



Munich Personal RePEc Archive

## **Empirical analysis of the MXN/USD exchange rate: geometric Brownian motion vs. variance-gamma process**

Mosiño, Alejandro and Salomón-Núñez, Laura A. and  
Moreno-Okuno, Alejandro T.

Universidad de Guanajuato

6 March 2017

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/78961/>  
MPRA Paper No. 78961, posted 06 May 2017 15:55 UTC

# Estudio empírico sobre el tipo de cambio MXN/USD: Movimiento Browniano Geométrico vs. Proceso Varianza-Gamma

Mosiño, Alejandro\*, Salomón-Núñez, Laura A., and Moreno-Okuno,  
Alejandro T.

*Universidad de Guanajuato*

March 6, 2017

## **Abstract**

En este artículo examinamos el comportamiento del mercado cambiario, el cual se caracteriza por movimientos extremos muy frecuentes ocasionados por la información generada dentro del mercado financiero y el entorno macroeconómico internacional. Utilizando datos del tipo de cambio MXN/USD, comparamos dos modelos estocásticos: el movimiento browniano geométrico (MBG), el cual está basado en la densidad normal, y el proceso varianza-gamma (PVG), el cual nos permite capturar el sesgo y el exceso de curtosis de los cambios en los precios. Concluimos que, en general, el PVG ajusta mejor a los datos que el MBG. Mostramos, además, que el ajuste mejora conforme aumenta la ventana temporal utilizada para calcular los rendimientos del mercado cambiario.

*Palabras Clave:* Tipo de cambio, Movimiento Browniano Geométrico, Proceso Varianza-Gamma

*Clasificación JEL:* C12, C13, C15, F31

## **Abstract**

In this paper, we examine the behavior of the foreign exchange market, which is characterized by frequent extreme movements caused by the information generated within the financial market, and by international macroeconomic conditions. We use MXN/USD exchange rate data to compare the following stochastic processes: geometric brownian motion (MBG), which is based on normal density, and the variance-gamma process (PVG), which allows us to capture the bias and the excess of kurtosis of price returns. We conclude that, in general, the PVG adjust better to data than the MBG. We also show that the fit improves with the time window used to compute the returns in the exchange market.

---

\*Alejandro.Mosino@gmail.com

# 1 Introducción

El mercado cambiario constituye uno de los mercados financieros más importantes. Esto se debe al volumen de comercio diario, así como por su incidencia en el comportamiento de otros mercados, sean de activos financieros o de bienes y servicios (Sosvilla-Rivero, 2011). Además, bajo un régimen flexible, se cumple la hipótesis del mercado eficiente, es decir, el precio de las divisas —el tipo de cambio— refleja toda la información que se encuentra disponible en ese momento. Esta hipótesis implica que los movimientos en el precio son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, lo que quiere decir que no es posible predecir el comportamiento futuro del precio a partir de las cotizaciones pasadas.

La información que influye en la formación del tipo de cambio puede llegar al mercado con varias intensidades. Cuando el entorno económico es más volátil, aumenta la probabilidad de que los precios presenten grandes saltos sorpresivos. En contraste, si las economías son más estables, los precios tienden a variar muy poco.

Lo anterior dejan en claro la importancia que tiene la elección de un modelo que se ajuste a la distribución de los cambios en el precio de las divisas. Por una parte, su función de densidad puede verse como un indicador de riesgo respecto a los activos internacionales, ya que, desde el punto de vista de los inversionistas, proporciona información acerca de cómo podría cambiar la riqueza que esperan conseguir después de un cierto plazo. Por otro lado, la elección del modelo constituye una parte esencial en la valuación de instrumentos derivados financieros sobre el tipo de cambio.

En este artículo modelamos el comportamiento del tipo cambio del peso mexicano (MXN) respecto al dólar estadounidense (USD) mediante dos procesos estocásticos en tiempo continuo: el movimiento browniano geométrico (MBG) y el proceso varianza-gamma (PVG). Ambos procesos constituyen una transformación de un proceso de Wiener estándar; sin embargo, los supuestos implícitos a cada proceso los hacen útiles para modelar activos con diferentes comportamientos. El MBG supone que los cambios del precio de los activos siguen una distribución normal, con parámetros de deriva y volatilidad constantes. Esto implica que los cambios del precio no están sesgados ni muestran exceso de curtosis. Este proceso es muy común para valorar activos contingentes. Por ejemplo, este es el supuesto implícito del conocido modelo de Black-Scholes. En cambio, el PVG es un proceso estocástico relativamente nuevo (Madan et al., 1998). Este supone que los movimientos en el precio también siguen un proceso de Wiener, pero su deriva depende de un proceso estocástico que sigue una distribución gamma. Si siguen un PVG, los cambios en el precio son descritos por un número infinito de saltos. La probabilidad con la aparecen estos decrece conforme aumenta el tamaño del salto, es decir, los más pequeños tienen una probabilidad muy alta de aparecer en comparación con los largos. Además, el PVG tiene una distribución leptocúrtica —con una figura picuda y colas más largas en relación a una distribución normal—. A diferencia del MBG, el PVG captura el sesgo y el exceso de curtosis de los cambios en el precio.

Una característica que se observa comúnmente en los trabajos empíricos sobre activos financieros es que los cambios del precio tienen una distribución de probabilidad cada vez más parecida a una normal conforme aumenta la ventana de tiempo para el que fue calculado. Para tener en cuenta este efecto, en este artículo exploramos el ajuste del tipo de cambio MXN/USD a los diferentes procesos considerando rendimientos diarios, semanales y mensuales. Mostramos que, en general, el PVG ajusta mejor a los datos que el MBG para cualquiera de las periodicidades consideradas. Esto es un hecho que se cumple para otras monedas. Por ejemplo, Tichy (2012) utiliza el MBG y el PVG para modelar los tipos de cambio del euro frente a la corona sueca, de la libra esterlina frente a la corona sueca y del dólar de Estados Unidos frente a la corona sueca. El autor concluye que la distribución normal se ajusta bien a la parte central de las distribuciones empíricas, sin embargo, la distribución Varianza Gamma ajusta mejor tanto en su parte central como en sus extremos.

El resto de este artículo está estructurado como sigue. En la Sección 2 presentamos una breve introducción al MBG y del PVG, así como sus principales características. En la sección 3 describimos el comportamiento del mercado cambiario en México y el tipo de cambio *fix*. En la Sección 4 calculamos los rendimientos del mercado cambiario en México para diferentes diferentes periodicidades y calibramos los modelos MBG y PVG. En la sección 5 comparamos ambos modelos y realizamos algunas pruebas de bondad de ajuste. En la Sección 6 concluimos.

## 2 Movimiento Browniano Geométrico y Proceso Varianza-Gamma

En esta sección presentamos las principales características del MBG y del PVG. Ambos procesos tienen dos componentes: 1) una tendencia determinista y 2) un componente estocástico, el cual captura las desviaciones aleatorias del precio. Dicho componente es conducido por un movimiento de Wiener estándar. La diferencia más importante entre estos procesos es que en el PVG el tiempo natural se ve reemplazado por un tiempo aleatorio, el cual produce movimientos del precio de un tamaño muy distinto a los que pueden generarse en el MBG.

### 2.1 Movimiento browniano geométrico

El MBG es un proceso estocástico en tiempo continuo que resulta de una transformación de un proceso de Wiener estándar. Tiene como particularidad el no permitir que los precios de los activos tomen valores negativos.

Sea  $\{P_t\}_{t \geq 0}$  el precio de un activo financiero en tiempo denotado por  $t$ . Usando la notación diferencial, el MBG se define como:

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t W_t, \quad (1)$$

donde  $P_0 > 0$ . En la ecuación (1),  $\mu \in \mathbb{R}$  es la deriva o tendencia y  $\sigma > 0$  es

un parámetro que mide la volatilidad del precio. Además,  $W_t$  es un proceso de Wiener estándar.

Sea  $y_t = \ln(P_t)$ . Aplicando el lema de Ito y usando la ecuación (1) obtenemos:

$$dy_t = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma W_t, \quad (2)$$

La ecuación (2) implica que  $y_t$  sigue un proceso browniano aritmético con deriva  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  y volatilidad  $\sigma$ . Ahora, si elegimos un intervalo de tiempo discreto  $\Delta t = t - q$  con  $q < t$ , entonces:

$$y_t - y_q = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - q) + (W_t - W_q)\sigma. \quad (3)$$

Sea  $X_t = y_t - y_q$ .  $X_t$  representa el rendimiento continuamente capitalizable sobre un periodo de tamaño  $\Delta t = t - q$ . A este rendimiento se le conoce como rendimiento logarítmico o log-rendimiento. Las propiedades del movimiento browniano estándar nos permiten reescribir la ecuación (3) como:<sup>1</sup>

$$X_t = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - q) + \sigma\sqrt{(t - q)}\varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Entonces, es fácil deducir que:

$$X_t \sim \mathcal{N} \left( \left[ \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] (t - q), (t - q)\sigma \right), \quad (4)$$

lo cual implica que tanto la media como la variabilidad de  $X_t$  se incrementan de manera proporcional al tamaño del intervalo de tiempo.

Al considerar el tiempo  $q = 0$  y usando la transformación exponencial para la ecuación (3), es posible obtener que:

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}. \quad (5)$$

Entonces, el precio,  $P_t$ , sigue una distribución lognormal. Además:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P_t | P_0) &= P_0 e^{\mu t} \\ \text{Var}(P_t | P_0) &= P_0^2 e^{\mu 2t} (e^{t\sigma^2} - 1). \end{aligned}$$

## 2.2 Proceso Varianza-Gamma

EL PVG es un proceso estocástico en tiempo continuo introducido por Madan et al. (1998). Al igual que el MBG, el PVG tiene un parámetro de deriva y uno de volatilidad. Sin embargo, se diferencia en que el proceso del rendimiento logarítmico tiene un parámetro de control para el sesgo y otro para la curtosis. Los rendimientos logarítmicos tienen una distribución de probabilidad no simétrica

<sup>1</sup>Ver, por ejemplo, Venegas-Martínez (2006).

y leptocúrtica; es decir, una distribución con figura más alta y colas más anchas que una distribución normal.

En el PVG, el tiempo,  $t$ , es reemplazado por el proceso gamma,  $\{g_t\}_{t \geq 0}$ . El proceso gamma empieza en cero, y tiene incrementos independientes y estacionarios con distribución gamma dada por (Schoutens, 2003):

$$\Gamma\left(\frac{t}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right), \quad \nu > 0.$$

Los incrementos del proceso gamma pueden escribirse como  $\{G_t\}_{t \geq 0} = g_t - g_q$ , donde el periodo de tiempo es de  $\Delta t = t - q$ , con  $t > q$ . Los incrementos tienen distribución gamma con media y varianza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_t) &= t - q \\ \text{Var}(G_t) &= (t - q)\nu. \end{aligned}$$

El tiempo aleatorio dado por el proceso gamma suele interpretarse como el tiempo financiero. El objetivo de este es incorporar en el modelo el volumen de las transacciones de mercado, o el flujo de información relevante para la valuación del activo financiero (Finlay, 2009). En este contexto, puede decirse que el tiempo financiero va más aprisa que el tiempo natural cuando el número de transacciones y la cantidad de información es mayor a las cantidades observadas regularmente en un periodo de tiempo natural. Y, al contrario, va más despacio cuando las transacciones son menores o es muy poca la información. El comportamiento del tiempo financiero puede producir variaciones del precio de diversos tamaños. En especial, permite que ocurran variaciones extremas y permite que éstas tiendan a ser mayormente positivas o negativas.<sup>2</sup>

Por otro lado, puede observarse que el valor esperado del incremento gamma sobre un periodo de tamaño  $\Delta t$  es justamente  $\Delta t$ . Esto quiere decir que se espera que el tiempo financiero concuerde con el tiempo natural. En promedio, el tiempo de mercado no transcurre ni más rápido ni mas lento que el tiempo natural.

El PVG está dado definido por:

$$dy_t = \mu dt + \theta dg_t + \sigma W_{g_t}, \quad (6)$$

donde, como antes,  $y_t = \ln(P_t)$ . En la ecuación (6),  $\mu, \theta, \sigma > 0$  son constantes reales y  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar independiente de  $G_t$ . Como puede notarse,  $dy_t$  está ahora descrita por término de deriva en tiempo natural,  $\mu$ , y un término de deriva que se desarrolla en tiempo  $g_t$ ,  $\theta$ . Este último controla el sesgo de la distribución los rendimientos logarítmicos. Por otro lado,  $\sigma$  representa la volatilidad total del proceso, y  $\nu$  es el parámetro de la varianza del incremento gamma,  $G_t$ . Este parámetro ajusta la curtosis de la distribución gamma respecto a una distribución normal.

<sup>2</sup>Una explicación con más detalle del tiempo financiero puede encontrarse en Madan et al. (1998) y en Sullivan and Moloney (2010).

Ya que  $X_t = y_t - y_q$  es el rendimiento logarítmico del precio sobre un periodo de tiempo de tamaño  $\Delta t = t - q$ , se tiene que:

$$X_t = (t - q)\mu + (g_t - g_q)\theta + (W_{g_t} - W_{g_q})\sigma. \quad (7)$$

Igual que antes, las propiedades del movimiento browniano (ahora sobre un periodo  $g_t - g_q$ ) nos permiten reescribir la ecuación (7) como:

$$W_{g_t} - W_{g_q} = \sigma P_{G_t} \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Por lo tanto:

$$X_t = (t - q)\mu + \theta G_t + \sigma P_{G_t} \varepsilon.$$

Ahora bien, la función de densidad de  $X_t$  puede expresarse como una densidad condicionada a la realización del incremento del proceso Gamma. Específicamente:

$$X_t - \mu(t - q) |_{G_t} \sim \mathcal{N}(\theta(g_t - g_q), (g_t - g_q)\sigma^2).$$

Expresada de esta forma, tenemos que la distribución de  $X_t$  es una combinación de distribuciones normales, cada una con media  $\theta(g_t - g_q)$  y varianza  $(g_t - g_q)\sigma^2$ . La densidad de cada rendimiento logarítmico se determina por los incrementos del proceso gamma sobre un periodo de tiempo natural.

En contraste, si no condicionamos al incremento gamma, la función de densidad de  $X_t$  es (Brigo et al., 2009)

$$f_{X_t}(x) = \frac{2 \exp\left(\theta \left(\frac{x - \mu}{\sigma^2}\right)\right)}{\nu^{\frac{x-t}{\nu}} \sqrt{2\pi} \sigma \Gamma\left(\frac{x-t}{\nu}\right)} \left(\frac{|x - \mu|}{\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2}\right)^{\frac{x-t}{\nu} - \frac{1}{2}} \cdot B_{\frac{x-t}{\nu} - \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sigma^2} |x - \mu| \sqrt{\left(\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2\right)}\right], \quad (8)$$

para  $-\infty < x < \infty$  y donde  $B$  es la función Bessel de tercera clase (Seneta, 2004).

Podemos calcular los momentos de la distribución varianza-gamma para  $X_t$  como sigue (Seneta, 2014):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= (\mu + \theta)(t - q) \\ \text{Var}(X_t) &= (t - q)\sigma^2 \\ \text{Ses}(X_t) &= \frac{3\nu\theta}{\sigma\sqrt{(t - q)}} \\ \text{Cur}(X_t) &= 3 \left(1 + \frac{\nu}{t - q}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Puede verificarse que si  $(\mu + \theta) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  y el parámetro  $\sigma$  tiene el mismo valor en MBG y PVG, la única diferencia que existirá entre ambos modelos recae en la dimensión de los parámetros de ajuste,  $\theta$  y  $\nu$ . En el PVG,  $\theta$  y el

sesgo tienen el mismo signo. Si  $\theta = 0$ , el sesgo es igual a cero y  $\frac{\nu}{(t-q)}$  representa el porcentaje de exceso de curtosis que hay en la distribución varianza-gamma respecto de la curtosis de la distribución normal (igual a 3).

Finalmente, el proceso del precio sobre un periodo  $t$  es:

$$P_t = P_0 \exp\{\mu t + \theta g_t + \sigma W_{g_t} + \omega t\},$$

donde  $\omega = \frac{1}{\nu} \ln\left(1 - \theta\nu - \frac{\sigma^2\nu}{2}\right)$ .  $\omega$  es un término que asegura que la media del precio, condicional al precio inicial, esté dada por:

$$\mathbb{E}(P_t | P_0) = P_0 e^{\mu t}.$$

El valor esperado del precio crece exponencialmente a lo largo del tiempo, y lo hace a una tasa constante  $\mu$ . Como puede notarse, la media del precio bajo el PVG es idéntica a la media del precio bajo el MBG. Por consiguiente, si los parámetros  $\mu$  son iguales, el rendimiento esperado del activo sobre  $t$  será el mismo para los dos modelos.

### 3 El tipo de cambio en México

En este artículo consideramos los datos para el tipo de cambio *fix*. Nuestra serie comienza el 6 de enero de 1997 y termina el 31 de diciembre de 2014. Esto resulta en un total de 4,527 observaciones. Todos los datos pueden obtenerse de la página de internet del Banco de México.<sup>3</sup> La evolución del tipo de cambio se muestra en la Figura 1.

Una característica muy perceptible en el comportamiento del tipo de cambio son los saltos o cambios muy largos en el precio de la divisa estadounidense. En 1998, el valor del peso en dólares sufrió una importante caída debido a que se redujeron los flujos de capital extranjero en México como consecuencia de la inestabilidad financiera de otros países. La reducción de la entrada de capitales tanto a México como a varios países latinoamericanos fue provocada, principalmente, por el colapso financiero y los problemas económicos de Asia, la depreciación de la moneda de Tailandia, Hong Kong y Japón y por la crisis cambiaria de Rusia. Además, el peso se vio afectado por la desconfianza sobre la solidez de las monedas pertenecientes a economías de latinoamérica, sobre todo del real brasileño que tenía un régimen cambiario fijo.

De septiembre de 2008 hasta casi la parte media de 2009 se observaron los saltos más graves del tipo de cambio. Dicha época se caracterizó por un abrupto aumento de la volatilidad en los mercados cambiarios y financieros internacionales tanto de economías desarrolladas como de economías emergentes. Asimismo,

---

<sup>3</sup>A partir de 1997 comenzó un periodo de recuperación en México luego de la profunda crisis de 1994. El valor del peso respecto del dólar tuvo un comportamiento más ordenado (parecido al de otros países con régimen de libre flotación) gracias a un conjunto de medidas fiscales y monetarias encaminadas al abatimiento de la inflación, el aumento de las reservas internacionales y la reducción de la tasa de interés (Bazdresch and Werner, 2002).





Figura 1: Tipo de cambio diario del peso mexicano por dólar estadounidense durante en el periodo 06/01/1997 - 31/12/2014

empeoró el desempeño de las actividades económicas a nivel mundial, que aumentó la percepción de riesgo de los países. Incluso se generaron expectativas sobre un colapso del sistema financiero internacional. Este comportamiento obedeció a la crisis del mercado financiero de Estados Unidos de finales de 2007. Estas condiciones redujeron los flujos de capital hacia México, lo cuales, a su vez, incrementaron la volatilidad del dólar respecto del peso y afectaron la liquidez del mercado de cambios.

A partir del 2011 hasta el 2012, la volatilidad de los mercados financieros internacionales tuvo un aumento muy significativo y el crecimiento económico de los países disminuyó. En los países con economías emergentes disminuyó también el flujo de capitales, lo cual provocó mayor volatilidad y depreciación de las monedas de estos países con respecto al dólar. Este hecho se debe, principalmente, a que aumentó la incertidumbre y la aversión riesgo entre los inversionistas por la crisis de deuda soberana y de la economía que enfrentaban los países de la zona euro. Gran parte de las inversiones en economías en desarrollo se reemplazaron por activos que se consideran como refugios de valor, por ejemplo, los bonos del Tesoro de Estados Unidos.

En los últimos meses del 2014, el peso mexicano, al igual que otras divisas de países con economías emergentes, sufrió una caída considerable respecto al dólar. La tendencia de depreciación del peso continúa hasta el año 2015. Estos movimientos del tipo de cambio se deben, fundamentalmente, a las expectativas acerca del aumento en las tasas de interés de la Reserva Federal de Estados Unidos. El aumento en las tasas tiene relación con el crecimiento de la actividad económica y la disminución del desempleo de Estados Unidos. La percepción de conseguir mayores ganancias provoca que los participantes de los mercados

financieros conviertan los bonos de deuda que tienen en economías emergentes por inversiones en ese país. El incremento del tipo de cambio del peso por dólar se ve favorecido por la caída del precio del petróleo, que disminuye la entrada de divisas a México.

## 4 Calibración de los log-rendimientos del tipo de cambio

En esta sección consideramos el rendimiento logarítmico del tipo de cambio para diferentes periodicidades: rendimiento diario, semanal y mensual. Sea  $k$  la distancia de tiempo —los días— que separa las observaciones del tipo de cambio. Entonces:

$$x_i = \ln(P_{t_i k}) - \ln(P_{t_{(i-1)k}}).$$

De esta manera, obtenemos las tres series de rendimiento fijando  $k = 1$  para el caso diario,  $k = 5$  para el caso semanal y  $k = 20$  para el caso mensual. Los precios son equidistantes por  $k$  número de días, lo cual hace que los rendimientos no estén traslapados. En la Figura 2 mostramos el comportamiento de las diferentes series de rendimientos.

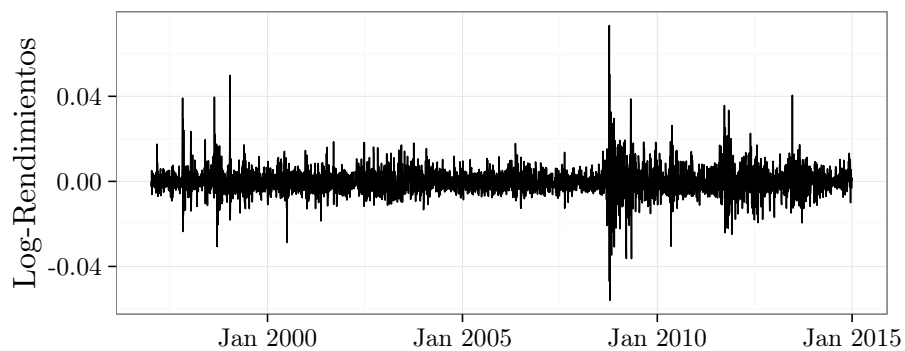
### 4.1 Estacionariedad e independencia

Antes de calibrar las diferentes series, es necesario primero comprobar si los log-rendimientos satisfacen los supuestos implícitos por el MBG y el PVG: 1) que son variables aleatorias independientes y 2) que son estacionarios con distribución normal y varianza-gamma, respectivamente. Para evaluar la independencia de las observaciones, calculamos la función de autocorrelación para las diferentes series de log-rendimientos. En la Figura 3 se muestran los valores  $p$  resultantes de aplicar la prueba de Ljung-Box. Como puede constatarse, sólo los datos mensuales pueden considerarse independientes. Esto es porque sus valores  $p$  son, generalmente, mayores a 10%.

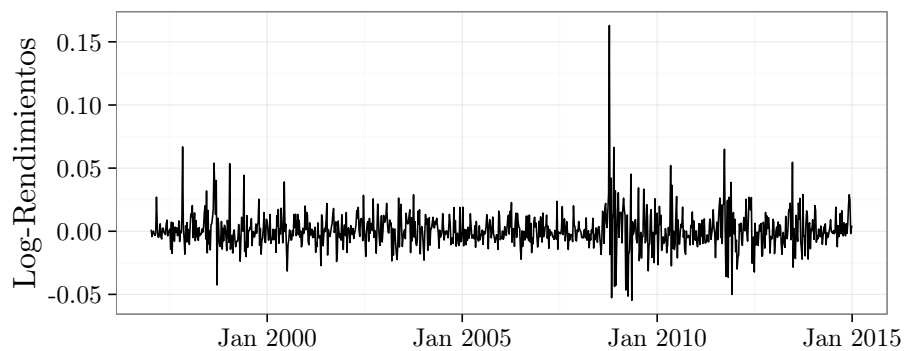
Por otro lado, para comprobar si las series son estacionarias, aplicamos la prueba de Dickey-Fuller aumentada. En los tres casos, la hipótesis nula de no estacionariedad se rechaza con facilidad. Esto se muestra en el Cuadro 1.

<b>Rendimientos</b>	<b>Estadístico</b>	<b>Valor <math>p</math></b>
Diarios	-16.276	< 0.01
Semanales	- 9.901	<0.01
Mensuales	- 6.865	<0.01

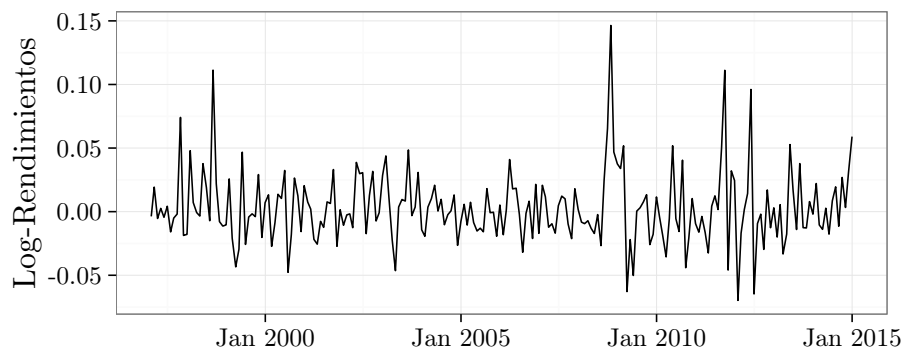
Cuadro 1: Prueba de Dickey-Fuller aumentada para las series de log-rendimientos.



a) Rendimientos diarios

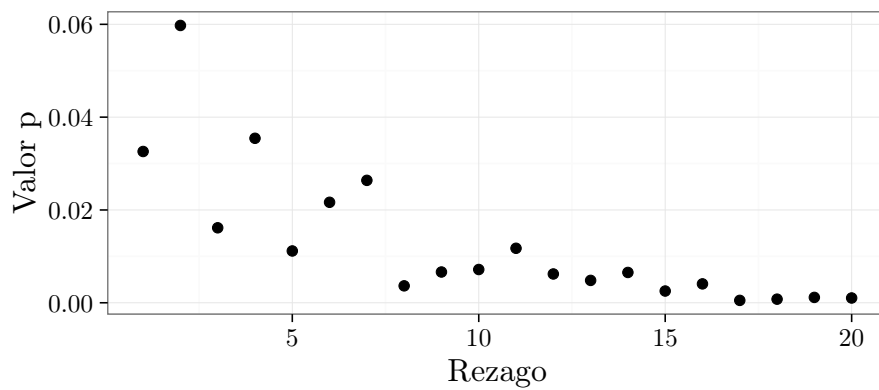


b) Rendimientos semanales

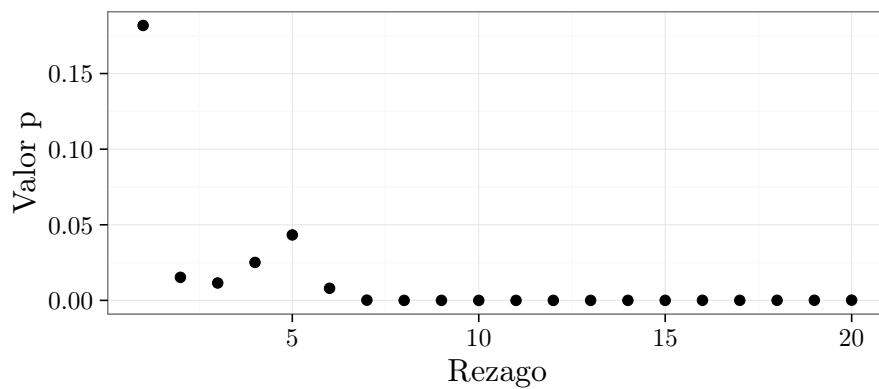


c) Rendimientos mensuales

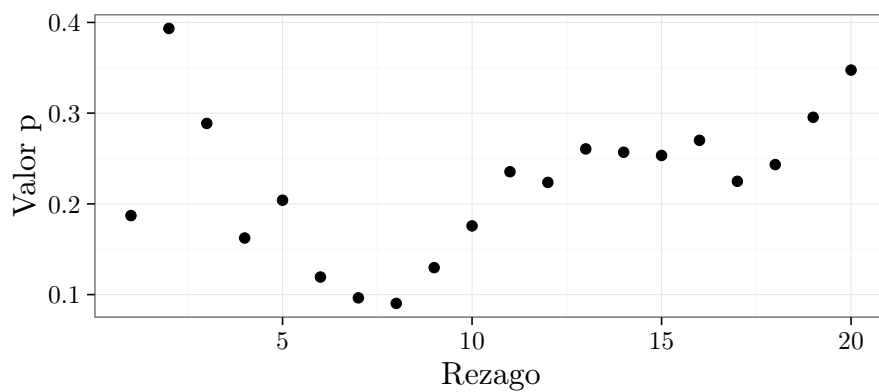
Figura 2: Serie de rendimientos logarítmicos del tipo de cambio para diferentes periodicidades.



a) Rendimientos diarios



b) Rendimientos semanales



c) Rendimientos mensuales

Figura 3: Serie de rendimientos logarítmicos del tipo de cambio para diferentes periodicidades.

## 4.2 Calibración

Los parámetros del MBG pueden encontrarse por el método de máxima verosimilitud. Dado que los rendimientos logarítmicos siguen una función de densidad normal, podemos encontrar su media y su varianza (muestrales) como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T x_t$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2.$$

Dado que los log-rendimientos son calculados suponiendo que la ventana de tiempo,  $t - q$ , es igual a uno, podemos deducir de la ecuación (4) que:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} + \frac{s^2}{2}. \quad (10)$$

Los resultados para las diferentes series de rendimientos se presentan en el Cuadro 2.

	<b>Rendimientos</b>		
	<i>Diarios</i>	<i>Semanales</i>	<i>Mensuales</i>
$\mu$	0.00012	0.00057	0.00252
$\sigma$	0.00620	0.01433	0.02830

Cuadro 2: Parámetros estimados: MBG

Ahora estimamos los parámetros del PVG. El procedimiento se divide en dos etapas (Seneta, 2014). Primero, utilizamos la ecuación (9) para calcular los primeros cuatro momentos de la distribución varianza-gamma a partir de datos muestrales. Si fijamos la ventana de tiempo,  $t - d$ , igual a uno tenemos:

$$\hat{\mu}^m = \bar{x} - \hat{\theta}^m$$

$$\hat{\sigma}^m = s$$

$$\hat{\theta}^m = S\hat{\sigma}^m \quad (11)$$

$$\hat{\nu}^m = \frac{C}{3} - 1,$$

donde  $\bar{x}$ ,  $s^2$ ,  $S$  y  $C$  son los estimadores muestrales de la media, la varianza, el sesgo y la curtosis, respectivamente. La segunda etapa de la estimación de los parámetros del PVG mediante el método de máxima verosimilitud. En particular

optimizamos la ecuación (8) utilizando los resultados de la ecuación (11) como entrada.

Una manera alternativa de estimar los coeficientes consiste en definir  $z_i = x_i - \bar{x}$ . Esta nueva variable aleatoria tiene función de densidad:

$$f_{Z_t}(z) = \frac{2 \exp\left(\theta \left(\frac{z+\theta}{\sigma^2}\right)\right)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \sqrt{2\pi} \sigma \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} \left(\frac{|z+\theta|}{\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2}\right)^{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}} \cdot B_{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sigma^2} |z+\theta| \sqrt{\left(\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2\right)}\right],$$

La ventaja de esta transformación es que nos permite estimar únicamente tres parámetros en lugar de cuatro. El cuarto parámetro se calcula como:  $\widehat{m\hat{u}}^{mv} = \bar{x} - \widehat{\theta}^{mv}$  (Seneta, 2014).

Los resultados de estimar los coeficientes del PVG se reportan en el Cuadro 3.

	<b>Rendimientos</b>		
	<i>Diarios</i>	<i>Semanales</i>	<i>Mensuales</i>
$\mu$	-0.00075	-0.00205	-0.01022
$\sigma$	0.00627	0.01313	0.02513
$\theta$	0.00091	0.00272	0.01315
$\nu$	1.29008	0.95569	0.74026

Cuadro 3: Parámetros estimados para el PVG

Comparando las estimaciones de los cuadros 2 y 3, podemos notar que, para las tres series de rendimientos consideradas, el parámetro estimado para la deriva es muy cercano a cero. Sin embargo, la estimación tiene signo positivo para el MBG y signo negativo para el PVG. Esto se debe a que, aunque la estimación en ambos casos involucra a la media muestral,  $\bar{x}$ , esta se incrementa con  $\widehat{\sigma}$  en el MBG y se reduce con  $\widehat{\theta}^{mv}$  en el PVG. Por otro lado, puede verse que las estimaciones para  $\sigma$  son muy similares y que la volatilidad, en general, aumenta con la ventana de tiempo considerada.

Como hemos dicho, la ventaja del PVG es que este nos permite considerar el sesgo y el exceso de curtosis que presentan los rendimientos en el mercado cambiario. Como puede constatarse, el signo del estimador de  $\theta$  es positivo para las tres series consideradas y su magnitud aumenta con la ventana temporal. El estimador de  $\nu$  también es positivo, pero va decreciendo conforme aumenta la ventana de tiempo. Esto es algo natural, ya que el PVG replica el comportamiento que presentan el sesgo y la curtosis muestrales de las series consideradas.

## 5 Comparativa de modelos y bondad de ajuste

En esta sección nos enfocamos al ajuste de los modelos MBG y PVG a los log-rendimientos del tipo de cambio en México. Comparamos primero las distribuciones normal y varianza-gamma con la distribución empírica de los datos. Luego realizamos algunas pruebas de bondad de ajuste.

## 5.1 Distribuciones normal y varianza-gamma

En la figura 4 mostramos la distribución empírica de las tres series de rendimientos junto con las distribuciones estimadas por una normal y una varianza-gamma. Estas fueron trazadas usando los parámetros de los Cuadros 2 y 3, respectivamente. Mostramos, además, el logaritmo de las funciones de densidad.

Por una parte, vemos cómo las tres funciones, empírica, normal y varianza-gamma, están centradas cerca de cero y que su ancho es más o menos similar. Esto, a primera vista, indica que el ajuste en términos de la media y la varianza de los modelos MBG y PVG son relativamente buenos.

Si nos enfocamos ahora en la parte central de las distribuciones, podemos notar que el pico de la distribución normal yace por debajo de la distribución empírica y el pico de la distribución varianza-gamma lo hace por encima. Esto quiere decir que la distribución normal subestima la probabilidad de observar rendimientos cercanos a cero y que la distribución varianza-gamma los sobre estima. Esta diferencia, sin embargo, se reduce conforme aumenta la ventana temporal, particularmente en el caso de la distribución varianza-gamma.

En lo que respecta a distancias mayores a  $\pm\sigma$  es claro que la distribución varianza-gamma ajusta mucho mejor a la distribución empírica en comparación con la distribución normal. Esto ocurre porque la distribución varianza-gamma tiene la misma proporción de valores que la distribución empírica dentro de tres veces la desviación estándar respecto de la media.

Con la ayuda de las gráficas del logaritmo de la densidad se percibe mejor cómo es el comportamiento de las distribuciones en las partes extremas. Esto es particularmente importante debido a que es esta zona de la distribución la que nos permite determinar de manera apropiada el riesgo de saltos aleatorios en el tipo de cambio. A primera vista, ninguna distribución teórica puede conducirse exactamente conforme a la decadencia de las distribuciones empíricas. Sin embargo, es claro que la distribución varianza-gamma tiene un mejor ajuste, especialmente en el extremo izquierdo. También podemos constatar que las distribuciones empíricas son muy volátiles en sus extremos, particularmente en el derecho. Esto provoca que el ajuste de la distribución varianza-gamma no sea tan bueno en los cambios extremos del tipo de cambio positivos. Indiscutiblemente, la distribución normal no puede corresponder con la proporción de valores en las colas de las distribuciones empíricas, debido a que casi el total de la probabilidad está contenida en el intervalo de  $\pm$  tres veces la desviación estándar con respecto a la media.

Otro aspecto importante que debe considerarse es el ajuste con respecto a la asimetría y al sesgo. Cabe resaltar que, debido a sus propiedades, la distribución normal no puede describir la asimetría positiva que tienen los cambios del dólar. Por el contrario, se aprecia que la distribución varianza-gamma asigna mayores probabilidades al extremo positivo que al negativo, razón por la cual la cola del lado derecho de la distribución luce más abultada que la cola del lado izquierdo. Esto se puede ver porque que el logaritmo de la densidad tiene una pendiente relativamente más alta para los valores negativos que en los positivos.

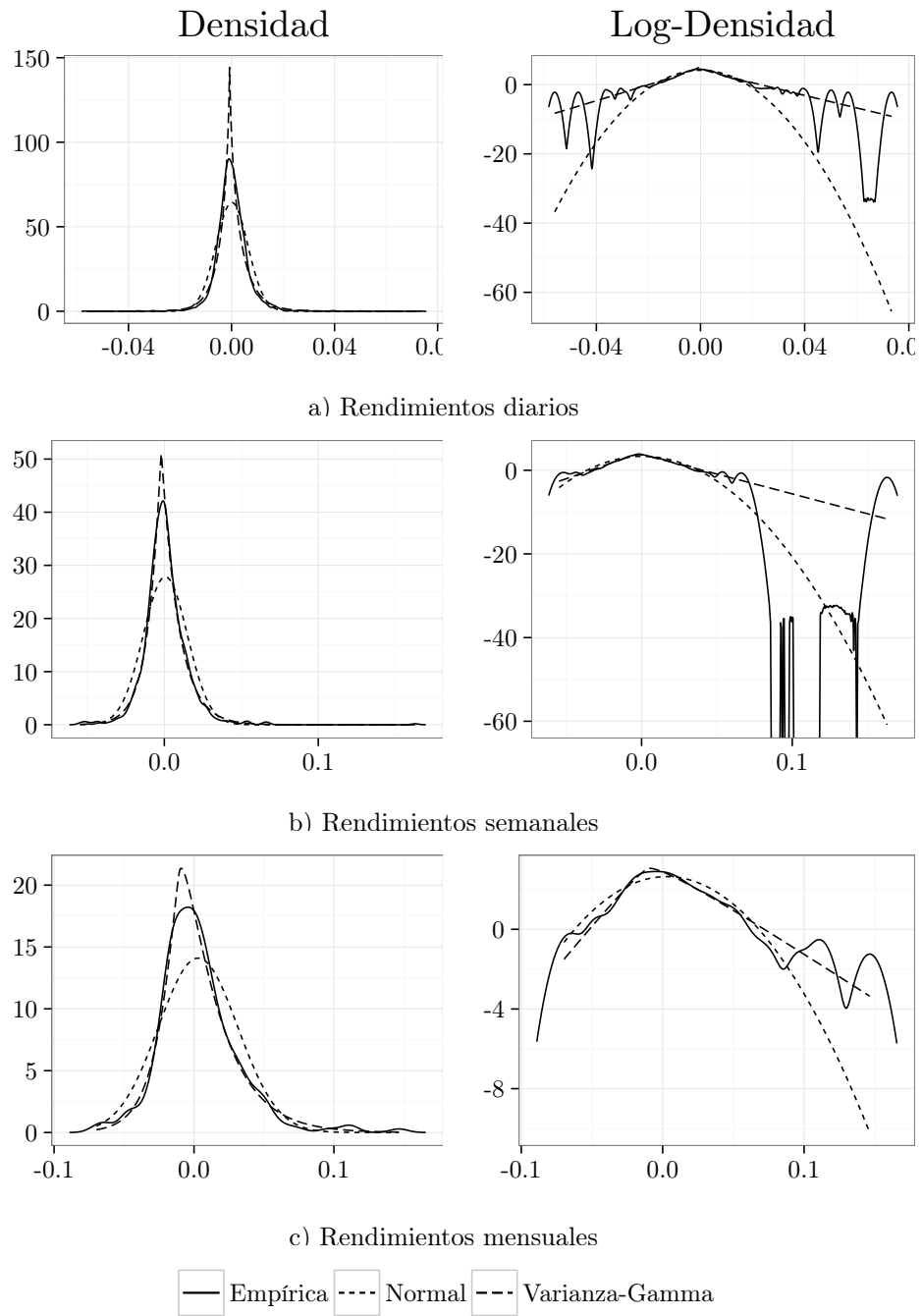


Figura 4: Comparación de la densidad empírica de los rendimientos diarios con las densidades estimadas, normal y varianza-gamma.



Es claro, entonces, que la distribución varianza-gamma ajusta mejor al sesgo de la distribución empírica.

Concluimos entonces que el MBG tiene, en general, un pobre desempeño describiendo los movimientos del mercado cambiario. Sin embargo, este resultado parece ser un poco sorprendente, especialmente si consideramos los log-rendimientos mensuales. Esto es debido a que los cambios en el precio de algún activo financiero sobre un cierto periodo es el resultado de sumar un infinito número de transacciones del mercado realizadas sobre ese periodo. Como las transacciones se consideran variables aleatorias independientes, el teorema del límite central implica que los cambios tienden a parecerse cada vez más a una distribución normal conforme aumenta el periodo de tiempo. Claramente, para el tipo de cambio USD/MXN esta característica no se cumple, al menos para la ventana de tiempo considerada.

Las diferencias entre las distribuciones teóricas y empíricas también pueden observarse en las gráficas de cuantiles de la Figura 5. Para la distribución normal podemos notar cómo los cuantiles teóricos dibujan una línea ondulada en el centro, lo que evidencia que el ajuste de las frecuencias relativas esperadas en esta área son muy diferentes a las frecuencias de la distribución empírica. Además observamos que los extremos de las gráficas de cuantiles están muy dispersos con respecto a la línea de referencia. Esto implica que la distribución normal no puede ajustarse a las colas de la distribución empírica.

Si observamos ahora las gráficas de cuantiles de la distribución varianza-gamma, resulta claro que el ajuste en el centro de la distribución es relativamente plano. Además, los extremos no aparecen tan dispersos. A pesar de algunos puntos aislados en los extremos — particularmente en la parte superior derecha de las gráficas—, podemos constatar que el ajuste a los datos es mucho mejor comparado con el ajuste de la distribución normal.

## 5.2 Pruebas de bondad de ajuste

Para complementar nuestro análisis, en esta sección seguimos la recomendación de Göncü et al. (2013) y realizamos varias pruebas de bondad de ajuste. En particular, realizamos las pruebas Chi-cuadrada, Anderson-Darling y Kolmogorov-Smirnov.

Aplicamos la prueba Chi-cuadrada para la bondad de ajuste dividiendo el rango de log-rendimientos en  $m$  subintervalos. Para poder comparar el ajuste de todas las series analizadas, consideramos los subintervalos definidos por:  $\{-\infty, -0,05, -0,025, -0,01, 0, 0,01, 0,025, 0,05, +\infty\}$ . El estadístico de la prueba es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(f.ob_i - f.es_i)^2}{f.es_i}$$

donde  $f.ob_i$  se refiere a la frecuencia de los datos en la celda  $i$  y  $f.es_i$  es la frecuencia esperada de la distribución en la celda  $i$ . La frecuencia esperada se obtiene de multiplicar la probabilidad de que los valores de la distribución

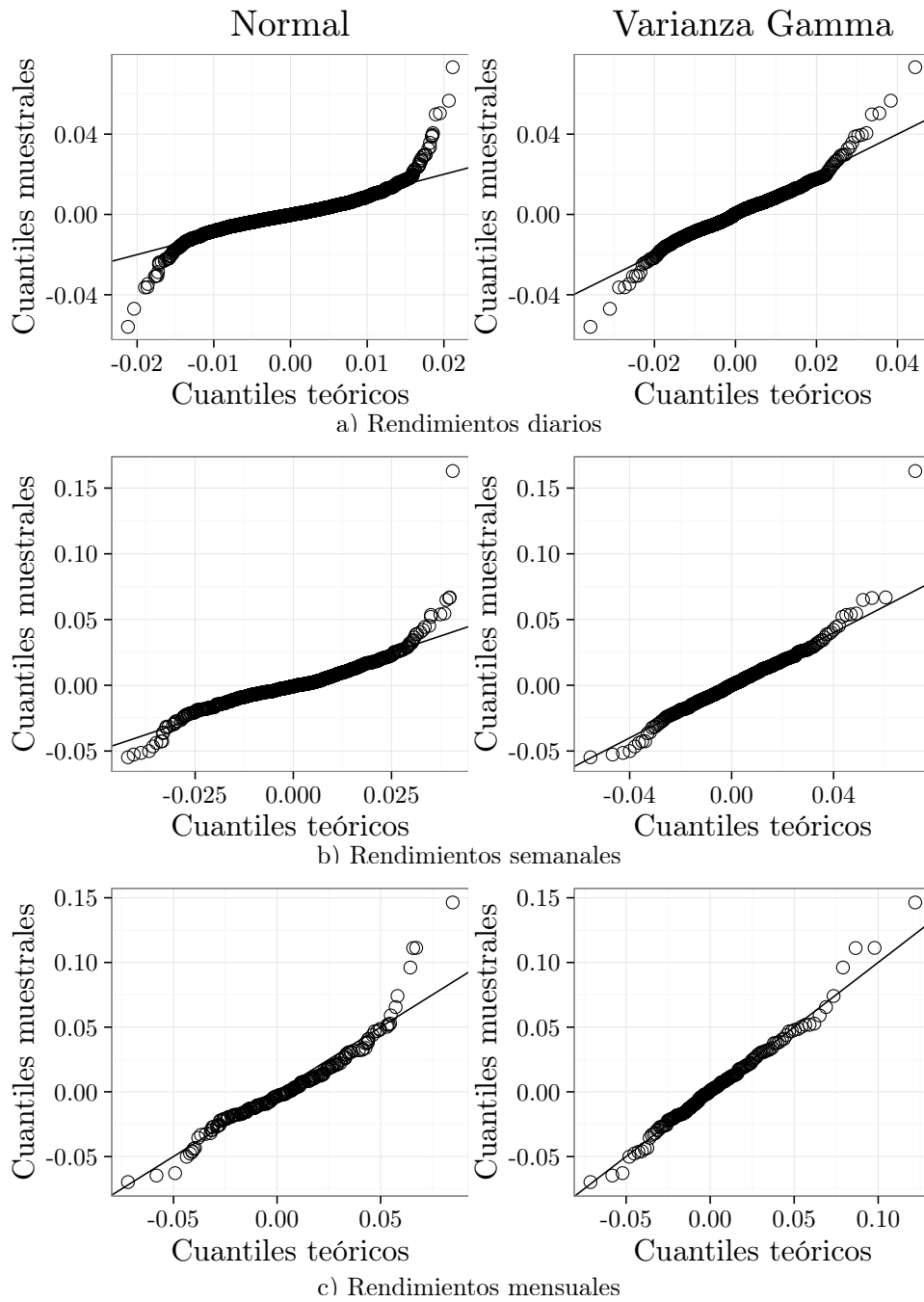


Figura 5: Gráficas de cuantiles para las densidades estimadas, normal y varianza-gamma.

caigan dentro de la celda  $i$  por el tamaño de la muestra,  $n$ . El estadístico tiene distribución chi-cuadrado con  $m - 1 - k$  grados de libertad, donde  $k$  es el número de parámetros que se estimaron a partir de la muestra.

El estadístico Anderson-Darling está basado en la distancia entre alguna función de distribución acumulada y la distribución acumulada empírica. Este se define como:

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} (\ln F(z_i) + \ln(1 - F(z_{n+i-1}))),$$

donde  $F(\cdot)$  denota una función de distribución acumulada teórica y  $z_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , es la serie de datos ordenados de menor a mayor. El estadístico  $A^2$  puede compararse con los valores críticos de la distribución normal en Stephens (1974).

Finalmente, el estadístico de Kolmogorov-Smirnov se calcula como:

$$KS = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(z_i) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(z_i) \right\},$$

donde  $F(\cdot)$  es una función de distribución acumulada teórica. Como lo indica Göncü et al. (2013), el estadístico  $KS$  nos ayuda a cuantificar el ajuste de la distribución varianza-gamma en relación a una distribución normal.

Presentamos en el Cuadro 4 los resultados de aplicar las diferentes pruebas.

Rend.	$\chi^2$		A-D		K-S	
	Normal	VG	Normal	VG	Normal	VG
<i>Diarios</i>	5.18e+12 (<0.01)	159.59 (<0.01)	$\infty$ (<0.01)	9.38 (<0.01)	0.07 (<0.01)	0.035 (<0.01)
<i>Semanales</i>	401.79 (<0.01)	17.09 (0.025)	$\infty$ (<0.01)	0.39 (0.85)	0.09 (<0.01)	0.02 (0.85)
<i>Mensuales</i>	20.41 (<0.01)	1.39 (0.98)	3.59 (0.014)	0.25 (0.97)	0.1 (0.023)	0.03 (0.99)

Cuadro 4: Resultados de diferentes pruebas de bondad de ajuste. Los valores  $p$  se muestran entre paréntesis.

Como puede verse en el Cuadro 4, los estadísticos de la Chi-cuadrada son claramente inferiores bajo la distribución varianza-gamma. Sin embargo, los valores  $p$  nos indican que no podemos concluir que los rendimientos diarios y semanales sigan alguna de las distribuciones propuestas. Para los rendimientos mensuales del tipo de cambio, la prueba Chi-cuadrado es concluyente, el altísimo valor  $p$  es indicativo del buen ajuste del PVG.

Una historia similar puede deducirse de las pruebas Anderson-Darling y Kolmogorov-Smirnof. La única diferencia es que estas pruebas indican que, además de la serie de rendimientos mensuales, tampoco podemos rechazar la hipótesis nula de varianza-gamma en el caso de los rendimientos semanales. En ambos casos, el valor  $p$  de la prueba es superior a 80 %.

Finalmente, es evidente que los rendimientos se ajustan más a una distribución normal conforme aumenta la ventana de tiempo para el cual fueron calculados. Esto puede observarse ya sea viendo la reducción en el valor del estadístico o en el aumento del valor  $p$  de la prueba. Sin embargo, este aumento no es suficiente para concluir que la tasa de cambio en México siga un MBG.

## 6 Conclusion

En este artículo analizamos el comportamiento del tipo de cambio del peso mexicano respecto al dólar estadounidense. En particular, modelamos los rendimientos del mercado cambiario utilizando dos diferentes procesos: un movimiento browniano geométrico (MBG) —más común en la literatura y más utilizado en práctica— y el proceso varianza-gamma (PVG). Para hacer lo anterior, calculamos tres series de rendimientos para varias periodicidades: diaria, semanal y mensual.

Nuestros resultados sugieren que la distribución varianza-gamma —implícita en el PVG— ajusta mejor a los rendimientos del tipo de cambio en relación a la distribución normal —implícita en el MBG—. En general, esto ocurre porque la distribución varianza-gamma es capaz de replicar mejor los cambios extremos en el precio del dólar, particularmente para las series de rendimientos semanales y mensuales. Otro resultado importante es que la distribución normal es incapaz de ajustarse adecuadamente a los datos, incluso para los rendimientos mensuales.

Para concluir lo anterior, hemos calibrado ambos modelos por el método de máxima verosimilitud y hemos aplicado diferentes pruebas de bondad de ajuste. Estas pruebas indican que la hipótesis nula de que los datos siguen un proceso varianza-gamma no puede rechazarse, particularmente en las series semanal y mensual. En cambio, todas las pruebas rechazan la hipótesis nula de normalidad. Esto reviste importancia debido a que en la literatura se suele suponer que los rendimientos de los activos financieros se comportan —al menos para periodicidades altas, como la mensual— como una distribución normal. Como hemos visto, esta distribución falla debido a que no es capaz de capturar otras características de los rendimientos diferentes a la media y la volatilidad. En cambio, el PVG puede capturar algunas características adicionales, tales como el sesgo y la curtosis.

Una aplicación del proceso varianza-gamma y, en general, de los procesos de Lévy que se basan en un movimiento browniano subordinado a otro proceso en tiempo continuo, es la valoración de derivados, especialmente las opciones sobre el tipo de cambio. Esto podría, en principio, mejorar los pronósticos de los modelos tradicionales para valorar de opciones, tales como el modelo de Black-Scholes. Lo anterior resulta muy útil para la toma de decisiones sobre la administración de riesgo, ya que disminuiría la incertidumbre acerca del futuro del tipo de cambio y aumentaría la seguridad con respecto a los rendimientos esperados. Así mismo, los procesos estocásticos como el aquí descrito nos permiten afinar otras medidas de riesgo, tales como el VaR.

## Referencias

- Santiago Bazdresch and Alejandro M Werner. “El Comportamiento del Tipo de Cambio en México y el Régimen de Libre Flotación: 1996-2001”. 2002. URL <http://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-discursos/publicaciones/documentos-de-investigacion/banxico/{%}7B551708AA-9D83-687A-03C1-50DEA76A1F12{%}7D.pdf>.
- Damiano Brigo, Antonio Dalessandro, Matthias Neugebauer, and Fares Triki. A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management. *Journal of Risk Management for Financial Institutions*, 2(4):365–393, 2009.
- Richard Finlay. *The Variance Gamma (VG) Model with Long Range Dependence: A model for financial data incorporating long range dependence in squared returns*. VDM Verlag, 2009. ISBN 978-3639208726.
- Ahmet Göncü, Mehmet Oguz Karahan, and Tolga Umut Kuzubas. Fitting the Variance-Gamma Model: A Goodness-of-Fit Check for Emerging Markets. *Bogazici Journal of Economics and Administrative Sciences*, 27(2):1–10, 2013. URL <https://ideas.repec.org/a/boz/journl/v27y2013i2p1-10.html>.
- Dilip B. Madan, Peter P. Carr, and Eric C. Chang. The Variance Gamma Process and Option Pricing. *Review of Finance*, 2(1):79–105, 1998. doi: 10.1023/A:1009703431535.
- Wim Schoutens. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley, 2003. ISBN 978-0-470-85156-2.
- Eugene Seneta. Fitting the Variance-Gamma Model to Financial Data. *Journal of Applied Probability*, 41(2004):177–187, 2014. URL <https://www.jstor.org/stable/pdf/3215976.pdf>.
- Simón Sosvilla-Rivero. Teorías del tipo de cambio. *Información Comercial Española. Revista de Economía*, 858:23–37, 2011.
- M. A. Stephens. EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69(347):730–737, 1974. URL <http://www.jstor.org/stable/2286009{%}5Cnpapers2://publication/uuid/4C31B84E-6EBA-4A20-8ECD-5A8FA70B091B{%}5Cnpapers2://publication/uuid/1A814565-D924-4B55-858D-331C14C78025>.
- Conall O Sullivan and Michael Moloney. The Variance Gamma Scaled Self-Decomposable Process in Actuarial Modelling. 2010. URL <http://www.ucd.ie/t4cms/wp-10-04.pdf>.
- Tomas Tichy. Some results on pricing of selected exotic options via subordinated Levy models. In *Managing and Modelling of Financial Risks - 6Th International Scientific Conference Proceedings, Pts 1 and 2*, number September, pages 610–617, 2012. ISBN 978-80-248-2835-0.

Francisco Venegas-Martínez. *Riesgos Financieros y Económicos: Productos Derivados y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre*. Thompson, 2006. ISBN 970830008X. URL <http://www.cengage.com.mx/ls/riesgos-financieros-y-economicos-2a-ed/>.