Graphs theory, reciprocal stockholding in accounting consolidation

Guérin, Michel and Pouget, Jean

ESCP-Europe, Université Paris IX - Dauphine

June 1972

Graphs Theory, Reciprocal Stockholdings
In Accounting Consolidation

Abstract :

Until this article published by the journal of French CPA, the regular computation of shareholding interests in consolidating financial accounts for large groups was to cut the financial link when there were reciprocal or circular participation. This article has radically changed the method by using a matrix algebra algorithm and also with the use of a fictitious mother holding company.

Before this new method, the usual computation was mathematically wrong. The use of a matrix method, as it is here explained, gives easily all the correct percentages of interests when consolidating a group with complex subsidiaries.

Furthermore the method of matrix algebra allows to reconcile all the interco flows and all reciprocal statement accounts.

Bibliography :

- « Mémento Comptes consolidés », 1ère édition, Editions Francis Lefebvre, Pwc, France

- « Bogie on group accounts », Third edition, edited by John C. Shaw, Jordan & sons limited, Bristol 1973

- « A Student's Guide to Group Accounts », by Tom Clemdon ,1 Oct 2012, Publisher: Kaplan Publishing, 2nd edition edition ISBN-10: 085732764X , ISBN-13: 978-0857327642

- « Accounting for Groups : Theory and Practice », by Patricia (Associate Dean Barker, Cengage Learning (10 Mar. 2010).

- « Consolidation. Preparing and Understanding Consolidated Financial Statements under Ifrs Paperback » McGraw-Hill Education (10 Oct. 2013) by Carlo Gallimberti (Author), Antonio Marra (Contributor), Annalisa Prencipe (Contributor)

- IFRS 10 « Consolidated Financial Statements » , Deloitte, http://www.iasplus.com/en/standards/ifrs/ifrs10

- « Solutions Manual to accompany Company Accounting 10e » prepared by Ken Leo John Hoggett John Sweeting Jeffrey Knapp Sue McGowan John, Editor Wiley & Sons Australia, Ltd 2015

« Modern Advanced Accounting, 10/e » by E. John Larsen, University of Southern California (2006)
http://highered.mheducation.com/sites/0072922559/information_center_view0/index.html

THÉORIE DES GRAPHES, PARTICIPATION RÉCIPROQUE ET CONSOLIDATION

par Michel GUERIN,

E.S.C.P., chargé d'enseignement à l'Université Paris-Dauphine, séminaire de 3e cycle « stratégie financière de la firme ».

et Jean POUGET,

E.S.C.P., docteur en gestion, Université Paris-Dauphine, France-Placement, groupe Suez.

Le développement des sociétés holding rend plus ou moins rapidement inextricables les liaisons financières qui constituent le groupe. Les prises de participations, qu'elles soient directes ou indirectes, réciproques ou non, construisent un réel labyrinthe dans lequel se perd parfois l'analyste financier et à coup sûr quiconque désirant les étudier de l'extérieur.

La représentation matricielle d'un groupe fortement enchevêtré devient parfois l'ultime moyen pour voir clair dans ces écheveaux tissés à coup d'opérations financières plus ou moins complexes.

Appliquée depuis peu de temps à ces problèmes, la théorie des graphes fournit un outil d'analyse puissant.

La thèse de M. Jean Biabaut (1) consacrée aux « Liaisons financières dans les groupes de sociétés » en est un exemple. En ce qui nous concerne, nous proposerons plus modestement un simple développement à cette brillante recherche. Il traitera de la résolution du problème posé par les graphes fortement connexes dans la consolidation des participations.

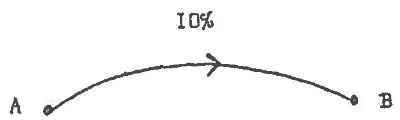
Représentation graphique d'un groupe

Un groupe peut se représenter aisément au moyen d'un graphe si les liaisons financières sont peu nombreuses.

Le sens des flèches indiquera alors le sens de la participation, celle-ci étant appelée « chemin » ; chaque société du groupe est appelée « sommet ».

Si la société « A » détient 10 % de la société « B » alors « A » est dit **précédent** et « B » **suivant.** On obtient ainsi :

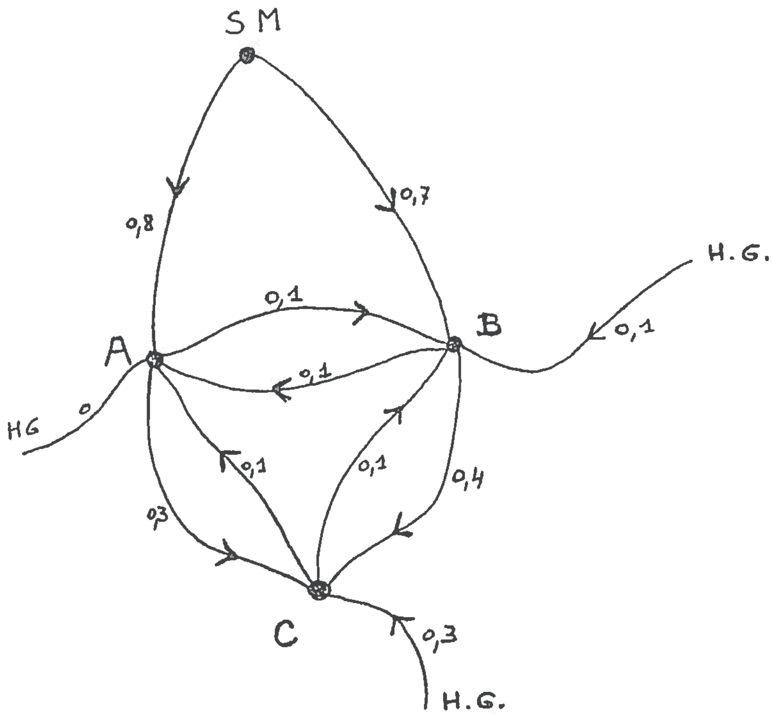
Fig. I



Pour représenter intégralement un groupe il convient aussi de tenir compte des participations extérieures dans le capital des sociétés appartenant à ce groupe. Ceci nous conduit donc à introduire le concept de « hors groupe » (HG).

(1) Jean BIABAUT. — *Les liaisons financières dans les groupes de sociétés*, Metra n° 13, février 1969.

Exemple de groupe : **Fig. II** SM = société mère



Représentation matricielle

A tout graphe il est possible d'associer une matrice, identifiant les sommets. On peut ainsi construire la « matrice des participations » associée au graphe d'un groupe de sociétés. L'expression booléenne d'un graphe représentatif d'un groupe indiquera au moyen d'un « 0 » ou d'un « 1 » l'absence ou l'existence de relation financière liant les sociétés du groupe — soit entre elles, soit au hors groupe —. Mais la prise en compte des pourcentages de participations à la place du « 1 » enrichit considérablement la matrice par amélioration de l'information.

Exemple de « matrice de participations » :

Le groupe cité à la figure II peut se représenter :

Tableau 1

	SM	A	B	C	HG
SM	1	0,8	0,7	0	0
A	0	0	0,1	0,3	0
B	0	0,1	0	0,4	0
C	0	0,1	0,1	0	0
HG	0	0	0,1	0,3	1

Cette matrice présente la particularité d'avoir des zéros sur la diagonale, exception faite pour la société-mère et le hors-groupe. Les colonnes SM et HG ne présentent que des zéros sauf sur la diagonale où l'on trouve la valeur 1.

La somme de chaque colonne est égale à l'unité et représente la totalité des participations constituant le capital de chaque société. On constate donc au vu de cette matrice que la société mère et le hors-groupe se contrôlent eux-mêmes. Ces sommets sont autonomes.

Graphe fortement connexe et chaînes de Markov

On définit la notion de forte connexité comme la « possibilité d'atteindre par un chemin n'importe quel sommet à partir de n'importe quel autre » (2). Dans la figure II le graphe fortement connexe est représenté par les sommets A, B et C. Chaque sommet a un « précédent » et un « suivant ». Si l'on examine le graphe formé par les sommets ABC, on constate que l'ensemble des « suivants » est identique à l'ensemble des « précédents ». Les sommets de ce graphe forment une classe transitoire. Les sommets HG et SM forment au contraire une classe finale. Les classes finales ont la propriété d'absorber les classes transitoires. Cette absorption est totale lorsque la matrice est stochastique, c'est-à-dire lorsque la somme de chaque colonne est égale à 1. Dans notre cas la classe finale formée par SM et HG absorbe toutes les participations, ces sommets se partageant le groupe. Pour trouver ces participations on élève la matrice à la puissance n, n tendant vers l'infini et seules les lignes HG et SM augmentent de valeur alors que les autres lignes se vident au fur et à mesure. On trouve à la puissance n dans les lignes SM et HG les participations consolidées de la société mère et du hors-groupe dans le capital des sociétés du groupe.

Pour résoudre ce problème des participations indirectes et réciproques, nous avons aussi utilisé une propriété des chaînes de Markov avec état absorbant.

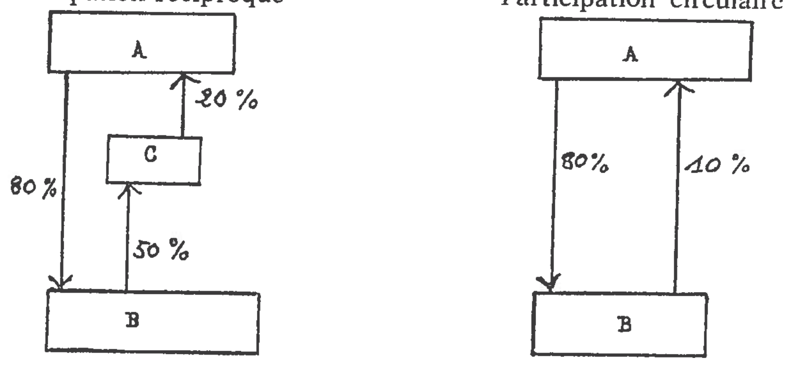
Consolidation de groupe avec participations croisées

Supposons un groupe tel qu'il puisse être représenté par le graphe donné en exemple dans la figure II et dont la matrice des participations qui lui est associée soit le tableau 1. Il est intéressant de pouvoir calculer rapidement le pourcentage des participations consolidées de la société mère (SM) et du hors-groupe (HG) ou encore intérêt minoritaire dans ces différentes sociétés.

Remarquons tout d'abord que l'existence de telles structures est en règle générale ignorée par les ouvrages consacrés à la consolidation. En effet, les exemples qui sont habituellement livrés ne montrent que des structures soit arborescentes soit en étoile. En ce qui concerne les participations croisées, même les recommandations du Conseil national de la Comptabilité (3) en matière de consolidation ne semblent connaître que deux situations considérées comme générales :

Fig. III

Participation réciproque — Participation circulaire



(2) B. ROY. — *Algèbre moderne et théorie des graphes.* Dunod.

(3) *Conseil national de la Comptabilité, Ministère de l'Economie et des Finances : consolidation des bilans et des comptes.* Imprimerie nationale, 1968.

Ce qui est une vue étroite de la réalité.

Notons en outre que la méthode qui consiste à éliminer les participations réciproques est incorrecte, ce que nous démontrerons plus loin.

Soit donc le groupe à consolider défini par la matrice du tableau 1. Elevons cette matrice à des puissances successives. Nous obtenons :

Tableau 2

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,87 & 0,78 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0,03 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0,05 & 0,03 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0,01 & 0,07 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0,13 & 0,34 & 1 \end{bmatrix}$$

Tableau 3

$$X^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0,9483176 & 0,8573985 & 0,6271006 & 0 \\ 0 & 0,0000896 & 0,0000897 & 0,0002131 & 0 \\ 0 & 0,0001009 & 0,0001008 & 0,0002380 & 0 \\ 0 & 0,0000673 & 0,0000773 & 0,0001232 & 0 \\ 0 & 0,0314246 & 0,1423337 & 0,3723051 & 1 \end{bmatrix}$$

La convergence n'est pas rapide, mais on s'arrête lorsque le degré de précision que l'on s'accorde est atteint. Par approximation linéaire on trouve :

Tableau 4

$$X^n = \begin{bmatrix} 1 & 0,9485634 & 0,8576288 & 0,6274750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0514376 & 0,1423712 & 0,3725250 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi la participation de la société mère et du hors-groupe dans les différentes sociétés du groupe.

Supposons maintenant que $X = A + B$.

Soit :

Tableau 5

$$X = \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}} \underset{+}{+} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

On démontre que si $n \to \infty$ alors $X^n = B(I - A)^{-1}$ avec I = matrice unité.

Pour éviter de rendre cet exposé trop lourd nous laisserons de côté la démonstration mathématique. On obtient pour l'exemple considéré :

Tableau 6

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}94852 & 0{,}85761 & 0{,}62760 & 0 \\ 0 & 1{,}05148 & 0{,}142388 & 0{,}372399 & 0 \\ 0 & 0{,}153341 & 1{,}06243 & 0{,}470975 & 0 \\ 0 & 0{,}120482 & 0{,}120482 & 1{,}08434 & 0 \\ 0 & 0{,}0514786 & 0{,}142387 & 0{,}372399 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

Tableau 7

$$X'' = B(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}94852 & 0{,}83761 & 0{,}62760 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05148 & 0{,}14239 & 0{,}37240 & 1 \end{bmatrix}$$

Les résultats sont plus précis que ceux du tableau 4.

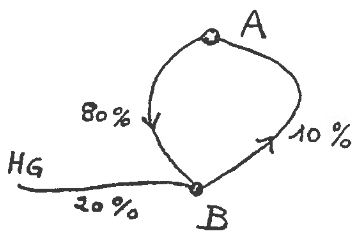
Remarquons enfin que si nous calculons $(I - A)^{-1} - I$ on obtient une matrice qui explique toutes les participations du groupe :

La société A détient donc 5,148 % d'elle-même et 37,240 % de la société C.

Le piège des participations croisées

Nous démontrons ici l'inexactitude de la recommandation du Conseil National de la Comptabilité. Soit à consolider le groupe suivant par rapport à la société A.

Fig. IV



La recommandation officielle du Conseil national de la Comptabilité dit : « En cas de participation réciproque la part du groupe dans les titres de la société consolidante détenus par la société consolidée est éliminée de l'actif consolidé, cette élimination se répercutant sur la différence de consolidation. »

Consolidons les participations selon notre méthode en imaginant une société mère fictive (SMF) qui détiendrait 90 % du capital de la société A.

Nous obtenons la matrice de participations :

Tableau 8

X =

	SMF	A	B	HG
SMF	1	0,9	0	0
A	0	0	0,8	0
B	0	0,1	0	0
HG	0	0	0,2	1

d'où :

Tableau 9

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}97826 & 0{,}7826 & 0 \\ 0 & 1{,}008695 & 0{,}8695 & 0 \\ 0 & 0{,}1087 & 1{,}08695 & 0 \\ 0 & 0{,}02174 & 0{,}2174 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

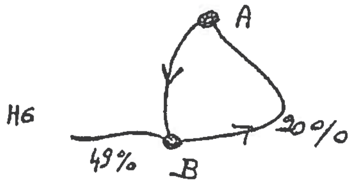
Tableau 10

$$X'' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}97826 & 0{,}7826 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2174 & 0{,}2174 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour consolider ce groupe il faut donc prendre 97,8 % du capital de la société A et 78 % de la société B et non 90 % et 80 %.

De la même façon, si nous prenons comme exemple le cas cité par M. Michel Dupuis (4), nous avons la structure suivante :

Fig. V



Nous obtenons alors :

$$X'' = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}892 & 0{,}454 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}108 & 0{,}545 & 1 \end{bmatrix}$$

Il faut donc consolider 89,2 % du capital de la société A et 45,4 % de celui de la société B et non 80 % et 49 %.

Cette différence vient de la structure « bouclée » du groupe.

Les recommandations oficielles négligent cet aspect itératif, ce qui à nos yeux est contraire à la réalité.

Notons toutefois que M. Merme, dans son ouvrage (5), présente la variante de Th. B. Robson. Ce dernier, pour tenir compte de l'effet itératif, utilise dans le cas de deux sociétés avec participation croisée, la formule de la progression géométrique, ce qui est exact.

Mais au-delà de deux sociétés cette méthode devient inapplicable.

Soulignons encore que la méthode traditionnelle conduit à une différence de consolidation comportant une erreur de calcul. Par notre méthode cette différence traduit une différence d'évaluation, ce qui est plus conforme à la réalité économique.

La méthode que nous venons d'employer pour calculer la participation consolidée de la société mère dans ces groupes enchevêtrés est en fait d'application générale.

---

(4) Michel DUPUIS. — *La consolidation des bilans dans le Marché commun*, Entreprise moderne d'édition.

(5) G. MERME. — *Le bilan consolidé, rôle et présentation*. Delachaux et Niestlé.

Conclusion

Nous avons résolu le cas le plus complexe ; cette technique résout parfaitement le problème posé par tous les groupes, quels qu'ils soient, pourvu que la matrice de participation soit construite avec des états absorbants.

Le cas est simple quand le graphe est ordonné et quand le nombre des sociétés qui constituent le groupe permet un traitement par ordinateur. Il en va autrement lorsque le nombre des sociétés du groupe n'autorise pas un traitement global pour des raisons soit de coût soit de capacité de mémoire.

Il faut alors réduire le graphe, l'ordonner, le couper, et déterminer quelles sociétés seront à consolider par intégration globale ou bien par équivalence.

Tout cela sort de notre propos. Mais nous quitterons le lecteur en le rassurant : cela est faisable et a été fait en un temps machine très court pour un groupe plus que respectable.

Bibliography

- « Mémento Comptes consolidés », 1ère édition, Editions Francis Lefebvre, Pwc, France

- « Bogie on group accounts », Third edition, edited by John C. Shaw, Jordan & sons limited, Bristol 1973

- « A Student's Guide to Group Accounts », by Tom Clemdon ,1 Oct 2012, Publisher: Kaplan Publishing, 2nd edition edition ISBN-10: 085732764X , ISBN-13: 978-0857327642

- « Accounting for Groups : Theory and Practice », by Patricia (Associate Dean Barker, Cengage Learning (10 Mar. 2010).

- « Consolidation. Preparing and Understanding Consolidated Financial Statements under Ifrs Paperback » McGraw-Hill Education (10 Oct. 2013) by Carlo Gallimberti (Author), Antonio Marra (Contributor), Annalisa Prencipe (Contributor)

- IFRS 10 « Consolidated Financial Statements » , Deloitte, http://www.iasplus.com/en/standards/ifrs/ifrs10

- « Solutions Manual to accompany Company Accounting 10e » prepared by Ken Leo John Hoggett John Sweeting Jeffrey Knapp Sue McGowan John, Editor Wiley & Sons Australia, Ltd 2015

- « Modern Advanced Accounting, 10/e » by E. John Larsen, University of Southern California (2006) http://highered.mheducation.com/sites/0072922559/information_center_view0/index.html