Impact of the Derivatives Market on Monetary Policy: A Stochastic Volatility Model

Silva-Correa, María de los Ángeles and Martínez-Marca, José Luís and Venegas-Martínez, Francisco

Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto Politécnico Nacional

20 December 2016

Impacto del mercado de derivados en la política monetaria: un modelo de volatilidad estocástica

(Impact of the Derivatives Market on Monetary Policy: A Stochastic Volatility Model)

María de los Ángeles Silva-Correa
Universidad Nacional Autónoma de México
silvacorrea_01@yahoo.com.mx

José Luís Martínez-Marca
Universidad Nacional Autónoma de México
joslumm21@hotmail.com

Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Resumen

En este trabajo se examina, mediante un modelo de volatilidad estocástica, la relación que existe entre el mercado de derivados y la tasa de inflación. Se supone una economía en la que un agente representativo destina su riqueza a la tenencia de un activo, un producto derivado, un bono libre de riesgo, y el resto lo consume. Se determina la ecuación de la evolución de la riqueza real para plantear el problema de maximización de utilidad que enfrenta el agente representativo. En el equilibrio de la economía se determina la tasa de inflación y el valor de las demás variables de interés (consumo y saldos monetarios reales). Posteriormente se resuelve la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para determinar las decisiones óptimas del agente representativo. Por último se evalúa el impacto del mercado de derivados en la tasa de inflación.

Clasificación JEL: G13, E52, C61,
Palabras clave: volatilidad estocástica, mercado de derivados, política monetaria, optimización dinámica estocástica.

Abstract

This paper examines, through a stochastic volatility model, the relationship between the derivatives market and the inflation rate. It is supposed an economy I which a representative agent allocates his/her wealth in an asset, a derivative, a risk-free bond, and he consumes the rest. The equation of the evolution of real wealth is determined to state the problem of utility maximization that the representative agent faces. In the equilibrium of the economy the inflation rate and the value of the other concerning variables (consumption and real monetary balances) are determined. Subsequently, the Hamilton-Jacobi-Bellman equation (HJB) is solved to determine the optimal decisions of the representative agent. Finally, the impact of the derivatives market on the inflation rate is assessed.

JEL Classification: G13, E52, C61,
Keywords: stochastic volatility, derivatives market, monetary policy, stochastic dynamic optimization.

1. Introducción

Los mercados financieros han presentado un acelerado crecimiento en las últimas décadas y los productos derivados son un ejemplo más de las grandes innovaciones financieras. Estos mercados han cobrado gran relevancia ya que han modificado las decisiones de inversión de los diferentes agentes y, por tanto, podrían tener impactos significativos sobre la política económica. Sin embargo, a pesar de la vasta investigación al respecto, la evidencia empírica acerca el impacto que tiene el mercado de derivados sobre la política económica no ha sido determinante en todos los casos, específicamente sobre la política monetaria. El objetivo principal del presente trabajo es responder a las siguientes interrogantes: ¿Cómo afecta el uso de productos derivados a los objetivos de política económica? ¿Qué tipo de relación existe entre la tasa de inflación y la volatilidad de los derivados, suponiendo a la tasa de inflación como el único objetivo de la política monetaria?

La literatura sobre la relación entre la política monetaria y el mercado de derivados es abundante pero los resultados no son concluyentes, no sólo en cuanto a la existencia de una relación entre los derivados y la. política monetaria, sino también en cuanto al grado de afectación de la transmisión de las acciones de política monetaria. Investigadores como Fender (2000a, 2000b), Morales (2001) y Vickery (2008) mencionan que la evidencia encontrada no es suficiente para probar una relación entre la política monetaria y el mercado de derivados y que lo único posible es que los derivados impacten al canal del crédito. En el mismo sentido, Vrolijk (1997) encuentra evidencia empírica de que las tasas de inflación no se ven afectadas por la presencia de productos derivados en la economía. Sin embargo, existen estudios como los presentados por Bank for International Settlements (BIS) (1994) y Upper (2006) en los que se presenta evidencia de que los derivados hacen más eficiente la trasmisión de la política monetaria. Por otro lado, también hay investigaciones que aportan evidencia empírica en el sentido opuesto, pues afirman que la presencia de un mercado de derivados es un factor que desvía los objetivos de la política monetaria, como es el caso de Gómez *et al*. (2005) y Hunter y Smith (2002).

Es posible encontrar, también, otro tipo de investigaciones que no son determinantes en cuanto a sus resultados y sólo se limitan a decir que dependiendo del tamaño y desarrollo de los mercados financieros es la afectación sobre la política monetaria. Un ejemplo de estos trabajos son los presentados por: Vrolijk (1997); Mies, Morandé y Tapia (2002) y Gómez *et at*. (2005). Por otro lado, Wagner y Berger (2005) y Beltratti y Morana (2006) mencionan que es la volatilidad de los mercados financieros la que afecta la tasa de inflación. En esta investigación se plantea como hipótesis principal que la tasa de inflación es afectada por la volatilidad de los instrumentos derivados.[1] Esta investigación extiende el trabajo de Bernal y Venegas (2011) en el que se supone constante la volatilidad asociada a todas las variables relevantes.

El trabajo se organiza como sigue: en la siguiente sección se establecen las principales variables en la economía y se definen los activos a los que el agente representativo (consumidor) tiene acceso. La restricción presupuestal se establece mediante una ecuación diferencial estocástica. Se determinan, también, los rendimientos de los activos. Es necesario hacer uso del cálculo estocástico para determinar la dinámica de la riqueza en términos reales. En esta sección también se introduce el problema de optimización que enfrenta el agente representativo de la economía. La sección 3 caracteriza el equilibrio en donde de determina la tasa de inflación y el valor de las demás variables de interés (consumo y saldos monetarios reales). Se plantean los tres principales supuestos que producen el equilibrio a esta economía y que completan el esquema bajo el cual es posible obtener una solución al problema de maximización de utilidad del agente representativo. En en la sección 4 se presentan las conclusiones y, por último, dos apéndices muestran las soluciones detalladas.

2. Estructura de la economía

En esta sección se establece la estructura de la economía, tal como la descrita en Venegas (2006) Es necesario especificar la dinámica de cada una de las variables que integran la estructura económica y, en particular, aquellas que afectan las decisiones de los consumidores. El equilibrio en la economía se determinará a través de un modelo de volatilidad estocástica, lo que hace necesario establecer algunos supuestos extras: los individuos son homogéneos (en gustos y dotaciones), por lo tanto cualquier consumidor

[1] Para comprobar dicha hipótesis se hace uso de un modelo de volatilidad estocástica con una estructura económica similar en Venegas (2000), (2006), (2006a) (2008), (2009) y (2009a).

será un agente representativo; la economía sólo produce un bien, y es decisión del agente representativo destinarlo a su consumo o a la tenencia de activos. Se supone, además, que el agente representativo conoce la dinámica de las variables que conforman esta economía y maximiza su satisfacción en cada momento. Dicho en otras palabras, se trata de un agente racional que resuelve su problema de maximización de utilidad sujeto a su restricción presupuestal. El agente representativo obtiene satisfacción tanto por el consumo de un bien genérico como por la tenencia de saldos monetarios reales.

En cuanto a las variables relevantes para el modelo en cuestión, se describe primero a la producción que es denotada por y_t y está definida por una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}y_t = y_t(\mu_y \mathrm{d}t + \sigma_y \mathrm{d}W_{yt}), \tag{1}$$

donde μ_y es la tasa de rendimiento media esperada por la inversión en el activo físico (capital), σ_y es la volatilidad asociada (la cual se supone constante) y W_{yt} es un movimiento geométrico browniano.

Es necesario suponer, también, que el banco central es el único encargado de emitir dinero. Así, los consumidores pueden tener en posesión saldos monetarios y son valorados por su servicio de liquidez. Además, la política monetaria es conducida de forma tal que la oferta monetaria, denotada por M_t, satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}M_t = M_t\left(\mu_M \mathrm{d}t + \sigma_M \mathrm{d}W_{Mt}\right), \tag{2}$$

donde μ_M es la tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria y σ_M es la volatilidad de la oferta monetaria. Por su parte la volatilidad de la oferta monetaria es estocástica y por simplicidad se denotará en términos de la varianza, V_t, como $\sigma_M^2 = V_t$, la cual también es conducida por un movimiento geométrico browniano:

$$\mathrm{d}V_t = V_t\left(\mu_V \mathrm{d}t + \sigma_V dW_{Vt}\right), \tag{3}$$

donde μ_V es la tendencia de la varianza y σ_V es la volatilidad de la varianza.

En cuanto a los movimientos geométricos brownianos, de las ecuaciones anteriores, se establecen las siguientes relaciones:

i) Los movimiento brownianos $\mathrm{d}W_{yt}$ y $\mathrm{d}W_{Mt}$ están correlacionados de tal forma que:

$$Cov\left(\mathrm{d}W_{yt}, \mathrm{d}W_{Mt}\right) = \rho_1 \mathrm{d}t.$$

ii) La correlación entre $\mathrm{d}W_{yt}$ y $\mathrm{d}W_{Vt}$ es igual a cero, debido a que en la teoría ortodoxa las variables monetarias no afectan a las variables reales:

$$Cov\left(\mathrm{d}W_{yt}, \mathrm{d}W_{Vt}\right) = 0.$$

iii) Los movimientos brownianos $\mathrm{d}W_{Mt}$ y $\mathrm{d}W_{Vt}$ están correlacionados de la siguiente forma:

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{Mt}, \mathrm{d}W_{Vt}\right) = \rho_2 \mathrm{d}t,$$

donde ρ_i es un coeficiente de correlación entre los movimientos brownianos.

Por otra parte, se supone que los agentes perciben el nivel general de precios[2], denotado por P_t, como una ecuación estocástica, la cual es afectada tanto por choques reales como monetarios:

$$\mathrm{d}P_t = P_t\left(\pi_t \mathrm{d}t + \sigma_{Py} \mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{PM} \mathrm{d}W_{Mt}\right), \tag{4}$$

donde π_t es la inflación media esperada al tiempo t, $\sigma_{PM} > 0$ es la volatilidad instantánea asociada a los choques monetarios y $\sigma_{Py} > 0$ es la volatilidad instantánea asociada a los coques reales.

[2] Se supone que los precios siguen esta dinámica, en la que dependen de choques reales y monetarios de acuerdo con la demanda de saldos reales de Cagan.

Adicionalmente, existe un bono cupón cero de vencimiento instantáneo, libre de riesgo de incumplimiento, también conocido como título de deuda pública, que es emitido por el Gobierno Federal, con un precio B_t que satisface:

$$\mathrm{d}B_t = i_t B_t \mathrm{d}t, \tag{5}$$

dónde i_t es la tasa de interés nominal.

Como se puede observar, esta economía presenta dos factores de riesgo, dados por W_{yt} y W_{Mt} y existe, hasta el momento, un único activo financiero al que los agentes tienen acceso, por lo que los mercados son incompletos. Por lo cual es posible definir un activo subyacente X_t que contiene fluctuaciones aleatorias de y_t y M_t, y está definido por una ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}X_t = X_t \left(\mu_X \mathrm{d}t + \sigma_{Xy} \mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{XM} \mathrm{d}W_{Mt} \right), \tag{6}$$

donde μ_X es la tendencia del precio del activo, $\sigma_{Xy} > 0$ es la volatilidad asociada con las fluctuaciones de las variables reales y $\sigma_{XM} > 0$ es la volatilidad asociada con las fluctuaciones de las variables reales. Si X_t es un activo subyacente, es posible definir un derivado sobre el mismo, que es denotado por S_t y es guiado por una dinámica estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}S_t = S_t \left(\mu_S \mathrm{d}t + \sigma_{Sy} \mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{SM} \mathrm{d}W_{Mt} \right), \tag{7}$$

donde μ_S es la tendencia del derivado, $\sigma_{Sy} > 0$ es la volatilidad asocia a las fluctuaciones reales y $\sigma_{SM} > 0$ es la volatilidad asociada a las fluctuaciones monetarias.

Las variables anteriores definen los activos a los que el agente representativo tiene acceso. Por otra parte, el agente representativo tiene como objetivo maximizar su utilidad y tiene información completa sobre los procesos estocásticos de la oferta monetaria y de los precios de los activos financieros. El consumidor asigna proporciones de su riqueza total a la tenencia del activo, θ_y, a la tenencia de saldos monetarios reales, θ_m, a la tenencia de un producto derivado, θ_s, a la tenencia de un bono libre de riesgo, De esta manera, la ecuación de la riqueza en términos reales satisface:

$$a_t = \frac{y_t}{P_t} + s_t + m_t + b_t, \tag{8}$$

donde $\frac{y_t}{P_t}$ es la ganancia real por la inversión en el activo físico, $s_t = \frac{S_t}{P_t}$ es el precio real del derivado, $m_t = \frac{M_t}{P_t}$ son los saldos monetarios en términos reales y $b_t = \frac{B_t}{P_t}$ es el precio del bono en términos reales. La ecuación de la evolución de la riqueza real es, entonces, conducida por una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[\theta_y \mathrm{d}R_y + \theta_s \mathrm{d}R_s + \theta_m \mathrm{d}R_m + \left(1 - \theta_y - \theta_s - \theta_m\right)\mathrm{d}R_b\right] - c_t \mathrm{d}t, \tag{9}$$

donde $\mathrm{d}R_y$ es la tasa de rendimiento sobre el activo físico, $\mathrm{d}R_s$ es la tasa de rendimiento sobre el derivado, $\mathrm{d}R_m$ es el rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales y $\mathrm{d}R_b$ es la tasa de rendimiento por la tenencia de un bono libre de riesgo

Para terminar de establcer la ecuación de la evolución de la riqueza en términos reales es necesario expresar las variables en términos reales, para lo cual se divide entre los precios, P_t, y se aplica el lema de Itô para un cociente. Las tasas de rendimiento del derivado, de la tenencia de saldos monetarios reales, del activo físico y del bono libre de riesgo, respectivamente, están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_s = &\left(\mu_S - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Sy}\sigma_{Py} - \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{SM}\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} + \left(\sigma_{SM} - \sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt}.\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_m = &\left(\mu_M - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + \sigma_{PM}^2 + 2\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{Py}\sigma_M\rho_1 - \sigma_{PM}\sigma_M\right)\mathrm{d}t \\ &+ \left(\sigma_M - \sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt} - \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt}.\end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}R_y = & \left(\mu_y - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_y\rho_1\right)\mathrm{d}t \\
& + \left(\sigma_y - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} - \sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt}
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\mathrm{d}R_b = \left(i_t - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2\right)\mathrm{d}t - \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt} - \sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt}. \tag{13}
$$

Por lo tanto, los consumidores maximizan en cada momento su satisfacción de forma tal que las proporciones de su riqueza que asigna a la tenencia de saldos monetarios reales, el producto derivado y la inversión en el activo físico sean siempre óptimas.

Cada individuo obtiene satisfacción de dos fuentes: el consumo, c_t, del único bien que es producido en la economía y la tenencia de saldos monetarios reales m_t (Venegas-Martínez, 2008). La función de utilidad satisface

$$
u = u\left(c_t, m_t\right), \quad u_1 > 0, \quad u_{11} < 0, \quad u_2 > 0, \quad u_{22} < 0, \tag{14}
$$

Se supone que los individuos son adversos al riesgo y se elige la siguiente función de utilidad:

$$
U\left(c_t, m_t, t\right) = \varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta t} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta t} \tag{15}
$$

donde δ es la tasa subjetiva de descuento, es decir, la tasa a la que los individuos descuentan la utilidad generada por el consumo futuro, la cual refleja el grado de impaciencia del agente representativo. Una tasa de descuento elevada representa a un agente impaciente por el consumo presente (Arango y Ramírez, 2007). En la ecuación (15) φ es un parámetro que oscila entre 0 y 1 y mide la importancia relativa entre el consumo del bien que se produce en la economía y la tenencia de saldos monetarios reales.

El consumidor representativo en esta economía enfrenta el criterio:

$$
\underset{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \left[\varphi \ln\left(c_s\right) e^{-\delta t} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right], \tag{16}
$$

donde $\mathcal{F}_0$ representa la información disponible al tiempo $t=0$. El criterio (16) estará sujeto a la evolución de la riqueza real del individuo representativo, la cual satisface[3]:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}a_t = a_t \Big\{ & \theta_y \Big[\Big(\mu_y - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y\rho_1 \Big)\mathrm{d}t \\
& + \left(\sigma_y - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} \Big] + \theta_s \Big[\Big(\mu_s - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Sy}\sigma_{Py} \\
& - \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{Sy}\sigma_{PM}\rho_1 - \sigma_{SM}\sigma_{PM} \Big)\mathrm{d}t + \left(\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} + \big(\sigma_{SM} \\
& - \sigma_{PM}\big)\mathrm{d}W_{Mt} \Big] + \theta_m \Big[\Big(\mu_M - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Py}\sigma_M\rho_1 \\
& - \sigma_{PM}\sigma_M \Big)\mathrm{d}t + \left(\sigma_M - \sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt} - \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt} \Big] + \left(1 - \theta_y - \theta_s - \theta_m\right) \\
& \Big[\Big(i_t - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 \Big)\mathrm{d}t - \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt} - \sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt} \Big] \Big\} - c_t\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Por conveniencia la ecuación (17) se puede reescribir como:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}a_t = a_t \Big[& \Big(\theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) + \theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \theta_m\left(\alpha_m - r_b\right) \Big)\mathrm{d}t + \left(\theta_y\sigma_y + \theta_s\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} \\
& + \left(\theta_s\sigma_{SM} + \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt} - \frac{c_t}{a_t}\mathrm{d}t \Big],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

donde:

$$\alpha_y = \mu_y - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y\rho_1,$$

$$\alpha_s = \mu_s - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Sy}\sigma_{Py} - \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{Sy}\sigma_{PM}\rho_1 - \sigma_{SM}\sigma_{PM},$$

$$\alpha_m = \mu_M - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Py}\sigma_M\rho_1 - \sigma_{PM}\sigma_M,$$

$$r_b = i_t - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2.$$

Para simplificar el análisis, la ecuación (18) se reescribe de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[\mu_a\mathrm{d}t + \sigma_{ay}\mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{aM}\mathrm{d}W_{Mt}\right], \tag{19}$$

donde:

---

[3] Se sustituye a las tasas de rendimiento de los diferentes activos en la ecuación estocástica de la evolución de la riqueza real

$$\mu_a = \theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) + \theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \theta_m\left(\alpha_m - r_b\right) - \frac{c_t}{a_t},$$

$$\sigma_{ay} = \theta_y \sigma_y + \theta_s \sigma_{Sy} - \sigma_{Py},$$

$$\sigma_{aM} = \theta_s \sigma_{SM} + \theta_m \sigma_M - \sigma_{PM}.$$

Ahora que los consumidores han establecido su función de utilidad y su restricción, pueden resolver el problema de maximización al que se enfrentan, utilizando programación dinámica estocástica.

3. El equilibrio de la economía

A continuación se establecen las condiciones de equilibrio:

i. Una vez descritas la dinámicas de las variables de la estructura de la economía y los activos a los que tiene acceso el agente representativo, se supone que tanto las proporciones destinadas al activo físico, θ_y, a la tenencia de saldos monetarios reales, θ_m, la tenencia de un producto derivado, θ_s, y la tenencia de un bono libre de riesgo, θ_b; así como, el consumo, c_t, son cantidades óptimas y se denotan como: θ_y^*, θ_m^*, θ_s^* y c_t^*. Las que a su vez aseguran que el agente representativo maximiza su satisfacción.

ii. El mercado de activos se vacía, lo que quiere decir que $a_t \theta_s^* = 0$

iii. La oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales $\frac{M_t}{P_t} = m_t = a_t \theta_m^*$

Por su parte, la función de utilidad indirecta del agente representativo está dada por:

$$J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \left(\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta s} + \left(1-\varphi\right) \ln\left(m_t\right) e^{-\delta s}\right) \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right] \tag{20}$$

La función $J\left(a_t, P_t, V_t, t\right)$ proporciona una medida del bienestar económico del agente representativo ya que es el nivel máximo de satisfacción que puede alcanzar. Así que la ecuación original $U\left(c_t, m_t, t\right)$ será vista como la función de utilidad directa para hacer la diferencia con J.

Para resolver el problema del agente representativo de esta economía se hace uso de la programación dinámica estocástica.[4] Dada la función de utilidad indirecta del agente representativo y con el propósito de obtener la solución óptima del problema de maximización, la ecuación (20) se reescribe como:

$$
\begin{aligned}
J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} E\Bigg\{ & \int_t^{t-\mathrm{d}t} \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta s} + \left(1-\varphi\right) \ln\left(m_t\right) e^{-\delta s}\right] \mathrm{d}s \\
& + \int_{t-\mathrm{d}t}^{\infty} \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta s} + \left(1-\varphi\right) \ln\left(m_t\right) e^{-\delta s}\right] \mathrm{d}s \quad \Bigg| \mathcal{F}_0 \quad \Bigg\},
\end{aligned} \tag{21}
$$

Se observa que la función de utilidad directa depende únicamente del consumo, los saldos monetarios reales y del tiempo, mientras que la función de utilidad indirecta depende de la varianza de la oferta monetaria, la cual tiene una dinámica estocástica. Es esta la principal contribución de la presente investigación, ya que en trabajos precedentes se considera constante a la volatilidad de la oferta monetaria. Así la función de utilidad indirecta depende de cuatro variables. Para determinar a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se obtienen primero las ecuaciones recursivas de la programación dinámica[5], que arrojan como resultado:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta t} + \left(1-\varphi\right) \ln\left(m_t\right) e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_{aP} a_t P_t \big(\sigma_{Py} \sigma_{ay} \\
& + \sigma_{Py} \sigma_{aM} \rho_1 + \sigma_{PM} \sigma_{ay} \rho_1 + \sigma_{PM} \sigma_{aM} \big) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM} \sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM} \sigma_V \rho_2 + J_{aa} a_t^2 \\
& \left(\frac{1}{2} \sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay} \sigma_{aM} \rho_1 + \frac{1}{2} \sigma_{aM}^2\right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py} \sigma_{PM} \rho_1 + \frac{1}{2} \sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Para determinar la solución de la ecuación se propone un candidato de solución de la forma:

$$
J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = F\left(a_t, P_t, V_t\right) e^{-\delta t}, \tag{23}
$$

[4] La programación dinámica es muy útil en la solución de problemas de optimización en donde se toman decisiones en varias etapas. Dicho método se basa en el principio de optimalidad, el cual establece que dada una política óptima, cualquiera de sus políticas es también óptima (Venegas-Martínez, 2008).

[5] Todas las ecuaciones recursivas se presentan en el Apéndice 1

del cual se puede deducir que $J_t = -\delta F\left(a_t, P_t, V_t\right)e^{-\delta t}$ y $J_i = F_i$, $J_{in} = F_{in}$. Por lo que la ecuación (17) puede ser ahora reescrita como:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y} \Bigg[& \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta F\left(a_t, P_t, V_t\right)e^{-\delta t} + F_a a_t \mu_a + F_P P_t \pi_t + F_V V_t \mu_V \\
& + F_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py}\sigma_{ay} + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\right) + F_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 \\
& + F_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 + F_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) + F_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2\right. \\
& \left. + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2} F_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 \Bigg].
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Ahora se asigna una forma funcional a $F\left(a_t, P_t, V_t\right)$. Se propone:

$$
F\left(a_t, P_t, V_t\right) = \beta_0 + \beta_1\left[\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right], \tag{25}
$$

de donde se tiene que

$$
\begin{aligned}
F_a &= \frac{\beta_1}{a_t}; \quad F_{aP} = 0; \quad F_{aa} = -\frac{\beta_1}{a_t^2}; \\
F_P &= \frac{\beta_1}{P_t}; \quad F_{aV} = 0; \quad F_{PP} = -\frac{\beta_1}{P_t^2}; \\
F_V &= \frac{\beta_1}{V_t}; \quad F_{PV} = 0; \quad F_{VV} = -\frac{\beta_1}{V_t^2};
\end{aligned}
$$

A continuación se sustituyen las derivadas parciales de F en la ecuación (24) para obtener:

$$
\begin{aligned}
0 = & \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\mu_a + \beta_1\pi_t \\
& + \beta_1\mu_V - \beta_1\left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) - \beta_1\left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) \\
& - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_V^2,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

dado que, son conocidos los valores de μ_a, σ_{ay} y σ_{aM}, se sustituyen en la ecuación anterior, por lo que:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(c_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\Big[\quad \theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) \\ & + \theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \theta_m\left(\alpha_s - r_b\right) - \frac{c_t}{a_t}\quad\Big] + \beta_1\pi_t + \beta_1\mu_V - \beta_1\Big[\frac{1}{2}\left(\theta_y\sigma_y + \theta_s\sigma_S - \sigma_{Py}\right)^2 \\ & + \left(\theta_y\sigma_y + \theta_s\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)\left(\theta_s\sigma_{SM} + \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM}\right)\rho_1 + \frac{1}{2}\left(\theta_s\sigma_{SM} + \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM}\right)^2\Big] - \beta_1. \end{aligned} \tag{27}$$

La ecuación (27) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) \\ & + \beta_1\theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \beta_1\theta_m\left(\alpha_m - r_b\right) - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \beta_1\pi_t + \beta_1\mu_V - \beta_1\Big[\frac{1}{2}\Big(\theta_y^2\sigma_y^2 + 2\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{Sy} \\ & - 2\theta_y\sigma_y\sigma_{Py} + \theta_s^2\sigma_{Sy}^2 - 2\theta_s\sigma_{Sy}\sigma_{Py} + \sigma_{Py}^2\Big) + \rho_1\Big(\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{SM} + \theta_s^2\sigma_{SM}\sigma_{Sy} - \theta_s\sigma_{Py}\sigma_{SM} \\ & + \theta_m\theta_y\sigma_M\sigma_y + \theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{Sy} - \theta_m\sigma_M\sigma_{Py} - \theta_y\sigma_{PM}\sigma_y - \theta_s\sigma_{PM}\sigma_{Sy} + \sigma_{PM}\sigma_{Py}\Big) \\ & + \frac{1}{2}\Big(\theta_s^2\sigma_{SM}^2 + 2\theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{SM} - 2\theta_s\sigma_{PM}\sigma_{SM} + \theta_m^2\sigma_M^2 - 2\theta_m\sigma_M\sigma_{PM} + \sigma_{PM}^2\Big)\Big] - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_{Py}^2 \\ & - \beta_1\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_{PM}^2 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_V^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Para determinar el valor del consumo, c_t, la proporción de la riqueza destinada a la tenencia de saldos reales, θ_m, la proporción destinada a la inversión en el activo físico, θ_y y la proporción destinada a la tenencia de un producto derivado, θ_s, se debe retomar la ecuación (28), con la consideración del tercer supuesto de equilibrio, que establece que $m_t = a_t\theta_m$. En cuyo caso la ecuación (28) se reescribe como:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(a_t\theta_m\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) \\ & + \beta_1\theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \beta_1\theta_m\left(\alpha_m - r_b\right) - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \beta_1\pi_t + \beta_1\mu_V - \beta_1\Big[\frac{1}{2}\Big(\theta_y^2\sigma_y^2 + 2\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{Sy} \\ & - 2\theta_y\sigma_y\sigma_{Py} + \theta_s^2\sigma_{Sy}^2 - 2\theta_s\sigma_{Sy}\sigma_{Py} + \sigma_{Py}^2\Big) + \rho_1\Big(\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{SM} + \theta_s^2\sigma_{SM}\sigma_{Sy} - \theta_s\sigma_{Py}\sigma_{SM} \\ & + \theta_m\theta_y\sigma_M\sigma_y + \theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{Sy} - \theta_m\sigma_M\sigma_{Py} - \theta_y\sigma_{PM}\sigma_y - \theta_s\sigma_{PM}\sigma_{Sy} + \sigma_{PM}\sigma_{Py}\Big) \\ & + \frac{1}{2}\Big(\theta_s^2\sigma_{SM}^2 + 2\theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{SM} - 2\theta_s\sigma_{PM}\sigma_{SM} + \theta_m^2\sigma_M^2 - 2\theta_m\sigma_M\sigma_{PM} + \sigma_{PM}^2\Big)\Big] - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_{Py}^2 \\ & - \beta_1\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_{PM}^2 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_V^2, \end{aligned} \tag{29}$$

Posteriormente se deriva con respecto a las variables de decisión. Para poder simplificar la ecuación anterior se sustituyen los valores de α_y, α_s, α_m y r_b, para obtener:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \varphi \ln(c_t) + (1-\varphi)\ln(a_t\theta_m) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1 \ln(a_t) + \beta_1 \ln(P_t) + \beta_1 \ln(V_t)\right] + \beta_1\theta_y(\mu_y - i) \\
& + \beta_1\theta_s(\mu_S - i) + \beta_1\theta_m(\mu_M - i) - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \beta_1\pi_t + \beta_1\mu_V - \tfrac{1}{2}\beta_1\theta_y^2\sigma_y^2 - \beta_1\theta_s\theta_y\left(\sigma_y\sigma_{Sy}\right. \\
& \left. + \sigma_y\sigma_{SM}\rho_1\right) - \beta_1\theta_s^2\left(\sigma_{Sy}^2 + \sigma_{SM}\sigma_{Sy}\rho_1 + \tfrac{1}{2}\sigma_{SM}^2\right) - \beta_1\theta_m\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1 - \beta_1\theta_m\theta_s\left(\sigma_M\sigma_{Sy}\rho_1\right. \\
& \left. + \sigma_M\sigma_{SM}\right) + \tfrac{1}{2}\beta_1\theta_m^2\sigma_M^2 + \beta_1\sigma_{PM}^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_{Py}^2
\end{aligned} \tag{30}
$$

En primer lugar se deriva a la ecuación (25) con respecto de c_t. Con lo que se obtiene:

$$
0 = \frac{\varphi}{c_t} - \frac{\beta_1}{a_t} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{c}_t = \varphi\frac{a_t}{\beta_1}. \tag{31}
$$

Es posible observar que el consumo no depende de variables financieras, mientras que sí depende de la riqueza del agente representativo y del parámetro φ que mide la importancia relativa que este agente asigna al consumo y a la tenencia de saldos monetarios reales. Además, la relación que se presenta entre el consumo, la riqueza y el parámetro que asigna la importancia relativa entre consumo y saldos reales, es directa, lo cual demuestra que si la riqueza aumenta, lo hará también el consumo y de la misma forma con el parámetro φ. Dicho resultado es bastante intuitivo si se piensa en cualquier consumidor inmerso en una economía, pues cuanto mayor es su ingreso mayor es su consumo. Y lo mismo sucede con la importancia que él asigna al consumo, si su preferencia se inclina hacia el consumo (cuanto más se acerque φ a 1) su consumo aumentrá.

Para determinar los saldos monetarios reales y la tenencia en el activo físico se deriva la ecuación (25) con respecto de θ_m y θ_y. Si se deriva con respecto de θ_m se obtiene:

$$
0 = \frac{(1-\varphi)}{\theta_m} + \beta_1(\mu_M - i) - \beta_1\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1 - \beta_1\theta_s\left(\sigma_M\sigma_{Sy}\rho_1 + \sigma_M\sigma_{SM}\right) + \beta_1\theta_m\sigma_M^2.
$$

Por la primera y segunda condición de equilibrio $\theta_s^* = \theta_s = 0$, de forma que la ecuación anterior queda como:

$$0 = \frac{(1-\varphi)}{\theta_m} + \beta_1\left(\mu_M - i\right) - \beta_1\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1 + \beta_1\theta_m\sigma_M^2, \tag{32}$$

Por el momento no se determinará el valor de los saldos monetarios reales , θ_m, dado que en la ecuación también se encuentra la proporción destinada al activo físico. Ahora se deriva la ecuación (25) con respecto de θ_y :

$$0 = \beta_1\left(\mu_y - i\right) - \beta_1\theta_y\sigma_y^2 - \beta_1\theta_s\left(\sigma_y\sigma_{Sy} + \sigma_y\sigma_{SM}\rho_1\right) - \beta_1\theta_m\sigma_M\sigma_y\rho_1$$

Por la segunda condición de equilibrio la ecuación anterior se reescribe como:

$$0 = \beta_1\left(\mu_y - i\right) - \beta_1\theta_y\sigma_y^2 - \beta_1\theta_m\sigma_M\sigma_y\rho_1. \tag{33}$$

Como se puede observar con las ecuaciones (32) y (33) se puede formar un sistema de ecuaciones de dos variables con dos incógnitas, θ_m y θ_y, cuyo resultado está dado por[6]:

$$\theta_{m1} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3} \tag{34a}$$

$$\theta_{m2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3} \tag{34b}$$

Si se rastrean las variables que conforman a θ_m es posible observar que cuando aumenta la tasa de interés disminuye la demanda de saldos reales. Un aumento de la tasa de interés nominal hace que el agente representativo sustituya su dinero por bonos, lo que reducirá la tenencia de saldos monetarios reales. Cuando las tasa de interés son elevadas es mucho más atractivo para los consumidores invertir que consumir, mientras que cuando las tasas de interés son bajas preferirán consumir.

$$\theta_{y1} = \omega_5 - \omega_6\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3}\right) \tag{35a}$$

[6] El proceso de resolución de este sistema de ecuaciones se encuentra en el Apéndice 2

$$\theta_{y2} = \omega_5 - \omega_6 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3} \right) \tag{35b}$$

A su vez las ecuaciones (30a) y (30b) nos indican el valor de la tenencia del activo físico depende directamente de su prima de riesgo, $\mu_y - i$, y depende, de forma inversa, de la volatilidad del derivado, σ_{Sy}. La relación inversa con la prima de riesgo del activo físico indica que si disminuye la prima de riesgo del activo físico, será más atractivo para el agente representativo invertir en otra clase de productos que en el activo físico. Dado que el otro producto financiero al que tiene acceso es consumidor es un producto derivado, puede decirse que cuando la prima de riesgo del activo físico aumenta, el agente representativo disminuirá su inversión en el activo físico y decidirá invertir una mayor cantidad de su riqueza en productos derivados.

Para determinar la tasa de inflación de equilibrio es necesario hacer mención de la tercera condición de equilibrio que establece:

$$\frac{M_t}{P_t} = m_t = a_t \theta_m$$

y se puede re expresar como:

$$P_t = \frac{M_t}{a_t} \frac{1}{\theta_m} \tag{36}$$

Si se aplica el lema de Itô para un cociente a la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(M_t/a_t)}{(M_t/a_t)} &= \left(\mu_M - \mu_a - \sigma_M \sigma_{ay} \rho_1 - \sigma_M \sigma_{aM} + \tfrac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \tfrac{1}{2}\sigma_{aM}^2 \right) \mathrm{d}t \\ &\quad + (\sigma_M - \sigma_{aM}) \mathrm{d}W_{Mt} - \sigma_{ay} \mathrm{d}W_{yt} \end{aligned} \tag{37}$$

Ahora, si se emplean las condiciones de equilibrio y se toma en cuenta la ecuación (37) y el proceso de la tasa de inflación tal y como lo describe la ecuación (4) se observa que la tasa de inflación está compuesta por:

1) la tendencia de la inflación media esperada

$$\pi_t = \left(\mu_M - \mu_a - \sigma_M \sigma_{ay} \rho_1 - \sigma_M \sigma_{aM} + \tfrac{1}{2} \sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay} \sigma_{aM} \rho_1 + \tfrac{1}{2} \sigma_{aM}^2 \right) \frac{1}{\theta_m} \tag{38}$$

2) y por sus volatilidades

$$\sigma_{PM} = \frac{\sigma_M - \sigma_{aM}}{\theta_m} \tag{39}$$

$$\sigma_{Py} = -\frac{\sigma_{ay}}{\theta_m}. \tag{40}$$

Al mismo tiempo es posible recordar que el crecimiento medio esperado de la riqueza satisface:

$$\mu_a = \theta_y \left(\mu_y - i_t - 2\sigma_{Py} \sigma_y - \sigma_{PM} \sigma_y \rho_1 \right) + \theta_m \left(\mu_M - i_t - \sigma_{Py} \sigma_M \rho_1 - \sigma_{PM} \sigma_M \right) - \frac{c_t}{a_t} \tag{41}$$

y las volatilidades de la riqueza real son:

$$\sigma_{ay} = \theta_y \sigma_y - \sigma_{Py} \tag{42}$$

$$\sigma_{aM} = \theta_m \sigma_M - \sigma_{PM} \tag{43}$$

Para obtener el valor de la tasa de inflación de equilibrio y sus respectivas volatilidades se resuelve el sistema de ecuaciones de seis ecuaciones con seis incógnitas de (37)-(43). Con lo que se obtiene que la inflación media esperada de equilibrio es:

$$\pi_t = \frac{i_t}{i_t - \omega_5} \left[\mu_M \omega_1 + \theta_y \left(\mu_y \left(i_t - \omega_1 \right) + \gamma_1 \right) + \theta_y^2 \sigma_y^2 \omega_1 + \gamma_2 \right] \tag{44}$$

donde:

$$\gamma_1 = \sigma_{Py} \sigma_M \rho_1 + \sigma_{PM} \sigma_M$$

$$\gamma_2 = 2\sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y\rho_1.$$

4. Conclusiones

Es posible destacar tres principales resultados: 1) la inflación es una variable que depende de shocks monetarios y reales, lo cual dice que es afectada tanto por variables monetarias como reales; 2) La oferta monetaria junto con su volatilidad se relacionan de manera positiva con la tasa de inflación, es decir, un incremento en la oferta monetaria o en su volatilidad traería como consecuencia un incremento en la tasa de inflación o sea en el nivel general de precios; y 3) si las volatilidades de los activos financieros afectan a la tasa de inflación, se puede verificar la relación existente entre el mercado financiero y los objetivos de la política monetaria. Así, se ha encontrado que tanto la tendencia como la volatilidad del mercado de instrumentos derivados afecta a la tasa de inflación. Por lo tanto se verifica la hipótesis planteada para este trabajo de investigación.

Apéndice 1

A continuación se obtiene la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellma asociada al problema de maximización:

$$\underset{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \left[\varphi \ln(c_s)e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln(m_t)e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}s \;\middle|\mathcal{F}_0\right]. \qquad \text{(A2.1)}$$

Con el propósito de caracterizar una solución del problema planteado se define la siguiente función de valor:

$$J(a_t, P_t, V_t, t) = \max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \left(\varphi \ln(c_t)e^{-\delta s} + (1-\varphi)\ln(m_t)e^{-\delta s}\right)\mathrm{d}s \;\middle|\mathcal{F}_0\right]. \qquad \text{(A2.2)}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} E\Bigg\{ & \int_t^{t-\mathrm{d}t} \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta s} + (1-\varphi)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta s}\right] \mathrm{d}s \\
& + \int_{t-\mathrm{d}t}^{\infty} \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta s} + (1-\varphi)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta s}\right] \mathrm{d}s \quad \bigg| \mathcal{F}_0 \quad \Bigg\}
\end{aligned} \tag{A2.3}
$$

Para expresar la ecuación anterior en términos de $J\left(a_t, P_t, V_t, t\right)$ se reescribe de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} \mathrm{E}\Bigg\{ & \int_t^{t+\mathrm{d}t} \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta t}\right] \mathrm{d}t \\
& + \int_{t+\mathrm{d}t}^{\infty} J\left(a_t + \mathrm{d}a_t, P_t + \mathrm{d}P_t, V_t + \mathrm{d}V_t, t + \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}t \quad \bigg| \mathcal{F}_t \quad \Bigg\},
\end{aligned} \tag{A2.4}
$$

Se separa a la función J:

$$
\begin{aligned}
J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} \mathrm{E}\Bigg\{ & \int_t^{t+\mathrm{d}t} \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta t}\right] \mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right) \\
& + J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) + \mathrm{d}J\left(\mathrm{d}a_t, \mathrm{d}P_t, \mathrm{d}V_t, \mathrm{d}t\right) \quad \bigg| \mathcal{F}_t \quad \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{A2.5}
$$

Es consecuencia,

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} \mathrm{E}\Big\{ & \left[\varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln\left(m_t\right) e^{-\delta t}\right] \mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right) \\
& + \mathrm{d}J\left(\mathrm{d}a_t, \mathrm{d}P_t, \mathrm{d}V_t, \mathrm{d}t\right)_t \quad \Big| \mathcal{F} \Big\}.
\end{aligned} \tag{A2.6}
$$

Para continuar con el problema se escribe $\mathrm{d}J$ con el lema de Itô. Si $J\left(a_t, P_t, V_t, t\right)$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}J = {} & J_a\left(\mathrm{d}a_t\right) + J_P\left(\mathrm{d}P_t\right) + J_V\left(\mathrm{d}V_t\right) + J_t\left(\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}\Big[J_{aa}\left(\mathrm{d}a_t\right)^2 + J_{PP}\left(\mathrm{d}P_t\right)^2 + J_{VV}\left(\mathrm{d}V_t\right)^2 \\
& + J_{tt}\left(\mathrm{d}t\right)^2 + 2J_{aP}\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}P_t\right) + 2J_{aV}\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right) + 2J_{at}\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) \\
& + 2J_{PV}\left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right) + 2J_{Pt}\left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) + 2J_{Vt}\left(\mathrm{d}V_t\right)\left(\mathrm{d}t\right),
\end{aligned} \tag{A2.7}
$$

donde:

J_i: primera derivada parcial con respecto de i

J_{ii} : segunda derivada parcial con respecto de i y luego de i

$$\left(\mathrm{d}a_t\right)^2 = a_t^2\left(\sigma_{ay}^2\mathrm{d}t + 2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1\mathrm{d}t + \sigma_{aM}^2\mathrm{d}t\right)$$

$$\left(\mathrm{d}V_t\right)^2 = V_t^2\sigma_V^2\mathrm{d}t$$

$$\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}P_t\right) = a_tP_t\left(\sigma_{Py}\sigma_{ay}\mathrm{d}t + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1\mathrm{d}t + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1\mathrm{d}t + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\mathrm{d}t\right)$$

$$\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right) = a_tV_t\left(\sigma_{aM}\sigma_V\rho_2\mathrm{d}t\right)$$

$$\left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right) = P_tV_t\sigma_{PM}\sigma_V\rho_2\mathrm{d}t$$

$$\left(\mathrm{d}t\right)^2 = 0; \quad \left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) = 0; \quad \left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) = 0; \quad \left(\mathrm{d}V_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) = 0.$$

Si se sustituyen las diferenciales en la ecuación (A2.7) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J = {} & J_aa_t\mu_a\mathrm{d}t + J_aa_t\sigma_{ay}\mathrm{d}W_{yt} + J_aa_t\sigma_{aM}\mathrm{d}W_{Mt} + J_PP_t\pi_t\mathrm{d}t + J_PP_t\sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt} + J_PP_t\sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt}\\ & + J_VV_t\mu_V\mathrm{d}t + J_VV_t\sigma_V\mathrm{d}W_{Vt} + J_t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}J_{aa}a_t^2\sigma_{ay}^2\mathrm{d}t + J_{aa}a_t^2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1\mathrm{d}t\\ & + \frac{1}{2}J_{aa}a_t^2\sigma_{aM}^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}J_{PP}P_t^2\sigma_{Py}^2\mathrm{d}t + J_{PP}P_t^2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1\mathrm{d}t + \frac{1}{2}J_{PP}P_t^2\sigma_{PM}^2\mathrm{d}t\\ & + \frac{1}{2}J_{VV}V_t^2\sigma_V^2\mathrm{d}t + J_{aP}a_tP_t\sigma_{Py}\sigma_{ay}\mathrm{d}t + J_{aP}a_tP_t\sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1\mathrm{d}t + J_{aP}a_tP_t\sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1\mathrm{d}t\\ & + J_{aP}a_tP_t\sigma_{PM}\sigma_{aM}\mathrm{d}t + J_{aV}a_tV_t\sigma_{aM}\sigma_V\rho_2\mathrm{d}t + J_{PV}P_tV_t\sigma_{PM}\sigma_V\rho_2\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{A2.8}$$

y si se factoriza esta ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J = \Bigg[& J_aa_t\mu_a + J_PP_t\pi_t + J_VV_t\mu_V + J_t + J_{aa}a_t^2\left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right)\\ & + J_{PP}P_t^2\left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2}J_{VV}V_t^2\sigma_V^2 + J_{aP}a_tP_t\Big(\sigma_{Py}\sigma_{ay}\\ & + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\Big) + J_{aV}a_tV_t\sigma_{aM}\sigma_V\rho_2\\ & + J_{PV}P_tV_t\sigma_{PM}\sigma_V\rho_2\Bigg]\mathrm{d}t + \left(J_aa_t\sigma_{ay} + J_PP_t\sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} + J_VV_t\sigma_V\mathrm{d}W_{Vt}\\ & + \left(J_aa_t\sigma_{aM} + J_PP_t\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt}.\end{aligned} \tag{A2.9}$$

Ahora se sustituye a la ecuación (A2.9) en la ecuación (A2.6):

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y} E\Big\{ & \Big[\varphi \ln(c_t) e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln(m_t) e^{-\delta t}\Big]\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \Big[J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t \\
& + J_V V_t \mu_V + J_t + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 + J_{aP} a_t P_t \big(\sigma_{Py}\sigma_{ay} + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 \\
& + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\big) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 \Big]\mathrm{d}t + \big(J_a a_t \sigma_{ay} \\
& + J_P P_t \sigma_{Py}\big)\mathrm{d}W_{yt} + \big(J_a a_t \sigma_{aM} + J_P P_t \sigma_{PM}\big)\mathrm{d}W_{Mt} + J_V V_t \mathrm{d}W_{Vt} \;\Big|\mathcal{F}_t\Big\}
\end{aligned} \tag{A2.10}
$$

Se toman esperanzas[7] y se divide entre $\mathrm{d}t$ y se considera el teorema del valor medio del cálculo integral[8]

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y} & \Big[\varphi \ln(c_t) e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln(m_t) e^{-\delta t} + J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_t \\
& + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 + J_{aP} a_t P_t \big(\sigma_{Py}\sigma_{ay} + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 \\
& \sigma_{PM}\sigma_{aM}\big) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 \Big].
\end{aligned} \tag{A2.11}
$$

Se reordenan los términos y si c_t y m_t son óptimos se satisface que:

$$
\begin{aligned}
0 = & \varphi \ln(c_t) e^{-\delta t} (1-\varphi)\ln(m_t) e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_{aP} a_t P_t \big(\sigma_{Py}\sigma_{ay} \\
& + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\big) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 \\
& + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right). \\
& + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2
\end{aligned} \tag{A2.12}
$$

La condición anterior es la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman.

---

[7] Los términos estocásticos desaparecerán debido a que los movimientos brownianos se distribuyen de forma normal con media cero varianza $\mathrm{d}t$ de forma que: $\mathrm{d}W \sim \mathcal{N}(0,\mathrm{d}t)$

[8] El teorema del valor medio del cálculo integral dice que si se tiene $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + o(b-a)$ y $\frac{0(h)}{h} \to 0$ si $h \to 0$, por ejemplo $\frac{o(h)}{h} = \frac{h^2}{h} = h \to 0$ si $h \to 0$

Apéndice 2

En este apartado se obtienen los óptimos valores de θ_m y θ_y a través de un sistema de dos ecuaciones que se presentan a continuación:

$$0 = \frac{(1-\varphi)}{\theta_m} + \beta_1\left(\mu_M - i\right) - \beta_1\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1 + \beta_1\theta_m\sigma_M^2 \tag{A3.1}$$

$$\theta_y = \frac{\left(\mu_y - i\right)}{\sigma_y^2} - \theta_m\frac{\sigma_M\rho_1}{\sigma_y}. \tag{A3.2}$$

Este sistema para simplificarse puede ser reescrito como:

$$0 = \frac{\omega_1}{\theta_m} + \omega_2 - \omega_3\theta_y + \omega_4\theta_m \tag{A3.3}$$

$$\theta_y = \omega_5 - \omega_6\theta_m \tag{A3.4}$$

donde:

$$\omega_1 = (1-\varphi) \qquad \omega_5 = \frac{\left(\mu_y - i\right)}{\sigma_y^2}$$

$$\omega_2 = \beta_1\left(\mu_M - i\right) \qquad \omega_6 = \frac{\rho_1\sigma_M}{\sigma_y}$$

$$\omega_3 = \beta_1\rho_1\sigma_M\sigma_y$$

$$\omega_4 = \beta_1\sigma_M^2.$$

Para comenzar con la resolución del sistema se sustituye a (A3.4) en (A3.3) para obtener:

$$0 = \frac{\omega_1}{\theta_m} + \omega_2 + \omega_3\omega_5 + \theta_m\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right) \tag{A3.5}$$

y se multiplica por θ_m para obtener

$$\theta_m^2\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right) + \theta_m\left(\omega_2 + \omega_3\omega_5\right) + \omega_1. \tag{A3.6}$$

Por lo tanto,

$$\theta_m = \frac{-\omega_2 - \omega_3\omega_5 \pm \sqrt{\left(\omega_2 + \omega_3\omega_5\right)^2 - 4\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right)\omega_1}}{2\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right)}.$$

Ecuación que puede ser reescrita como:

$$\theta_m = \frac{\eta_1 \pm \eta_2}{\eta_3}, \qquad \text{(A3.7)}$$

donde:

$$\eta_1 = -\omega_2 - \omega_3\omega_5$$
$$\eta_2 = \sqrt{\left(\omega_2 + \omega_3\omega_5\right)^2 - 4\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right)\omega_1}$$
$$\eta_3 = 2\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right)$$

de forma que existen dos posibles valores de θ_m:

$$\theta_{m1} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3} \text{ y } \theta_{m2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3}.$$

Para encontrar el valor de θ_y se sustituyen los valores de θ_m en la ecuación (A3.4), para obtener:

$$\theta_{y1} = \omega_5 - \omega_6\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3}\right) \text{ y } \theta_{y2} = \omega_5 - \omega_6\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3}\right)$$

Bibliografía

Bakshi, G. S. y Z. Chen. (1996). Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rate in Monetary Economies. *The Review of Financial Studies.* Vol. 53, No. 1, pp. 67-74.

Bank for International Settlements. (1994). Macroeconomic and Monetary Policy Issues Raised by the Growth of Derivatives Markets. Hannoun Report. CGFS Publications.

Beltratti, A. y C. Morana. (2006). Breaks and Persistency: Macroeconomic Causes of Stock Market Volatility. *Journal of Econometrics.* Vol. 131, No. 1, pp. 151-177.

Black, F. y M. Scholes. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Fender, I. (2000a). Corporative Heding: The Impact of Financial Derivatives on the Broad Credit Chanel of Monetary Policy. BIS Working Paper, No. 94.

Fender, I. (2000b). The Impact of Corporate Risk Management on Monetary Policy Transmission: Some Empirical Evidence. BIS Working Paper, No. 95.

Gómez, E., D. Vásquez y C. Zea. (2005). Derivative Markets Impact on Colombian Monetary Policy. Borradores de Economía. No. 334.

Hunter, W.C. y S.D. Smith. (2002). Risk Management in the Global Economy: A Review Essay. *Journal of Banking and Finance.* Vol. 26, No. 2, pp. 205-221.

Karatzas, I., J.P. Lehoczky, S. Shreves y G.L. Xu. (1991). Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market. *SIAM Journal on Control and Optimization.* Vol. 29, No. 3, pp. 702-730.

Lewis, A. L. (2000). Option Valuation under Stochastic Volatility: with Mathematica code. Finance Press. UK.

Lioui, A. y P. Poncet. (2004). General Equilibrium Real and Nominal Interest Rate. *Journal of Banking and Finance.* Vol. 28, No. 7, pp. 1569-1595.

Lioui, A. y P. Poncet. (2005). General Equilibrium Pricing of CPI Derivatives. *Journal of Banking and Finance*. Vol. 29, No. 5, pp. 1265-1294.

Mies, V., F. Morandé y M. Tapia. (2002). Política monetaria y mecanismos de transmisión: nuevos elementos para una vieja discusión. Working Papers Central Bank of Chile, No. 181.

Morales, A. (2001). Monetary Implications of Cross-Border Derivatives for Emerging Economies. IMF Working Papers.

Savona, P., A. Maccario y C. Oldani. (2002). On MonetaryAnalysis of Derivatives. *Open Economies Review*, Vol. 8, No. 1, pp. 149-175.

Semmler, W. y W. Zhang. (2007). Asset Price Volatility and Monetary Policy Rules: A Dynamic Model and Empirical Evidence. *Economic Modelling*. Vol. 24, No. 3, pp. 411-430.

Sidrauski, M. (1967). Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy. *American Economic Review*. Vol. 57, No. 2, pp. 534-544.

Spiegel, M. (2008). Financial Globalization and Monetary Policy Discipline. Federal Reserve Bank of San Francisco. Working Paper Series.

Tytell, I. y S. Wei. (2004). Does Financial Globalization Induce Better Macroeconomic Policies. IMF Working Papers.

Upper, C. (2006). Derivatives Activity and Monetary Policy. BIS Quarterly Review, September. pp. 65-76.

Venegas-Martínez, F. (2000). Utilidad, aprendizaje y estabilización. *Gaceta de Economía*, Año 5, No. 10, pp. 153-169.

Venegas-Martínez, F. (2006). Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks. *Economic Modelling.* Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

Venegas-Martínez, F. (2006). Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk. *Journal of World Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 87-106.

Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. México. Cengage Learning.

Venegas-Martínez, F. (2009). Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal. *Investigación Económica.* Vol. 68, No, 268, pp. 69-114.

Venegas-Martínez, F. (2009a). Temporary Stabilization in Developing Countries and Real Options on Consumption. *International Journal of Economic Research*, Vol. 6, No. 2, pp. 237-257.

Vickery, J. (2008). How and Why do Small Firms Manage Interest Rate Risk? *Journal of Financial Economics.* Vol. 87, No, 2, pp. 446-470.

Vrolijk, C. (1997). Derivatives Effect on Monetary Policy Transmission. *IMF Working Papers.*

Wagner, H. y W. Berger. (2005). Globalization, Financial Volatility and Monetary Policy. *Empirica*. Vol. 31, No. 2, pp.163-184 .