienen relación necesaria entre sí. En mi opinión, la causalidad añade una complejidad conceptual innecesaria.

#### **4. El concepto azar y el teorema de indecidibilidad.**

Parto del llamado concepto de aleatoriedad Kolmogorov-Chaitin (también encontrado por Solomonoff). Volchan (2002: 60-61) estima que la definición de Martin-Löf de aleatoriedad es preferible, pero que equivale a ese concepto.

Programa significa instrucciones (reglas) más input. Programa elegante es el de menor tamaño que sea capaz de generar una serie de datos. Una serie de datos se produce al azar si la misma serie es su programa elegante. Es decir, si el programa más corto disponible, que genera la serie, es tan largo como la serie misma, no es comprimible. “A string is random if no program of size substantially smaller than the string itself can generate or describe it.” (Volchan, 2002: 56; igualmente en Chaitin, 2004: 22). Calude (2002) afirma que significa la ausencia de orden o modelo. Estas definiciones equivalen. “Intuitivamente, la más insignificante posibilidad de computar una fracción infinita de una sucesión hace que ésta no sea aleatoria” (Mario Parra y Suárez, 2006: 166). Aleatoriedad implica impredecibilidad (Calude, 2002).

En consecuencia, demostrar que una serie es aleatoria es probar que es su propio programa elegante. Probar que no es al azar, es encontrar un programa elegante más corto.

Esta definición nos lleva a que no podamos saber con certeza si una serie es estocástica o no. No podemos saberlo porque cualquier distribución de datos podría ser generada aleatoriamente, aunque sea más o menos probable. Al tirar una moneda al aire, la serie “100110101100” es tan probable como “111111111111”: ambas tienen una probabilidad de  $1/2^n$ . En este caso  $1/2^{12}$ . Sin embargo, intuitivamente vemos con claridad que una serie tiene mayor apariencia estocástica.

Chaitin piensa que esta característica procede de la incompletitud de todo sistema formal de razonamiento, por lo que pone una barrera que no podemos superar. ¿Una serie es aleatoria o sólo lo parece? No lo podemos saber, es una limitación de las matemáticas relacionada con el teorema de incompletitud de los sistemas formales mínimamente potentes de Gödel (Chaitin, 1975). Éste es un resultado aceptado por la literatura científica matemática.

La demostración puede realizarse de diversas maneras, y no es objeto como tal de este trabajo. La base está en que la función que decide la complejidad de una serie (si es producto de un programa elegante y cuál es el tamaño de ese programa) no es ella misma computable, por lo que no podemos decidir con certeza la aleatoriedad de una serie (Volchan, 2002: 62). Una aproximación intuitiva similar a la de Chaitin (2004: 108-110) es la siguiente. Supongamos un sistema formal SF suficientemente potente (en sentido de la condición del teorema de incompletitud de Gödel). Tomemos PE, un programa que comprueba la elegancia: toma al programa  $p$  como input y dice verdad si  $p$  es elegante. Y falsedad si  $p$  no es elegante. Supongamos el programa B que toma al número  $N$  de números naturales como input y enumera todos los programas  $PK$  mayores a  $N$  y les hace el test PE hasta encontrar uno que es elegante, entonces lo ejecuta y obtiene su output.

Si ejecutamos B con  $N = B+1$ , entonces ejecutamos PE sobre los programas cuya longitud sea mayor a  $B+1$ . Debe encontrar un PK que dice es elegante. Lo ejecuta y obtiene output. Pero está obteniendo el mismo output que PK siendo, sin embargo, más corto pues mide  $N$ . Lo que es contradictorio: PK es elegante y no lo es. "If we could prove that a program is elegant, then that would enable us to find a smaller program that produces the same output, contradiction!" (Chaitin, 2004: 109). En conclusión, no es posible determinar si un programa es elegante o no. Pues si fuese posible, entonces entraríamos en una contradicción.

Es decir, no hay un algoritmo que podamos aplicar a una serie de datos y nos responda a la pregunta de si esa serie es aleatoria o no lo es. No es posible decidir si una serie es estocástica o no, porque no podemos probarlo. Sería necesaria una demostración de que la serie no depende de nada, no tiene condiciones determinantes (Nagel, 2006: 438), no podrá nunca tener un programa corto que la genere. Lo que no es posible. Sólo podemos observar si parece más o menos estocástica, por lo que hablamos de series pseudo-aleatorias cuando tienen apariencia estadística de tal. Esta imposibilidad para decidir es un resultado fundamental e inapelable.

No existe un procedimiento final, cuantitativo ni cualitativo, para hallar una serie de datos al azar. Ni lo contrario. Operacionalmente, es un concepto sin operación. Azar puede tener contenido teórico, aproximaciones empíricas, pero nunca un referente empírico completo.

## 5. El efecto Slutsky-Yale.

Slutsky (1937) se planteó en 1927 (reproducido en 1937 en *Econometrica*) si es posible que fluctuaciones aleatorias generen la apariencia de ondas regulares. Es decir, si series con apariencia determinística (regulares) podrían ser, en realidad, generadas mediante procesos estocásticos. Denomina serie coherente a aquélla en la que la aparición de un valor en una posición depende de los valores previos o posteriores de la variable (autocorrelación). Una serie incoherente es la que no presenta esa dependencia.

Barnett (2006) plantea que Slutsky está defendiendo dos proposiciones. Primero, que sumar factores aleatorios puede generar fenómenos con apariencia de ondas regulares. Es decir, que la adición introduce en sucesos mutuamente independientes una apariencia oscilatoria, en la que datos posteriores tienen una dependencia de los anteriores. Segundo, que estas fluctuaciones con aspecto de ondas pueden parecer ciclos que exhiben aparente regularidad. "The summation of random causes may be the source of cyclic, or undulatory processes" (Slutsky, 1937: 114).

Para demostrar estas propuestas Slutsky toma una suma móvil de datos e intenta mostrar que este procedimiento convierte en coherentes a las series incoherentes. Dando como resultados movimientos con apariencia de cíclicos, similares a ciclos reales económicos observados. Por ello compara el gráfico de un ciclo económico observado con el movimiento de datos producto de coger la serie de números de la lotería y hacer una suma móvil de doce. Agregando el número de factores aleatorios llegaríamos, finalmente, a series cíclicas similares a funciones armónicas. Además, estos movimientos ondulatorios serían indistinguibles de ciclos económicos observados. Slutsky utilizó otros procedimientos con similares resultados. Todos estos métodos comparten el hecho de introducir una estructura de dependencia entre los datos.

Slutsky concluye que ha dado una prueba inductiva de la posibilidad de que variables actuando aleatoriamente generen un proceso cíclico en la economía. En general, un hecho de apariencia ondulatoria. Prueba inductiva significa que es un ejemplo, o varios ejemplos, de la posibilidad, y no una demostración deductiva universal.

Yule (1926) había apuntado la misma idea, referente a la apariencia de comportamiento cíclico en una serie que es, en verdad, el resultado de factores estocásticos. Oscilaciones que no están en los datos originales. Yule propondría (Álvarez Vázquez, 1996: 320-1) un modelo

autorregresivo para el ciclo económico o ecuación en diferencias finitas de segundo orden, con la adición de un proceso estocástico o ruido blanco:

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde la variable Y se relaciona con sus valores retardados, y  $\delta$  son los coeficientes. Un proceso de ruido blanco  $\varepsilon$  es una sucesión de valores independientes entre sí e idénticamente distribuidos. Más laxamente, una serie de valores con autocorrelación cero en todos los retardos, y normalidad. Los coeficientes y los shocks aleatorios son la clave, una vez tenemos datos de salida. El proceso de ruido blanco produce ahora una serie de impactos de apariencia cíclica.

El ciclo económico se comportaría como un péndulo, con un proceso de ruido blanco  $\varepsilon_t$  golpeando el péndulo al azar. Generaría un movimiento regular que no es cierto. Lo calcula para las manchas solares, dando un período de 10'6 años. Donde este modelo autorregresivo es similar a un proceso de sumas móviles del tipo Slutsky (Pollock,1987), pues:

$$Y_t = \mu_0 \varepsilon_t + \mu_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \mu_q \varepsilon_{t-q} \quad (2)$$

Tal y como expone Pollock (1987), Slutsky y Yale están afirmando un mismo tipo de proceso dependiente de las perturbaciones aleatorias: "The affinity of the two sorts of process is further confirmed when it is recognised that an autoregressive process of finite order is equivalent to a moving-average process of infinite order and that, conversely, a finite-order moving-average process is just an infinite-order autoregressive process" (p.8).

Kuznets (1929) aceptó esta tesis: series serialmente no autocorrelacionadas producen, mediante la suma móvil, series con autocorrelación. La amplitud y tiempo de los ciclos generados dependería de la distribución de shocks al azar y del período de la suma móvil aplicada. Conforme incluimos más elementos en la serie de suma móvil, aumentamos la correlación interna en la serie que obtenemos. Frisch (1931) se centró en la manera de evitar ciclos económicos espurios. Moran (1950) está de acuerdo en que aplicar sumas móviles a una serie aleatoria lleva, en el límite, a funciones sinusoidales perfectas.

A partir de aquí, la literatura científica ha discutido en torno a dos conclusiones diferentes. La primera opción o interpretación "estadística" (Barnett, 2006) es que tenemos un efecto estadístico a tener en cuenta. Un resultado debido a la aplicación de un procedimiento. Medias móviles, u otro. Surge la pregunta lógica: si tomamos una serie económica de datos y procedemos a un análisis cuidadoso, obviando un procedimiento de suma o promedio, ¿podríamos evitar el problema planteado por Slutsky? Si mejoramos los procedimientos, ¿descartaríamos la generación de posibles ciclos económicos espurios?

Se ha planteado, asimismo, una segunda opción, o interpretación "realista": que tenemos un efecto "real" (Barnett, 2006): que es la suma de "shocks" aleatorios lo que produce un ciclo observable. Por lo tanto, ciclos económicos observados se explican como la suma de causas aleatorias, sin necesidad de acudir a ningún factor subyacente periódico que pasa a ser irrelevante. Los ciclos económicos serían fenómenos de base aleatoria. La teoría de los ciclos económicos reales toma este efecto Slutsky-Yale como fundamento, considerándolo como probado. Las series macroeconómicas serían procesos no estacionarios estocásticos, sin tendencia, por el efecto de factores aleatorios reales (Nelson y Plosser, 1982).

Este problema se plantea para toda serie de datos que presente periodicidad. "All activities in which the periodicity of time series was involved. Thus it had direct relevance to all statistical manipulations of data" (Barnett, 2006: 6).



El resultado de Chaitin nos dice que toda respuesta al problema Slutsky-Yale sólo puede ser una aproximación. Nunca una certeza. Tenemos series de apariencia cíclica, en las que saber si son producto de variables aleatorias cae dentro del teorema de indecidibilidad de Chaitin. Sólo es aproximable.

Asimismo, si bien Slutsky y Yale plantearon con agudeza la posibilidad de que los ciclos observados tengan elementos aleatorios que los producen, obviaron el problema de si los factores que presuponen estocásticos, lo son realmente. Suponer la serie de la lotería como un ejemplo de serie aleatoria es un supuesto cuestionable: porque los valores de los estadísticos de las series no coinciden plenamente con el supuesto probabilista (Álvarez Vázquez, 1996: 310). Álvarez Vázquez intenta probar que los ciclos están ya contenidos en los datos originales de la serie de la lotería. “La causa de los ciclos regulares, observados en la serie de sumas móviles, está en los movimientos regulares de la serie original” (Álvarez Vázquez, 1996: 301). Por lo tanto, “El fallo de la argumentación en que descansa la hipótesis de Slutsky estaría en asumir que la serie de primeros premios (sus últimos dígitos) sea aleatoria, cuando sólo es irregular” (Álvarez Vázquez, 2004: 98). Pues en el dominio del tiempo las autocorrelaciones de esta serie de números no son nulas, y porque en el dominio de la frecuencia los ciclos periódicos no contribuyen por igual a la varianza como deberían hacerlo en una serie ideal aleatoria. La media móvil no crearía, ni destruiría, nada.

Por lo tanto, el principal problema previo a la interpretación se refiere a los supuestos de los que parten Slutsky y Yale. Los ciclos económicos pueden ser considerados determinísticos o aleatorios, pero los factores que presuponen aleatorios también pueden ser cuestionados, tal y como predice el teorema de indecidibilidad de Chaitin.

## **6. Clasificación de las teorías del ciclo, determinismo y endogeneidad.**

No hay una teoría básica aceptada por consenso por la literatura científica, y el debate entre programas de investigación alternativos es muy complejo.

Los dos principales programas de investigación son el keynesiano y el clásico. He expuesto sus bases conceptuales. La teoría clásica ha tomado la forma de teoría RBC, sobre las bases conceptuales de las expectativas racionales de Lucas, y ha generado modelos de equilibrio dinámico estocástico general DSGE. La base conceptual está en la teoría general del crecimiento económico que procede de Solow, y, cuando los agentes pueden elegir todas las variables, en especial el ahorro, de Ramsey-Cass-Koopmans. Las fluctuaciones del ciclo son necesariamente las respuestas óptimas de los agentes económicos a shocks reales exógenos.

Por su parte, el keynesianismo, a partir de los años 80, ha buscado fundamentos microeconómicos para la rigidez temporal de precios y salarios, y los efectos de la percepción del riesgo en el comportamiento empresarial. Se estudian los fallos de coordinación, la competencia imperfecta, las rigideces en el mecanismo de asignación, los shocks nominales.

Una parte de esta literatura keynesiana ha adoptado la forma de los DSGE. En este modelo matemático, p.ej., Gali y Rabanal (2004) contemplan shocks aleatorios de demanda, en vez de shocks aleatorios tecnológicos. Cho y Cooley (1991) introdujeron rigidez nominal en los contratos laborales. Blanchard y Kiyotaki (1987) competición monopolística con rigideces nominales, por contratos cuyo efecto se alarga en el tiempo. Hairault y Portier (1993) competición monopolística dinámica con tecnología y oferta monetaria exógenas y al azar. Y un largo etcétera. Modelos que unen principios keynesianos en modelos clásicos.

Otra parte de la literatura que ha desarrollado modelos DSGE se caracteriza por adoptar el principio de indeterminación en la evolución hacia el equilibrio o estado estacionario, o en el mismo estado estacionario. Un shock “sunspot” en esta literatura es el impacto que tienen las

expectativas de los agentes, cuando, no estando basadas en la evolución real de las variables macroeconómicas, tienen un impacto final en la asignación. Es decir, es una variable aleatoria que no afecta a los fundamentos económicos (dotaciones, preferencias, tecnología), ni es determinada por ellos, y provoca que sean posibles distintos equilibrios finales de consumo y producción.

Las expectativas son autopredictivas: se realizan por el mero hecho de que los agentes lo creen. Esta capacidad de tener un impacto tan importante procede del hecho de que los modelos son incompletos e incorporan factores que amplían el impacto. Los dos elementos más comunes son un mercado laboral incompleto con externalidades, en el que no hay equilibrio entre oferta y demanda, y economías de escala en la función de producción. Shell (1977) utilizó el modelo simple de generaciones que se suceden de Lucas (1972), tomado de Samuelson (1958), para introducir shocks “sunspots” que afectan al nivel de precios. Benhabib y Farmer (1994) demostraron que se puede dar indeterminación en un modelo simple, tipo DSGE, con economías de escala. Son posibles múltiples equilibrios y el equilibrio final se da al azar. En modelos cerrados, con mercados completos, los shocks “sunspots” no tendrían impacto, ya que los agentes evitan el riesgo (Benhabib y Farmer, 1999). De otro modo, si las variables fundamentales dan una solución, las expectativas no podrían alterar significativamente el equilibrio final, ni el camino hacia él.

Denominada por algunos autores como “Endogenous Business Cycle theory”, teoría EBC, es endógena en tanto incluye a variables que convierten a los impulsos iniciales en movimientos cíclicos, cuyos valores se determinan dentro del sistema de ecuaciones. Pero sigue incluyendo factores desencadenantes exógenos (Whitta-Jacobsen 2004, Farmer 2012), y las expectativas se comportan de manera aleatoria y se mueven fuera del sistema.

Es cierto que la tecnología es una variable fundamental y las expectativas son extrínsecas. Pero no hay diferencias conceptuales relevantes entre el impacto del factor tecnológico en los RBC, y el de las expectativas de los agentes en los modelos EBC, pues en ambos casos son exógenos y aleatorios. Los factores “sunspots” se añaden a los shocks tecnológicos. Movimientos al azar que cierran el sistema. “Determinístico” o “indeterminístico” no corresponden con “determinado” e “indeterminado” en la literatura EBC. “We say that the model is determinate if there is a unique equilibrium and indeterminate if there are multiple equilibria” (McGougha et al., 2012: 8). Es decir, determinado es si el modelo tiene una solución, e indeterminado es si tiene varias posibles soluciones. Un modelo RBC es determinado, en este sentido, y, sin embargo, es indeterminístico en el sentido global definido en este trabajo.

Las variables endógenas que transmitirían y amplificarían los shocks iniciales, creando el ciclo, serían, entre otras muchas, externalidades en la producción (Benhabib y Farmer 1994, Farmer y Guo 1994), complementariedades en la elección intertemporal (Azariadis 1981), mercado laboral incompleto, sin oferta laboral (Azariadis, 1981; Farmer y Woodford 1984), riesgos en créditos sin aval (Azariadis et al., 2015). Un ejemplo es Benhabib y Nishimura (1996), con un modelo en el que las expectativas sobre el valor marginal de la inversión provocan el doble efecto de aumentar esa inversión, pero, a la vez, reducirla, a través de externalidades del mercado laboral y el crecimiento del ocio, con un efecto final indeterminado.

Para Farmer (2012) y Farmer y Platonov (2016) los modelos EBC que implican indeterminación en el camino hacia un estado estacionario, sí determinado, se basan conceptualmente en la teoría clásica. Una función de creencias cierra los modelos y explica la rigidez de precios, en un contexto de expectativas racionales. Los modelos que tienen, además, una indeterminación en el estado estacionario, se basarían en fundamentos keynesianos, generando el posible desempleo involuntario a largo plazo. Sin embargo, lo decisivo radica en que se trata, en ambos casos, de modelos indeterminísticos en los que las expectativas evolucionan al azar y son decisivas.

Replanteando estas teorías, considero que los modelos del ciclo pueden ser clasificados según dos criterios. Si introducen o no mecanismos endógenos de explicación del ciclo. Y si la explicación es determinística o probabilista. Determinismo y probabilismo ya han sido definidos. En los modelos estocásticos se suele incluir una, o más, ecuaciones autorregresivas que contienen uno, o más, procesos de ruido blanco.

VARIABLES ENDÓGENAS son aquéllas cuyo valor está determinado en el modelo matemático: las variables se determinan conjuntamente entre sí. Variables exógenas toman valores no fijados dentro del sistema de ecuaciones. Las variables exógenas pueden ser aleatorias o determinísticas, si su evolución no tiene patrón observable o postulado, o sí lo tiene. Las endógenas tienen que ser determinísticas, pues, a partir de un valor, el modelo determina el siguiente.

Además, es preciso distinguir entre factor desencadenante del ciclo y mecanismos de propagación y persistencia. Factor desencadenante es el movimiento que provoca la primera variación en las variables macroeconómicas. En la teoría RBC es un shock tecnológico exógeno. En la teoría keynesiana puede ser un cambio en la expectativa de la productividad marginal del capital. Mecanismo de propagación es la evolución de variables que provocan el ciclo económico en el sentido de movimiento persistente, continuado y correlacionado de las variables macroeconómicas. En la teoría RBC es la sustitución inter-temporal de ocio por trabajo. En la teoría keynesiana es la rigidez temporal en precios y/o salarios, y la percepción de riesgo de las empresas.

En esta clasificación se puede colocar cada uno de los modelos o programas de investigación. La teoría RBC y los modelos posteriores DSGE son exógenos y probabilistas en los factores desencadenantes. Shocks tecnológicos, que se comportan de manera estocástica. Y endógena en los mecanismos de propagación: decisiones de sustitución de ocio por trabajo, a lo largo del tiempo.

La teoría clásica, previa a la RBC, sí admitía problemas de información, de competencia empresarial y de políticas económicas, como variables de propagación. Se han ido añadiendo nuevamente.

La teoría keynesiana y neokeynesiana no parten de un agente representativo o agentes maximizadores intertemporalmente, sino de variables macroeconómicas en un enfoque holístico. Salvo la corriente que utiliza modelos DSGE. Pero estos enfoques, para pertenecer a este programa de investigación, deben compartir la fundamentación conceptual: teorías exógenas y determinísticas en los factores desencadenantes. Salvo los modelos de acelerador-multiplicador, que son endógenos. Hay una caída en la demanda agregada, generalmente no descrita, pero determinística. No se plantea un modelo matemático estocástico acerca de esta reducción inicial. Y endógena en los mecanismos de propagación. Un proceso de fallos de mercado, con limitaciones en los mercados de factores, monetarios y/o de bienes. Ajustes lentos y costosos en los precios y salarios, externalidades productivas, shocks nominales, competición imperfecta (Standler, 1994).

Finalmente, los modelos EBC o de factores “sunspots” plantearían factores desencadenantes exógenos aleatorios. Expectativas autopredictivas, pero también tecnología, que, actuando sobre la base de mercados incompletos y economías de escala, determinan el resultado en dichos mercados. Y, en consecuencia, el ciclo. Modelos RBC pero incompletos.

## **7. Algunos desarrollos matemáticos en la teoría del ciclo.**

Los modelos iniciales keynesianos generaban ciclos endógenos y determinísticos, en ondas inicialmente regulares y periódicas. Se basaban en las ideas del multiplicador y el acelerador.

Sobre el modelo de Samuelson (1958), Hicks diseña una teoría con movimientos macroeconómicos explosivos, pero que genera ciclos continuados por la existencia de suelo y techo.

Idea del multiplicador:

$$C_t = c \cdot Y_{t-1} \quad (3)$$

La inversión es suma de la inducida (acelerador) y la autónoma (independiente del sistema):

$$I_t = I'_t + I''_t \quad (4)$$

$$I'_t = v \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (5)$$

$$I''_t = A_0 \cdot (1 + g)^t \quad (6)$$

Siendo la renta nacional,  $Y_t$ , la suma del consumo y la inversión.

Modelo que genera una ecuación en diferencias de segundo orden. Si  $v = 1$  entonces tenemos oscilaciones regulares. Si  $v > 1$  entonces oscilaciones divergentes, en un modelo explosivo, que es lo que Hicks cree más probable (Samuelson discrepaba). Si  $v < 1$  son oscilaciones convergentes.

Las oscilaciones divergentes producirían ciclos regulares y determinísticos por la existencia de un suelo y un techo, que hacen que los movimientos vayan rebotando (en un modelo que ha dejado de ser lineal). El suelo es la detención del acelerador que hace que la inversión inducida pase a ser negativa e igual a la depreciación. Y el techo es el producto potencial o pleno empleo, determinado por la cantidad de factores productivos y la tecnología existentes.

La regularidad de las fluctuaciones es producto de un modelo determinístico, pero no parece apoyada en los datos. Aunque podría defenderse que los ciclos se dan *ceteris paribus*, por lo que otros factores pueden ir variando la periodicidad. Queda el reto de ir introduciendo tales variables.

Los modelos keynesianos posteriores se dividieron acerca del carácter del factor desencadenante. Algunos modelos siguen incluyendo un factor endógeno y determinístico. Otros no permiten prever el primer hecho que desencadena ese fallo en el mercado. Y en este sentido, los modelos son incompletos. Pero no se postula aleatoriedad y el mecanismo posterior es determinístico. Finalmente, hay modelos que introducen shocks exógenos y aleatorios de demanda, pero es discutible que entren dentro de este enfoque. En todos los casos, la idea que los une radica en que el equilibrio en el mercado puede ser inalcanzable, de modo irreversible, sin intervención ad hoc de políticas públicas. El ciclo sería un hecho natural de la economía.

Que los modelos keynesianos se dividan en torno a incluir factores iniciales exógenos y endógenos se debe al mismo pensamiento de Keynes. Keynes (1936) postuló que la causa de los ciclos económicos era el movimiento en la eficiencia marginal del capital. Pero no se trataba de un mecanismo automático, ni necesariamente cíclico, pues la clave no era sólo el añadido marginal a la última unidad monetaria invertida; sino la percepción que se tiene de este rendimiento. Lo que en la literatura posterior se denomina a veces "animal spirits". Keynes afirmaba en su Teoría General, 1936, el posible impacto de las expectativas: "it is not so easy to revive the marginal efficiency of capital, determined, as it is, by the uncontrollable and disobedient psychology of the business world." (Keynes, 2008: 288). El retorno de la confianza sería un factor difícil de controlar (Minsky, 1986).

Los fallos de mercado provocarían situaciones no eficientes en términos de Pareto. No hay vaciamiento de los mercados. Bienes sin vender, trabajo desempleado, capital ocioso. Los agentes económicos quisieran estar en otro punto de intercambio, pero no pueden hacerlo. Las recesiones producirían un bienestar social menor, y en ellas hay agentes económicos que podrían mejorar sin que otros resultasen perjudicados. A diferencia de la escuela clásica que defiende que la economía está siempre en una situación óptimo Pareto. El ciclo tendría como última explicación factores monetarios (variables nominales) que operan de manera necesaria, a partir de un primer factor desencadenante. No hay dicotomía clásica.

Tomo como ejemplo el modelo simple que plantea Romer (2006) de precios rígidos, salarios flexibles, mercado laboral competitivo.

$$\pi = \pi^* \tag{7}$$

$$L = L^o \left( \frac{w}{p} \right) \tag{8}$$

Donde  $L^o(\cdot) > 0$

$$Y = F(L) \tag{9}$$

Donde  $F'(\cdot) > 0$  y  $F''(\cdot) < 0$

Existe un  $Y$  máximo.  $\pi$  es nivel de precios,  $L$  es cantidad de trabajadores, y  $L^o$  es la oferta laboral, que es creciente respecto al salario real. La función de producción depende del único factor productivo que es el trabajo, y tiene productividad laboral positiva, pero decreciente. La demanda laboral está determinada por los puntos que cumplen que la productividad marginal del trabajo es igual al salario real.

En ese modelo no existe factor estocástico. La evolución es nuevamente determinística. Pero la causa desencadenante debe ser necesariamente exógena. Un desplazamiento inicial en la demanda que provoca una reducción en la renta  $Y$ . El modelo no genera ciclos sostenidos, por lo que falta un mecanismo continuado que genere desequilibrios.

Algunas teorías que se consideran nekeynesianas mezclan, por el contrario, rigidez en los precios y salarios, factores oligopolísticos, con shocks aleatorios de carácter tecnológico y monetario (p.ej., Hairault y Portier, 1993).

Lucas (1972) desarrolla una teoría del ciclo en un entorno conceptual clásico. La causa del ciclo económico sería la información imperfecta en relación a los precios. Los agentes creerían, incorrectamente, que movimientos generales en el nivel de precios son movimientos en los precios relativos, tomando decisiones para aumentar la producción, y su demanda de empleo, y generando ciclos. Las inversiones basadas en una incorrecta previsión de los precios llevan, primero, al auge, y, después, a la recesión. Se trata de una teoría exógena y aleatoria. La diferencia entre el precio del sector y el precio real sigue una evolución estocástica:

$$p_{jt} = p_t + \varepsilon_{jt} \tag{10}$$

Donde  $j$  se refiere a un bien, mientras  $p_t$  es el nivel general de precios. El precio del bien (sector) varía estocásticamente alrededor del nivel general de precios, pues  $\varepsilon$  es ruido blanco. La oferta de cada empresa depende de la expectativa que tenga de la evolución de los precios de sus productos, frente al nivel general de precios. A mayor dispersión de precios de los sectores respecto a precios generales, mayores diferencias se darán y más ciclos. Éste es el componente institucional que amplía o reduce los shocks exógenos. Aunque es difícil pensar que este

mecanismo sea suficiente para generar las fluctuaciones observadas en las variables reales (Mankiw, 1989).

En la teoría clásica o walrasiana, los agentes se comportan racionalmente, de tal manera que se sitúan siempre en una posición de equilibrio (p.ej., Kydland y Prescott, 1982). Los cambios en variables nominales se adaptan casi instantáneamente: movimientos generales en el nivel de precios no alteran el equilibrio de oferta y demanda (Lucas, 1977). Es una situación Pareto eficiente, los ciclos económicos serían posiciones eficientes u óptimas del sistema económico (Long y Plosser, 1983). El desempleo jamás es involuntario.

Llegamos a la llamada dicotomía clásica (Mankiw, 1989: 80). La oferta monetaria es exógena, la demanda monetaria está determinada por el nivel de output y el nivel de precios, pero no interviene en el equilibrio walrasiano. Variables reales y nominales no se influyen pues el dinero no impacta en la asignación de recursos, las variaciones monetarias dejan inalteradas a las variables reales.

Es inevitable que la escuela walrasiana, centrada en el equilibrio general intertemporal: que ha excluido la posibilidad del desequilibrio en los mercados, explique los ciclos económicos a partir de factores exógenos que impactan de manera aleatoria. La aleatoriedad es el motor necesario de los ciclos observados. Entre estos factores el principal está en los cambios tecnológicos (la tecnología es cuantificada empíricamente como productividad de la totalidad de los factores, dentro de una cuantificación Solow del crecimiento). La productividad se movería al azar generando los ciclos económicos observados (Standler, 1994: 1752). La recesión sería un período en el que las capacidades productivas de la sociedad han decaído. Existen otras variables muy secundarias como los movimientos en los gustos de los consumidores.

Los movimientos exógenos y estocásticos modifican precios relativos y fuerzan a los agentes racionales a ajustar oferta laboral y nivel de consumo. Éste es el mecanismo de transmisión que genera la profundidad y persistencia de los ciclos. Lo que lleva a cambios en las cantidades producidas. Las nuevas decisiones sobre el trabajo ofrecido (decisiones sobre cuánto ocio sacrificar a lo largo de la vida laboral) son claves. El mecanismo de transmisión convierte en ciclos persistentes los shocks puntuales y estocásticos.

El desempleo crece en las recesiones porque las personas deciden sacrificar menos ocio, pues la productividad laboral y el salario real han descendido (coste relativo del ocio). Deciden cambiar trabajo actual por futuro. Se reduce la oferta laboral. Cae el output nacional. Sin embargo, este mecanismo debería ser débil. Un aumento del salario real da mayor valor al trabajo (efecto precio), pero también incrementa la renta (efecto renta). Un descenso da menos valor al trabajo, pero también genera una caída de la renta, dando un impulso positivo a la oferta laboral que contrarresta, al menos parcialmente, el efecto sustitución. Por lo que, incluso si el salario real se comportase de manera procíclica, su impacto sería reducido.

Otros mecanismos de transmisión: bienes en inventario que la empresa mantiene, decisiones de inversión que repercuten en el stock de capital, retardos en el proceso de inversión. La debilidad global en los mecanismos de transmisión explica que se haya acudido a introducir shocks nominales y rigideces de inspiración keynesiana.

Matemáticamente, estos modelos varían sobre una estructura y supuestos comunes: modelo neoclásico de acumulación de capital al que se le añaden shocks estocásticos de productividad. Sobre expectativas racionales y vaciamiento de los mercados, las familias maximizan una función de utilidad, las empresas maximizan una función de beneficios. Los shocks se amplifican y persisten por la sustitución intertemporal de trabajo y ocio, y por el impacto sobre la inversión y el stock de capital.

El modelo de Long y Plosser (1983) es una de las aportaciones paradigmática de la teoría RBC. Consta de:

- Una función de producción tipo Cobb-Douglas, con las condiciones neoclásicas.
- Una tecnología que evoluciona con una tendencia temporal determinística y una perturbación aleatoria adicional que se comporta como un proceso autorregresivo de primer orden (AR(1)), a la que se añade una variable de ruido blanco  $\varepsilon_t$ .
- Un consumidor representativo que maximiza una utilidad que depende del consumo y el ocio (por lo tanto, del trabajo), limitado por la restricción presupuestaria que relaciona consumo con trabajo.
- Se supone una economía cerrada.
- La tasa de acumulación de capital, que depende del output nacional y la tasa de ahorro,
- Supuestos simplificadores que hacen fijas la tasa de ahorro y la oferta laboral.

En este modelo, el proceso AR(1) en la tecnología genera una solución para el producto nacional per cápita de AR(2), o proceso autorregresivo de segundo orden:

$$y_t^c = (\alpha + \delta) \cdot y_{t-1}^c - \alpha \cdot \delta \cdot y_{t-2}^c + (1 - \alpha) \cdot \varepsilon_t \quad (11)$$

Donde  $\alpha$  es la participación del capital en la renta nacional (exponente en la función de producción Cobb-Douglas),  $\delta$  es el coeficiente autorregresivo de las perturbaciones tecnológicas. Las variables están expresadas en valores cíclicos, dato menos tendencia. El segundo parámetro es negativo, lo que genera ciclos.

En los modelos RBC, el progreso tecnológico es exógeno y, además, tiene que serlo. Por el teorema de Euler. Ya que capital y trabajo son factores rivales que cobran, en competencia, lo mismo que su producto marginal. Por lo tanto:

$$Y = K \left( \frac{\partial F}{\partial K} \right) + L \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right) \quad (12)$$

No quedan recursos para pagar el progreso tecnológico Por lo que debe ser necesariamente exógeno (Sala-i-Martin, 1994: 42-43). El crecimiento económico a largo plazo, y los ciclos, son explicados por cambios no explicados, ni explicables, de la tecnología.

Romer (2006) plantea un modelo estándar RBC caracterizado por las siguientes ecuaciones, con una función de producción Cobb-Douglas neutral de Harrod.

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \quad (13)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (14)$$

La evolución del capital viene determinada por:

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t \quad (15)$$

La tecnología sigue una tendencia temporal creciente y está sometida a shocks aleatorios:

$$A = e^{A_0 + g t + A^*} \quad (16)$$

$$A_t^* = \rho A_{t-1}^* + \varepsilon_t \quad (17)$$

Donde  $g$  es el coeficiente de aumento temporal de la tecnología, y  $-1 < \rho < 1$ .  $\varepsilon_t$  es un proceso de ruido blanco.  $A_t^*$  es el componente estocástico en la tecnología, nuevamente AR(1). Puede

reducirse a una suma ponderada de distintos procesos aleatorios en una sucesión potencialmente infinita.

$$A_t^* = aA_{t-1}^* + \varepsilon_t = \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1} + a^2\varepsilon_{t-2} + \dots + a^{t-1}\varepsilon_0 = \sum a^i \varepsilon_{t-i} \quad (18)$$

Luego introduciendo en la función de producción, tendremos:

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial \varepsilon_0} = (1 - \alpha)\rho^{t-1} \quad (19)$$

Todas las perturbaciones tecnológicas tienen efecto a largo plazo.

El mecanismo de propagación, decisiones de trabajo y ocio, se entiende a partir de la función de utilidad de un agente representativo que relaciona consumo  $c$  y trabajo  $l$ , con la restricción del salario  $w$  y el tipo de interés real  $r$ .

$$U = \ln c + b \ln(1 - l) \quad (20)$$

$$\text{Con la restricción: } c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = w_1l_1 + \frac{1}{1+r}w_2l_2 \quad (21)$$

Llegando, en un escenario de varios períodos temporales, a la expresión:

$$\frac{1 - l_1}{1 - l_2} = \frac{1}{e^{-\rho}(1+r)} \frac{w_2}{w_1} \quad (22)$$

Donde  $\rho$  es la tasa de descuento. La oferta laboral en cada período responde al salario relativo, pero también al tipo de interés. Pero en el modelo, los tipos de interés y los salarios relativos evolucionan en direcciones opuestas, compensando sus efectos sobre la sustitución intertemporal entre ocio y trabajo: sobre la oferta laboral.

Finalmente, la escuela walrasiana no ha podido explicar ni la Gran Depresión de 1929, ni la gran recesión de 2008 (Farmer, 2012). Además, necesita explicar algunas regularidades en los datos, que no parecen coherentes con el modelo teórico. Primero, que una recesión está relacionada con menos consumo y más ocio. Lo que es difícil de entender siendo ambos bienes normales (Mankiw, 1989: 82). La única explicación de este fenómeno, para el modelo, estaría en que el salario real desciende. Pero como hay menos trabajadores en una recesión, su productividad laboral marginal sube, y el salario real debe también elevarse. Sería anticíclico. Uno de los hechos que intenta explicar la teoría de los ciclos económicos endógenos o con shocks "sunspots" (Schmitt-Grohe, 2000).

Segundo, tampoco los movimientos procíclicos de los precios. En lo que es la polémica sobre la Curva de Phillips, a corto y a largo plazo. Por lo que esta escuela ha intentado probar empíricamente que los precios no se comportan de esta forma.

Tercero, la teoría del ciclo real afirma que las oscilaciones monetarias se basan en las variaciones de la demanda de dinero para transacciones (King y Plosser, 1984). Pero es discutible que no haya movimientos, en algunos casos, independientes del banco central o de otros factores.

A lo que se añaden dos problemas fundamentales. Por una parte, no se detectan empíricamente los grandes shocks tecnológicos precisos para explicar las grandes recesiones. Por otra, ¿puede aislarse la productividad o posibilidad tecnológica del resto del sistema económico, como si no



tuviese relación con él? Es cierto que la productividad total de los factores oscila en el tiempo (Prescott, 1986) y se comporta de modo procíclico, cayendo en las recesiones. Pero: ¿Es el factor que provoca la crisis, o es un resultado de que la crisis deja a trabajadores en subempleos de poco rendimiento y una parte importante del capital ocioso? Se trata de un problema teórico, ya que es imposible distinguir empíricamente entre causa y efecto

Al fin y al cabo, una de las críticas de los modelos de crecimiento neoclásicos es que sitúan a la tecnología como principal factor de crecimiento, pero la dejan inexplicada e inexplicable. Kondratieff y Stolper (1935) opinaban que las fluctuaciones técnicas no son aleatorias y tienen como origen el desarrollo económico. La técnica evolucionaría al ritmo de las ondas de período largo. Así afirman que sería un error grave pensar que la dirección y la intensidad de los descubrimientos e invenciones es “accidental” (p. 112). Pensar que los cambios técnicos se dan al azar carece de fundamento, siendo más bien un producto de las necesidades económicas (p.112).

Parece, pues, difícil sostener que la tecnología es exógena, y no endógena. De tal forma que los ciclos generarían endógenamente, al menos una parte de las oscilaciones tecnológicas. Deberían incorporarse los modelos de crecimiento tecnológico endógeno, como, por ejemplo, el modelo de Romer (1986) entre muchos otros.

Si la endogeneidad de las fluctuaciones tecnológicas es objeto de debate, tanto más lo es el gasto público. Cuyo carácter endógeno y anticíclico, en función de los estabilizadores automáticos y de la evolución de la capacidad impositiva, es clara.

Está, por fin, el programa de investigación que parte de modelos DSGE y añade factores “sunspots”. La indeterminación significa que el modelo no es cerrado y pueden darse un número ilimitado de equilibrios posibles. Esta indeterminación había sido considerada tradicionalmente como una debilidad del modelo, que debía ser evitado. Sin embargo, en este programa de investigación se utiliza este elemento como clave para explicar los ciclos económicos (y otros hechos empíricos como la transmisión de los impulsos monetarios y el crecimiento económico), como defienden Benhabib y Farmer (1999). Azariadis (1981) planteó un modelo tipo Lucas (1972) de economía simple con generaciones que se suceden, bajo incertidumbre extrínseca.

En estos modelos incompletos en el sentido de que no dan una solución sino un conjunto de equilibrios posibles, las creencias sobre el futuro determinarán el equilibrio final. Creencias que actúan aleatoriamente. Imposible predecir. Benhabib y Farmer (1999) plantean un modelo simplificado, que debe ser válido para diferentes modelos planteados, a lo largo de la senda de crecimiento equilibrado. En este modelo tenemos:

$$y_t = Ay_{t-1} + BE_t y_{t+1} + Cx_t + u_t \quad (23)$$

$$x_t = Dx_{t-1} + v_t \quad (24)$$

Donde  $y$  es el vector de variables endógenas,  $x$  es el vector de las variables de política económica,  $u$  y  $v$  son shocks estocásticos.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son parámetros. Ecuaciones que deben cumplir una serie de condiciones para lograr que se dé el vaciamiento de los mercados.

Se observa que este modelo introduce dos procesos de ruido blanco, acompañando a una expectativa sobre el futuro. Si aceptamos la hipótesis de expectativas racionales en una situación de incertidumbre: los agentes conocen exactamente el modelo, pero no saben el valor exacto de los parámetros. Aplicando un aprendizaje adaptativo en los agentes, por el cual suponen que los valores en  $t+1$  serán los mismos que en  $t$ , e incorporando los valores de  $x_t$  expresados como resultado de las perturbaciones aleatorias pasadas y presentes, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_t &= v_t + Dv_{t-1} + d^2v_{t-2} + \dots + d^t v_o \\
y_t - \frac{A}{1-B} y_{t-1} &= \frac{C}{1-B} (v_t + Dv_{t-1} + d^2v_{t-2} + \dots + d^t v_o) + \frac{1}{1-B} u_t \\
y_t &= \frac{C}{1-B-A} (v_t + Dv_{t-1} + d^2v_{t-2} + \dots + d^t v_o) + \frac{C}{1-B-A} u_t
\end{aligned} \tag{25), (26), (27)}$$

Donde se han igualado los valores de  $y_t$  e  $y_{t-1}$ , lo que supone estar en equilibrio temporal.

En consecuencia, con agentes racionales, aprendizaje adaptativo, equilibrio temporal, la solución final será una suma de perturbaciones aleatorias en el tiempo. Estamos en el mismo esquema intelectual de los modelos RBC.

Duffy y Xiao (2005) estudian si un modelo RBC (DSGE) de equilibrio con expectativas racionales, en forma reducida, y con una dinámica de aprendizaje adaptativo, puede generar un equilibrio indeterminado y estable. La indeterminación permite que variables no fundamentales “sunspots” impulsen el modelo y generen ciclos (Farmer y Guo, 1994).

Bajo las expectativas racionales y adaptativas los agentes conocen el modelo, pero no el valor exacto de los coeficientes. El equilibrio será estable si la estimación de los coeficientes por los agentes se mantiene en un entorno cercano y sostenido de los coeficientes reales. Es decir, si es localmente estable la ecuación diferencial:

$$\frac{da}{dT} = T(a) - a \tag{28}$$

Donde  $a$  son los coeficientes estimados y  $T(a)$  son los coeficientes reales.

Duffy y Xiao (2005) pasan a analizar las soluciones de tres de los modelos más relevantes: Farmer y Guo (1994), Schmitt-Grohe y Uribe (2000) y Wen (1998). Estudia las condiciones bajo las cuales los modelos RBC con shocks “sunspots” y expectativas racionales consiguen equilibrios indeterminados y estables.

El modelo reducido planteado por Duffy y Xiao (2005) es:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= a_1 k_t + a_2 c_t \\
c_t &= a_3 E_t k_{t+1} + a_4 E_t c_{t+1}
\end{aligned} \tag{29), (30)}$$

Donde  $k$  es el stock de capital y  $c$  es el consumo. Los coeficientes son  $a$ . El impacto de las expectativas sobre el consumo es determinante, y, por lo tanto, sobre la inversión y la evolución del stock de capital. Las expectativas se forman en un proceso autorregresivo AR(1):

$$y_t = b_1 + b_2 y_{t-1} + b_3 s_t + \varepsilon_t \tag{31}$$

El vector de variables endógenas, capital y consumo, es  $y$ . El vector de expectativas extrínsecas es  $s$ ,  $\varepsilon$  es ruido blanco. Se observa el típico proceso autorregresivo, con acumulación de impactos estocásticos, de los modelos RBC (DSGE).

Es un modelo similar al utilizado, para analizar el mismo problema, por McGough et al. (2013). Quienes modifican en la primera ecuación  $k_{t+1}$  por  $E_t k_{t+1} = a_1 k_t + a_2 c_t$ , e introducen en la segunda ecuación al stock de capital en tiempo  $t$ :

$$c_t + a_3 k_t = a_3 E_t k_{t+1} + a_4 E_t c_{t+1} \quad (32)$$

La conclusión a que llegan Duffy y Xiao (2005) es la siguiente. Bajo aprendizaje adaptativo, en modelos RBC con shocks “sunspots”, las restricciones en los parámetros impiden equilibrios simultáneamente indeterminados y estables. Los agentes no consiguen aproximar la expectativa de los parámetros, a sus valores reales. El coeficiente  $a_4$  debe ser negativo (nada plausible: el consumidor quiere mantener una senda constante de consumo) para lograr la estabilidad, pero tiene que ser positivo para conseguir indeterminación. La economía es o estable y determinada, o indeterminada e inestable. O bien la idea de expectativas racionales no se mantendría. McGough et al. (2013) mantienen la condición de que  $a_4$  debe ser negativo. Y la condición de Benhabib and Farmer (1994): la curva de demanda laboral tiene pendiente positiva y mayor en valor absoluto que la curva de oferta laboral. Empírica y teóricamente muy poco plausible. Conclusión, no obstante, limitada a los modelos existentes hasta ahora.

## 8. Conclusiones.

La teoría clásica ha producido la teoría de los ciclos económicos reales RBC y los modelos estocásticos de equilibrio general dinámico DSGE. Éstos establecen que los ciclos económicos son el producto de variables aleatorias y exógenas. Acuden a estos factores porque su fundamento conceptual es la teoría del equilibrio walrasiano, a través de los modelos neoclásicos de crecimiento económico. Los agentes racionales tomarán siempre decisiones que vacíen los mercados, en posiciones de óptimo Pareto. De ahí que tomen una interpretación realista del efecto Slutsky-Yale. Por una parte, se fundamenta el crecimiento económico en un factor exógeno aleatorio inexplicado e inexplicable. Por otra, se postula igualmente un movimiento aleatorio real detrás de la imagen fluctuante del ciclo empírico. Teoría del ciclo incapaz de predecir y con grandes dificultades para explicar las grandes recesiones y algunas correlaciones macroeconómicas.

En este esquema, los shocks “sunspots” suponen el añadido de variables extrínsecas estocásticas, pero no modifican la base conceptual, ni los modelos matemáticos. Con el problema de hacer compatible la indeterminación con la estabilidad.

La teoría keynesiana explica el ciclo económico como posiciones de desequilibrio, en los que los mercados no vacían, ni se logra una situación de óptimo Pareto. Los modelos keynesianos clásicos establecieron enfoques endógenos y determinísticos, produciendo ciclos regulares. Su principal problema radica en que no son aparentemente compatibles con los ciclos económicos observados, de duración, profundidad y recurrencia irregular. Es posible explicarlo por la inaplicabilidad de la cláusula *ceteris paribus*, pero entonces el reto es incorporar progresivamente los factores desconocidos. Tal y como señala Russell (1914: 230) cuando la relación constante entre grupos de hechos falla en algún momento, “it is usually possible to discover a new, more constant relation by enlarging the group”.

La teoría keynesiana posterior ha sostenido el corazón conceptual, que afirma que los mercados pueden no vaciarse, y el desempleo involuntario es posible a largo plazo; pero lo ha hecho sobre modelos renovados. Por un lado, han buscado fundamentos microeconómicos para la rigidez temporal de precios y la incertidumbre en el riesgo percibido. Dejando el comienzo de los ciclos a un cambio inicial en la demanda efectiva, exógeno, pero del que se supondría es determinado. Por otro, se ha intentado introducir en modelos DSGE los mecanismos nekeynesianos de propagación del ciclo. En una mezcla conceptualmente compleja y heterogénea.

El criterio operacionalista adoptado exige que exista, para tener contenido empírico, un procedimiento de medición que establezca la referencia observable con precisión. Criterio que se exige del concepto azar y, por lo tanto, del determinismo como relación unívoca en valores del sistema a lo largo del tiempo. Pero los teoremas de Chaitin demuestran que el concepto azar

no ofrece ese procedimiento de medición: no podemos saber con certeza si una serie de datos cumple o no, por lo que es preciso concluir que es un concepto puramente teórico. Igualmente lo es el determinismo. Los enunciados que utilizan procesos aleatorios, o los niegan para afirmar series determinísticas, carecen de referencia empírica: no pueden, ni podrán nunca, ser verificados ni falsados con certeza.

Como los enunciados y ecuaciones que utilizan conceptos o variables relacionados con el concepto azar, en positivo o en negativo, no tienen referencia empírica, ni poseen valor de definición o tautología (pues añaden información); lo único que pueden poseer es un valor heurístico. Serían propuestas de investigación. Podemos suponer que los datos observados son producidos por un modelo determinístico. Y podemos suponer, por contra, que son producidos por una serie de variables aleatorias. Quien determina estos supuestos es la teoría. Empíricamente no es posible decidir entre ambas posibilidades. Por lo tanto, no son enunciados probados, sino propuestas de investigación.

Azar y determinismo serían, así pues, dos programas incompatibles que ayudan a construir modelos sí evaluables teóricamente y contrastables cuantitativamente. Más o menos plausibles. Incluso con resultados claramente rechazables, en algunos casos, desde la coherencia con la teoría general, y desde las series de datos. Pero la selección y posible rechazo de los modelos no implica la respuesta final y definitiva al problema de si los fenómenos cíclicos se comportan de una u otra manera. Es un límite infranqueable del conocimiento humano.

La discusión histórica entre modelos del ciclo económico estocásticos y modelos determinísticos, no puede concluirse. Al igual que en cualquier otro campo científico que utilice estos conceptos como proyectos de investigación.

Finalmente, si pedimos que la ciencia prediga, o, al menos, nos resulta más útil que lo haga, con el objetivo final de evitar errores en las políticas económicas; entonces las teorías determinísticas dan un paso más lejano en la utilidad de la ciencia. Los modelos del ciclo y el crecimiento de la teoría clásica no pueden predecir. Los modelos keynesianos con factores endógenos y evolución determinística constituyen una propuesta más ambiciosa.

## **9. Bibliografía.**

Álvarez Vázquez, N. J. (1996). *Introducción a la Evolución de la Metodología de la Econometría*. Madrid: UNED.

Álvarez Vázquez, N. J. (2004). *Econometría II. Análisis de Modelos Econométricos de Series Temporales*. Madrid: Ediciones Académicas.

Azariadis, C. (1981). Self-fulfilling prophecies. *Journal of Economic Theory*, 25 (3), 380-396.

Azariadis, C., Kaas, L. y Wen, Y. (2015). Self-fulfilling credit cycles. *Federal Reserve Bank of St. Louis*, Working Paper 2015-005A.

Barnett, V. (2006). Chancing an interpretation: Slutsky's random cycles revisited. *The European Journal of the History of Economic Thought* 13(3), 411 – 432.

Benhabib, J. y Farmer, R.E.A (1994). Indeterminacy and increasing returns. *Journal of Economic Theory* 63, 19-41.

Benhabib, J. y Farmer, R.E.A (1999). Indeterminacy and sunspots in macroeconomics. En *Handbook of Macroeconomics*, Amsterdam: North Holland.

- Benhabib, J. y Nishimura, K. (1996). Indeterminacy and sunspots with constant returns. *Journal of Economic Theory*, 81(1), 58-96.
- Blanchard O.J., Kiyotaki, N. (1987). Monopolistic competition and the effect of aggregate demand. *American Economic Review* 77(4), 647-66.
- Bricmont, J. (2004). Determinism, chaos and quantum mechanics.
- Bridgman, P. W. (1927). *The Logic of Modern Physics*. New York: Macmillan.
- Calude, C.S. (2002). Incompleteness, complexity, randomness and beyond. *Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Research Report 166.
- Calude, C.S. y Stay, M.A. (2004). From Heisenberg to Gödel via Chaitin. *Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Research Report 235.
- Chaitin, G. J. (1975). Randomness and mathematical proof. *Scientific American*, 232 (5), 47-52.
- Chaitin, G. J. (2004), Meta math!. The quest for Omega. *arXiv:math/0404335v7* [math.HO].
- Chaitin, G.J. (2006). The limits of reason. *Scientific American*, 294 (3), 74-81.
- Chari, V. V., Kehoe, P. J., McGrattan, E. R. (2009). New Keynesian models: Not yet useful for policy analysis. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 1 (1), 242-266.
- Chatterjee, S. (2000). From cycles to shocks: Progress in business-cycle theory. *Federal Reserve Bank of Philadelphia, Business Review*, 3, 27-37.
- Cho, J.O y Cooley, T.F. (1991). The business cycle with nominal contracts. *Economic Theory*, 6(1), 13-33.
- Cho, J.O. y Cooley, T.F. (1994). Employment and hours over the business cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 411-432.
- Diebold, F.X. y Rudebusch, G. (1996). Measuring business cycles: A modern perspective. *Review of Economics and Statistics*, 78, 67-77.
- Dobrescu, M., Paicu, C.L. (2012). New approaches to business cycle theory in current economic science. *Theoretical and Applied Economics*, 19 (7), 147-160.
- Duffy, J. y Xiao, W. (2003). Instability of sunspot equilibria in real business cycle models under adaptive learning. *Department of Economics and Finance, Working Paper* 3.
- Ekkehard E. y Stockhammer, E. (2003). Macroeconomic Regimes. Business Cycle Theories Reconsidered. *Center for Empirical Macroeconomics, Working Paper* 99.
- Farmer, R.E.A. y Guo, J-T. (1994). Real business cycles and the animal spirits hypothesis. *Journal of Economic Theory*, 63 (1), 42-72.
- Farmer, R.E.A. (2012). The evolution of endogenous business cycles. *NBER Working Paper* 18284.
- Farmer, R.E.A. y Platonov, K. (2016). Animal Spirits in a Monetary Economy. *NBER Working Paper* 22136.

Farmer, R.E.A. y Woodford, M. (1984). Self-fulfilling prophecies and the business cycle. CARESS Working Paper 84-12.

Frey, G. (1972). *La Matematización de Nuestro Universo*. Madrid: G. Del Toro.

Frisch, R. (1931). A Method of decomposing an empirical series into its cyclical and progressive components. *Journal of the American Statistical Association*, 26 (173), 73-78.

Frisch, R. (1933). *Propagation problems and impulse problems in dynamic economics*. London: George Allen & Unwin LTD.

Gali, J. y Rabanal, P. (2004). Technology shocks and aggregate fluctuations: How well does the RBS model fit postwar U.S. data? *NBER Working Paper* 10636.

Gillies, D. A. (1972). Operationalism. *Synthese* 25, 1-24.

Greenwald, B.C. y Stiglitz, J.E. (1986). Externalities in economies with imperfect information and incomplete markets. *The Quarterly Journal of Economics*, 101 (2), 229-264.

Greenwald, B.C. y Stiglitz, J.E. (1993). Financial market imperfections and business cycles. *The Quarterly Journal of Economics*, 108 (1), 77-114.

Hairault J.O., Portier F. (1993). Money, new-Keynesian macroeconomics and the business cycle. *European Economic Review*, 37(8), 1533-1568.

Hansen, L.P. (2014). Uncertainty outside and inside economic models. *NBER Working Paper* 20394.

Hausman, D.M. (1989). Economic Methodology in a Nutshell, *The Journal of Economic Perspectives*, 3 (2), 115-127.

Hempel, C. G. (1950). Problems and changes in the empiricist criterion of meaning. *Revue Internationale De Philosophie*, 41, 41-63.

Keynes, J.M. (2008). *The General Theory of Employment, Interest, and Money*. New Delhi: Atlantic Publishers.

Kindleberger, C.P. (1985). Bank failures: The 1930s and the 1980s. *Proceedings*, 6, 7-52.

King, R.G. y Plosser, C.I. (1984). Money, credit, and prices in a real business cycle. *American Economic Review*, 74 (3), 363-380.

King, R.G., Plosser, C.I. y Rebelo, S.T. (1988). Production, growth and business cycles: I. The basic neoclassical model. *Journal of Monetary Economics*, 21 (2-3), 195-232.

Kondratieff, N.D. y Stolper, W.F., (1935). The long waves in economic life. *The Review of Economics and Statistics*, 17(6), 105-115.

Kuznets, S. (1929). Random events and cyclical oscillations, *Journal of the American Statistical Association*, 24 (167), 258-275.

Kydland, F.E. y Prescott, E.C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 50 (6), 1345-1370.

- Kydland, F.E. y Prescott, E.C. (1990). Business cycles: Real facts and a monetary myth. Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review* 14(2), 3-18.
- L'Ecuyer, P., Simard, R y Wegenkittl, S. (1998). Sparse serial tests of uniformity for random number generators. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2), 652–668.
- Long, J.B. y Plosser, C.I. (1983). Real business cycles. *Journal of Political Economy*, 91(1), 39-69.
- Lucas, R.E.J. (1972). Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory*, 4 (2), 103-124.
- Lucas, R.E.J. (1977). Understanding business cycles. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 5 (1), 7-29.
- Mankiw, N.G. (1989). Real business cycles: A new Keynesian perspective. *The Journal of Economic Perspectives*, 3 (3), 79-90.
- Mario Parra, C. y Suárez, J. A. (2006). Sobre dos teoremas de incompletez de Chaitin. *Lecturas Matemáticas*, 161-174.
- McGough, B., Meng, Q. y Xue, J. (2013). Expectational stability of sunspot equilibria in non-convex economies. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 37, 1126-1141.
- Minsky, H.P. (1986). *Stabilizing an Unstable Economy*. New Haven: Yale University Press.
- Moran, P. A. P. (1949). The statistical analysis of the sunspot and Lynx cycles. *The Journal of Animal Ecology*, 18 (1), 115-116.
- Moran, P. A. P. (1950). The oscillatory behaviour of moving averages. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 46 (2), 272-280.
- Muth, J.F. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*, 29 (3), 315-335.
- Nagel, E. (2006). *La Estructura de la Ciencia*. Barcelona: Paidós.
- Nelson, C. y Plosser, C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10 (2), 139-162.
- Oppers, S.E. (2002). The Austrian theory of business cycles: Old lessons for modern economic policy. *IMF Working Paper* 02/2.
- Pollock, D.S.G. (1987). Methods of time-series analysis, *Interdisciplinary Science Reviews* 12 (2),
- Pollock, D.S.G. (2014). Cycles, syllogisms and semantics: Examining the idea of spurious cycles. *University of Leischester*, Working Paper 14/03.
- Prescott, E.C. (1986). Theory ahead of business cycle measurement. *Quarterly Review*, 10 (4), 9-25.
- Quine, W.V. (1951). Main trends in recent philosophy: Two dogmas of empiricism. *The Philosophical Review*, 60 (1), 20-43.

- Romer, D. (2006). *Macroeconomía Avanzada*. Madrid: McGraw-Hill.
- Romer, P.M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *The Journal of Political Economy*, 94 (5), 1002-1037.
- Russell, B. (1914). *Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*. London: George Allen & Unwin LTD.
- Sala-I-Martin, X. (1994). *Apuntes de Crecimiento Económico*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.
- Samuelson, P. (1958). An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *The Journal of Political Economy*, 66(6), 467-482.
- Shell, K. (1977). Monnaie et allocation intertemporelle. *Centre National de la Recherche Scientifique, Séminaire Malinvaud* (noviembre 21,1977).
- Schmitt-Grohe, S. y Uribe, M. (2000). Price level determinacy and monetary policy under a balanced-budget requirement. *Journal of Monetary Economics*, 45(1), 211-246.
- Schmitt-Grohe, S. (2000). Endogenous business cycles and the dynamics of output, hours, and consumption. *American Economic Review*, 90 (5), 1136-1159.
- Slutsky, E. (1937). The summation of random causes as the source of cyclic processes. *Econometrica*, 5 (2), 105-146.
- Solís, F. (2013). Uncertainty, incompleteness, chance and design. *arXiv: 1301.7036*.
- Spear, S. (1984). Sufficient conditions for the existence of sunspot equilibria. *Journal of Economic Theory*, 34 (2), 360-370.
- Standler, G. W. (1994). Real business cycles. *Journal of Economics Literature*, 32, 1750-1783.
- Tobin, J. (1995). The natural rate as new classical macroeconomics. En R. Cross (ed.), *The Natural Rate of Unemployment: Reflections on 25 years of the Hypothesis*, New York: Cambridge University Press
- Volchan, S.B. (2002). What Is a random sequence? *The Mathematical Association of America* (109), 46-63.
- Wen. Y. (1998). Capacity utilization under increasing returns to scale. *Journal of Economic Theory*, 81, 7-36.
- Whitta-Jacobsen H.J. (2002). Endogenous Keynesian business cycles. *Institute of Economics, Discussion papers* 2002 (15).
- Woodford, M. (1990). Learning to believe in sunspots. *Econometrica*, 58 (2), 277-307.
- Yule, G. U. (1926). Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series?. A Study in sampling and the nature of time-series. *Journal of the Royal Statistical Society*, 89 (1), 1-63.
- Zahringer, K. A. (2012). Monetary Disequilibrium Theory and Business Cycles: An Austrian Critique. *Quarterly Journal of Austrian Economics*, 15 (3), 304-330.