The theory of endogenous economic growth and equations of mathematical physics

Polterovich, Victor

CEMI RAS

19 April 2017

ТЕОРИЯ ЭНДОГЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1,2]

В. М. Полтерович

ЦЭМИ РАН, Москва

Аннотация

Дается обзор недавних исследований, использующих уравнения математической физики, их аналоги и модификации для описания эндогенной эволюции технологий. Предложено мастер-уравнение, содержащее в качестве частных случаев ряд известных моделей шумпетерианской динамики. Предлагается также схема построения многофакторных моделей эндогенного роста, основанная на сочетании различных правил имитации для разных индикаторов эффективности. Намечены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: шумпетерианская динамика, имитация, инновация, уравнение Бюргерса, уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова

Классификация JEL: A12, C02, O33, O41

1. Введение

Со времен Аристотеля наука развивалась по пути дифференциации, формирования новых научных дисциплин. Однако с середины 19 века начался процесс синтеза, объединения методов разных исследовательских направлений, особенно интенсифицировавшийся после Второй мировой войны. Вслед за биофизикой появляются физическая химия, биопсихология, биоинформатика, и т. п. В сфере общественных наук этот процесс обретает особое значение в последние четыре десятилетия. Новая экономическая социология, новая политическая экономия, новая экономическая

[1] Расширенная версия статьи, принятой для публикации в ЖНЭА, №2, 2017. Работа представляет собой переработанный доклад, прочитанный в феврале 2017 г. на конференции посвященной памяти Г. М. Хенкина. Некоторые изложенные здесь идеи были упомянуты в статье о Геннадии Марковиче (Берндссон Б. и др., 2017). Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-02-00524а).

[2] Автор признателен А. В. Леонидову за ценные комментарии. Только автор ответственен за возможные неточности.

география, поведенческая экономика, нейро- и биоэкономика – этот перечень недавно возникших синтетических дисциплин далеко не полон.

Все «синтетические» научные направления можно разбить на две группы. К первой из них относятся дисциплины, обретшие в результате синтеза свое собственное, специфическое сочетание предмета и метода. Их «родители» сохранили свою специфику. По существу такой синтез приводит к дальнейшей специализации. К этому классу принадлежат, например, биофизика и другие естественнонаучные дисциплины. К этой же группе принадлежат и ряд гуманитарных дисциплин, таких как экономическая география или экономическая психология. Междисциплинарные направления второй группы отличаются тем, что в их рамках рассматриваются те же вопросы, которые являются базовыми для «исходных» дисциплин. Например, политические и экономические институты, массовая культура оказываются столь тесно взаимосвязанными, что исследование их эволюции требует сочетания методов и подходов и политологии, и культурологи, и экономики. В результате обоих описанных процессов происходит становление новой науки об обществе.

Настоящая заметка посвящена рассмотрению фундаментального сдвига, который произошел в становлении одной из дисциплин первой группы – эконофизики. Попытки использовать методы теоретической физики для построения новой экономической теории, более глубокой, нежели традиционная теория общего экономического равновесия[3], предпринимались неоднократно и продолжаются до сих пор. Особенно часто авторы обращаются в качестве образца к термодинамике (как классической, так и к статистической), к статистической физике и квантовой механике. Поток работ не иссякает, существуют даже специализированные журналы по эконофизике. Тем не менее, несмотря на ряд интересных результатов, до самого последнего времени эконофизика оставалась на периферии экономического знания. Прорыв произошел буквально в последние 5-7 лет благодаря тому, что ряд фундаментальных уравнений математической физики оказалось целесообразным использовать для описания научно-технического прогресса в моделях эндогенного экономического роста.

2. Эволюция распределения фирм по уровням эффективности: шумпетерианское мастер-уравнение

Вслед за Йозефом Шумпетером современные исследователи экономической динамики рассматривают важнейшую компоненту развития – совершенствование технологий - как

[3] Следует, впрочем, подчеркнуть, что само понятие равновесия возникло в экономике под влиянием одноименных физических концепций.

совокупность двух процессов: создания новых технологий и заимствования (имитации) уже известных. Первый процесс характерен для передовых фирм, хотя и они прибегают к заимствованиям, а второй реализует «преимущество отсталости» по А. Гершенкрону: возможность использовать в производстве результаты, полученные ранее более передовыми предприятиями.

При моделировании шумпетерианской динамики процесс технологического развития в производственной системе на макроуровне описывают как эволюцию распределения предприятий по уровням эффективности. Под эффективностью в данном контексте обычно понимают коэффициент общей факторной производительности, определяемый в результате эконометрического оценивания производственных функций фирм. Недавние расчеты, проведенные на основе данных о более чем 17 тысячах французских фирм за период 1995-2003 гг. показали, что распределение фирм по эффективности обладает замечательными свойствами: его «хвосты» близки к распределениям Парето; распределение движется в направлении роста эффективности с почти постоянной скоростью, причем его форма меняется слабо. Последнее свойство означает, что распределение фирм по эффективности ведет себя как бегущая волна в уравнениях математической физики (König et al., 2016).

Вопрос о том, как именно фирмы принимают решения об усовершенствовании технологий мало изучен. Предлагаемые разными авторами модели шумпетерианской динамики отличаются предположениями о числе уровней эффективности, которые фирма может преодолеть в единицу времени, и о совокупностях более передовых фирм, которые влияют на ее решения, касающиеся заимствования технологий. Ряд рассмотренных в литературе вариантов являются частными случаями следующего уравнения:

$$df_n /dt= \sum_{k=1}^{n-1} \varphi (F_k, f_n, t)f_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi (F_n, f_k, t)f_n , \quad n=1,2...; f_0=0, \qquad (1)$$

где $f_k = f_k(t)$ - доля фирм, уровень эффективности которых в момент t равен k; $\varphi (F_k, f_n, t)$ - доля фирм уровня k, переходящих в момент t на уровень n в единицу времени. Зависимость функции φ от первого аргумента может, в частности, отражать гипотезу о том, что скорость перехода возрастает с увеличением доли $1- F_k$ более эффективных фирм.

Уравнение (1) отражает баланс притока фирм на уровень n и их оттока с этого уровня. Назовем (1) шумпетерианским мастер-уравнением. Если величины $\varphi (F_k, f_n, t)$ зависят только от номеров k, n, то (1) является частным случаем хорошо изученного в физике основного кинетического уравнения. Очевидно, процесс, описываемый уравнением (1), обладает марковским свойством: каждое последующее состояние системы зависит только от предыдущего.

Оказывается, что частными случаями (1) являются дифференциально-разностные аналоги знаменитых уравнений математической физики, включая уравнения Бюргерса, Колмогорова-Петровского-Пискунова и Больцмана.

Другой подход, также позволяющий установить связи между моделями шумпетерианской динамики и уравнениями математической физики, исходит из предположений о том, что эволюция эффективности фирм описывается тем или иным стохастическим дифференциальным уравнением. Ниже мы покажем, как эти два подхода приводят к рассмотрению знаменитых уравнений или их аналогов.

3. Частные случаи мастер-уравнения

3. 1. Уравнения типа Бюргерса

Пусть переход возможен только на один шаг и фирмы ориентируются на суммарную долю впереди идущих:

$$\varphi (F_k, f_n, t)=0,\ k\neq n-1\ ;\ \varphi (F_{n-1}, f_n, t)= \varphi (F_{n-1})\ .$$

Тогда из (1) получаем:

$$df_n /dt= \varphi (F_{n-1})\, f_{n-1} - \varphi (F_n) f_n\ ,\ f_0=0,\quad (2)$$

что после суммирования дает

$$dF_n/dt = \varphi (F_n)\ (F_{n-1} - F_n\ );\quad (3)$$

здесь F_n – доля фирм с уровнем эффективности, не превосходящим n.

Аналогия между технологическим развитием и волновыми процессами в сплошных средах была, видимо, впервые продемонстрирована в статье (Полтерович, Хенкин, 1988), где для описания шумпетерианской динамики было предложено уравнение (3). Основные результаты цитируемой статьи относились к специальному случаю

$$\varphi (F_n) = \alpha+\beta(1- F_n).\quad (4)$$

Как легко видеть, уравнение (3), (4) согласуется с предположением о том, что фирмы из числа $f_n = F_n - F_{n-1}$ переходят с уровня n на уровень n+1 со скоростью αf_n в результате инновационного процесса и со скоростью $\beta(1- F_n)f_n$ в результате имитации. Имитация, таким образом, происходит тем быстрее, чем большее число фирм освоили более эффективные технологии. Уравнение (3), (4) при естественных начальных условиях допускает явное решение, которое, как было показано в (Полтерович, Хенкин, 1988), сходится к волне; в данном случае она представляет собой логистическое распределение, движущееся с постоянной скоростью. В этой же работе было указано, что сходимость к волне (более общего вида) имеет место и для уравнения (3) с положительной, непрерывной монотонно убывающей функцией φ, и отмечено, что это уравнение является аналогом уравнения Бюргерса:

$$\partial F/\partial t + \varphi(F)(\partial F/\partial x) = \mu(\partial^2 F/\partial x^2),\ \mu>0, \quad (5)$$

где $F(x, t)$ – распределение фирм по эффективности x.

Уравнение (3) и его модификации исследовались в ряде работ Г. Хенкина и В. Полтеровича, Г. Хенкина и А. Шананина, Г. Хенкина, В. Беленького, А. Гасникова, А. Шананина и Я. Ташлицкой и других. Соответствующие ссылки можно найти в статье (Henkin, 2012). В этой работе Г. Хенкин представил наиболее общие результаты исследования уравнения (3), включая случай немонотонной φ. В данном случае (3) допускает существование многих волн, движущихся с разными постоянными скоростями. Между ними образуются участки диффузии. К этой системе волн сходится решение с достаточно произвольными начальными условиями. Отыскание асимптотической оценки для «границы» между волной и диффузией оказалось весьма трудной задачей. В цитируемой работе Геннадий Маркович дал ее наиболее полное решение. Одновременно аналогичная задача была решена им и для уравнения Бюргерса (5).

Вопрос о том, соответствует ли многоволновое поведение какой-либо экономической реальности остается открытым. Видимо, его можно связать с гипотезой о существовании нескольких «технологических укладов» (см. Хенкин, Шананин, 2014).

Заслуживает упоминания модификация модели (3), (4), предложенная в (Полтерович, Хенкин, 1988) и учитывающая возможность деградации фирм - перехода с уровня n+1 на уровень n в результате износа мощностей. Этот вариант модели неплохо аппроксимировал реальные данные, описывавшие эволюцию распределения предприятий черной металлургии по уровням рентабельности (это альтернативный показатель эффективности) в 1976-1982 гг. (Гельман и др., 1993). Совсем недавно была доказана глобальная асимптотическая устойчивость волнового решения для этого варианта модели; скорость волны в данном случае может быть как положительной, так и отрицательной (Александрова, 2015).

В работе (Hongler et al, 2016) авторы постулируют механизм эволюции эффективности фирм, приводящий к уравнению Бюргерса. А именно, рассматривается совокупность групп взаимодействующих фирм с эффективностью $x_k(t)$, $k = 1, 2,\dots K$, $x_{k+1}(0)>x_k(0)$. Предполагается, что скорость изменения $x_k(t)$ является суммой трех компонент, зависящих от детерминированных инноваций (параметр α), случайных инноваций (броуновское движение с параметром σ) и от доли более эффективных фирм (параметр β). Устремляя K к бесконечности, авторы получают уравнение (5) с $\varphi(F) = \alpha+\beta(1-F)$, $\mu = 0{,}5\sigma^2$.

3.2. Уравнения типа Коллмогорова-Петровского-Пискунова

Пусть теперь в единицу времени доля βf_n из числа фирм уровня $k< n$ переходит на уровень n благодаря встречам с фирмами f_n и заимствования их технологии, а доля α фирм f_{n-1} попадает на уровень n в результате инноваций:

$$\varphi(F_k, f_n, t)= \beta f_n, \ \ k< n-1, \quad \varphi(F_k, f_n, t)=0, \ k\geq n,$$

$$\varphi(F_{n-1}, f_n, t)= \alpha + \beta f_n.$$

Тогда, очевидно,

$$df_n/dt= -\alpha f_n +\alpha f_{n-1} - \beta(1-F_n)f_n +\beta F_{n-1}f_n ,$$

$$dF_n/dt = -\alpha (F_n- F_{n-1}) - \beta(1- F_n) F_n . \quad (6).$$

Уравнение (6) – дифференциально-разностный аналог уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова. В качестве возможной модели шумпетерианской динамики оно было предложено в (Полтерович, Хенкин, 1988) и исследовано в (König et al., 2016).

В (Luttmer, 2012), постулируется, что логарифм эффективности x_t каждой фирмы эволюционирует согласно уравнению

$$dx_t = \alpha dt +\sigma dW_t +\Delta_t dN_t , \quad (7)$$

где α характеризует детерминированные инновации, W_t - стандартное броуновское движение, описывающие случайные инновации, N_t -пуассоновский процесс с параметром β, описывающий возможность заимствования. Когда такая возможность появляется, фирма случайно выбирает партнера и заимствует у него технологию, если она оказывается более эффективной. В результате эффективность возрастает на величину $\Delta_t \geq 0$. Если число фирм велико, то, как показывает автор, (7) порождает уравнение Колмогорова –Петровского-Пискунова:

$$\partial F/\partial t = - \alpha\partial F/\partial x +0{,}5\sigma^2(\partial^2F/\partial x^2) – \beta F (1- F),$$

где F - распределение логарифма эффективности x в момент t (заметим, что производную $\partial F/\partial x$ можно исключить подходящей подстановкой).

3.3. Уравнения типа Больцмана

Еще один важный частный случай уравнения (1) возникает, если предположить, что в единицу времени доля $\psi_k(t)f_n$ фирм из числа f_k, $k< n$, зависящая от времени, переходит на уровень n благодаря встречам с фирмами из f_n ; предполагается, что встречи стимулируют и инновации, и заимствования:

$$\varphi(F_k, f_n, t) = \psi_k(t) f_n,\ k<n,\ \varphi(F_k, f_n, t) = 0,\ k \geq n,$$

$$df_n/dt = f_n \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k(t) f_k - \psi_n(t) f_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k. \quad (8)$$

Это дифференциально-разностный аналог уравнения Больцмана. Зависимость ψ_k от времени возникает в результате (не отраженных в модели) роста экономики и увеличения вложений в технический прогресс, так что функции $\psi_k(t)$ возрастают. Уравнение Больцмана (см. раздел 6) использовано для описания шумпетерианской динамики в статье (Lucas. Moll, 2014).[4]

Отметим, что (8) можно записать в виде

$$dF_n/dt = -(1-F_n) \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) f_k.$$

4. Случай нескольких показателей эффективности

Каждая фирма может характеризоваться несколькими индикаторами эффективности. В качестве таковых кроме общей факторной производительности могут выступать, например, доля на рынке или степень воздействия на экологию. В этом случае совокупность фирм в каждый момент времени описывается их многомерным распределением. Для дискретного варианта модели оно задается долей фирм, находящихся в узлах решетки в соответствующем многомерном пространстве. Такая модель была рассмотрена в работе Henkin, Polterovich (1991). Для случая двух индикаторов изучавшееся в ней уравнение имеет вид

$$\frac{df_{mn}}{dt} = -\varphi_1(F_m^{(1)}) f_{mn} - \varphi_2(F_n^{(2)}) f_{mn} + \varphi_1(F_{m-1}^{(1)}) f_{(m-1)n} + \varphi_2(F_{n-1}^{(2)}) f_{m(n-1)}. \quad (9)$$

$$F_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}, \quad F_m^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}, \quad F_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}. \quad (10)$$

Здесь f_{mn} - доля фирм со значениями индикаторов эффективности m и n, F_{mn} - соответствующая кумулятивная функция распределения, $F_m^{(1)}$, $F_n^{(2)}$ - ее маргинальные распределения. По аналогии с одномерным случаем (2) предполагается, что из каждого узла двумерной решетки фирма может перейти в один из двух соседних узлов с более

[4] Еще один интересный частный случай уравнения (4) возникает, если предположить, что скорость перехода фирм с уровня n на уровень n+1 пропорциональна доле фирм уровня n+1. Я. Ташлицкая и А. Шананин показали, что при этом после подходящей подстановки возникает цепочка Ленгмюра – дифференциально-разностный аналог уравнения Кортевега-де Фриза (см. ссылки и обсуждение в (Хенкин, Шананин, 2014)).

высоким значением одного из индикаторов. При этом функции $\boldsymbol{\varphi_1(F_m^{(1)}), \varphi_2(F_n^{(2)})}$ **задают** доли фирм $\boldsymbol{f_{mn}}$, увеличивающих в единицу времени значение, соответственно, первого и второго индикаторов. В простейшем случае эти функции убывают, воплощая тем самым естественную идею, уже упоминавшуюся выше: чем больше доля более эффективных фирм, тем с большей вероятностью фирма перейдет на более высокий уровень.

Из (9), (10) следует уравнение для интегрального распределения:

$$\boldsymbol{\frac{dF_{mn}}{dt} = \varphi_1(F_m^{(1)})(F_{(m-1)n} - F_{mn}) + \varphi_2(F_n^{(2)})(F_{m(n-1)} - F_{mn}).} \quad \textbf{(11)}$$

В работе Henkin, Polterovich (1991) доказано, что при естественных начальных условиях и неубывающих, непрерывных, липшицевых $\boldsymbol{\varphi_1, \varphi_2}$ решения уравнения (11) сходятся к волне, представляющей собой произведение двух одномерных волн. Этот результат обобщен для произвольного конечного числа индикаторов.

5. Уравнения математической физики в моделях эндогенного экономического роста

В ряде работ (см., в частности, Acemoglu, Cao (2015), König et al. (2016), (Lucas. Moll (2014), Luttmer, (2012)) предложены равновесные модели экономического роста, учитывающие процессы принятия агентами решений о потреблении товаров, где эволюция эффективности (продуктивности) фирм порождается тем или иным механизмом шумпетерианской динамики. При этом доказывается, что на равновесных траекториях распределение фирм по эффективности или по величине (доле работников) сходится к бегущей волне с Парето-хвостами. Приведем формулировку одной из таких моделей.

5.1. Модель Лукаса-Молла

В работе Lucas, Moll (2014) рассмотрена следующая динамическая модель оптимального планирования.

$$\boldsymbol{\int_0^\infty e^{-\theta t} (\int_0^\infty ([1 - s(x,t)]x\, f(x,t)dx)dt \quad \rightarrow \quad max} \text{ по } \boldsymbol{s(x,t).} \quad \textbf{(12)}$$

$$\boldsymbol{\partial f/\partial t = - \mu(s(x,t))\, f(x,t) \int_x^\infty f(y,t)dy \; + \; f(x,t) \int_0^x \mu(s(y,t)) f(y,t)dy}\,, \quad \textbf{(13)}$$

распределение f (x, 0) **задано.**

Здесь $\boldsymbol{f(x,t)}$ **-** доля фирм с эффективностью $\boldsymbol{x}$ в момент времени ***t.*** Общее число фирм без ограничения общности нормировано к ***1***. Производственная функция предполагается линейно зависящей от количества труда, которое считается фиксированным, а коэффициент пропорциональности равным общей факторной производительности $\boldsymbol{x}$. Соответственно, выпуск на одного работника фирмы с эффективностью $\boldsymbol{x}$ совпадает с $\boldsymbol{x}$, а выпуск всех таких фирм в момент $\boldsymbol{t}$ равен $\boldsymbol{xf(x,t)}$. Доля $\boldsymbol{s(x,t)}$ этого выпуска затрачивается на переход части $\boldsymbol{\mu(s(x,t))}$ фирм с уровня $\boldsymbol{x}$ на более высокие уровни, а остальное идет на потребление. Таким образом, функционал (12) сформулированной выше задачи представляет собой совокупное дисконтированное потребление на бесконечном временном интервале; $\boldsymbol{\theta}$ – норма дисконта. Рост эффективности фирм описывается обобщенным уравнением Больцмана – с коэффициентом $\boldsymbol{\mu}$, определяющим скорость роста, зависящим от управления $\boldsymbol{s(x,t)}$.

В статье Lucas, Moll (2014) показано, что описанная модель допускает стационарную траекторию экономического роста. Кроме того, авторы строят соответствующую децентрализованную модель и демонстрируют, что в ней централизованный (максимальный) темп роста не достижим, поскольку фирмы, выбирая каждая свое управление $\boldsymbol{s(x,t)}$, не координируют свои действия друг с другом.

5. 2. Шумпетерианская модель эндогенного роста с капиталом

В модели Лукаса-Молла, как и в других известных автору моделях рассматриваемого типа, накопление физического объема капитала не происходит, растет лишь его производительность. Ниже предлагается модель, лишенная этого недостатка. Она основана на соединении идей Лукаса - Молла и многомерной модели раздела 4.

Пусть шумпетерианская динамика задается уравнением типа (9), (10) с двумя показателями эффективности. В качестве первого выступает общая факторная производительность $\boldsymbol{m}$, а в качестве второго – объем капитала на одного работника (капиталовооруженность) $\boldsymbol{n}$. В отличие от (8), (9) и в соответствии с Лукасом и Моллом скорости движения по горизонтали и вертикали двумерной сетки зависят от управлений. Для простоты количество работников предполагается постоянным и равным числу потребителей. Предлагаемая централизованная модель шумпетерианской динамики с капиталом имеет вид (14)-(18).

$$\int_0^\infty e^{-\theta t} u\big(c(t)\big)dt \;\rightarrow\; \max \text{ по } c(t), s_{mn}^{(1)}(t), s_{mn}^{(2)}(t), \quad (14)$$

$$c(t)+dk(t)/dt = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \big(g_{mn}(t) - s_{mn}^{(1)}(t) \big) f_{mn}(t) \quad (15)$$

$$\frac{dF_{mn}}{dt} = \varphi_1\big(F_m^{(1)}, s_{mn}^{(1)}\big)\big(F_{(m-1)n} - F_{mn}\big) + \varphi_2\big(F_n^{(2)}, s_{mn}^{(2)}\big)\big(F_{m(n-1)} - F_{mn}\big). \quad \mathbf{(16)}$$

Здесь $\boldsymbol{c(t)}$ – потребление репрезентативного потребителя с функцией полезности $\boldsymbol{u}$ и нормой дисконта $\boldsymbol{\theta}$; $\boldsymbol{f_{mn} = f_{mn}(t)}$ - доля фирм на уровне эффективности $\boldsymbol{m}$ с капиталовооруженностью $\boldsymbol{n}$ в момент $\boldsymbol{t}$; справедливы формулы (10); $\boldsymbol{s_{mn}^{(1)} = s_{mn}^{(1)}(t)}$ –объем ресурса, затрачиваемого на переход одной фирмы за единицу времени с уровня эффективности $\boldsymbol{m}$ на уровень $\boldsymbol{m+1}$; $\boldsymbol{s_{mn}^{(2)} = s_{mn}^{(2)}(t)}$ – управление, определяющее издержки на переход с уровня капиталовооруженности $\boldsymbol{n}$ на уровень $\boldsymbol{n+1}$; $\boldsymbol{g_{mn}}$ – выпуск фирмы на уровне эффективности $\boldsymbol{m}$ с капиталовооруженностью $\boldsymbol{n}$. Число фирм постоянно и условно принято за единицу. Каждая фирма нанимает одного работника. При этом объем капитала **k** определяется соотношением

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{n f_{mn}} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{(17)}$$

а уравнение баланса капиталовложений имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\varphi_2(F_n^{(2)}, s_{mn}^{(2)}) f_{mn}} = \mathbf{dk/dt}. \qquad \mathbf{(18)}$$

(Нетрудно показать, что из (16) и (17) следует (18)). Очевидно, уравнение (16) является обобщением аналога (3) уравнения Бюргерса на двумерный случай. Вполне аналогичным образом вместо (16) можно использовать обобщения и других вариантов мастер-уравнения (1). Нетрудно также сформулировать аналогичные модели и для непрерывных шкал индикаторов эффективности и капиталовооруженности.

К настоящему времени модель (14)-(18) не исследована. Она приведена как дополнительная демонстрации того, что уравнения математической физики, их дифференциально-разностные аналоги и модификации естественно вписываются в общие модели экономической динамики, позволяя учесть взаимодействие инновационной и имитационной составляющей в процессах эндогенного экономического роста.

6. Заключение

Очевидно, частные случаи шумпетерианского мастер-уравнения отнюдь не исчерпываются рассмотренными выше вариантами. Кроме того, для моделей с капиталом возможно сочетание разных правил движения вдоль осей. В (16) каждое слагаемое задает правило, приводящее в одномерном случае к аналогу уравнения Бюргерса (3). Однако нет оснований предполагать, что оба слагаемых должны принадлежать одному типу. Например, первое из них могло бы совпадать с правой частью (8) - аналога уравнения

Больцмана. Далее, при добавлении других факторов, в частности, человеческого капитала, увеличивается размерность функции распределения и, соответственно, расширяется набор правдоподобных моделей, генерируемых по предлагаемой схеме. Было бы чрезвычайно важно выяснить, как именно ведут себя фирмы при тех или иных обстоятельствах, заимствуя технологии, совершенствуя используемый труд и наращивая капитал. Следует учесть, что передовые фирмы могут заимствовать технологии иностранных предприятий, а слабые – поддерживаться государством для обеспечения занятости. Эти соображения, видимо, позволят оправдать предположения работы (Хенкин, Шананин, 2014), приводящие к «расщеплению» технологических укладов. Однако для проверки гипотез о технологических укладах важно располагать статистическими данными о распределении фирм по уровням эффективности в догоняющих экономиках.

В общих моделях необходимо учитывать процессы входа фирм на рынок и выхода отстающих (см. Acemoglu, Cao, 2015). Целесообразно рассмотреть возможность применения описываемого подхода к исследованию эволюции распределения стран по уровням эффективности – проблеме, которой посвящено значительное число работ.

Однако уже имеющиеся результаты позволяют констатировать, что союз экономической теории и математической физики состоялся.

Литература

Александрова А.Ю. (2015). Исследование скорости бегущей волны в одной модификации модели Полтеровича–Хенкина. Труды МФТИ. Том 7, № 4, 11-16.

Берндссон Б., С. В. Кисляков, Р. Г. Новиков, В. М. Полтерович и др.(2017). Геннадий Маркович Хенкин (1942-2016). Успехи математических наук, №2.

Гельман Л.М., Левин М.И., Полтерович В.М., Спивак В.А.(1993). Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии). Экономика и математические методы. Том 29, вып. 3, 460-469.

Полтерович В. М., Г. М. Хенкин (1988). Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий. Экономика и математические методы, т.24, №6, с.1071-1083.

Хенкин Г.М., А.А. Шананин (2014). Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики. Математическое моделирование, т. 26, № 8, 3-19.

Acemoglu Daron, Dan Cao (2015). Innovation by entrants and incumbents. Journal of Economic Theory, 157. 255–294.

Henkin G. M. (2012). Burgers type equations, Gelfand's problem and Schumpeterian dynamics. Journal of Fixed Point Theory and Applications, June, Volume 11, Issue 2, 199–223.

Henkin G. M., V. M. Polterovich (1991). Schumpeterian Dynamics as a Non-linear Wave Theory. Journal of Mathematical Economics, Vol. 20, No. 6, 551-590.

Hongler Max-Olivier, Olivier Gallay, Fariba Hashemi. Impact of Imitation on the Dynamics of Long Wave Growth. July 27, 2016. 28 pp.

König Michael D., Jan Lorenz, Fabrizio Zilibotti (2016). Innovation vs. imitation and the evolution of productivity distributions. Theoretical Economics 11, 1053–1102.

Lucas Jr. Robert E., Benjamin Moll. Knowledge Growth and the Allocation of Time. Journal of Political Economy, 2014, vol. 122, No. 1. 52 pp.

Luttmer Ezra G.J. Eventually, Noise and Imitation Implies Balanced Growth. Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 699August 2012. 29 pp.

References (with English translations or transliteration)

Acemoglu Daron, Dan Cao (2015). Innovation by entrants and incumbents. Journal of Economic Theory, 157. 255–294.

Aleksandrova A.Y. (2015). Running wave speed analysis in one Polterovich–Henkin model modification. Proceedings of MIPT. Vol. 7, No. 4, 11-16 (in Russian).

Berndsson B., S. V. Kislyakov, R. G. Novikov, V. M. Polterovich, et al. (2017). Gennadi Markovich Henkin (1942-2016). Uspekhi Matematicheskikh Nauk, №2 (in Russian).

Gelman L. M., Levin M. I., Polterovich V. M., Spivak V. A. (1993). Modeling of the Dynamics of Firms Distribution in Accordance with Efficiency Levels (Ferrous Metal Industry Case). Economics and Mathematical Methods, Vol. 29, No. 3, 460-469 (in Russian).

Henkin G. M. (2012). Burgers type equations, Gelfand's problem and Schumpeterian dynamics. Journal of Fixed Point Theory and Applications, June, Volume 11, Issue 2, 199–223.

Henkin G. M., V. M. Polterovich (1991). Schumpeterian Dynamics as a Non-linear Wave Theory. Journal of Mathematical Economics, Vol. 20, No. 6, 551-590.

Henkin G. M., A. A. Shananin (2014). Mathematical modeling of the schumpeterian dynamics of innovation. Matemetical Modeling, Vol. 26, No. 8, 3-19 (in Russian).

Hongler Max-Olivier, Olivier Gallay, Fariba Hashemi. Impact of Imitation on the Dynamics of Long Wave Growth. July 27, 2016. 28 pp.

König Michael D., Jan Lorenz, Fabrizio Zilibotti (2016). Innovation vs. imitation and the evolution of productivity distributions. Theoretical Economics 11, 1053–1102.

Lucas Jr. Robert E., Benjamin Moll. Knowledge Growth and the Allocation of Time. Journal of Political Economy, 2014, vol. 122, No. 1. 52 pp.

Luttmer Ezra G.J. Eventually, Noise and Imitation Implies Balanced Growth. Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 699August 2012. 29 pp.

Polterovich V., G. Henkin (1988). An Evolutionary Model with Interaction between Development and Adoption of New Technologies. Economics and Mathematical Methods, Vol. 24, N6, 1071-1083 (in Russian).

THE THEORY OF ENDOGENOUS ECONOMIC GROWTH AND EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

V. M. Polterovich

CEMI RAS, Moscow

Abstract

It is given an overview of recent studies that use equations of mathematical physics, their analogs and modifications for describing endogenous evolution of technologies. A master equation is proposed that includes, as special cases, a number of known models of Schumpeterian dynamics. A scheme for constructing multifactorial models of endogenous growth is also proposed, based on a combination of different imitation rules for different performance indicators. Directions for further research are outlined.

Keywords: Schumpeterian dynamics, imitation, innovation, Burgers equation, Boltzmann equation, Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation

JEL Classification: A12, C02, O33, O41