Comparative statics and sign indeterminacy in a simple neoclassical macroeconomic model

Cendejas Bueno, José Luis

Universidad Francisco de Vitoria

7 December 2016

Comparative statics and sign indeterminacy in a simple neoclassical macroeconomic model

José Luis Cendejas Bueno[(*)]
Universidad Francisco de Vitoria

Abstract: In this paper, we analyse a simple two-period neoclassical macroeconomic model -short and long term- that exclusively considers the real sector of the economy (labour and goods markets). It is shown how, under a general characterization, some important signs of comparative statics are undetermined. This ambiguity is a consequence of the ubiquity of the real interest rate tying intertemporarily the four markets considered. By adding simplifying assumptions, the signs are determined at the cost of losing generality and empirical adequacy. This fact limits the empirical relevance of a large part of the models commonly used in teaching macroeconomics, where ambivalent results are avoided because of the need of clear answers on the effects of fiscal and monetary policy interventions. Taking a positive view, these results compels to take general interdependence seriously and to pay more attention to the complete set of theoretical possibilities that arise when modelling macroeconomic systems.

Keywords: neoclassical macroeconomics, intertemporal choice, teaching of macroeconomics

JEL codes: E13, B41, A20

Estática comparativa e indeterminación de signos en un modelo macroeconómico neoclásico sencillo

Resumen: En este trabajo se analiza un modelo macroeconómico neoclásico sencillo de dos periodos -corto y largo plazo- que considera exclusivamente el sector real de la economía (mercados de bienes y de trabajo). Se comprueba cómo, bajo una caracterización general, algunos signos importantes de la estática comparativa están indeterminados. Esta ambigüedad está causada por la presencia del tipo de interés real que liga intertemporalmente los cuatro mercados considerados. Añadiendo supuestos simplificadores se consigue determinar los signos al coste de una pérdida de generalidad y admisibilidad empírica. Este hecho limita considerablemente la relevancia empírica de buena parte de los modelos utilizados habitualmente para la enseñanza de la macroeconomía, donde se evitan resultados de este tipo, dado que se persigue fundamentalmente responder a preguntas sobre el sentido de las intervenciones de política fiscal y monetaria. Leído positivamente, este resultado obliga a prestar una mayor atención a todas las posibilidades teóricas que surgen al modelizar sistemas de interdependencia general, como son los propios de la macroeconomía.

Palabras clave: macroeconomía neoclásica, elección intertemporal, enseñanza de la macroeconomía

[(*)]E-mail: jl.cendejas@ufv.es. Grant #3/2016 of the Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales "Francisco de Vitoria" is acknowledged. Postal adress: Universidad Francisco de Vitoria. Ctra. Pozuelo-Majadahonda Km. 1.800. 28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid, Spain)

Introducción

En buena parte de las universidades de todo el mundo, la enseñanza de la macroeconomía se basa en manuales de amplia divulgación (e.g. Blanchard; Mankiw; Dornbusch, Fisher & Starz; Abel & Bernanke) en los que ocupa un lugar central, tras 80 años de su exposición por Hicks (1937), el modelo IS-LM. Sobre un esquema básico de equilibrio estático de los mercados de bienes y monetario, donde la producción puede variar irrestrictamente a un precio dado, se añade luego un lado de la oferta sobre el cual reside la caracterización de tipo predominantemente neoclásico o nuevo keynesiano que finalmente adquiera el modelo completo. El largo plazo se supone gobernado por un lado de la oferta neoclásico donde el dinero es neutral o superneutral y predomina el pleno empleo. La ecuación de crecimiento de Solow[1] recogería aceptablemente, al menos a efectos expositivos para un nivel introductorio de enseñanza, este tipo de dinámica.

Tanto la renovación de la teoría del crecimiento de los años 80 como la revolución neo-neoclásica (monetarismo, nueva economía clásica, ciclo real de equilibrio) llevaron a alterar, bien la relevancia, bien el orden de exposición de los temas. A diferencia de lo que sucedía antes de esas fechas, es frecuente exponer como punto de partida el fenómeno del crecimiento (e.g. Barro, Dornbusch *et al.*, Mankiw, Abel & Bernanke, Romer, Burda & Wyplosz, Sørensen & Whitta-Jacobsen) para pasar luego al corto o medio plazo en el cual la dinámica suele ser de tipo nuevo keynesiano: ecuaciones de salarios y de precios con rigideces, y curvas de Phillips basadas en la NAIRU, condiciones necesarias para que el dinero no resulte neutral. De otro modo, la política monetaria sería no ya ineficaz, como en la nueva economía clásica, sino irrelevante, como la concibe el ciclo real de equilibrio. Si bien queda apuntada en los manuales intermedios una microfundamentación más rigurosa, se deja esta para manuales de nivel más avanzado (e.g. Blanchard & Fischer, Romer, Sargent) que utilizan como modelo de referencia para el largo plazo el modelo de crecimiento óptimo de Cass-Koopmans[2], aunque, de nuevo, no pueden evitar aterrizar en el IS-LM ampliado con un lado de la oferta nuevo keynesiano para explicar la dinámica de corto y medio plazo, esto es, las oscilaciones cíclicas y la no neutralidad monetaria en ese plazo como su causa fundamental.

En el cambio de énfasis desde las macromagnitudes a los microfundamentos de la macroeconomía, ocupan un lugar inevitable los modelos de elección intertemporal[3] para el análisis de decisiones que lo son propiamente (consumo, ahorro e inversión). En la

[1] El modelo de Solow es una ecuación dinámica que recoge el proceso de ajuste desde una situación de inversión per cápita neta no nula hacia un estado estacionario en el cual el capital per cápita permanece constante. Se trata de un modelo de equilibrio parcial del mercado de bienes sin tipo de interés real explícito.

[2] explícitamente "microfundamentado": a diferencia del modelo de Solow, en este la tasa de ahorro resulta de un plan óptimo de consumo intertemporal. A pesar de enriquecer de este modo la dinámica *backward looking* del modelo de Solow, continúa siendo un modelo de equilibrio parcial que considera solo el mercado de bienes.

[3] con su origen en Fisher (1930) y "restablecido" por Friedman (1957).

macroeconomía microfundamentada, la homogeneidad de grado cero de las funciones de demanda hace irrelevantes los precios monetarios mientras los precios relativos no se vean afectados, y en ese marco siempre existirá el problema de cómo conseguir que el dinero no resulte neutral, algo que empíricamente parece corroborado. Pero aun prescindiendo del dinero y aceptando los choques de la productividad como origen del ciclo, la presencia de vínculos intertemporales en el "sector real" de la economía no consigue eliminar plenamente las dificultades que surgen cuando se analiza un sistema de interdependencia general de cierta complejidad, y es que, a falta de una parametrización concreta, frecuentemente no se puede descartar que pueda suceder cualquier cosa.

En este trabajo analizamos precisamente un modelo macroeconómico neoclásico sencillo de dos periodos, asimilables al corto y al largo plazo, que considera exclusivamente el sector real de la economía (mercados de bienes y de trabajo). Se comprueba que, por causa precisamente de la caracterización general realizada, algunos de los signos relevantes de la estática comparativa están indeterminados. Esta ambigüedad se debe a la presencia del tipo de interés real que liga intertemporalmente los cuatro mercados considerados. Añadiendo supuestos simplificadores (ofertas de trabajo exógenas y factores productivos independientes) se consigue una determinación de los signos al coste de una pérdida de generalidad y admisibilidad empírica. Este hecho limita considerablemente la relevancia empírica de buena parte de los modelos utilizados habitualmente para la enseñanza de la macroeconomía donde se realizan supuestos similares[4] para evitar estas complicaciones. O leído de otra manera, obliga a prestar una mayor atención a todas las posibilidades teóricas que se derivan de cualquier tipo de modelización de sistemas de interdependencia general.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la sección 1 se obtienen las funciones de decisión de las economías domésticas: funciones de consumo y de oferta de trabajo, presentes y futuras. La agregación efectuada nos permite considerar la población, presente y futura, como componente explícito de la riqueza, y su influencia en los agregados correspondientes. En la sección 2 se obtienen las demandas de trabajo y ofertas de producto de ambos periodos para las empresas, así como la demanda de inversión. En la sección 3 se añade la consideración del sector público mediante el principio de equivalencia ricardiana. En la sección 4 se plantea el equilibrio del sistema y se resuelve el vector de precios mediante una aproximación lineal. Se comprueba la indeterminación de signos por los efectos opuestos que tiene el tipo de interés real sobre determinadas variables. En la sección 5 se eliminan las interacciones que producían esta indeterminación suponiendo ofertas de trabajo exógenas y factores productivos independientes. En la sección 6 se analiza la estática comparativa de mejoras tecnológicas en ambos periodos en la línea del ciclo real de equilibrio. De nuevo, surge ambigüedad en uno de los signos, el correspondiente al tipo de interés.

1. Las decisiones de las economías domésticas

Para una economía doméstica (posteriormente se agrega para todas ellas, prescindimos hasta entonces del subíndice i para no complicar la notación), los recursos de $t = 0$ son:

[4] En la curva IS habitual, la función de consumo no depende de los salarios reales ni del nivel de empleo, ni presente ni futuro, tampoco de ningún componente de la riqueza; y la función de inversión presupone factores productivos independientes pues no incluye como argumento el salario real. De modo similar, en el lado de la oferta, el tipo de interés no influye ni en la demanda ni en la oferta de trabajo.

i) b_0, una tenencia neta de activos financieros distintos a las acciones, puede ser que $b_0 < 0$ en caso de endeudamiento neto;

ii) $v_0 \geq 0$, una tenencia de acciones o títulos representativos de la propiedad de las empresas.

Y los que se obtienen durante $t = 0$:

iii) $w_0 n_0 \geq 0$, los ingresos del trabajo. La oferta de trabajo, n_0, es variable de decisión. Cada economía doméstica dispone de una unidad de tiempo de modo que $n_0 + l_0 = 1$, con l_0, el tiempo de ocio.

Excepto los impuestos, los empleos de $t = 0$ son variables de decisión:

i) $p_0 c_0 \geq 0$, el consumo;

ii) $p_0 t_0 \geq 0$, los impuestos de cuantía fija;

iii) b_1, la demanda neta de activos financieros distintos a las acciones;

iv) $v_1 \geq 0$, la demanda de acciones.

Debido a la ausencia de riesgo, b_1 y v_1 son sustitutivos perfectos, rinden el mismo tipo de interés y se demandan conjuntamente.

La restricción presupuestaria de $t = 0$ queda entonces

$$b_0 + v_0 + w_0 n_0 \geq b_1 + v_1 + p_0 c_0 + p_0 t_0 \qquad \textbf{(1)}$$

El ahorro es la renta disponible no consumida, $p_0 s_0 = w_0 n_0 - p_0 c_0 - p_0 t_0$, que se coloca en activos financieros, pudiendo eventualmente ser negativo. Se cumple entonces que $p_0 s_0 = b_1 - b_0 + v_1 - v_0$.

Los recursos en $t = 1$ son:

i) b_1, la tenencia neta de activos distintos de las acciones recibida del periodo anterior;

ii) $v_1 \geq 0$, la tenencia de acciones recibidas del periodo anterior;

iii) $i(b_1 + v_1)$, el rendimiento o pago de intereses de las inversiones financieras realizadas en el periodo anterior;

iv) $w_1 n_1 \geq 0$, los ingresos salariales. Se cumple que $n_1 + l_1 = 1$. Como en $t = 0$, la oferta de trabajo es variable de decisión.

Los empleos de $t = 1$ son:

i) $p_1 c_1 \geq 0$, el consumo;

ii) $p_1 t_1 \geq 0$, los impuestos de cuantía fija.

La restricción presupuestaria de $t = 1$ queda entonces

$$(1 + i)(b_1 + v_1) + w_1 n_1 \geq p_1 c_1 + p_1 t_1 \qquad \textbf{(2)}$$

En $t = 1$, no se deja herencia de ningún signo: en el óptimo las cuentas se saldan. Por lo que se cumple que el "desahorro" es $p_1 s_1 = w_1 n_1 + i(b_1 + v_1) - p_1 c_1 - p_1 t_1 = -(b_1 + v_1)$, es decir, se liquidan y consumen los activos acumulados.

Para obtener la restricción presupuestaria intertemporal se sustituye **(1)** en **(2)** y se reordena quedando $(1+i)(b_0+v_0+w_0n_0-p_0c_0-p_0t_0)+w_1n_1 \geq p_1c_1+p_1t_1$. Expresada en unidades monetarias de $t=0$, tenemos que

$$b_0+v_0+w_0n_0+\frac{w_1n_1}{1+i} \geq p_0c_0+\frac{p_1c_1}{1+i}+p_0t_0+\frac{p_1t_1}{1+i}.$$

Definiendo el tipo de interés real como $1+r=\frac{1+i}{1+\pi}$, con $p_1=p_0(1+\pi)$, resultado de la inflación, y dividiendo por p_0, podemos expresar la restricción en unidades de producto de $t=0$ como

$$\frac{b_0+v_0}{p_0}+\frac{w_0}{p_0}n_0+\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}n_1-t_0-\frac{t_1}{1+r} \geq c_0+\frac{c_1}{1+r}.$$

Sustituyendo las cantidades ofrecidas de trabajo, n_t, por las demandadas de ocio, l_t, queda finalmente

$$\frac{b_0+v_0}{p_0}+\frac{w_0}{p_0}-t_0+\frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1}-t_1\right) \geq \frac{w_0}{p_0}l_0+\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}l_1+c_0+\frac{c_1}{1+r} \qquad \textbf{(3)}$$

Esta es la restricción presupuestaria cuando no se emplea todo el tiempo disponible en trabajar el ($n_0,n_1<1$), sino que parte se destina a demandar tiempo de ocio ($l_0,l_1>0$). Se define la riqueza real de una economía doméstica como la suma del valor real de sus tenencias financieras más las ganancias salariales reales descontadas, bajo el supuesto de que no se demandara tiempo de ocio, esto es, considerando el potencial laboral total:

$$W\left(r,\frac{w_0}{p_0},\frac{w_1}{p_1};t_0,t_1\right)=\frac{b_0+v_0}{p_0}+\frac{w_0}{p_0}-t_0+\frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1}-t_1\right) \qquad \textbf{(4)}$$

La riqueza $W(.)$ es función de los tres precios relativos del modelo, $r,\frac{w_0}{p_0}$ y $\frac{w_1}{p_1}$, y de la cuantía real de los impuestos t_0 y t_1.

Suponemos la siguiente función de utilidad de tipo aditivo
$U=U\left(c_0,l_0,c_1,l_1\right)=u(c_o)+\psi(l_0)+\beta\left(u(c_1)+\psi(l_1)\right)$

donde $0<\beta<1$, es el factor de descuento. Las funciones $u(.)$ y $\psi(.)$ son tales que $u'>0$ y $\psi'>0$ (no saturación) y $u''<0$ y $\psi''<0$ (concavidad estricta). El lagrangiano del problema de máximo del consumidor queda como

$$L=u(c_0)+\psi(l_0)+\beta\left(u(c_1)+\psi(l_1)\right)+\lambda\left(W(.)-\frac{w_0}{p_0}l_0-\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}l_1-c_0-\frac{1}{1+r}c_1\right)$$

cuyas condiciones de primer orden (c. p. o.) son

$$\left\{\begin{array}{r}\dfrac{\partial L}{\partial c_0}=u'(c_0)-\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial c_1}=\beta u'(c_1)-\lambda\dfrac{1}{1+r}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial l_0}=\psi'(l_0)-\lambda\dfrac{w_0}{p_0}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial l_1}=\beta\psi'(l_1)-\lambda\dfrac{1}{1+r}\dfrac{w_1}{p_1}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda_0}=W(.)-\dfrac{w_0}{p_0}l_0-\dfrac{1}{1+r}\dfrac{w_1}{p_1}l_1-c_0-\dfrac{1}{1+r}c_1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\beta u'(c_1)=u'(c_0)\dfrac{1}{1+r}\\ \psi'(l_0)=u'(c_0)\dfrac{w_0}{p_0}\\ \psi'(l_1)=u'(c_1)\dfrac{w_1}{p_1}\\ \beta\psi'(l_1)=u'(c_0)\dfrac{1}{1+r}\dfrac{w_1}{p_1}\\ W(.)=\dfrac{w_0}{p_0}l_0+\dfrac{1}{1+r}\dfrac{w_1}{p_1}l_1+c_0+\dfrac{1}{1+r}c_1\end{array}\right.$$

que aseguran el cumplimiento de las siguientes relaciones de intercambio óptimas $RMS_{c_o,c_1}=\dfrac{u'(c_o)}{\beta u'(c_1)}=1+r$; $RMS_{l_t,c_t}=\dfrac{\psi'(l_t)}{u'(c_t)}=\dfrac{w_t}{p_t}$ con $t=0,1$;
$RMS_{c_0,l_1}=\dfrac{u'(c_0)}{\beta\psi'(l_1)}=(1+r)\dfrac{p_1}{w_1}$; $RMS_{l_0,c_1}=\dfrac{\psi'(l_0)}{\beta u'(c_1)}=(1+r)\dfrac{w_0}{p_0}$.

El cumplimiento de las hipótesis del teorema de las funciones implícitas (Barbolla y Sanz, 1995) garantiza que existen y son diferenciables las funciones de demanda $h_t=h_t\left(r,\dfrac{w_0}{p_0},\dfrac{w_1}{p_1};t_0,t_1\right)$ con $h_t=c_o,c_1,l_0,l_1$.

Para obtener expresiones explícitas, supongamos la siguiente función de utilidad
$U=U\left(c_0,l_0,c_1,l_1\right)=\ln c_0+\psi\ln l_0+\beta\left(\ln c_1+\psi\ln l_1\right)$ con $0<\beta<1$ y $\psi>0$.

Las tres primeras c. p. o. quedan

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{c_0}=\beta(1+r)\dfrac{1}{c_1}\\ \psi\dfrac{c_0}{l_0}=\dfrac{w_0}{p_0}\\ \psi\dfrac{c_1}{l_1}=\dfrac{w_1}{p_1}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}c_1=\beta(1+r)c_0\\ l_0=\psi\dfrac{p_0}{w_0}c_0\\ l_1=\psi\dfrac{p_1}{w_1}c_1=\psi\dfrac{p_1}{w_1}\beta(1+r)c_0\end{array}\right.$$

Sustituyendo las variables de decisión, escritas en función de c_0, en la restricción presupuestaria

$$W(.)=\frac{w_0}{p_0}\psi\frac{p_0}{w_0}c_0+\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\psi\frac{p_1}{w_1}\beta(1+r)c_0+c_0+\frac{1}{1+r}\beta(1+r)c_0=\left(1+\psi+\beta(1+\psi)\right)c_0$$

se obtiene la función de consumo dependiente de la riqueza (el consumo como renta permanente, Friedman, 1957)

$$c_0=\frac{1}{1+\psi+\beta(1+\psi)}W=k_cW$$

con $k_c = \dfrac{1}{1+\psi+\beta(1+\psi)}$ la propensión marginal a consumir la riqueza. Desde ella, se obtienen las restantes funciones de demanda: $c_1 = k_c\beta(1+r)W$, $l_0 = k_c\psi\dfrac{p_0}{w_0}W$ y $l_1 = k_c\beta\psi\dfrac{p_1}{w_1}(1+r)W$. Se comprueba que la riqueza se distribuye entre los cuatro bienes (l_0, l_1, c_0, c_1) conforme a los porcentajes $k_c\psi$, $k_c\beta\psi$, k_c y $k_c\beta$, respectivamente. Basta con sustituir en la c. p. o. respectiva

$$W = \frac{w_0}{p_0}k_c\psi\frac{p_0}{w_0}W + \frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}k_c\beta\psi\frac{p_1}{w_1}(1+r)W + k_cW + \frac{1}{1+r}k_c\beta(1+r)W = k_c(1+\psi+\beta(1+\psi))W$$

donde $k_c\psi + k_c\beta\psi + k_c + k_c\beta = 1$.

Los signos de las funciones de demanda de consumo, presente y futuro, son los siguientes (suponemos que $\dfrac{w_0}{p_0} > t_0$ y que $\dfrac{w_1}{p_1} > t_1$):

$$\frac{\partial c_0}{\partial r} = -k_c\frac{1}{(1+r)^2}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) < 0; \qquad \frac{\partial c_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = k_c > 0; \qquad \frac{\partial c_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = \frac{k_c}{1+r} > 0;$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = k_c\beta\left(\frac{b_0+v_0}{p_0} + \frac{w_0}{p_0} - t_0\right) > 0; \qquad \frac{\partial c_1}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = k_c\beta(1+r) > 0; \qquad \frac{\partial c_1}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = k_c\beta > 0.$$

Y los de las demandas de ocio:

$$\frac{\partial l_0}{\partial r} = -k_c\psi\frac{1}{(1+r)^2}\frac{p_0}{w_0}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) < 0; \qquad \frac{\partial l_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = k_c\psi\left(\frac{p_0}{w_0}\right)^2\left(\frac{w_0}{p_0} - W\right) < 0; \qquad \frac{\partial l_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = k_c\psi\frac{p_0}{w_0}\frac{1}{1+r} > 0;$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial r} = k_c\beta\psi\frac{p_1}{w_1}\left(W - \frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right)\right) > 0; \qquad \frac{\partial l_1}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = k_c\beta\psi\frac{p_1}{w_1}(1+r) > 0; \qquad \frac{\partial l_1}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = k_c\beta\psi(1+r)\left(\frac{p_1}{w_1}\right)^2\left(\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1} - W\right) < 0.$$

La subida del tipo de interés real reduce la demanda de bienes presentes, consumo y ocio, y aumenta la de bienes futuros. En consecuencia los efectos sobre las ofertas de trabajo son opuestos: al subir el tipo de interés real, aumenta la oferta de trabajo presente y se reduce la de trabajo futuro. El aumento de cualquiera de los dos salarios reales aumenta el consumo en ambos periodos pues provoca un efecto riqueza. Los efectos del salario real sobre la oferta de trabajo se producen en el mismo sentido que el salario del mismo periodo, y en sentido opuesto respecto del salario del otro periodo.

El ahorro queda $s_0 = \dfrac{w_0}{p_0}n_0 - t_0 - c_0 = \dfrac{w_0}{p_0} - t_0 - \dfrac{w_0}{p_0}k_c\psi\dfrac{p_0}{w_0}W - k_cW = \dfrac{w_0}{p_0} - t_0 - k_c(1+\psi)W$

con los signos

$$\frac{\partial s_0}{\partial r} = -k_c(1+\psi)\frac{1}{(1+r)^2}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) > 0; \quad \frac{\partial s_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = 1 - k_c(1+\psi) > 0; \quad \frac{\partial s_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = -k_c(1+\psi)\frac{1}{1+r} < 0.$$

Procedemos a agregar para todas las economías domésticas. Comenzando por la riqueza real agregada

$$\mathbf{W} = \sum_i W_i = \frac{B_0 + V_0}{p_0} + \frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0} + \frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\mathbf{N_1} - \mathbf{N_0}t_0 - \frac{1}{1+r}\mathbf{N_1}t_1 = \ldots$$

$$\ldots = \frac{B_0 + V_0}{p_0} + \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right)\mathbf{N_0} + \frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right)\mathbf{N_1} \qquad \textbf{(5)}$$

con

i) $B_0 = \sum_i b_{i,0}$, pudiendo haber compensaciones por préstamos entre economías domésticas, de modo que el agregado B_0 representa una tenencia neta de activos frente al sector público;

ii) $V_0 = \sum_i v_{i,0}$, la tenencia de acciones del conjunto de las economías domésticas;

iii) $\mathbf{N_0}$ y $\mathbf{N_1}$ son las cantidades de trabajo que podrían estar disponibles como máximo cuando todas las economías domésticas renunciaran totalmente a demandar tiempo de ocio. Pueden asimilarse, por tanto, a las poblaciones potencialmente activas en $t = 0$ y en $t = 1$.

iv) $T_0 = \sum_i t_{i,0}$ y $T_1 = \sum_i t_{i,1}$, son las recaudaciones totales en ambos periodos. De suponer un impuesto de capitación $T_0 = \sum_i t_{i,0} = \mathbf{N_0}t_0$ y $T_1 = \sum_i t_{i,1} = \mathbf{N_1}t_1$.

Las funciones de consumo agregadas son

$$C_0 = \sum_i c_{i,0} = \sum_i k_c W_i = k_c\mathbf{W} \text{ y } C_1 = \sum_i c_{i,1} = \sum_i k_c\beta(1+r)W_i = k_c\beta(1+r)\mathbf{W}$$

Y las de oferta de trabajo agregadas para $t = 0,1$ son

$$N_0^s = \sum_i n_{i,0} = \sum_i (1 - l_{i,0}) = \mathbf{N_0} - k_c\psi\frac{p_0}{w_0}\mathbf{W} \text{ y } N_1^s = \sum_i n_{i,1} = \sum_i (1 - l_{i,1}) = \mathbf{N_1} - k_c\beta\psi\frac{p_1}{w_1}(1+r)\mathbf{W},$$

esto es, el potencial laboral agregado no asignado al ocio.

La riqueza agregada se asigna entre consumo y ocio del mismo modo que la individual

$$\mathbf{W} = \frac{w_0}{p_0}\sum_i l_{i,0} + \frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\sum_i l_{i,1} + \sum_i c_{i,0} + \frac{1}{1+r}\sum_i c_{i,1} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{w_0}{p_0}k_c\psi\frac{p_0}{w_0}\mathbf{W} + \frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}k_c\beta\psi\frac{p_1}{w_1}(1+r)\mathbf{W} + k_c\mathbf{W} + \frac{1}{1+r}k_c\beta(1+r)\mathbf{W} = \ldots$$

$$\ldots = k_c(1 + \psi + \beta(1+\psi))\mathbf{W}$$

siendo $k_c\psi$, $k_c\beta\psi$, k_c y $k_c\beta$ los porcentajes de la riqueza agregada que se asignan a ocio presente, ocio futuro, consumo presente y consumo futuro respectivamente y que suman la unidad.

Los signos de las funciones agregadas mantienen los de las individuales actuando la población de factor de proporcionalidad en el periodo correspondiente a la variación del precio:

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \mathbf{N}_1 \frac{\partial c_0}{\partial r} < 0; \quad \frac{\partial C_0}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = \mathbf{N_0} \frac{\partial c_0}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} > 0; \quad \frac{\partial C_0}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = \mathbf{N}_1 \frac{\partial c_0}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} > 0;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial r} = \mathbf{N_1} \frac{\partial c_1}{\partial r} > 0; \quad \frac{\partial C_1}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = \mathbf{N}_0 \frac{\partial c_1}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} > 0; \quad \frac{\partial C_1}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = \mathbf{N_1} \frac{\partial c_1}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} > 0.$$

Respecto a los efectos de las variaciones del tamaño poblacional tenemos

$$\frac{\partial C_0}{\partial \mathbf{N_0}} = k_c \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right) > 0; \quad \frac{\partial C_0}{\partial \mathbf{N_1}} = k_c \frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) > 0;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{N_0}} = k_c \beta (1+r)\left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right) > 0; \quad \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{N_1}} = k_c \beta \left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) > 0.$$

esto es, efectos riqueza repartidos en ambos periodos. Las variaciones del salario real y del tipo de interés real sobre las ofertas de trabajo agregadas son

$$\frac{\partial N_0^s}{\partial r} = -\mathbf{N}_1 \frac{\partial l_0}{\partial r} > 0; \quad \frac{\partial N_0^s}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = -\mathbf{N_0} \frac{\partial l_0}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} > 0; \quad \frac{\partial N_0^s}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = -\mathbf{N}_1 \frac{\partial l_0}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} < 0;$$

$$\frac{\partial N_1^s}{\partial r} = -\mathbf{N_1} \frac{\partial l_1}{\partial r} < 0; \quad \frac{\partial N_1^s}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = -\mathbf{N}_0 \frac{\partial l_1}{\partial \left(\frac{w_0}{p_0}\right)} < 0; \quad \frac{\partial N_1^s}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = -\mathbf{N_1} \frac{\partial l_1}{\partial \left(\frac{w_1}{p_1}\right)} > 0.$$

Y de las variaciones de la población

$$\frac{\partial N_0^s}{\partial \mathbf{N_0}} = 1 - k_c\psi \left(1 - \frac{p_0}{w_0} t_0\right) > 0; \quad \frac{\partial N_0^s}{\partial \mathbf{N_1}} = -k_c\psi \frac{1}{1+r} \frac{p_0}{w_0}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) < 0;$$

$$\frac{\partial N_1^s}{\partial \mathbf{N_0}} = -k_c\beta\psi(1+r)\frac{p_1}{w_1}\left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right) < 0; \quad \frac{\partial N_1^s}{\partial \mathbf{N_1}} = 1 - k_c\beta\psi \left(1 - \frac{p_1}{w_1} t_1\right) > 0.$$

donde se comprueba que un aumento de la población potencialmente activa en un periodo eleva la oferta de trabajo en ese periodo, si bien en menor medida, y lo reduce en el otro. Esto es debido a que los aumentos poblacionales producen efectos riqueza que aumentan la demanda de tiempo de ocio.

La función de ahorro agregado es

$$S_0 = \frac{w_0}{p_0} N_0^s - \mathbf{N_0} t_0 - C_0 = \frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0} - \frac{w_0}{p_0} k_c \psi \frac{p_0}{w_0}\mathbf{W} - \mathbf{N_0} t_0 - k_c \mathbf{W} = \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right)\mathbf{N_0} - k_c(1+\psi)\mathbf{W}$$

cuyos signos son:

$$\frac{\partial S_0}{\partial r} = k_c(1+\psi)\frac{1}{(1+r)^2}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) > 0; \quad \frac{\partial S_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = \mathbf{N_0}(1 - k_c(1+\psi)) > 0; \quad \frac{\partial S_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = -\mathbf{N_1} k_c(1+\psi)\frac{1}{1+r} < 0;$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{N_0}} = \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right)(1 - k_c(1+\psi)) > 0; \quad \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{N}_1} = -k_c(1+\psi)\frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) < 0.$$

En general todo aquello que aumente el consumo presente reduce el ahorro. Podrían generalizarse los signos hallados a otras formas funcionales en tanto cumplan los supuestos necesarios para el predominio del signo del efecto sustitución cuando existen tanto un efecto sustitución como efectos renta y riqueza que, eventualmente, podrían compensar al efecto sustitución (Cendejas, 2016).

$$C_0 = C_0\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, t_0, t_1\right); \quad S_0 = S_0\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, t_0, t_1\right);$$

- \+ \+ \+ \+ - -   + + - + - - +

$$N_0^s = N_0^s\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, t_0, t_1\right); \quad N_1^s = N_1^s\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, t_0, t_1\right).$$

\+ \+ - + - - +   - - + - + + -

2. El sector público

Suponemos que el sector público toma sus decisiones exógenamente y se financia en condiciones competitivas al tipo de interés del mercado. Así, en *t=0*, tenemos que $\frac{B_0}{p_0} + G_0 = T_0 + \frac{B_1}{p_1}$, esto es, se destinan recursos a saldar la deuda pendiente y al gasto público, y se obtienen recursos de los impuestos y de la emisión de nueva deuda. En *t=1* se remunera y se amortiza la deuda B_1, al tiempo que, nuevamente, se gasta y se recauda $\frac{B_1}{p_1}(1+r) + G_1 - T_1 = 0$. Sustituyendo $\frac{B_1}{p_1}$ por $\frac{B_0}{p_0} + G_0 - T_0$, se obtiene la restricción presupuestaria intertemporal del sector público

$$T_0 + \frac{T_1}{1+r} \geq \frac{B_0}{p_0} + G_0 + \frac{G_1}{1+r} \qquad \textbf{(6)}$$

En definitiva, el saldo vivo de deuda se ha de amortizar con superávit fiscales. La riqueza de las economías domésticas se ve modificada ya que tienen en cuenta los impuestos que han de pagar para amortizar la deuda y financiar el gasto público. Sustituyendo (6) en (5)

$$\mathbf{W}=\frac{B_0+V_0}{p_0}+\left(\frac{w_0}{p_0}-t_0\right)\mathbf{N_0}+\frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1}-t_1\right)\mathbf{N_1}=\frac{B_0+V_0}{p_0}+\frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0}+\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\mathbf{N_1}-T_0-\frac{T_1}{1+r}=...$$

$$...=\left(T_0-G_0+\frac{T_1}{1+r}-\frac{G_1}{1+r}\right)+\frac{V_0}{p_0}+\frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0}+\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\mathbf{N_1}-T_0-\frac{T_1}{1+r}$$

llegando a que

$$\mathbf{W}=\frac{V_0}{p_0}+\frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0}+\frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\mathbf{N_1}-G_0-\frac{G_1}{1+r} \qquad \mathbf{(7)}$$

se comprueba la equivalencia ricardiana que consiste en la irrelevancia del modo en que se financia el sector público: solo es relevante la magnitud del gasto público ya que ni la deuda ni los impuestos figuran en la restricción presupuestaria (Barro, 1974). Las funciones de consumo, ahorro y oferta de trabajo en ambos periodos, escritas en función de los niveles de gasto público en lugar de en función de los impuestos, mantienen los mismos signos.

3. Las decisiones de las empresas

La función de producción, $y=f(k,n)$, cumple que:

i) $f_k^{'}>0$ y $f_n^{'}>0$, las productividades marginales son positivas;

ii) $y=f(k,n)$ es al menos dos veces diferenciable (de clase C^2);

iii) la igualdad de la derivada segunda cruzada $f_{kn}^{"}=f_{nk}^{"}$, lo que determina la simetría de efectos cruzados en las demandas de factores productivos;

iv) la necesidad de, al menos, un factor para producir: $f(0,0)=0$;

v) Se cumple que $\left|Hf(k,n)\right|=\begin{vmatrix} f_{kk}^{"} & f_{kn}^{"} \\ f_{kn}^{"} & f_{nn}^{"} \end{vmatrix}=f_{kk}^{"}f_{nn}^{"}-f_{kn}^{"2}>0$ y sus menores cambian de signo de modo que $f_{kk}^{"}<0$ $f_{nn}^{"}<0$ (estricta concavidad).

La empresa representativa es precio aceptante: actúa como si sus decisiones no afectaran a los precios, esto es, en mercados de producto y factores perfectamente competitivos. Elige un plan de producción que maximiza el flujo de beneficios descontado -su valor actual-. A corto plazo no es posible elegir la cantidad de capital óptima por lo que, en $t=0$, $\bar{k}_0$ está dado. Para $t=1$, el largo plazo, se desconocen los precios de producto y factores, por lo que el plan de producción está condicionado y es óptimo para un vector de expectativas dado. Conforme a una determinada expectativa, para alcanzar el capital óptimo en $t=1$ es preciso invertir en $t=0$, siendo la función de inversión bruta

$$I_0=k_1-\bar{k}_0+\delta\bar{k}_0=k_1-(1-\delta)\bar{k}_0$$

Así que la empresa maximiza el valor actual

$$VA(y_0,y_1,k_1,n_0,n_1)=p_0y_0-p_0I_0-w_0n_0+\frac{1}{1+i}\left(p_1y_1+p_1k_1-\delta p_1k_1-w_1n_1\right)$$

sujeto a las restricciones $f(\bar{k}_0, n_0) \geq y_0$, $f(k_1, n_1) \geq y_1$ y $I_0 = k_1 - (1-\delta)\bar{k}_0$.

A partir del lagrangiano

$$L = p_0 y_0 - p_0 k_1 + (1-\delta) p_0 \bar{k}_0 - w_0 n_0 + \frac{1}{1+i}\left(p_1 y_1 + p_1 k_1 - \delta p_1 k_1 - w_1 n_1\right) + \lambda_0\left(f(\bar{k}_0, n_0) - y_0\right) + \frac{\lambda_1}{1+i}\left(f(k_1, n_1) - y_1\right)$$

se obtienen las c. p. o. que permiten llegar a funciones de oferta de producto y de demanda de factores, para ambos periodos, continuas y diferenciables:

$$\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{\partial L}{\partial y_0} = p_0 - \lambda_0 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial y_1} = p_1 - \lambda_1 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial n_0} = -w_0 + \lambda_0 f'_{n_0}(\bar{k}_0, n_0) = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial n_1} = \dfrac{1}{1+i}\left(-w_1 + f'_{n_1}(k_1, n_1)\right) = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial k_1} = -p_0 + \dfrac{1}{1+i}\left(p_1 - \delta p_1 + p_1 f'_{k_1}(k_1, n_1)\right) = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_0} = f(\bar{k}_0, n_0) - y_0 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \dfrac{1}{1+i}\left(f(k_1, n_1) - y_1\right) = 0
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{c}
p_0 f'_{n_0}(\bar{k}_0, n_0) = w_0 \\
p_1 f'_{n_1}(k_1, n_1) = w_1 \\
p_1\left(1 - \delta + f'_{k_1}(k_1, n_1)\right) = p_0(1+i) \\
f(\bar{k}_0, n_0) = y_0 \\
f(k_1, n_1) = y_1
\end{array}\right.$$

La homogeneidad de grado 0 en precios de las funciones de oferta de producto y demanda de factores permite expresar estas, de modo equivalente, en función de los precios monetarios como $h_t = h_t(p_0, p_1, w_0, w_1, i)$, o bien en función de los precios relativos como $h_t = h_t\left(r, \dfrac{w_0}{p_0}, \dfrac{w_1}{p_1}\right)$ con $h_t = n_0, n_1, k_1, y_0, y_1$. Así, para la demanda de trabajo, $f'_n(k_t, n_t) = \dfrac{w_t}{p_t}$ con $t = 0,1$; y para la demanda de capital de $t = 1$, desde $1 - \delta + f'_{k_1}(k_1, n_1) = \dfrac{p_0}{p_1}(1+i) = \dfrac{1+i}{1+\pi} = 1 + r$, se llega a $f'_{k_1}(k_1, n_1) = r + \delta$.

Los signos de las funciones de demanda de factores se obtienen diferenciando las c. p. o.

$$\left\{\begin{array}{l}
f'_{n_0} = \dfrac{w_0}{p_0} \\
f'_{n_1} = \dfrac{w_1}{p_1} \\
f'_{k_1} = r + \delta
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{c}
f''_{n_0 n_0} dn_0 = d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right) \\
f''_{k_1 n_1} dk_1 + f''_{n_1 n_1} dn_1 = d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right) \\
f''_{k_1 k_1} dk_1 + f''_{k_1 n_1} dn_1 = dr
\end{array}\right.
\Rightarrow
\begin{bmatrix} f''_{n_0 n_0} & 0 & 0 \\ 0 & f''_{n_1 n_1} & f''_{k_1 n_1} \\ 0 & f''_{k_1 n_1} & f''_{k_1 k_1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} dn_0 \\ dn_1 \\ dk_1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right) \\ d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right) \\ dr \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} dn_0 \\ dn_1 \\ dk_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{f''_{n_0n_0} f''_{k_1k_1} f''_{n_1n_1} - f''_{n_0n_0} f''^2_{k_1n_1}} \begin{bmatrix} f''_{k_1k_1} f''_{n_1n_1} - f''^2_{k_1n_1} & 0 & 0 \\ 0 & f''_{n_0n_0} f''_{k_1k_1} & -f''_{n_0n_0} f''_{k_1n_1} \\ 0 & -f''_{n_0n_0} f''_{k_1n_1} & f''_{n_0n_0} f''_{n_1n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right) \\ d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right) \\ dr \end{bmatrix}$$

siendo $f''_{k_1k_1} f''_{n_1n_1} f''_{n_0n_0} - f''_{n_0n_0} f''^2_{k_1n_1} = f''_{n_0n_0}\left(f''_{k_1k_1} f''_{n_1n_1} - f''^2_{k_1n_1}\right) = f''_{n_0n_0}\left|Hf(k_1,n_1)\right| < 0$ por la hipótesis de estricta concavidad. Sintéticamente

$$\begin{cases} dn_0 = \dfrac{1}{f''_{n_0n_0}} d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right) \\ dn_1 = \dfrac{1}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|}\left(-f''_{k_1n_1} dr + f''_{k_1k_1} d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)\right) \\ dk_1 = \dfrac{1}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|}\left(f''_{n_1n_1} dr - f''_{k_1n_1} d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)\right) \end{cases}$$

Los signos son los siguientes. Para la demanda de trabajo de $t=0$, dado que el capital está dado, se simplifica bastante quedando $\dfrac{\partial n_0}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} = \dfrac{1}{f''_{n_0n_0}} < 0$. Para las demandas de factores de $t=1$, $\dfrac{\partial k_1}{\partial r} = \dfrac{f''_{n_1n_1}}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|} < 0$ y $\dfrac{\partial n_1}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} = \dfrac{f''_{k_1k_1}}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|} < 0$. El signo del precio cruzado depende del signo de $f''_{k_1n_1}$, de modo que si los factores son complementarios $f''_{k_1n_1} > 0$ y $\dfrac{\partial k_1}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} = \dfrac{\partial n_1}{\partial r} = \dfrac{-f''_{k_1n_1}}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|} < 0$.

La función de oferta de producto para $t=0$ se obtiene desde $dy_0 = f'_{n_0} dn_0$, de modo que $\dfrac{\partial y_0}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} = \dfrac{f'_{n_0}}{f''_{n_0n_0}} < 0$, $\dfrac{\partial y_0}{\partial p_0} = \dfrac{-w_0}{p_0^2}\dfrac{f'_{n_0}}{f''_{n_0n_0}} > 0$ y $\dfrac{\partial y_0}{\partial w_0} = \dfrac{1}{p_0}\dfrac{f'_{n_0}}{f''_{n_0n_0}} < 0$. Para la producción de $t=1$, aceptando el supuesto de factores complementarios, desde $dy_1 = f'_{k_1} dk_1 + f'_{n_1} dn_1$, se llega a que $\dfrac{\partial y_1}{\partial r} = \dfrac{f'_{k_1} f''_{n_1n_1} - f'_{n_1} f''_{k_1n_1}}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|} < 0$ y $\dfrac{\partial y_1}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} = \dfrac{f'_{n_1} f''_{k_1k_1} - f'_{k_1} f''_{k_1n_1}}{\left|Hf(k_1,n_1)\right|} < 0$.

Si los factores fueran independientes $\frac{\partial k_1}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = \frac{\partial n_1}{\partial r} = 0$, y se simplificaría el sistema de funciones de demanda quedando una dependencia exclusiva respecto del precio del propio factor $k_1 = k_1(r)$; $n_1 = n_1\left(\frac{w_1}{p_1}\right)$. Concretamente $\frac{\partial k_1}{\partial r} = \frac{1}{f''_{k_1k_1}} < 0$ y $\frac{\partial n_1}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = \frac{1}{f''_{n_1n_1}} < 0$. En las funciones de oferta se mantendrían los signos quedando $\frac{\partial y_1}{\partial r} = \frac{f'_{k_1}}{f''_{k_1k_1}} < 0$ y $\frac{\partial y_1}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = \frac{f'_{n_1}}{f''_{n_1n_1}} < 0$.

Puede hablarse de la existencia de una función de producción agregada bajo homogeneidad de grado 1 de las funciones de producción individuales y los supuestos competitivos realizados (Sargent, 1979, cap. 1). En ese caso, se cumplirá el teorema de Euler y tendremos que al agregar

$$Y = \sum_j y_j = \sum_j \left(f'_k k_j + f'_n n_j \right) = \sum_j \left((r+\delta)k_j + \frac{w}{p} n_j \right) = (r+\delta)\sum_j k_j + \frac{w}{p}\sum_j n_j = (r+\delta)K + \frac{w}{p}N$$

que remite a una función $Y = F(K, N)$ también homogénea de grado 1. La agregación para el conjunto de empresas mantiene los signos. Para $t = 1$:

$$K_1 = \sum_j k_{j,1}\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) = K_1\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) \quad N_1^d = \sum_j n_{j,1}\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) = N_1^d\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) \quad Y_1^s = \sum_j y_{j,1}\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) = Y_1^s\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right)$$

Y para $t = 0$:

$$I = K_1 - (1-\delta)K_0 = K_1\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) - (1-\delta)\sum_j k_{j,0} = I\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right),$$

$$N_0^d = \sum_j n_{j,0}\left(\frac{w_0}{p_0}\right) = N_0^d\left(\frac{w_0}{p_0}\right) \text{ y } Y_0^s = \sum_j y_{j,0}\left(\frac{w_0}{p_0}\right) = Y_0^s\left(\frac{w_0}{p_0}\right).$$

donde se comprueba que la inversión depende del salario real futuro con signo negativo debido al supuesto de complementariedad de los factores. No lo haría si ambos factores fueran independientes.

En el agregado y bajo el agotamiento del producto en ambos periodos, el valor de la empresa queda como

$$\frac{V_0}{p_0} = Y_0 - I - \frac{w_0}{p_0}N_0 + \frac{1}{1+r}\left(Y_1 + K_1 - \delta K_1 - \frac{w_1}{p_1}N_1\right) = Y_0 - I - \frac{w_0}{p_0}N_0 + \frac{1}{1+r}(K_1 + rK_1) = \ldots$$

$$\ldots = Y_0 - K_1 + (1-\delta)K_0 - \frac{w_0}{p_0}N_0 + K_1 = K_0 + Y_0 - \delta K_0 - \frac{w_0}{p_0}N_0$$

La remuneración del capital en $t=1$ es rK_1. Como en $t=0$ el capital se supone ya remunerado se cumple que $Y_0 = \delta K_0 + \frac{w_0}{p_0} N_0$, y entonces $\frac{V_0}{p_0} = K_0$.

La riqueza real de las economías domésticas pasa a ser

$$\mathbf{W} = K_0 + \frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0} + \frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\mathbf{N_1} - G_0 - \frac{G_1}{1+r} = K_0 + \mathbf{H} - \mathbf{G}$$

Donde se ha hecho $\mathbf{H} = \frac{w_0}{p_0}\mathbf{N_0} + \frac{1}{1+r}\frac{w_1}{p_1}\mathbf{N_1}$, el valor actual del capital humano de la población potencialmente activa, y $\mathbf{G} = G_0 + \frac{G_1}{1+r}$, el valor actual del gasto público.

4. Equilibrio simultáneo de los mercados de bienes y de trabajo

Retomando las relaciones agregadas previamente halladas, por parte de las economías domésticas tenemos que $H_t = H_t\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, G_0, G_1\right)$ con $H_t = C_0, N_0^s, C_1, N_1^s$, donde las poblaciones, presente y futura, y los niveles de gasto público son exógenos. Por parte de las empresas $N_0^d = N_0^d\left(\frac{w_0}{p_0}\right)$, $I = I\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right)$, $Y_0^s = Y_0^s\left(\frac{w_0}{p_0}\right)$, $N_1^d = N_1^d\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right)$ y $Y_1^s = Y_1^s\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right)$.

El equilibrio simultáneo de los cuatro mercados implica el cumplimiento del sistema

$$\begin{cases} N_0^s\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, G_0, G_1\right) = N_0^d\left(\frac{w_0}{p_0}\right) \\ N_1^s\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, G_0, G_1\right) = N_1^d\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) \\ Y_0^s\left(\frac{w_0}{p_0}\right) = C_0\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, G_0, G_1\right) + I\left(\frac{w_1}{p_1}, r\right) + G_0 \end{cases} \qquad \textbf{(8)}$$

ya que el mercado de bienes en $t=1$ estará en equilibrio si lo están los mercados restantes (ley de Walras).

La estática comparativa se puede analizar alrededor del equilibrio del sistema (8) mediante la aproximación lineal $Adp_r + Bdx = 0$, con A y B las matrices de derivadas parciales del sistema (8)

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_0^s}{\partial r} & \dfrac{\partial N_0^s}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)}-\dfrac{\partial N_0^d}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} & \dfrac{\partial N_0^s}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} \\ \dfrac{\partial N_1^s}{\partial r}-\dfrac{\partial N_1^d}{\partial r} & \dfrac{\partial N_1^s}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} & \dfrac{\partial N_1^s}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)}-\dfrac{\partial N_1^d}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} \\ \dfrac{\partial C_0}{\partial r}+\dfrac{\partial I}{\partial r} & \dfrac{\partial C_0}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)}-\dfrac{\partial Y_0^s}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} & \dfrac{\partial C_0}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)}+\dfrac{\partial I}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_0^s}{\partial \mathbf{N_0}} & \dfrac{\partial N_0^s}{\partial \mathbf{N_1}} & \dfrac{\partial N_0^s}{\partial G_0} & \dfrac{\partial N_0^s}{\partial G_1} \\ \dfrac{\partial N_1^s}{\partial \mathbf{N_0}} & \dfrac{\partial N_1^s}{\partial \mathbf{N_1}} & \dfrac{\partial N_1^s}{\partial G_0} & \dfrac{\partial N_1^s}{\partial G_1} \\ \dfrac{\partial C_0}{\partial \mathbf{N_0}} & \dfrac{\partial C_0}{\partial \mathbf{N_1}} & \dfrac{\partial C_0}{\partial G_0}+1 & \dfrac{\partial C_0}{\partial G_1} \end{bmatrix}$$

$dp_r=\left[dr,\ d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right),\ d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)\right]'$ el vector de variaciones de los precios relativos; y $dx=\left[d\mathbf{N_0},\ d\mathbf{N_1},\ dG_0,\ dG_1\right]'$ el vector de variaciones de las variables exógenas.

En relación a los signos de las matrices A y B tenemos que $sign(A)=\begin{bmatrix} + & + & - \\ ? & - & + \\ - & + & ? \end{bmatrix}$ y $sign(B)=\begin{bmatrix} + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ + & + & + & - \end{bmatrix}$. La ambigüedad radica en los efectos del tipo de interés sobre el mercado de trabajo en $t=1$ y del salario real futuro sobre el mercado de bienes de $t=0$. En el primer caso, un aumento del tipo de interés real reduciría tanto la oferta como la demanda de trabajo en el plano $\left(\dfrac{w_1}{p_1}, N_1\right)$ por lo que no sería posible saber sus efectos sobre $\dfrac{w_1}{p_1}$, y desde aquí la indeterminación del signo pasaría al resto de variables que dependen de $\dfrac{w_1}{p_1}$ (sin ambigüedad disminuirá el nivel de empleo N_1). La segunda indeterminación tiene que ver con variaciones del salario real futuro sobre el mercado de bienes presente. Por ejemplo, una subida de $\dfrac{w_1}{p_1}$, reducirá la inversión en $t=0$ al tiempo que aumentará el consumo, de modo que no es posible saber el efecto neto sobre la demanda de bienes y por lo tanto sobre el resto de las variables.

Con la finalidad de evitar estas dos indeterminaciones, en el siguiente apartado realizamos dos supuestos simplificadores. El primero de ellos supone exógenas las ofertas de trabajo de modo que el vínculo entre tipo de interés y mercado de trabajo desaparece por el lado de la oferta de trabajo. El segundo consiste en suponer que los factores productivos son independientes, por lo que las variaciones del salario real futuro no afectan a la inversión. Ambos supuestos no son empíricamente admisibles.

5. Modelo con ofertas de trabajo exógenas y factores productivos independientes

Supongamos que se ofrece todo el potencial laboral con independencia de cuáles sean los salarios reales y el tipo de interés real. En ese caso $l_0, l_1 = 0$, y la restricción presupuestaria (3) queda

$$\frac{b_0 + v_0}{p_0} + \frac{w_0}{p_0} - t_0 + \frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) \geq c_0 + \frac{c_1}{1+r} \qquad \textbf{(3')}$$

donde, a la izquierda de la desigualdad se encuentra la riqueza real de una economía doméstica, idéntica a la de la ecuación (4). La diferencia estriba ahora en que no se va a destinar ningún porcentaje de la misma a demandar ocio.

La función de utilidad queda como

$U = U\left(c_0, c_1\right) = u(c_o) + \beta u(c_1)$

con $0 < \beta < 1$ el factor de descuento. Se cumple también que $u' > 0$ y $u'' < 0$. El lagrangiano del problema pasa a ser

$$L = u(c_0) + \beta u(c_1) + \lambda\left(W(.) - c_0 - \frac{1}{1+r}c_1\right)$$

cuyas c. p. o. son

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = u'(c_0) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_1} = \beta u'(c_1) - \lambda\dfrac{1}{1+r} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_0} = W(.) - c_0 - \dfrac{1}{1+r}c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta u'(c_1) = u'(c_0)\dfrac{1}{1+r} \\ W(.) = c_0 + \dfrac{1}{1+r}c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RMS_{c_o, c_1} = \dfrac{u'(c_o)}{\beta u'(c_1)} = 1 + r \\ W(.) = c_0 + \dfrac{1}{1+r}c_1 \end{cases}$$

que permite obtener el sistema de funciones de demandas de consumo $c_t = c_t\left(r, \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}; t_0, t_1\right)$ con $t = 0,1$. Para obtener expresiones explícitas, supongamos la función de utilidad $U = U\left(c_0, c_1\right) = \ln c_0 + \beta \ln c_1$, de cuyas dos primeras c. p. o. se obtiene la relación $\frac{1}{c_0} = \beta(1+r)\frac{1}{c_1} \Rightarrow c_1 = \beta(1+r)c_0$.

Sustituyendo en la restricción presupuestaria las variables de decisión en función de c_0 $W(.) = c_0 + \frac{1}{1+r}\beta(1+r)c_0 = c_0 + \beta c_0 = \left(1+\beta\right)c_0$, se obtiene la función de consumo presente $c_0 = \frac{1}{1+\beta}W = k_c W$ con $k_c = \frac{1}{1+\beta}$, el porcentaje de riqueza consumida. Esta función permite obtener la de consumo futuro como $c_1 = k_c \beta(1+r)W$. Se comprueba que la riqueza se distribuye en c_0 y c_1 en los porcentajes k_c y $k_c\beta$ que suman la unidad $W = k_c W + \frac{1}{1+r} k_c \beta (1+r) W = (k_c + k_c\beta) W$.

Las derivadas y los signos de las funciones de demanda de consumo presente y futuro coinciden con los analizados en la sección 1. La función de ahorro se ve modificado pues no es preciso destinar riqueza a la demanda de ocio. Tenemos entonces que

$s_0 = \frac{w_0}{p_0} - t_0 - c_0 = \frac{w_0}{p_0} - t_0 - k_c W$ con derivadas

$$\frac{\partial s_0}{\partial r} = -k_c \frac{1}{(1+r)^2}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) > 0; \quad \frac{\partial s_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = 1 - k_c > 0; \quad \frac{\partial s_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = -k_c \frac{1}{1+r} < 0.$$

Agregando las restricciones presupuestarias, se obtiene una riqueza real agregada igual a la de la ecuación (5). Las funciones agregadas de consumo son también $C_0 = k_c \mathbf{W}$ y $C_1 = k_c\beta(1+r)\mathbf{W}$; mientras que las ofertas de trabajo coinciden con la población potencialmente activa en cada periodo, $N_0^s = \sum_i n_{i,0} = \mathbf{N_0}$ y $N_1^s = \sum_i n_{i,1} = \mathbf{N_1}$. La riqueza agregada se asigna a los consumos conforme a los porcentajes k_c y $k_c\beta$

$$\mathbf{W} = C_0 + \frac{1}{1+r} C_1 = k_c \mathbf{W} + \frac{1}{1+r} k_c \beta (1+r)\mathbf{W} = k_c(1+\beta)\mathbf{W}$$

Las derivadas y signos de las funciones de consumo agregadas son los mismos que en la sección 1. La función de ahorro agregado se ve modificada

$$S_0 = \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right)\mathbf{N_0} - C_0 = \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right)\mathbf{N_0} - k_c \mathbf{W}$$

con derivadas

$$\frac{\partial S_0}{\partial r} = \mathbf{N_0} k_c \frac{1}{(1+r)^2}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) > 0; \quad \frac{\partial S_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} = \mathbf{N_0}(1 - k_c) > 0; \quad \frac{\partial S_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} = -\mathbf{N_1} k_c \frac{1}{1+r} < 0;$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{N_0}} = \left(\frac{w_0}{p_0} - t_0\right)(1 - k_c) > 0; \quad \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{N}_1} = -k_c \frac{1}{1+r}\left(\frac{w_1}{p_1} - t_1\right) < 0.$$

Como en la sección 1, se observa que una mayor población futura reduce el ahorro al suponer un aumento de la riqueza. Podrían generalizarse los signos hallados si la forma funcional de la utilidad cumple los supuestos necesarios para el predominio del signo del efecto sustitución sobre los signos de los efectos renta y riqueza. La consideración de la equivalencia ricardiana deja la riqueza igual a la de la ecuación (7). Tenemos finalmente que

$$C_0 = C_0\left(r; \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}, \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, G_0, G_1\right); \quad S_0 = S_0\left(r; \frac{w_0}{p_0}, \frac{w_1}{p_1}, \mathbf{N_0}, \mathbf{N_1}, G_0, G_1\right).$$

- + + + + - -   + + - + - - +

Por su parte, si los factores productivos son independientes la derivada cruzada $F''_{K_1N_1}=0$ y $\frac{\partial N_1^d}{\partial r}=\frac{\partial I}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)}=0$.

El equilibrio simultáneo de los mercados de bienes y de trabajo tiene en cuenta las siguientes funciones agregadas. Para las economías domésticas $C_t=C_t\left(r,\frac{w_0}{p_0},\frac{w_1}{p_1};\mathbf{N_0},\mathbf{N_1},G_0,G_1\right)$ con $t=0,1$; y para las empresas $N_0^d=N_0^d\left(\frac{w_0}{p_0}\right)$; $I=I(r)$; $Y_0^s=Y_0^s\left(\frac{w_0}{p_0}\right)$; $N_1^d=N_1^d\left(\frac{w_1}{p_1}\right)$; y $Y_1^s=Y_1^s\left(\frac{w_1}{p_1},r\right)$.

El equilibrio simultáneo implica que

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{N_0}&=N_0^d\left(\frac{w_0}{p_0}\right)\\ \mathbf{N_1}&=N_1^d\left(\frac{w_1}{p_1}\right)\\ Y_0^s\left(\frac{w_0}{p_0}\right)&=C_0\left(r,\frac{w_0}{p_0},\frac{w_1}{p_1};\mathbf{N_0},\mathbf{N_1},G_0,G_1\right)+I(r)+G_0 \end{aligned}\right. \qquad \mathbf{(9)}$$

La estática comparativa se analiza alrededor de un equilibrio mediante la aproximación lineal $A_1dp_r+B_1dx=0$, con A_1 y B_1 las matrices de derivadas parciales del sistema (9).

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_0^d}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_1^d}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)}\\ \frac{\partial C_0}{\partial r}+\frac{\partial I}{\partial r} & \frac{\partial C_0}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)}-\frac{\partial Y_0^s}{\partial\left(\frac{w_0}{p_0}\right)} & \frac{\partial C_0}{\partial\left(\frac{w_1}{p_1}\right)} \end{bmatrix};\ B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{\partial C_0}{\partial \mathbf{N_0}} & \frac{\partial C_0}{\partial \mathbf{N_1}} & \frac{\partial C_0}{\partial G_0}+1 & \frac{\partial C_0}{\partial G_1} \end{bmatrix}$$

Comparada con la matriz A, en la matriz A_1 se han anulado las derivadas de signo desconocido, de modo que ahora $sign(A_1)=\begin{bmatrix}0&+&0\\0&0&+\\-&+&+\end{bmatrix}$. En $sign(B_1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\+&+&+&-\end{bmatrix}$, se comprueba que los aumentos de la población se transmiten íntegramente a las ofertas de trabajo en el periodo en el que se producen. Carecen de efectos sobre dichas ofertas las variaciones del gasto público, equivalentes a variaciones de la fiscalidad, lo cual no parece admisible empíricamente. Tampoco el hecho de que varíen los niveles de empleo solo como consecuencia de variaciones poblacionales, por ello las variaciones de las demandas de trabajo se trasladarán exclusivamente a los salarios reales.

Los signos sobre los precios relativos se obtienen desde $dp_r = -A_1^{-1}B_1 dx$, teniendo que

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right) \\ d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & + & - \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{N_0} \\ d\mathbf{N_1} \\ dG_0 \\ dG_1 \end{bmatrix}$$

Los efectos de las variaciones de la población presente o futura sobre el tipo de interés real son inciertos. Por ejemplo, de aumentar la población se reduce el salario real del periodo respectivo. Por lo primero (el aumento de la población), el consumo aumenta, por lo segundo (disminuye el salario real) el consumo disminuye. En el plano (r, Y) no es posible saber el efecto neto sobre el tipo de interés. Respecto a las expansiones fiscales, estas aumentan el tipo de interés si son presentes, y lo reducen si son futuras. El distinto signo se debe a que las presentes suponen un incremento neto de la demanda de bienes pues $0 < \dfrac{\partial C_0}{\partial G_0} + 1 < 1$, ya que $\dfrac{\partial C_0}{\partial G_0} = -k_c$ y $0 < k_c < 1$.

A falta de una parametrización completa, no es posible conocer los signos de consumo, ahorro e inversión como consecuencia de una variación del tamaño de la población debido, como se acaba de indicar, a sus efectos inciertos sobre el tipo de interés. Si es posible saber que la producción presente aumentará si lo hace la población al reducirse el salario real y que no se verá afectada por la población futura. La expansión fiscal presente ($0 < \dfrac{\partial C_0}{\partial G_0} + 1 < 1$), vía subida del tipo de interés, reduce el consumo, aumenta el ahorro, y reduce la inversión (efecto expulsión). La expansión fiscal futura, al reducir el tipo de interés, actúa en sentido opuesto.

6. Efectos de una mejora tecnológica

Supongamos que la función de producción agregada se ve afectada por progreso técnico neutral de modo que $Y = ZF(K, N)$, y que experimenta un incremento en el parámetro representativo del "residuo de Solow". Esto afectará a las demandas de trabajo e inversión al mejorar la productividad de ambos factores. Partimos de diferenciar las c. p. o. de la función de producción agregada respecto de Z y de las cantidades de factores

$$\begin{cases} Z_0 F'_{N_0} = \dfrac{w_0}{p_0} \\ Z_1 F'_{N_1} = \dfrac{w_1}{p_1} \\ Z_1 F'_{K_1} = r + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_0 F''_{N_0 N_0} dN_0 + F'_{N_0} dZ_0 = 0 \\ Z_1 F''_{K_1 N_1} dK_1 + Z_1 F''_{N_1 N_1} dN_1 + F'_{N_1} dZ_1 = 0 \Rightarrow \ldots \\ Z_1 F''_{K_1 K_1} dK_1 + Z_1 F''_{K_1 N_1} dN_1 + F'_{K_1} dZ_1 = 0 \end{cases}$$

$$...\Rightarrow\begin{bmatrix} Z_0F''_{N_0N_0} & 0 & 0 \\ 0 & Z_1F''_{N_1N_1} & Z_1F''_{K_1N_1} \\ 0 & Z_1F''_{K_1N_1} & Z_1F''_{K_1K_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dN_0 \\ dN_1 \\ dK_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -F'_{N_0}dZ_0 \\ -F'_{N_1}dZ_1 \\ -F'_{K_1}dZ_1\end{bmatrix}$$

e invirtiendo

$$\begin{bmatrix} dN_0 \\ dN_1 \\ dK_1\end{bmatrix}=\frac{1}{Z_0Z_1^2F''_{N_0N_0}\left|HF(K_1,N_1)\right|}\begin{bmatrix} Z_1^2(F''_{K_1K_1}F''_{N_1N_1}-F''^2_{K_1N_1}) & 0 & 0 \\ 0 & Z_0Z_1F''_{N_0N_0}F''_{K_1K_1} & -Z_0Z_1F''_{N_0N_0}F''_{K_1N_1} \\ 0 & -Z_0Z_1F''_{N_0N_0}F''_{K_1N_1} & Z_0Z_1F''_{N_0N_0}F''_{N_1N_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -F'_{N_0}dZ_0 \\ -F'_{N_1}dZ_1 \\ -F'_{K_1}dZ_1\end{bmatrix}$$

Aplicando el supuesto de factores productivos independientes, $F''_{K_1N_1}=0$, las derivadas y signos de las curvas de demanda de factores quedan

$$\frac{\partial N_0}{\partial Z_0}=\frac{-F'_{N_0}}{Z_0F''_{N_0N_0}}>0;\quad \frac{\partial N_1}{\partial Z_1}=\frac{-F'_{N_1}}{Z_1F''_{N_1N_1}}>0;\quad \frac{\partial K_1}{\partial Z_1}=\frac{-F'_{K_1}}{Z_1F''_{K_1K_1}}>0$$

donde se comprueba que las cantidades demandadas de factores aumentan con las mejoras tecnológicas.

Desde $Y=ZF(K,N)\Rightarrow dY=FdZ+ZdF=\frac{Y}{Z}dZ+Z\left(F'_KdK+F'_NdN\right)$, se obtienen las variaciones en las ofertas de producto

$$dY_0=\frac{Y_0}{Z_0}dZ_0+Z_0F'_{N_0}dN_0;\quad dY_1=\frac{Y_1}{Z_1}dZ_1+Z_1\left(F'_{K_1}dK_1+F'_{N_1}dN_1\right)$$

Sustituyendo en ellas dN_0, dK_1 y dN_1, se comprueba que, dados los precios de los factores, el efecto sobre los niveles de producto de las mejoras tecnológicas es positivo

$$\frac{\partial Y_0}{\partial Z_0}=\frac{Y_0}{Z_0}-\frac{F'^2_{N_0}}{F''_{N_0N_0}}>0;\quad \frac{\partial Y_1}{\partial Z_1}=\frac{Y_1}{Z_1}-\frac{F'^2_{K_1}}{F''_{K_1K_1}}-\frac{F'^2_{N_1}}{F''_{N_1N_1}}>0$$

El equilibrio de los mercados queda

$$\begin{cases} \mathbf{N_0}=N_0^d\left(\frac{w_0}{p_0};Z_0\right) \\ \mathbf{N_1}=N_1^d\left(\frac{w_1}{p_1};Z_1\right) \\ Y_0^s\left(\frac{w_0}{p_0};Z_0\right)=C_0\left(r,\frac{w_0}{p_0},\frac{w_1}{p_1};\mathbf{N_0},\mathbf{N}_1,G_0,G_1\right)+I\left(r;Z_1\right)+G_0\end{cases}$$

Diferenciando, se obtiene al aproximación $A_2dp_r+B_2dz=0$, con

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial N_0^d}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_1^d}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} \\ \dfrac{\partial C_0}{\partial r}+\dfrac{\partial I}{\partial r} & \dfrac{\partial C_0}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)}-\dfrac{\partial Y_0^s}{\partial\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right)} & \dfrac{\partial C_0}{\partial\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right)} \end{bmatrix};\ B_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_0}{\partial Z_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial Z_1} \\ -\dfrac{\partial Y_0^s}{\partial Z_0} & \dfrac{\partial K_1}{\partial Z_1} \end{bmatrix}$$

y $dz = \begin{bmatrix} dZ_0 & dZ_1 \end{bmatrix}'$, con $sign(A_2) = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \\ - & + & + \end{bmatrix}$ y $sign(B_2) = \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \\ - & + \end{bmatrix}$, Los signos sobre los precios relativos se obtienen desde $dp_r = -A_2^{-1} B_2 dz$, teniendo que

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\left(\dfrac{w_0}{p_0}\right) \\ d\left(\dfrac{w_1}{p_1}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & + \\ + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_0 \\ dZ_1 \end{bmatrix}$$

Las mejoras tecnológicas incrementan la demanda de trabajo y el salario real del periodo en el que se producen (no los niveles de empleo por suponer dadas las ofertas de trabajo). Una mejora tecnológica presente tiene efectos ambiguos sobre el tipo de interés pues: i) el aumento del salario real eleva el consumo lo que aumenta el tipo de interés en el plano (r, Y_0); ii) aumenta la producción, lo que lo reduce. En cambio, una mejora tecnológica futura eleva el tipo de interés puesto que, al aumentar la productividad marginal del capital, eleva la inversión hoy (también aumenta el consumo al haberlo hecho el salario real futuro)

7. Conclusiones

El modelo desarrollado aquí microfundamenta las decisiones de oferta de trabajo y de demanda de consumo de las economías domésticas utilizando una función de utilidad aditiva y logarítmica que, por aditiva, ya anula las interrelaciones que se derivan de utilidades marginales cruzadas no nulas. La endogeneidad de la decisión de oferta de trabajo hace a esta dependiente del tipo de interés real a través de los efectos del salario real sobre la riqueza y el tiempo de ocio demandado.

En las empresas se supone dado el capital a corto plazo (en $t = 0$) de modo que la decisión de inversión es realmente intertemporal. La productividad marginal cruzada no nula es causa de la interrelación entre la demanda de trabajo de $t = 1$ y la de inversión de $t = 0$ a través de la presencia en ambas del salario real y del tipo de interés real. De suponer la productividad marginal cruzada nula, las demandas de ambos factores resultan independientes, algo empíricamente poco admisible. La presencia del tipo de interés real en las funciones de decisión de economías domésticas y empresas complica la obtención de conclusiones unívocas. Suponiendo rígidas las ofertas de trabajo en ambos periodos, así como la independencia de la demanda de los factores productivos, se simplifica el sistema, lo que permite la determinación de los signos.

Por otra parte, hemos obtenido las magnitudes agregadas a partir de agentes homogéneos, lo que ha permitido considerar la población, presente y futura, como variable de escala de dichas magnitudes, y como componente de la riqueza que los agentes consideran en sus decisiones de consumo y ahorro. Esto último suele estar ausente en los modelos al uso. El aumento de la población eleva todas las macromagnitudes como cabría esperar, salvo un aumento de la población futura que reduce el ahorro, coherentemente con sus efectos sobre el consumo presente pues implica un aumento de la riqueza.

Por último, se han analizado los efectos de mejoras tecnológicas en la línea de los modelos de ciclo real de equilibrio que tratan de radicar la dinámica cíclica en choques tecnológicos en economías sin dinero, para mostrar precisamente la neutralidad, y por tanto irrelevancia, del dinero para explicar dicho fenómeno. Los choques tecnológicos elevan el salario real cuando sus efectos se trasladan al capital (en $t = 1$), sin embargo sus efectos a corto plazo sobre el tipo de interés son ambiguos.

Con este trabajo se ha mostrado la dificultad que tiene el uso de modelos generales para la obtención de conclusiones unívocas. La desaparición de indeterminaciones en los signos se ha realizado imponiendo supuestos demasiado estrictos y en buena medida contradictorios con la evidencia empírica. Otra posibilidad no tratada aquí es la de parametrizaciones alternativas que decantarían las indeterminaciones de signos en uno u otro sentido. Esta vía es la seguida habitualmente en la calibración de modelos. En ese caso, para limitar el enorme conjunto de combinaciones paramétricas posibles, se opta por imponer a ciertos parámetros valores obtenidos de alguna estimación econométrica previa. A pesar de este proceder actualmente generalizado, se debe ser consciente y explorar razonablemente las diversas posibilidades de parametrización para comprobar hasta dónde llega la robustez de los signos obtenidos.

Referencias bibliográficas

Abel, A. B. y B. S. Bernanke (2014): *Macroeconomics*, 8ª ed., Pearson.

Barbolla, R. y P. Sanz (1995): *La concavidad en un modelo económico: funciones de demanda*, Madrid: Pirámide.

Barro, R. J. (1974): "Are Government Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy*, v. 82, n. 6, pp. 1095-1117.

Barro, R. J. (2008): *Macroeconomics: A Modern Approach*, Thomson.

Blanchard, O. (2017): *Macroeconomics*, 7ª ed., Pearson.

Blanchard, O. y S. Fischer (1989): *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, Mass.: The MIT Press.

Cass, D. (1965): "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, v. A.B. 32, pp. 233-240.

Cendejas, J. L. (2016): *Microfundamentos: las decisiones de las economías domésticas*. https://www.researchgate.net/profile/Jose_Luis_Cendejas/publications DOI: 10.13140/RG.2.2.30131.43047

Dornbusch, R., S. Fischer y R. Startz (2013): *Macroeconomics*, 12ª ed., McGraw-Hill.

Fisher, I. (1930): *Theory of interest*, New York: Augustus M. Kelley.
Friedman, M. (1957): *A Theory of the Consumption Function*, New Jersey: Princeton University Press.
Hicks, J. R. (1937): "Mr. Keynes and the 'Classics'; a Suggested Interpretation", *Econometrica*, pp. 147-159.
Koopmans, T. J. (1965): "On the Concept of Optimal Economic Growth", en *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam: North Holland.
Mankiw, N. G. (2016): *Macroeconomics*, 9ª ed., MacMillan.
Romer, D. (2012): *Advanced macroeconomics*, 4ª ed., Boston, Mass.: McGraw-Hill.
Sargent, T. J. (1979): *Macroeconomic Theory*, Nueva York: Academic Press.
Sargent, T. J. (1987): *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
Solow, R. M. (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, v. 70, n. 1, pp. 65-94.
Swan, T. W. (1956): "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, v. 32, pp. 334-361.
Sørensen, P. B., y H. J. Whitta-Jacobsen (2010): *Introducing advanced macroeconomics: Growth and business cycles*, 2ª ed., Edinburgh, Berkshire: McGraw-Hill.
Wyplosz, C. y M. Burda (2017): *Macroeconomics: a European Text*, 7ª ed,, Oxford: Oxford University Press.