



Munich Personal RePEc Archive

Modeling asset prices in a stochastic volatility environment and determining prices for European options

Rose, Martin and Zitouni, Loubna

Ecole des Mines de Nancy

June 2006

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/81153/>
MPRA Paper No. 81153, posted 06 Sep 2017 02:05 UTC

Modélisation d'actifs à volatilité stochastique et pricing d'options européennes

Martin ROSE

Loubna ZITOUNI

juin 2006

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 4 |
| 0.1 Marchés financiers en temps discret | 4 |
| 0.2 Le fonctionnement des options | 7 |
| 0.3 Le mouvement brownien | 8 |
| 0.3.1 Position du problème et définitions | 8 |
| 0.3.2 Construction du mouvement brownien par marches aléatoires | 10 |
| | |
| 1 Le modèle de Black et Scholes | 12 |
| 1.1 Description du modèle | 12 |
| 1.2 La formule de Black-Scholes | 13 |
| 1.2.1 Énoncé | 13 |
| 1.2.2 Démonstration | 13 |
| 1.3 Une extension du modèle de Black-Scholes | 16 |
| 1.3.1 Le problème de la volatilité implicite | 16 |
| 1.3.2 Le modèle de Black-Scholes avec volatilité dépendant du temps | 17 |
| | |
| 2 Les modèles à volatilité stochastique | 21 |
| 2.1 Le modèle de retour à la moyenne | 21 |
| 2.2 L'équation du prix d'une option | 25 |
| 2.3 La correction du prix de Black-Scholes | 28 |
| 2.3.1 Calcul de P_0 | 30 |
| 2.3.2 Calcul de P_1 | 32 |
| | |
| 3 Simulation | 35 |
| 3.1 Simulation par Monte-Carlo du modèle d'Ornstein-Uhlenbeck | 35 |
| 3.1.1 Le Schéma d'Euler | 35 |
| 3.1.2 Mise en oeuvre | 36 |
| 3.1.3 Résultat | 38 |
| 3.2 Simulation du prix corrigé | 38 |
| 3.2.1 Calcul de C_0 | 39 |

| | | |
|------------------|-----------------------------------|-----------|
| 3.2.2 | Calcul de \tilde{C}^1 | 45 |
| Appendice | | 50 |

Remerciements

Nous tenons à remercier chaleureusement Mme Madalina Deaconu, chercheur INRIA à l'institut Elie Cartan à Nancy, qui nous a suivis tout au long de ce projet, et qui n'a eu de cesse de nous partager ses connaissances approfondies sur les différentes modélisations des marchés financiers. Nous la remercions également pour le difficile travail de relecture, et les nombreux conseils qu'elle a pu nous prodiguer.

Introduction

Black et Scholes ont proposé en 1973 un modèle de marché financier qui conduit à une formule simple pour calculer le prix d'une option européenne sur un actif boursier. Bien que les formules de Black-Scholes soient explicites, le modèle repose sur certaines hypothèses qui ne correspondent pas exactement à ce que l'on observe sur les marchés financiers. L'une des conditions du modèle est que la volatilité du marché est connue et constante. La réalité du marché montre que cette hypothèse n'est pas vérifiée et que la volatilité dépend ne serait-ce que du temps. Ainsi, le but de notre rapport est de présenter des extensions du modèle de Black-Scholes classique qui prennent en compte les variations de la volatilité du marché et de vérifier que ces modèles représentent au mieux le marché.

Nous commencerons par introduire en préambule les notions et les hypothèses majeures des marchés financiers et par exposer les principes de base des options. Ensuite, nous détaillerons, dans une première partie, le modèle de Black-Scholes et nous démontrerons la formule du prix d'un call. Nous traiterons également le cas où la volatilité dépend du temps. La deuxième partie sera consacrée à la modélisation de la volatilité en tant que processus stochastique. Nous présenterons dans la dernière partie les simulations des différents modèles étudiés. Un certain nombre de théorèmes nécessaires au cours des démonstrations sera récapitulé en appendice.

0.1 Marchés financiers en temps discret

Le but de ce paragraphe est d'introduire un certain nombre de notions relatives aux marchés financiers. Nous nous plaçons, par souci de simplification, dans le cadre d'une évolution temporelle discrète. Néanmoins, ces notions s'étendent au cas continu. Un marché financier est caractérisé par l'évolution temporelle d'un certain nombre d'actifs. L'unité de temps peut correspondre, par exemple, à un mois, un jour, ou encore une heure. On suppose qu'il y a sur le marché $p + 1$ titres. L'évolution du prix du titre i est représentée par une variable aléatoire $(S_i^k)_{0 \leq k \leq N}$ où N joue le rôle d'un horizon temporel appelé horizon du marché qui représentera à la fois le temps d'observation du marché et la date d'échéance des options considérées. Le premier actif S^0 joue un rôle particulier, il représente le

cours d'un titre non risqué tel un livret de caisse d'épargne. Les autres actifs sont des titres risqués tels les actions de compagnies cotées en bourse. L'information dont dispose l'investisseur à l'instant k est modélisée par une tribu \mathcal{F}_k et on a :

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{N-1} \subset \mathcal{F}_N.$$

On suppose que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ où Ω est un ensemble fini d'aléas possibles, et $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$.

Gestion de portefeuille

On considère un investisseur qui construit son portefeuille de ϕ_0^i titres de type i à l'instant initial. A chaque instant k , on note ϕ_k^i le nombre de titres de type i dans le portefeuille de l'investisseur. Une stratégie de gestion de portefeuille correspond aux choix successifs des parts des différents titres dans le portefeuille. Ceci peut se traduire par le processus aléatoire $\phi = (\phi_k)_{0 \leq k \leq N} = (\phi_k^0, \phi_k^1, \dots, \phi_k^p)_{0 \leq k \leq N}$. La valeur du portefeuille à l'instant k est ainsi donnée par :

$$V_k(\phi) = \phi_k \cdot S_k = \sum_{i=0}^p \phi_k^i S_k^i.$$

- Lorsque ϕ_k^i est négatif, cela signifie qu'il y a eu une vente à découvert de $-\phi_k^i$ part du titre i : c'est un emprunt de $-\phi_k^i S_k^i$ euros.
- Lorsque ϕ_k^i est positif, cela correspond à une vente de ϕ_k^i part du titre i et à une valeur de $\phi_k^i S_k^i$ euros.

La prévisibilité

Elle signifie que l'investisseur choisit la composition de son portefeuille à l'instant $k+1$ ayant uniquement l'information disponible à l'instant k . Cela se traduit par la condition suivante :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, p\}, \begin{cases} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\ \forall k \in \{1, \dots, N\}, \phi_k^i \text{ est } \mathcal{F}_{k-1}\text{-mesurable} \end{cases}$$

L'autofinancement

C'est le comportement d'un investisseur qui, entre les instants k et $k+1$, réorganise son portefeuille en le faisant passer d'une composition ϕ_k à une composition ϕ_{k+1} de telle sorte que sa valeur totale reste inchangée. Il n'y a donc ni apport ni retrait de fonds. Ceci définit une stratégie qui vérifie :

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, \phi_k \cdot S_k = \phi_{k+1} \cdot S_k.$$

On remarque que les variations des valeurs des portefeuilles autofinancés sont uniquement liées aux variations des prix des actifs. Autrement dit :

$$V_{k+1}(\phi) - V_k(\phi) = \phi_{k+1} \cdot (S_{k+1} - S_k).$$

Stratégie admissible

Une stratégie ϕ est dite admissible si elle est autofinancée et si l'investisseur est en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant k , ce qui se traduit par :

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, V_k(\phi) \geq 0.$$

La notion d'arbitrage

L'arbitrage définit toute opération financière apportant un gain certain sans prise de risque. L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est l'absence d'opportunité d'arbitrage. Autrement dit, il n'existe aucune stratégie financière permettant, avec un investissement initial nul et sans subir de pertes, d'avoir à l'échéance N la possibilité de réaliser un gain. Autrement dit une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible telle que :

$$\begin{cases} \forall \omega \in \Omega, V_0(\phi(\omega)) = 0 \\ \exists \omega \in \Omega, V_N(\phi(\omega)) > 0. \end{cases}$$

Le marché sans opportunité d'arbitrage est dit viable. Si l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est aussi fondamentale, c'est qu'il y a pour cela les raisons techniques suivantes : si le cours d'une action a une évolution qui rend possible une stratégie d'arbitrage, celle-ci va faire l'objet d'achats massifs, ce qui aura pour effet de faire monter son cours, faisant ainsi s'évanouir les espoirs de gains sans risque qu'elle procurait. On peut donc admettre qu'en régime stationnaire, tout marché est viable. Le retour à la viabilité est d'autant plus rapide que la spéculation est importante.

Marché complet

On définit un actif conditionnel par une variable aléatoire réelle positive \mathcal{F}_N -mesurable. Un exemple d'actif conditionnel est le profit h que permet un call européen sur un actif de prix $(S_k)_{0 \leq k \leq N}$. On a $h = (S_N - K)_+$ où K est le prix d'exercice.

Soit h un actif conditionnel. On dit que h est simulable (ou encore répliquable) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant N est égale à h .

Un marché est complet si tout actif conditionnel est simulable.

0.2 Le fonctionnement des options

Pour mieux cerner l'enjeu de ce rapport, nous allons d'abord préciser ce qu'est une option. Une option est un produit dérivé, coté sur un marché spécifique (à Paris, c'est le MONEP), et qui trouve son origine dans la volonté de se prémunir des risques d'évolution défavorable des cours d'un actif dit sous-jacent qui est coté en Bourse. Il existe deux grands types d'options : les options d'achat (call) et les options de vente (put). Ce sont des contrats qui donnent respectivement le droit d'acheter ou de vendre à une date future une certaine quantité d'un sous-jacent, qui peut être, par exemple, une action, un indice, une devise, à un prix fixé à l'avance appelé prix d'exercice ou strike, et ce, quelle que soit l'évolution réelle du cours du sous-jacent. Ce droit est limité dans le temps, et le détenteur de l'option ne peut pas le faire valoir au-delà d'une date fixée à l'avance : l'échéance. S'il ne peut exercer ce droit qu'à l'échéance, l'option est dite européenne. S'il peut le faire à tout moment précédant l'échéance, il s'agit d'une option américaine. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux premières, car elles sont de loin les plus faciles à modéliser. Signalons toutefois qu'il existe d'autres sortes d'options (bermudiennes, asiatiques) et que, devant la diversité croissante des produits financiers proposés par les banques, les options européennes ne forment que 5% environ des options négociées. Pour autant, leur modélisation constitue un véritable cas d'école. Comme il vient d'être dit, une option est bien un droit et non une obligation, ce qui implique un coût à payer d'avance (appelé prime) pour ce service proposé par les organismes financiers. En effet, le détenteur de l'option peut ne pas exercer l'option à l'échéance, au quel cas, celle-ci échoit, mais il peut également la revendre sur le marché, si elle n'est pas encore arrivée à échéance. C'est l'évaluation objective de la prime qui fait l'objet de nombreux modèles complexes, permettant de vérifier si le cours du marché, résultant de l'offre et de la demande, est en accord avec le prix théorique.

Examinons plus précisément le cas d'un call européen de prix d'exercice K et d'échéance T . Le cours de l'actif sous-jacent à l'échéance est S_T . A l'échéance, deux cas se présentent pour le détenteur de l'option :

- Si $S_T > K$, il exerce l'option, c'est-à-dire que le vendeur de l'option lui cède l'actif au prix K , qu'il peut revendre immédiatement sur le marché pour réaliser un bénéfice de $S_T - K$.
- Si $S_T < K$, il n'exerce pas l'option, puisqu'il a tout avantage à se procurer l'actif au prix du marché. Son bénéfice est nul.

Le gain à l'échéance est alors $(S_T - K)_+ = \max(0, S_T - K)$. A l'instant initial, l'acheteur aura néanmoins payé la prime, notée C_0 . En première approximation, on peut estimer le gain net à $(S_T - K)_+ - C_0$, en faisant abstraction de l'actuali-

sation du prix. Pour être plus rigoureux, il conviendrait de considérer la quantité $e^{-rT}(S_T - K)_+ - C_0$, mais à ce niveau d'analyse, la première approche suffit amplement.

Symétriquement, le vendeur du call aura deux attitudes différentes :

- Si $S_T > K$, il réalise une perte de $S_T - K$.
- Si $S_T < K$, il ne réalise aucune perte.

Dans les deux cas, il aura touché la prime C_0 à l'instant initial, date de signature du contrat. Son gain net est donc $C_0 - (S_T - K)_+$. En théorie, l'espérance de gain du vendeur est limitée, tandis que son risque de perte est illimité, d'où la nécessité pour lui de procéder à des opérations de couverture de risque.

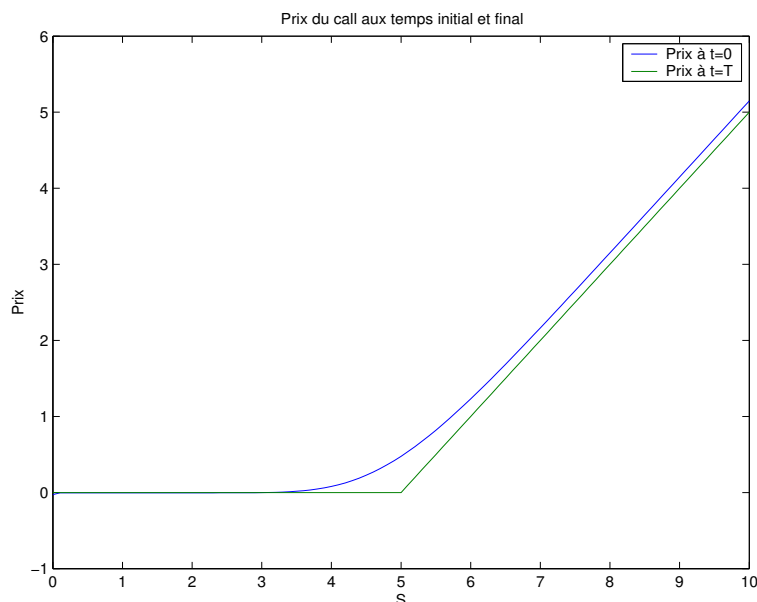


FIG. 1 – Prix d'un call en fonction du sous-jacent, au temps t et à l'échéance

0.3 Le mouvement brownien

0.3.1 Position du problème et définitions

Pour aborder plus précisément la problématique du pricing d'options sur actifs cotés, on ne peut pas se contenter d'un modèle à temps discret. En effet, devant les volumes des échanges et l'extrême fréquence des transactions, les cotations varient quasiment continuellement. Par ailleurs, l'intérêt d'une modélisation à temps

continu des évolutions des cours permet d'accéder à des méthodes de calcul plus explicites que dans le cas discret, même si cela nécessite le recours à des méthodes numériques. Dans cette perspective, le mouvement brownien est un outil clé, aussi bien dans la modélisation de Black-Scholes, que dans la plupart des autres modèles d'actifs financiers.

Le mouvement brownien a été introduit par le naturaliste britannique Brown en 1828, pour décrire les mouvements désordonnés de très fines particules de pollen en suspension dans un liquide, avec d'incessants changements de direction. Les trajectoires des grains de pollen sont évidemment continues, mais extrêmement irrégulières. C'est bien Einstein qui, en 1905, formalisa ce concept resté jusqu'alors qu'une intuition, et qui l'appliqua à la physique statistique. Pourtant, dès 1900, Bachelier réussit à expliquer les fluctuations des cours boursiers par un mouvement brownien dont il montra par ailleurs qu'il correspond à un processus de Markov avec, notamment, une propriété fondamentale : la description de l'évolution d'un cours boursier au-delà d'un temps t , compte-tenu de tout ce qui s'est passé avant t , ne dépend en fait que du cours à l'instant t . L'approche mathématique telle que nous la connaissons actuellement du mouvement brownien, reprenant dans un cadre plus général les résultats existants, fut synthétisée par Wiener en 1923.

Nous définissons d'abord la notion de processus stochastique.

Définition 1 *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace mesurable E muni d'une tribu \mathcal{E} , une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . De plus :*

- à ω fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelée trajectoire du processus,*
- à t fixé, l'application $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire, représentant le choix de l'événement.*

Définition 2 *Un mouvement brownien standard, $(B_t, t \geq 0)$ est un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- $B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s.*
- $\forall s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et a même loi que B_{t-s} (indépendance et stationnarité des accroissements)*
- $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne centrée de variance $t - s$. En particulier, $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.*

0.3.2 Construction du mouvement brownien par marches aléatoires

Il se trouve qu'un mouvement brownien peut être perçu comme la limite d'une marche aléatoire, ce qui en donne une approche relativement intuitive. Nous allons évoquer la procédure de construction d'un mouvement brownien en utilisant cette propriété. Une grande partie de ce paragraphe est inspirée de l'article [3].

Définissons tout d'abord la marche aléatoire, en nous plaçant dans une situation où le temps s'écoule de manière discrète :

Définition 3 Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$. On peut alors construire la famille de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

Le processus $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$ ainsi défini est une marche aléatoire standard sur \mathbb{Z} .

Supposons qu'on ait obtenu un graphe de la fonction $n \mapsto S_n$. On peut procéder à un changement d'échelle en abscisse pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ et en ordonnée, pour que les points obtenus restent à distance finie. Fixons N le nombre de pas effectués par la marche aléatoire. On obtient alors le processus fini $S^{(N)} = (S_t^{(N)}, t \geq 0)$ et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_{k/N}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k.$$

De plus, on impose que la fonction $t \mapsto S_t^{(N)}$ soit affine sur les intervalles de la forme $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$. Il s'agit donc d'une fonction continue. Sous ces hypothèses, on montre le résultat suivant :

Théorème 1 La suite $S^{(N)}$ converge en loi, quand N tend vers l'infini, vers un mouvement brownien standard B_t .

En d'autres termes, il existe une suite $\tilde{S}^{(N)}$ de processus tels que, pour chaque N , $\tilde{S}^{(N)}$ ait même loi que $S^{(N)}$ et, pour tout $T \geq 0$,

$$\sup_{t \leq T} |\tilde{S}_t^{(N)} - B_t| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Remarques

Les trajectoires du mouvement brownien sont continues partout, mais ne sont différentiables nulle part. Soit $t \mapsto B_t$ le mouvement brownien défini sur $[a, b]$. Alors $\forall (c, d) \in [a, b]^2$ le mouvement brownien n'est pas monotone sur $[c, d]$.

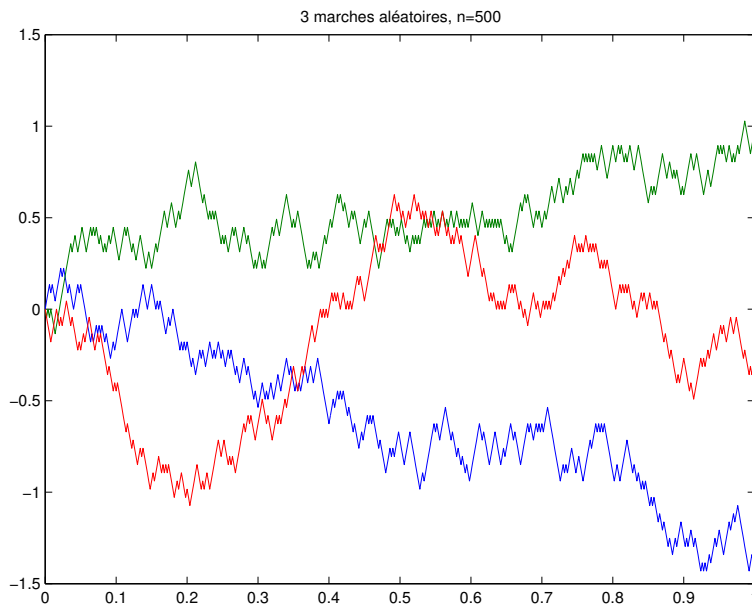


FIG. 2 – 3 marches aléatoires. Nombre de pas : 500

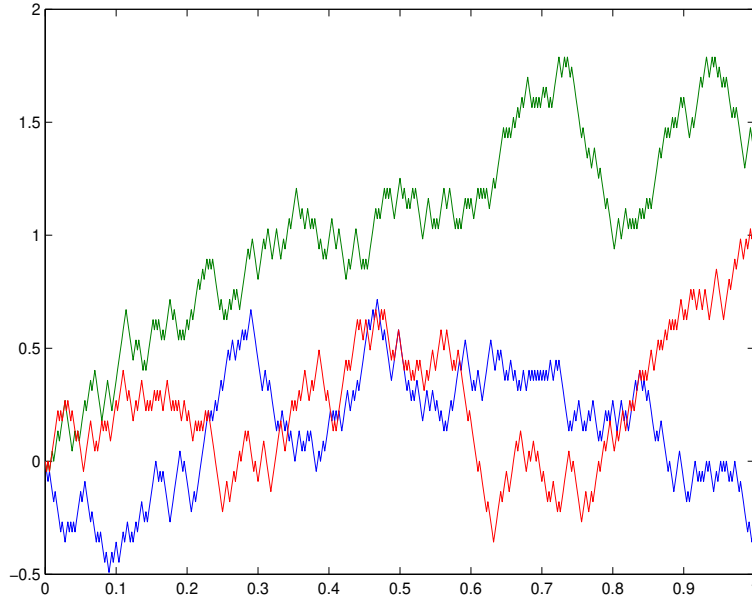


FIG. 3 – 3 marches aléatoires. Nombre de pas : 500

Chapitre 1

Le modèle de Black et Scholes

1.1 Description du modèle

Black et Scholes ont proposé un modèle qui décrit l'évolution à temps continu des produits financiers. Afin de l'exposer, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La dynamique du cours S_t d'un sous-jacent est modélisée par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), \quad (1.1)$$

où μ est le terme de dérive supposé constant, $\sigma > 0$ le coefficient de diffusion ou volatilité, et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$. Le sous-jacent peut être une action, un indice boursier, un taux de change, ou tout autre actif risqué coté sur le marché.

La solution de l'équation (1.1) est :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right). \quad (1.2)$$

L'expression explicite de S_t résulte de la formule d'Itô (cf. théorème 1 de l'appendice). En effet, pour la fonction $g : x \mapsto \ln(x)$, la formule d'Itô s'écrit :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\langle S, S \rangle_s}{S_s^2}. \quad (1.3)$$

Or : $d\langle S, S \rangle_s = \sigma^2 S_s^2 ds$, donc :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t, \quad (1.4)$$

d'où, après intégration, le résultat (1.2).

Le modèle de Black et Scholes doit sa grande notoriété à ces formules explicites de calcul des prix d'options. On choisit de démontrer, dans le paragraphe suivant, la formule du prix d'un call européen.

1.2 La formule de Black-Scholes

1.2.1 Enoncé

Dans ce paragraphe on se propose de démontrer la formule de Black-Scholes. Le marché est modélisé de telle sorte qu'il contienne :

- un actif sans risque, de prix $S_t^0 = S_0^0 e^{-rt}$ à l'instant t , qui correspond à un placement au taux sans risque r .
- un actif risqué de prix S_t à l'instant t , qui est solution de l'équation du modèle de Black-Scholes (1.1).

Théorème 2 *On considère un call européen sur l'actif S_t , d'échéance T et de prix d'exercice K . Le prix du call à l'instant t est donné par la formule :*

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{array} \right.$$

1.2.2 Démonstration

D'après le théorème de Girsanov (cf. appendice), il existe une probabilité \mathbb{P}^* sous laquelle le processus $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ est un mouvement brownien standard pour la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Il en résulte que le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, de l'actif risqué est une martingale sous \mathbb{P}^* .

En effet,

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \tilde{S}_t\sigma dW_t, \end{aligned}$$

et alors, d'après le paragraphe précédent, l'expression du prix actualisé est :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right).$$

qui est celle d'une martingale sous \mathbb{P}^* (cf. preuve 2 de l'appendice).

Le modèle du marché de Black-Scholes est complet, donc le profit h généré par un call européen, d'échéance T et de prix d'exercice K , sur l'actif risqué est simulable. Il existe alors une stratégie autofinancée (ϕ^0, ϕ) , où ϕ^0 et ϕ représentent la quantité d'actifs respectivement non risqué et risqué détenue dans le portefeuille, telle que :

$$h = (S_T - K)_+ = \phi_T^0 S_T^0 + \phi_T S_T.$$

La valeur actualisée du portefeuille à l'instant t est donnée par :

$$\tilde{V}_t = \phi_t^0 \tilde{S}_t^0 + \phi_t \tilde{S}_t.$$

L'extension au marché à temps continu de la condition d'autofinancement en discret, introduite en préliminaire, se traduit de cette façon :

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \phi_u d\tilde{S}_u,$$

d'où :

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \phi_u \sigma \tilde{S}_u dW_t.$$

Cette égalité montre que (\tilde{V}_t) est une martingale sous \mathbb{P}^* . Il en résulte :

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t],$$

donc l'expression de la valeur à l'instant t du portefeuille est :

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t].$$

On remarque que la valeur à l'instant t du portefeuille simulant h est indépendante de la stratégie choisie et ne dépend que de h . Cette valeur définit le prix C_t de l'option à l'instant t . Donc :

$$C_t = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t].$$

Il reste à expliciter cette expression. On réécrit autrement S_T :

$$S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right),$$

On a :

- $(W_t)_{0 \leq t}$ est à accroissements indépendants
- S_t est \mathcal{F}_t - mesurable,

donc d'après la proposition (1) de l'appendice :

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} \left(S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (W_T - W_t) \right) - K \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} \left(S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} X \right) - K \right)_+ \right], \end{aligned}$$

où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On développe l'espérance, car on connaît la loi de X :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \left(S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) - K \right)_+ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Or :

$$\begin{aligned} &S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) - K \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left(\ln \left(\frac{K}{S_t} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right). \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} \int_c^{+\infty} \left(S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) - K \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{-c} S_t \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} (T-t) - \sigma \sqrt{T-t} x \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx - \int_{-\infty}^{-c} K \exp(-r(T-t)) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $y = x + \sigma \sqrt{T-t}$, ce qui donne :

$$C_t = \int_{-\infty}^{-c + \sigma \sqrt{T-t}} S_t \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy - \int_{-\infty}^{-c} K \exp(-r(T-t)) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On pose :

$$\begin{cases} N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ d_1 = -c + \sigma \sqrt{T-t} \\ d_2 = -c. \end{cases} \quad (1.5)$$

On obtient alors la formule du prix d'un call européen dans le modèle de Black-Scholes :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

■

1.3 Une extension du modèle de Black-Scholes

1.3.1 Le problème de la volatilité implicite

Le modèle de Black et Scholes est assurément une référence dans le monde de la finance des marchés, principalement parce qu'il donne explicitement le prix d'une option par un calcul relativement simple. Pourtant, un de ses inconvénients majeurs apparaît dans ce qu'il fait intervenir la volatilité comme un paramètre constant, ce qui ne s'accorde guère avec les données observées sur le marché. Une des façons de s'en convaincre est de considérer la volatilité implicite, I définie par :

$$C_{BS}(t, x, K, T, I) = C^{obs}$$

où C_{BS} est le prix donné par la formule de Black et Scholes, et C^{obs} est le prix de l'option observé sur le marché. L'application $\sigma \mapsto C_{BS}(t, x, K, T, \sigma)$ est une bijection de \mathbb{R}_+ sur $](x - K)_+, x[$. On peut donc trouver, pour tous t, x, K, T fixés, un et un seul $I(t, x, K, T, C_{BS})$ vérifiant cette égalité. Si les prix observés étaient égaux aux prix prédits par le modèle, la fonction $K \mapsto I(t, x, K, T, C_{BS})$ serait constante, et égale à σ . Dans la pratique, on observe une variabilité de ce paramètre en fonction du prix d'exercice K et de l'échéance, T . Le dessin de la courbe convexe $K \mapsto I(t, x, K, T, C^{obs})$ porte le nom de smile, ou skew, selon son allure.

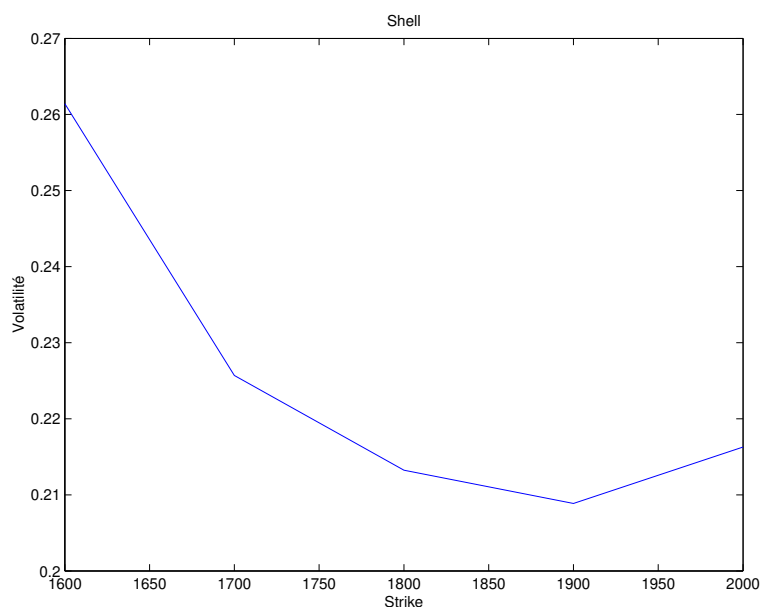


FIG. 1.1 – Volatilité implicite de l'action Shell, cotée sur le Liffe :
 $t = 1/06/06, T = 15/06/06, r = 0.03, S_t = 358.25$

1.3.2 Le modèle de Black-Scholes avec volatilité dépendant du temps

Puisque la volatilité n'est pas constante, une des premières idées serait de la faire dépendre d'un paramètre simple : le temps. Cette hypothèse, n'est pas tout à fait dénuée de bon sens, et on peut facilement imaginer qu'à cause de facteurs exogènes apparaissant tour à tour sur le marché (tensions diplomatiques, conflits, publications de chiffres économiques, etc.), les différents cours d'actifs cotés réagissent différemment dans le temps. Nous allons donc nous intéresser à cette extension particulière du modèle de Black et Scholes. Les équations régissant le modèles s'écrivent à présent :

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt \\ dS_t = S_t (\mu dt + \sigma(t)dB_t) \\ \text{où } \sigma : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Par application de la formule d'Itô à la fonction $x \mapsto \ln(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S_s^2} d\langle S, S \rangle_s \\ &= \ln(S_0) + \int_0^t (\mu ds + \sigma(s)dB_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds. \end{aligned}$$

D'où :

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds \right).$$

Par ailleurs, il existe une probabilité \mathbb{P}^* sous laquelle le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale. En effet,

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t ((\mu - r)dt + \sigma(t)dB_t). \end{aligned}$$

En posant $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma(t)}t$, on a :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma(t) dW_t.$$

Comme $\left(\frac{\mu-r}{\sigma(t)}\right)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus adapté vérifiant $\int_0^T \left(\frac{\mu-r}{\sigma(s)}\right)^2 ds < \infty$ p.s., alors par application du théorème de Girsanov, il existe une probabilité \mathbb{P}^* de densité $\exp\left(-\int_0^t \frac{\mu-r}{\sigma(s)} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu-r}{\sigma(s)}\right)^2 ds\right)$ sous laquelle W_t est un mouvement brownien

standard. Ainsi, sous cette probabilité, le prix actualisé est une martingale, puisque $\mathbb{E}^* \left[\tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_s \right] = \tilde{S}_s$. En effet :

$$\mathbb{E}^* \left[\tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}^* \left[S_0 e^{(\mu-r)t + \int_0^t \sigma(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u) du} \mid \mathcal{F}_s \right]$$

En remplaçant B_t par $W_t - \int_0^t \frac{\mu-r}{\sigma(u)} du$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left[\tilde{S}_t \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E}^* \left[S_0 e^{(\mu-r)t + \int_0^t \sigma(u) dW_u - \int_0^t (\mu-r) du - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u) du} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[S_0 e^{\int_0^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u) du} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= S_0 e^{\int_0^s \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du} \quad (\text{propriété de martingale}) \\ &= S_0 e^{\int_0^s \sigma(u) dB_u + \int_0^s (\mu-r) du - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du} \\ &= S_0 e^{(\mu-r)s - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du + \int_0^s \sigma(u) dB_u} \\ &= \tilde{S}_s. \end{aligned}$$

Il est maintenant aisé de calculer le prix du call C_t :

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rt} (S_t - K)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\left(\tilde{S}_t - K e^{-rt} \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\left(S_0 e^{(\mu-r)t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u) du + \int_0^t \sigma(u) dB_u} - K e^{-rt} \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[\left(S_0 e^{\int_0^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u) du} - K e^{-rt} \right)_+ \right]. \end{aligned}$$

Sous \mathbb{P}^* , $\int_0^t \sigma(u) dW_u$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\gamma^2 = \int_0^t \sigma^2(u) du$, et en notant $f_t(y)$ la densité de la variable aléatoire gaussienne centrée, de variance égale à γ^2 , soit

$$f_t(y) = \frac{1}{\gamma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\gamma^2}}$$

on a finalement :

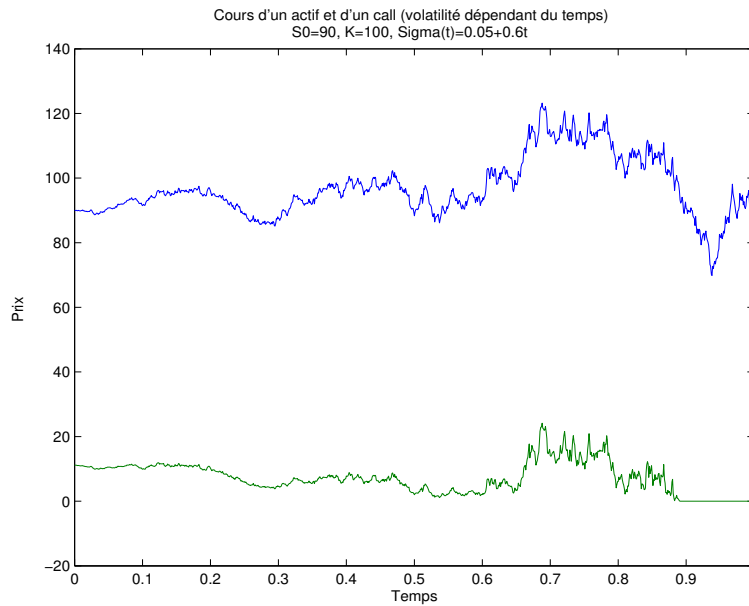
$$C_t = \int_{\mathbb{R}} \left(S_0 e^{y - \frac{\gamma^2}{2}} - K e^{-rt} \right)_+ f_t(y) dy.$$

A partir de là, un simple calcul d'intégrale donne une formule simple pour le prix. En posant $y_0 = \frac{\gamma^2}{2} - rt - \ln \left(\frac{S_0}{K} \right)$, on a :

$$\begin{aligned}
C_t &= \int_{y_0}^{\infty} \frac{S_0}{\gamma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\gamma^2} + y - \frac{\gamma^2}{2}} dy - \int_{y_0}^{\infty} \frac{Ke^{-rt}}{\gamma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\gamma^2}} dy \\
&= \int_{\frac{y_0 - \gamma^2}{\gamma}}^{\infty} \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_{\frac{y_0}{\gamma}}^{\infty} \frac{Ke^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\gamma^2 - y_0}{\gamma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{Ke^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{y_0}{\gamma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases}
N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du \\
d_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma^2}{2} + rt + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \right) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\gamma^2}{2t}\right)t}{\frac{\gamma}{\sqrt{t}}\sqrt{t}} \\
d_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{-\gamma^2}{2} + rt + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \right) = d_1 - \gamma = d_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{t}}\sqrt{t}
\end{cases}$$



Malgré cet effort de modélisation, les principaux inconvénients du modèle de Black-Scholes demeurent entiers, et pour cause : le cas σ dépendant du temps n'est qu'un cas particulier du modèle initial où l'on a remplacé σ^2 par $\bar{\sigma}^2 = \frac{\gamma^2}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma^2(u) du$. Ce modèle n'est pas assez complexe pour rendre compte de l'évolution des actifs financiers. Aussi, pour obtenir un meilleur modèle, on va introduire une part d'aléa dans l'évolution de la volatilité, en modélisant celle-ci par une équation

différentielle stochastique, et prendre en compte, de ce fait, une deuxième source de bruit aléatoire dans le système.

Chapitre 2

Les modèles à volatilité stochastique

2.1 Le modèle de retour à la moyenne

L'observation de la volatilité implicite des marchés financiers a donné lieu, à partir de la fin des années 80, à de nouveaux modèles de la volatilité. Principalement, la volatilité n'est plus un processus déterministe ne dépendant que du temps, mais plutôt une fonction d'un autre processus stochastique indépendant ou corrélé avec le sous-jacent. De manière générale, dans ces modèles, le sous-jacent vérifie l'EDS :

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t \\ \sigma_t = f(Y_t) \end{cases}$$

où f est une fonction déterministe positive du processus Y qui lui-même est solution d'une équation différentielle stochastique. A partir de là, différents modèles ont été envisagés, basés sur le choix convenable de la fonction et de l'EDS, dont la solution représente au mieux les résultats observés sur les marchés. Dans toute la suite, nous considérons que la volatilité possède la propriété de retour à la moyenne. En général, un processus (Y_t) possédant la propriété de retour à la moyenne vérifie l'équation :

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \text{"terme stochastique"},$$

où m est la moyenne de la loi limite du processus Y lorsque le temps tend vers $+\infty$. Le terme déterministe tend à ramener le processus vers la moyenne m à chaque fois que le terme stochastique le pousse loin de celle-ci. Le processus ainsi obtenu est un processus qui oscille autour de la moyenne m . Quant à la vitesse de retour à la moyenne, elle dépend de la valeur de α . Pour illustrer cette description, nous allons considérer le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, qui est un modèle de retour à la moyenne de la forme :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t^1 \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dB_t^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- S_t est le prix du sous-jacent à la date t .
- B_t^1 et B_t^2 sont deux mouvements browniens standard corrélés de la façon suivante : $d\langle B^1, B^2 \rangle_t = \rho dt$, $\rho \in]-1, 1[$.
- μ est le terme de dérive supposé constant..
- σ_t est la valeur de la volatilité à la date t .
- f est une fonction déterministe définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles strictement positives.
- α, β sont des constantes.
- m est une constante qui représente l'espérance du processus Y lorsque le temps tend vers l'infini $m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_t)$.

En effet, la formule d'Itô (cf. appendice) permet d'avoir une expression explicite de Y , pour cela il suffit de l'appliquer à la fonction $g(t, x) = x \exp(\alpha t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. On a :

$$\begin{aligned} Y_t e^{\alpha t} &= Y_0 + \int_0^t \alpha Y_s e^{\alpha s} ds + \int_0^t e^{\alpha s} dY_s \\ &= Y_0 + \int_0^t \alpha Y_s e^{\alpha s} ds + \int_0^t [\alpha(m - Y_s) e^{\alpha s} ds + \beta e^{\alpha s} dB_s^2] \\ &= Y_0 + \int_0^t \alpha m e^{\alpha s} ds + \int_0^t \beta e^{\alpha s} dB_s^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$Y_t = m + (Y_0 - m)e^{-\alpha t} + \int_0^t \beta e^{-\alpha(t-s)} dB_s^2.$$

Lemme 1 *A t fixé, $M_t = \int_0^t \beta e^{\alpha(s-t)} dB_s^2$ est une variable gaussienne de moyenne 0 et de variance $\frac{\beta^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$.*

Preuve

En effet, si on note $u(s) = \beta e^{-\alpha(t-s)}$, on a :

$$\int_0^t u(s) dB_s^2 = \int_0^t \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u\left(k \frac{T}{n}\right) \mathbb{1}_{\left[k \frac{T}{n}, (k+1) \frac{T}{n}\right]}(s) dB_s^2.$$

En utilisant les notations $u_{t_k} = u(k\frac{T}{n})$ et $t_k = k\frac{T}{n}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t u(s)dB_s^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dB_s^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2).\end{aligned}$$

On a :

- $\forall k \in \mathbb{N}, u_{t_k} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) \sim \mathcal{N}(0, u_{t_k}^2 (t_{k+1} - t_k))$
- Les variables aléatoires $u_{t_k} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2)$ sont indépendantes deux à deux.

Donc avec les propriétés des sommes de variables gaussiennes indépendantes deux à deux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) \sim \mathcal{N}(0, \gamma_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k}^2 (t_{k+1} - t_k)).$$

D'après la construction de l'intégrale stochastique, la suite de variables aléatoires $(\sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2))_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge en moyenne quadratique, donc aussi en loi, vers $\int_0^t h(s)dB_s^2$. Nous en déduisons que $\int_0^t u(s)dB_s^2$ est une variable gaussienne de moyenne 0 et de variance :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \int_0^t h^2(s)ds = \frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Par conséquent, la loi limite lorsque t tend vers l'infini de (Y_t) est une loi gaussienne de moyenne m et de variance $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$.

Les figures ci-dessous représentent les trajectoires du processus Y_t pour $\beta = 0.5$, $Y_0 = 0$, $m = 0$, $f(x) = \exp(x)$ pour différentes valeurs de α .

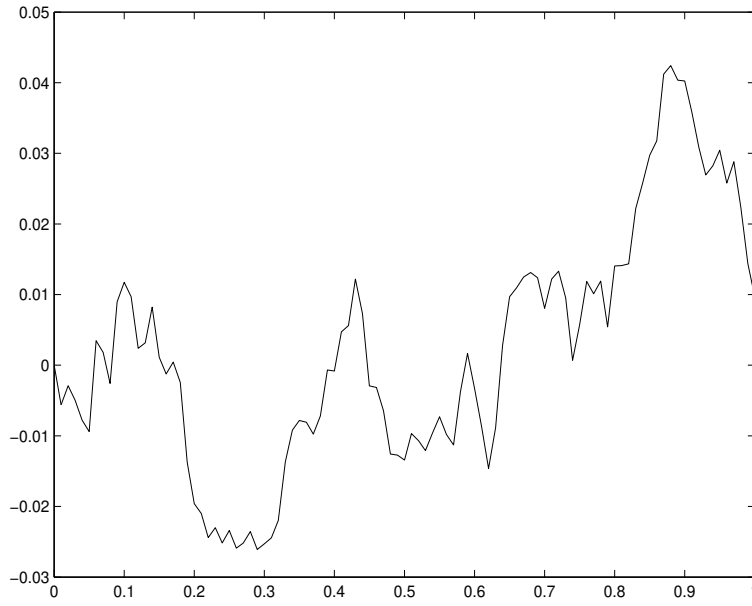


FIG. 2.1 - $\alpha = 1$

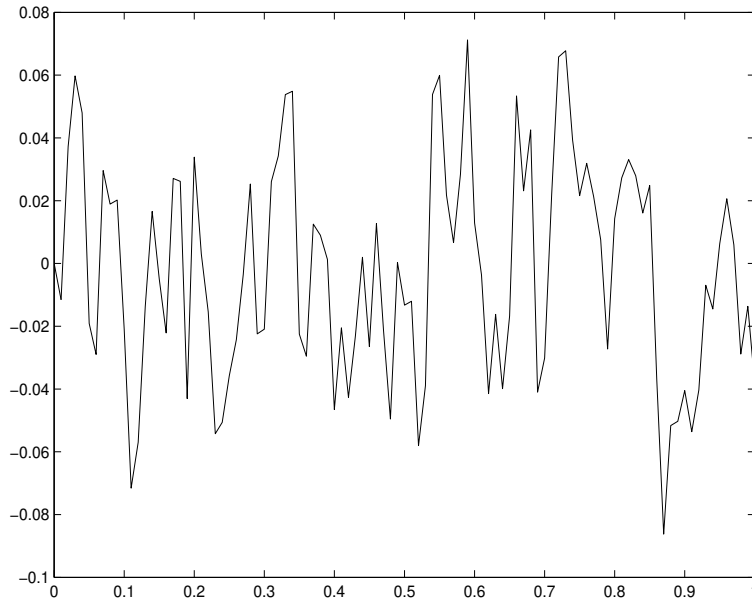


FIG. 2.2 - $\alpha = 50$

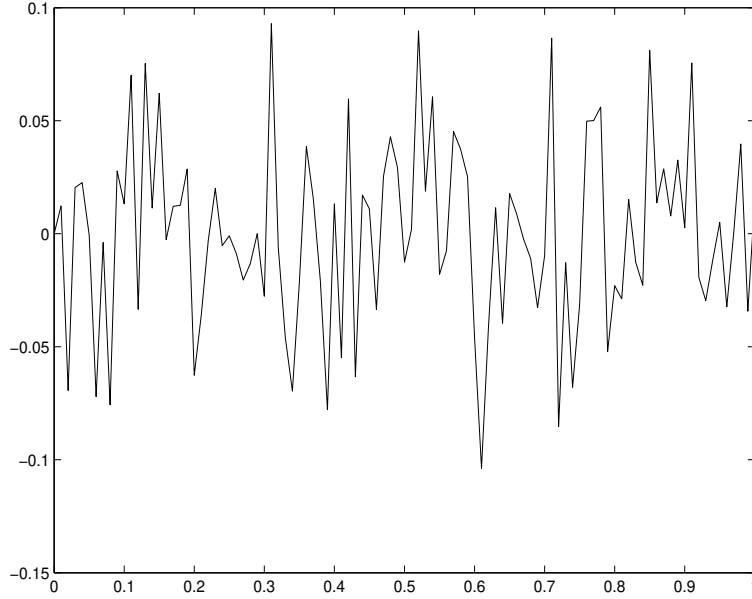


FIG. 2.3 – $\alpha = 100$

2.2 L'équation du prix d'une option

Dans ce qui suit, on va chercher à déterminer le prix d'un produit dérivé d'un sous-jacent qui suit le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t^1 \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta B_t^2 \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et B^1 et B^2 deux mouvements browniens corrélés par $d\langle B^1, B^2 \rangle_t = \rho dt$. Nous aurons besoin, par la suite, de la proposition suivante :

Proposition 1 Soient B_t^1 et B_t^2 , deux mouvements browniens corrélés tels que $d\langle B^1, B^2 \rangle_t = \rho dt$. Alors on peut exprimer B_t^2 sous la forme :

$$B_t^2 = \rho B_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_t^3.$$

avec B_t^3 un mouvement brownien indépendant de B_t^1 .

Vérification

Il ne s'agit pas ici de vérifier proprement toutes les propriétés du mouvement brownien. On va simplement s'assurer que le crochet vérifie les bonnes propriétés. En effet,

$$d\langle B^1, B^2 \rangle_t = \rho d\langle B^1, B^1 \rangle_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\langle B^1, B^3 \rangle_t = \rho d\langle B^1, B^1 \rangle_t = \rho dt$$

et

$$\begin{aligned}
d\langle B^3, B^3 \rangle_t &= d\left\langle \frac{B^2}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho B^1}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{B^2}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho B^1}{\sqrt{1-\rho^2}} \right\rangle_t \\
&= \frac{dt}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2 dt}{1-\rho^2} - \frac{\rho^2 dt}{1-\rho^2} - \frac{\rho^2 dt}{1-\rho^2} \\
&= \frac{1-\rho^2}{1-\rho^2} dt \\
&= dt.
\end{aligned}$$

■

Dans cette configuration de marché, il y a un actif S_t , et deux processus aléatoires corrélés. Le système ainsi modélisé est incomplet car il n'existe pas une seule stratégie répliquable. Autrement dit, on ne peut pas éliminer le risque en gérant un portefeuille contenant de l'actif sans risque et du sous-jacent, puisque si on considère la variation infinitésimale de la valeur d'un tel portefeuille, on retrouve des termes en dB_t^1 et des termes en dB_t^2 , impossibles à annuler simultanément. C'est pourquoi, on introduit dans le portefeuille un actif de référence G appelé benchmark. Ainsi, il est désormais possible de créer un portefeuille Π qui soit sans risque, et qui contienne une quantité $-\Delta_S$ d'actif sous-jacent S , $-\Delta_G$ d'actif G et l'option P . La valeur totale du portefeuille est :

$$\Pi = P - \Delta_S S - \Delta_G G.$$

Nous allons nous intéresser aux conditions nécessaires pour que ce portefeuille réplique l'option et soit autofinancé. Par différenciation, il vient,

$$d\Pi = dP - \Delta_S dS - \Delta_G dG.$$

En appliquant la formule d'Itô à $P(t, s, y)$ et $G(t, s, y)$, on a :

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho \right] dt \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial s} dS + \frac{\partial P}{\partial y} dY - \Delta_S dS \\
&\quad - \Delta_G \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho \right] dt \\
&\quad - \Delta_G \left[\frac{\partial G}{\partial s} dS + \frac{\partial G}{\partial y} dY \right]
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
d\Pi &= \left[\frac{\partial P}{\partial s} + \Delta_S \frac{\partial G}{\partial s} \right] dS + \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \Delta_G \frac{\partial G}{\partial y} \right] dY \\
&+ \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho \right] dt \\
&- \Delta_G \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho \right] dt.
\end{aligned}$$

Le portefeuille étant sans risque, les coefficients devant dS et dY doivent être annulés :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial s} + \Delta_S \frac{\partial G}{\partial s} &= 0 \\
\frac{\partial P}{\partial y} - \Delta_G \frac{\partial G}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}$$

On a donc formellement accès à l'expression de Δ_G et Δ_S par les formules :

$$\begin{aligned}
\Delta_G &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1} \\
\Delta_S &= \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\partial G}{\partial s} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

De plus, comme on suppose qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, on a $d\Pi = r\Pi dt$, soit :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho \right] dt \\
&- \Delta_G \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho \right] dt \\
&= r(P - \Delta_S S - \Delta_G G) dt.
\end{aligned}$$

En remplaçant Δ_G et Δ_S par leurs valeurs calculées, et en multipliant les deux termes de l'équation par $\frac{\partial G}{\partial y}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho - rP + rS \frac{\partial P}{\partial s} \right] \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^{-1} \\
&= \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial y} f(y) S \beta \rho - rG + rS \frac{\partial G}{\partial s} \right] \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Le premier terme ne dépend que de P et le second que de G . Tous deux sont donc égaux à une fonction $k(t, s, y)$ et on a immédiatement que P est solution de l'équation :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} f^2(y) S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} c^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial y} f(y) S c \rho - rP + rS \frac{\partial P}{\partial s} = k(t, s, y) \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (2.2)$$

La fonction k est une donnée du marché, et on peut supposer qu'elle s'écrive :

$$k(t, s, y) = \beta \Lambda(t, s, y) - \alpha(m - y)$$

avec :

$$\Lambda(t, s, y) = \rho \frac{\mu - r}{f(y)} + \gamma(t, s, y) \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Cette écriture permet une décomposition de Λ , la prime de risque de volatilité, en deux fonctions liées au risque :

- $\frac{\mu - r}{f}$ représente la prime de risque liée au brownien B^1
- γ , fonction apparemment inconnue, et difficilement estimable empiriquement, représente la prime de risque liée à B^2 .

2.3 La correction du prix de Black-Scholes

L'équation du prix (2.2) fait intervenir la fonction k qui est certes une donnée du marché, mais qui ne peut pas être déduite directement de celui-ci. Pour pallier cette difficulté, Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [2] ont corrigé le prix d'une option dans le modèle de Black-Scholes pour qu'il intègre la volatilité stochastique. Le principe de base est que plus le coefficient de retour à la moyenne α est grand, plus le processus associé à la volatilité dans le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck ressemble aux chroniques de volatilité implicite relevées sur le marché. De plus, cette hypothèse implique les deux résultats mathématiques suivants :

- la loi de Y_t s'approche, en un temps fini, de sa loi limite, qui est une variable gaussienne de moyenne m et de variance $\nu = \frac{\beta^2}{2\alpha}$.
- $\frac{1}{T-t} \int_t^T f(Y_s) ds \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \phi(u) du$.

où ϕ est la densité de probabilité de la loi limite.

Ainsi, on fait l'hypothèse que α est très grand et on note $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$, qui est homogène à un temps, est très petit comparé à $T - t$. Nous supposons que ν^2 est constante et nous cherchons un développement limité en $\sqrt{\varepsilon}$ du prix P .

On reprend également l'hypothèse sur γ , développée dans [2], et qui consiste à considérer que cette fonction est bornée et ne dépend que de y .

Commençons par réécrire le problème du prix en faisant apparaître le paramètre ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}(S_t^\varepsilon)^2 f^2(Y_t^\varepsilon) \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial s^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} S_t^\varepsilon f(Y_t^\varepsilon) \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial s \partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial y^2} \\ + r(S_t^\varepsilon \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial s} - P^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(m - Y_t^\varepsilon) \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} = 0 \\ P^\varepsilon(T, s, y) = h(s). \end{cases}$$

En introduisant les opérateurs :

$$\mathcal{L}_0 \cdot = \nu^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial y^2} + (m - y) \frac{\partial \cdot}{\partial y}$$

$$\mathcal{L}_1 \cdot = \rho \nu \sqrt{2} f(y) s \frac{\partial^2 \cdot}{\partial s \partial y} - \nu \sqrt{2} \Lambda \frac{\partial \cdot}{\partial y}$$

$$\mathcal{L}_2 \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \frac{1}{2} s^2 f^2(y) \frac{\partial^2 \cdot}{\partial s^2} + r(s \frac{\partial \cdot}{\partial s} - \cdot)$$

le problème ci-dessus s'écrit :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P^\varepsilon(t, s, y) = 0 \quad (2.3)$$

avec la condition $P^\varepsilon(T, s, y) = h(s)$.

Supposons l'existence d'un développement limité en $\sqrt{\varepsilon}$ de la forme :

$$P^\varepsilon = P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} P_3 + \dots \quad (2.4)$$

A partir des équations (2.3) et (2.4) on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 P_0 &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\ &+ (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ &+ \sqrt{\varepsilon} (\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) \\ &+ \dots \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On se limitera, dans la suite, à la recherche de P_0 et P_1 .

2.3.1 Calcul de P_0

Commençons par multiplier l'équation (2.5) par ε . Puis, en faisant tendre ε vers 0, on a :

$$\mathcal{L}_0 P_0 = 0.$$

L'opérateur \mathcal{L}_0 ne contient que des dérivées par rapport à y . On note :

$$\varphi(y) = P_0(t, s, y),$$

Alors l'équation (2.3.1) s'écrit :

$$\nu^2 \varphi''(y) + (m - y) \varphi'(y) = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les constantes et la fonction $y \mapsto \int_0^y \exp(\frac{m-z}{2\nu^2}) dz$. On cherche une solution φ qui n'explose pas en $+\infty$. Pour cette raison, on prend $\varphi(y)$ constante. On déduit alors que :

$$P_0(t, s, y) = P_0(t, s).$$

L'équation (2.5) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\ + (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ + \sqrt{\varepsilon} (\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) \\ + \dots \\ = 0. \end{aligned}$$

On multiplie cette fois-ci par $\sqrt{\varepsilon}$ et on fait tendre à nouveau ε vers 0, on a :

$$\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0.$$

Les deux termes de l'opérateur \mathcal{L}_1 contiennent une dérivation par rapport à y donc $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$ et par conséquent $\mathcal{L}_0 P_1 = 0$. Les mêmes arguments avancés préalablement permettent d'affirmer que P_1 est une fonction de t et s uniquement.

Le prix corrigé à l'ordre 1, $P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1$, à l'instant t ne dépend pas de la volatilité σ_t .

On reprend l'équation (2.6) : d'une part, le terme en $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ est nul, d'autre part, on fait tendre ε vers 0, on obtient :

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0.$$

On sait que $\mathcal{L}_1 P_1 = 0$, donc :

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0.$$

Lemme 2 *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 P_i(t, s) \phi(y) dy = 0.$$

Preuve

On note $\chi(y) = P_i(t, s, y)$. Il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 \chi(y) \phi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} [\nu^2 \chi''(y) + (m - y) \chi'(y)] \phi(y) dy.$$

On intègre par parties et on utilise :

- ϕ et ϕ' tendent vers 0 lorsque y tend vers l'infini en valeur absolue,
- $(m - y) \chi' = [(m - y) \chi]' + \chi$;

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 \chi(y) \phi(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\nu^2 \chi(y) \phi''(y) + [(m - y) \chi(y)]' \phi(y) + \chi(y) \phi(y)] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y) [\nu^2 \phi''(y) - (m - y) \phi'(y) + \phi(y)] dy. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= -\phi(y) \frac{y - m}{\nu^2} \\ \phi''(y) &= -\phi'(y) \frac{m - y}{\nu^2} - \frac{\phi(y)}{\nu^2}, \end{aligned}$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 \chi(y) \phi(y) dy = 0.$$

L'équation (2.3.1) nous donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_2 P_0(t, s) \phi(y) dy = 0.$$

En développant l'opérateur P_0 , on déduit que :

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)^2 \phi(y) dy \right] s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + r(s) \frac{\partial P_0}{\partial s} - P_0 = 0.$$

C'est exactement l'équation du prix de Black-Scholes avec volatilité constante $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y) \phi(y) dy$. Bien que cette équation du prix n'ait pas été démontrée dans ce rapport, on peut la retrouver à partir de l'équation (2.2) en considérant que toutes les dérivées par rapport à y sont nulles. On note dans la suite \mathcal{L}_{BS} l'opérateur :

$$\mathcal{L}_{BS} \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial s^2} + r(s) \frac{\partial \cdot}{\partial s} - \cdot.$$

2.3.2 Calcul de P_1

Revenons à l'équation $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 P_0 &= \frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{1}{2} f^2(y) s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + r(s) \frac{\partial P_0}{\partial s} - P_0 \\ &= \frac{1}{2} (f^2(y) - \sigma^2) s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 P_2 &= -\mathcal{L}_2 P_0 \\ &= -\frac{1}{2} (f^2(y) - \sigma^2) s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

Vu que l'opérateur \mathcal{L}_0 ne fait intervenir que des dérivées par rapport à la variable y , alors la dernière égalité peut être vue comme une équation différentielle en y avec second membre. Pour cela on note $\omega(y) = \frac{\partial P_2}{\partial t}(t, s, y)$, et l'équation en ω s'écrit :

$$\nu^2 \omega'(y) + (m - y) \omega(y) = -\frac{1}{2} (f^2(y) - \sigma^2) s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2}$$

qu'on peut résoudre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\omega \phi)'(y) &= \omega'(y) \phi(y) + \omega(y) \phi'(y) \\ &= \omega'(y) \phi(y) + \omega(y) \phi(y) \frac{m - y}{\nu^2} \\ &= \frac{\phi(y)}{\nu^2} (\nu^2 \omega'(y) + (m - y) \omega(y)) \\ &= -\frac{s^2}{2\nu^2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} \phi(y) (f^2(y) - \sigma^2) \end{aligned}$$

On note C une constante numérique qui peut changer d'une ligne à l'autre. Après intégration, on obtient :

$$\omega(y) = -\frac{s^2}{2\nu^2\phi(y)} \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} \int_{-\infty}^y \phi(z)(f^2(z) - \sigma^2)dz + C$$

en faisant tendre y vers $-\infty$ on constate que $C = 0$, d'où :

$$\frac{\partial P_2}{\partial t}(t, s, y) = -\frac{s^2}{2\nu^2\phi(y)} \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} \int_{-\infty}^y \phi(z)(f^2(z) - \sigma^2)dz.$$

Notons $I(y) = \frac{1}{2\nu^2\phi(y)} \int_{-\infty}^y \phi(z)(f^2(z) - \sigma^2)dz$.

On cherche, à présent, la correction du prix d'ordre 1, $\tilde{P}_1 = \sqrt{\varepsilon}P_1$. Pour cela, on utilise l'équation $\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0$, déduite de (2.5). D'après le lemme, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 P_3(t, s)\phi(y)dy = 0$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_2 P_1(t, s)\phi(y)dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_1 P_2(t, s)\phi(y)dy.$$

D'une part, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_2 P_1(t, s)\phi(y)dy = \mathcal{L}_{BS}(P_1),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_1 P_2(t, s)\phi(y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho\nu \frac{\sqrt{2}}{2} s f(y) I(y) \left(2s \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + s^2 \frac{\partial^3 P_0}{\partial s^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \frac{\sqrt{2}}{2} \Lambda(y) I(y) s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} \right) \phi(y) dy \\ &= \rho\nu \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial s^3} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) I(y) \phi(y) dy \\ &\quad - \nu \frac{\sqrt{2}}{2} s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(y) I(y) \phi(y) dy. \end{aligned}$$

Pour alléger les expressions, on note pour une fonction h

$$\langle h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\phi(y)dy,$$

lorsque cette intégrale est bien définie. Donc :

$$\mathcal{L}_{BS}(P_1) = \rho\nu \frac{\sqrt{2}}{2} \langle fI \rangle s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial s^3} + (\rho\nu\sqrt{2}\langle fI \rangle - \nu \frac{\sqrt{2}}{2} \langle \Lambda I \rangle) s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2}$$

On en déduit que \tilde{P}_1 vérifie l'équation du prix de Black-Scholes avec second membre :

$$\mathcal{L}_{BS}(\tilde{P}_1) = H(t, s),$$

où :

$$H(t, s) = V_2 s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + V_3 s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial s^3},$$

et

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\rho \nu \sqrt{2} \langle fI \rangle - \nu \frac{\sqrt{2}}{2} \langle \Lambda I \rangle) \\ &= \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} (2\rho \langle fI \rangle - \langle \Lambda I \rangle) \\ V_3 &= \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle fI \rangle. \end{aligned}$$

La condition terminale est $\tilde{P}_1(T, s) = 0$.

Ce problème admet la solution $-(T-t)H$, puisque :

– d'une part, cette fonction vérifie bien la condition terminale,

– d'autre part,

$$\mathcal{L}_{BS}(-(T-t)H) = H - (T-t)\mathcal{L}_{BS}(H), .$$

Comme $\mathcal{L}_{BS}(s^n \frac{\partial^n P_0}{\partial s^n}) = s^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} \mathcal{L}_{BS}(P_0)$ (preuve dans l'appendice), alors :

$$\mathcal{L}_{BS}(H) = 0,$$

d'où

$$\mathcal{L}_{BS}(-(T-t)H) = H.$$

Ainsi, le prix corrigé à l'ordre 1 est donné par :

$$P_0 - (T-t) \left(V_2 s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + V_3 s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial s^3} \right).$$

Chapitre 3

Simulation

3.1 Simulation par Monte-Carlo du modèle d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans cette partie on cherche à retrouver le smile de la volatilité en utilisant le modèle de volatilité stochastique introduit dans le chapitre précédent. On rappelle le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t^1 \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dB_t^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- S_t est le prix du sous-jacent à la date t .
- B_t^1 et B_t^2 sont deux mouvements browniens standard corrélés de la façon suivante : $d\langle B^1, B^2 \rangle_t = \rho dt$, $\rho \in]-1, 1[$.
- μ est le terme de dérive supposé constant.
- σ_t est la valeur de la volatilité à la date t .
- f est une fonction déterministe définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles positives.
- α, β, m sont des constantes.

Dans la suite, on prend $m = 0$, $\Lambda = 0$ et f la fonction exponentielle..

3.1.1 Le Schéma d'Euler

On commence par annoncer un résultat important qui nous servira pour la suite en simulation ; malheureusement on a pas eu le temps de le démontrer dans ce rapport.

Proposition 2 *Il existe une probabilité risque neutre sous laquelle le prix actualisé de l'actif est une martingale ; cette probabilité n'est pas unique mais dépend de la fonction k . De plus, si C_0 est le prix d'un call européen à l'instant initial, K est le strike et T est l'échéance, alors :*

$$C_T = e^{-rT} \mathbb{E}^* [(S_T - K)_+]$$

Le problème d'Ornstein-Uhlenbeck s'écrit, sous la probabilité risque neutre, de la façon suivante :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dZ_t \end{cases} \quad (3.2)$$

où :

- S_t est le prix du sous-jacent à la date t .
- W et Z sont deux mouvements browniens standard corrélés : $d\langle W, Z \rangle_t = \rho dt$, $\rho \in]-1, 1[$.
- r est le rendement instantané supposé constant.

On écrit le schéma d'Euler qui correspond à ces équations stochastiques (cf. [5]) :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{(n+1)\Delta t} &= \bar{S}_{n\Delta t} [1 + \mu\Delta t + f(Y_{n\Delta t})(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})] \\ \bar{Y}_{(n+1)\Delta t} &= -\alpha \bar{Y}_{n\Delta t} \Delta t + \beta(Z_{(n+1)\Delta t} - Z_{n\Delta t}). \end{aligned}$$

Pour simuler les deux browniens corrélés à partir de deux browniens indépendants W' et Z' , on utilise la méthode de Cholesky :

$$\begin{pmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} W'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix}$$

où \mathcal{A} est une matrice telle que :

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Mise en oeuvre

La programme Matlab suivant commence par une simulation des trajectoires de S et Y . Ensuite, il implémente le schéma d'Euler. Puis, il calcule le prix du call par Monte-Carlo en approchant l'espérance par une moyenne. Enfin, il utilise la fonction `blsimpv` programmée dans Matlab et qui donne la volatilité implicite de Black-Scholes.

```

function Volatility=OUmodel(r,alpha,nu,corr,S0,Y0,K,NbTrajec,pas);
%r est le rendement
%alpha le coefficient de retour à la moyenne
%nu l'écart-type de la loi limite de Y
%corr le coefficient de corrélation entre W et Z
%K le strike du call européen
%NbTrajec le nombre de trajectoire à simuler
%pas le pas de discrétisation de l'intervalle du temps [0,T],
%où T est l'échéance du call

%On simule d'abord des Ttrajectoires de S et Y :

n=round(1/pas);% le nombre de points de discrétisation de l'intervalle
%du temps , T étant pris égal à 1
u1=sqrt(pas)*randn(n,NbTrajec);
w1=[zeros(1,NbTrajec);cumsum(u1)];%c'est le vecteur des réalisations
%du brownien W'aux points de discrétisation
u2=sqrt(pas)*randn(n,NbTrajec);
w2=[zeros(1,NbTrajec);cumsum(u2)];% c'est le vecteur des réalisations
%du brownien Z'aux points de discrétisation

% On construit les deux browniens corrélés W et Z par la méthode de
% Cholesky
A=chol([1,corr;corr,1]);

for i=1:NbTrajec
    B=A*[w1(:,i)';w2(:,i)'];
    W(:,i)=B(1,:)' ;
    Z(:,i)=B(2,:)' ;
end

%Le schéma d'Euler :

%On initialise :
s(1,:)=S0*ones(1,NbTrajec); y(1,:)=Y0*ones(1,NbTrajec);

beta=sqrt(2*alpha)*nu;

```

```

for j=1:n
    s(j+1,:)=s(j,:).*(1+r*pas+0.2*exp(y(j,:)).*(W(j+1,:)-W(j,:)));
    y(j+1,:)=y(j,:).*(1-alpha*pas)+beta*(Z(j+1,:)-Z(j,:));
end

```

%On calcule le prix du call européen, ensuite la volatilité implicite pour %différentes valeurs du strike :

```
m=length(K);
```

3.1.3 Résultat

Le but est de tracer la volatilité implicite en fonction de $\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$. On fixe S_0 à la valeur de 1. On lance le programme avec les paramètres suivants :

| | |
|------------------------|--------------------------|
| r | 0.01 |
| α | 10 |
| ν | 1 |
| ρ | -0.1 |
| S_0 | 1 |
| Y_0 | 0 |
| K | $\exp(-0.6+0.1*[0 :12])$ |
| Nombre de trajectoires | 2000 |
| Pas de temps | 0.01 |

On obtient effectivement une courbe qui a la forme d'un smile (cf. 3.1.3).

3.2 Simulation du prix corrigé

Comme il a été démontré dans la partie 2.3, le prix corrigé dans le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck s'écrit de la façon suivante :

$$C = C_0 - (T - t) \left(V_2 s^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial s^2} + V_3 s^3 \frac{\partial^3 C_0}{\partial s^3} \right)$$

avec :

$$V_2 = \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} (2\rho \langle fI \rangle - \langle \Lambda I \rangle)$$

$$V_3 = \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle fI \rangle.$$

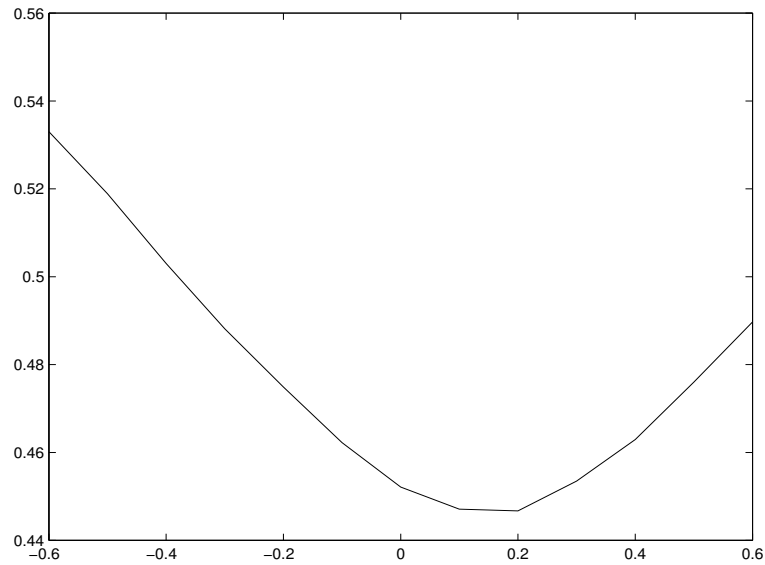


FIG. 3.1 – la volatilité implicite en fonction de $\ln(\frac{K}{S_0})$

Nous allons d'abord nous intéresser au calcul de C_0 qui n'est autre que le prix du call estimé dans le modèle de Black et Scholes. Deux possibilités se présentent alors, que nous allons traiter successivement :

- soit on calcule C_0 par la formule explicite de Black-Scholes,
- soit on résout par une méthode de différences finies l'EDP de Black-Scholes.

3.2.1 Calcul de C_0

Calcul direct par la formule de Black-Scholes

On rappelle la formule de Black-Scholes, démontrée en première partie du rapport, donnant le prix au temps initial $t = 0$ d'une option européenne d'échéance T et de prix d'exercice K :

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

où :

$$\begin{cases} N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Sous Matlab, la fonction de répartition $N(x)$ n'existe pas. En revanche, une autre fonction qui s'y apparente, est disponible : $erf(x)$, définie par :

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

La première se déduit de la seconde par :

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

On peut donc écrire la fonction suivante, donnant le prix d'un call européen pour un actif de cours S_0 , avec une échéance T , un prix d'exercice K , une volatilité $sigma$, et un taux sans risque r :

```
function C0=BSchoCall(S0,T,K, sigma,r);
d1=(log(S0/K)+(r+0.5*sigma.^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
C0=S0*(0.5+0.5*erf(d1/sqrt(2)))
    -K*exp(-r*T)*(0.5+0.5*erf(d2/sqrt(2)));
```

Calcul par résolution de l'EDP de Black-Scholes

Le modèle de Black Scholes peut être vu comme un cas particulier du modèle d'Ornstein-Uhlenbeck développé en partie 2, avec les effets suivants :

- la volatilité étant constante, $f(y) = \sigma = cste$
- toute dérivée partielle par rapport à y est nulle.

Ainsi, l'équation (2.2) se récrit :

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial s^2} + rS \frac{\partial C_0}{\partial s} - rC_0 = 0. \quad (3.4)$$

Il serait intéressant de résoudre cette équation par différences finies. Malheureusement, le prix de l'action est a priori illimité, ce qui introduit une imprécision dans le schéma numérique naturellement borné. En effet, on doit choisir un certain prix L pour l'actif, suffisamment grand, et dans ce cas, les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} C_0(0, t) = 0 \\ \frac{\partial C_0}{\partial s}(L, t) = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Remarquons que la deuxième condition est approximative puisque $\frac{\partial C_0}{\partial s}(L, t)$ tend vers 1 quand L tend vers l'infini. Par ailleurs, il a été montré que la simulation

d'un put était plus concluante que celle d'un call, par cette méthode, et de toute façon, le passage du prix du call à celui du put est immédiat, par la formule de parité call-put démontrée en appendice :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Nous allons donc nous attacher à résoudre l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial s^2} + rS \frac{\partial P_0}{\partial s} - rP_0 = 0 & t \in]0, T[, x \in]0, L[\\ \frac{\partial P_0}{\partial s}(0, t) = -1; P_0(L, t) = 0 & t \in]0, T[\\ P_0(s, T) = \max(K - x, 0), & x \in]0, L[. \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons qu'il s'agit là d'une EDP avec une condition de Neumann à gauche, et une condition de Dirichlet homogène à droite. Pour résoudre cette équation, on met en oeuvre un schéma explicite. On discrétise d'abord l'espace et le temps avec des pas respectifs δs et δt , tels que :

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_i = i\delta s < \dots < s_p < s_{p+1} = L$$

et

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = n\delta t < \dots < t_q = T$$

On adopte les notations suivantes : $P_i^n \simeq P(s_i, t_n)$. Comme on va partir de la condition terminale $P_i^T = \max(K - s_i, 0)$, $\forall i \in [0, p + 1]$, il nous faut P_i^{n-1} en fonction de P_i^n , soit :

$$\frac{P_i^n - P_i^{n-1}}{\delta t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2\delta s^2} (P_{i+1}^n + P_{i-1}^n - 2P_i^n) + \frac{rs}{2\delta s} (P_{i+1}^n - P_{i-1}^n) - rP_i^n = 0$$

ou encore :

$$P_i^{n-1} = \left(\frac{\sigma^2 i^2 \delta t}{2} - \frac{ri\delta t}{2} \right) P_{i-1}^n + (1 - \sigma^2 i^2 \delta t - r\delta t) P_i^n + \left(\frac{\sigma^2 i^2 \delta t}{2} + \frac{ri\delta t}{2} \right) P_{i+1}^n.$$

Cette égalité s'écrit aisément sous forme matricielle, ce qui est très intéressant pour un traitement avec Matlab : le vecteur colonne P^n donne le prix du Put à l'instant n en fonction des différentes valeurs possibles pour le prix de l'actif, A est la matrice tridiagonale avec comme coefficients : $(1 - \sigma^2 i^2 \delta t - r\delta t)$ sur la diagonale, $\left(\frac{\sigma^2 i^2 \delta t}{2} - \frac{ri\delta t}{2} \right)$ sur la sous-diagonale, et $\left(\frac{\sigma^2 i^2 \delta t}{2} + \frac{ri\delta t}{2} \right)$ sur la surdiagonale. Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} P^{n-1} = AP^n = A^q P^T \\ P^T = \max(K - S^T) \end{cases} \quad (3.7)$$

En revanche, il faut être conscient de l'importance des conditions CFL liant δt à δs , qui empêchent de choisir arbitrairement δt et δs . Expérimentalement, on trouve que :

$$\frac{\delta t}{(\delta s)^2} < 0.4.$$

La fonction *expliciteBS* donne donc le prix d'un call à $t = 0$ et à l'échéance, en fonction d'un vecteur S des prix de l'actif sous-jacent, allant de 0 à L par pas de dx .

```
function [C0,CT]=expliciteBS(T,K,sigma,r,L,dt,ds)

q=L/ds+1;
S=0:ds:L;
n=T/dt+1;

PT=max(0,K-S)';
%Définition de la matrice A
A1=1-r*dt-sigma^2*dt*[1:1:q].*[1:1:q];
A2=0.5*sigma^2*dt*[2:1:q].*[2:1:q]-0.5*r*dt*[2:1:q];
A3=0.5*sigma^2*dt*[1:1:q-1].*[1:1:q-1]+0.5*r*dt*[1:1:q-1];
A=diag(A1)+diag(A2,-1)+diag(A3,1);

P0=A^n*PT;

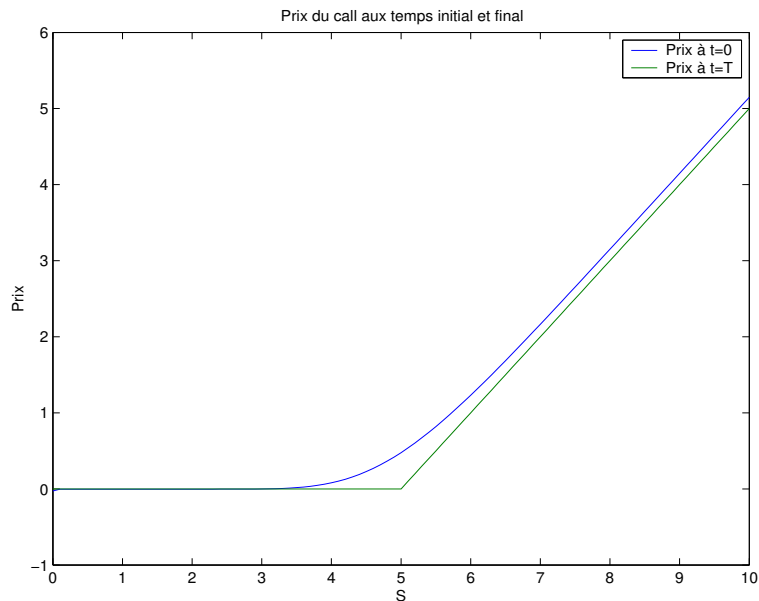
%On passe maintenant au prix du call
CT=max(0,S-K)';
%relation de parité call-put :
C0=P0+S'-K.*exp(-r*T);
```

Il est alors possible de tracer la valeur d'un call à $t = 0$ et à $t = T$ en fonction du prix de l'actif sous-jacent S , ce que fait la fonction *TraceCalledP* :

```
function []=TraceCalledP(T,K,sigma,r,L,dt,ds)
S=0:ds:L;
[C0,CT]=expliciteBS(T,K,sigma,r,L,dt,ds);
plot(S,[C0,CT])
```

Le résultat produit est visible sur la figure 3.2.1.

Enfin, pour ne considérer le prix du call que pour un seul prix du sous-jacent – le prix initial –, on utilisera la fonction *BSchoCalledP* :



```

function C=BSchoCalledP(S,T,K,sigma,r,L,dt,ds)
[C0,CT]=explicitBS(T,K,sigma,r,L,dt,ds);
C=C0(S/ds+1,1);

```

Récapitulatif

La méthode des éléments finis fournit des résultats très proches de ceux obtenus par le calcul explicite via la formule de Black-Scholes. Cependant, on utilisera par la suite la méthode décrite en 3.2.1, qui est inconditionnellement stable, et qui donne des résultats très bons. Pour visualiser l'évolution d'un call en fonction du temps par rapport à celle de l'actif sous-jacent, on peut tracer les deux courbes de prix sur un même graphe. Pour cela, on écrit une fonction *Actif* qui va simuler l'évolution du cours du sous-jacent :

```

function S=Actif(S0,mu,sigma,T,delta_t);
n=T/delta_t;
S=zeros(n+1,1);
S(1,1)=S0;
r=mu+0.5*sigma.^2;
for i=2:n+1
    Z=randn.*sqrt(delta_t);
    S(i,1)=S(i-1,1)+S(i-1,1).*(r*delta_t+sigma*Z);
end

```

Pour chaque instant t compris entre 0 et T , on connaît le cours S_t de l'actif, et le temps qu'il reste jusqu'à l'échéance, $T - t$. On peut ainsi calculer pour chacun de ces instants le prix du call par la fonction *BSchoCall*. Le tracé final est obtenu grâce à la fonction *traceActCall* ci-dessous :

```

function []=traceActCall(S0,mu,sigma,T,delta_t,K);
n=T/delta_t;
Call=zeros(n+1,1);
r=mu+0.5*sigma.^2;
S=Actif(S0,mu,sigma,T,delta_t);
for i=1:n+1
    ech=T-(i-1)*delta_t;
    Call(i,1)=BSchoCall(S(i,1),ech,K,sigma,r)
end
t=0:delta_t:T;
plot(t,[S,Call])

```

Le graphe 3.2.1 est une illustration du résultat obtenu.

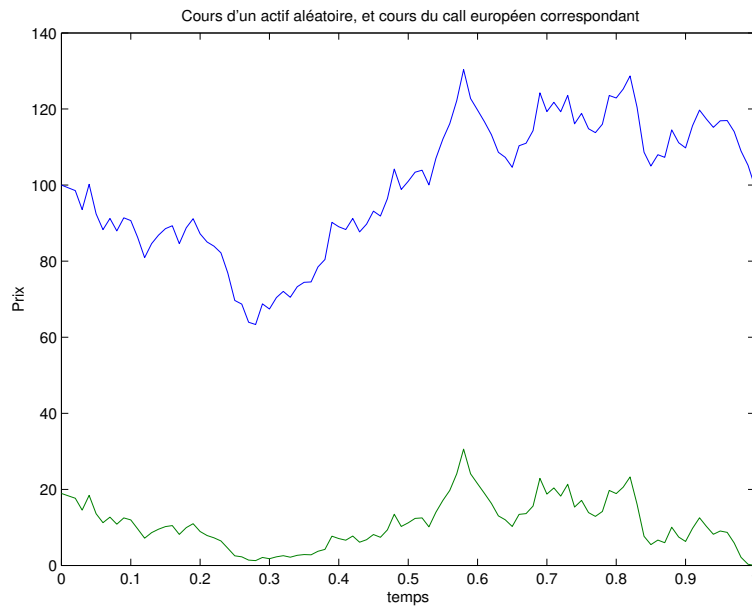


FIG. 3.2 – Cours d'un actif aléatoire et du call européen correspondant avec $S_0 = 100$, $\mu = 0.085$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, $\delta_t = 0.01$, $K = 110$

3.2.2 Calcul de \tilde{C}^1

La principale difficulté de calcul réside dans le fait qu'il faille estimer de multiples intégrales faisant intervenir la fonction f pour le calcul de V_2 et V_3 . Cependant, il est possible de simplifier quelque peu les expressions de V_2 et V_3 (cf. [1]) pour obtenir :

$$V_2 = \frac{1}{\nu\sqrt{2\alpha}} \left\langle \left[-2\rho F + \rho(\mu - r)\tilde{F} + \sqrt{1 - \rho^2}M \right] (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle$$

$$V_3 = \frac{-\rho}{\nu\sqrt{2\alpha}} \langle F (f^2 - \langle f^2 \rangle) \rangle$$

où F , \tilde{F} et M sont les primitives respectives de f , $1/f$ et γ .

A partir d'ici, nous nous placerons dans le cadre du modèle Log d'Ornstein-Uhlenbeck, pour lequel la fonction f n'est autre que la fonction exponentielle. Ainsi :

$$f(y) = e^y$$

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-(u-m)^2/2\nu^2}.$$

L'expression de V_2 et V_3 se calcule alors explicitement :

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\beta} \left\langle \left[-2\rho e^y - \rho(\mu - r)e^{-y} + \sqrt{1 - \rho^2}M \right] (e^{2y} - \langle e^{2y} \rangle) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[-2\rho e^y - \rho(\mu - r)e^{-y} + \sqrt{1 - \rho^2}M \right] (e^{2y} - \langle e^{2y} \rangle) \right) \phi(y) dy \\ &= \frac{-2\rho}{\beta} \left(e^{\frac{9\nu^2}{2}+3m} - e^{\frac{5\nu^2}{2}+3m} \right) - \frac{\rho}{\beta} (\mu - r) \left(e^{\frac{\nu^2}{2}+m} - e^{\frac{5\nu^2}{2}+m} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{1 - \rho^2} \gamma \sigma^2 \nu. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{-\rho}{\beta} \langle e^y (e^{2y} - \langle e^{2y} \rangle) \rangle \\ &= \frac{-\rho}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2y} - \langle e^{2y} \rangle) \phi(y) dy \\ &= \frac{-\rho}{\beta} \left(e^{\frac{9\nu^2}{2}+3m} - e^{\frac{5\nu^2}{2}+3m} \right). \end{aligned}$$

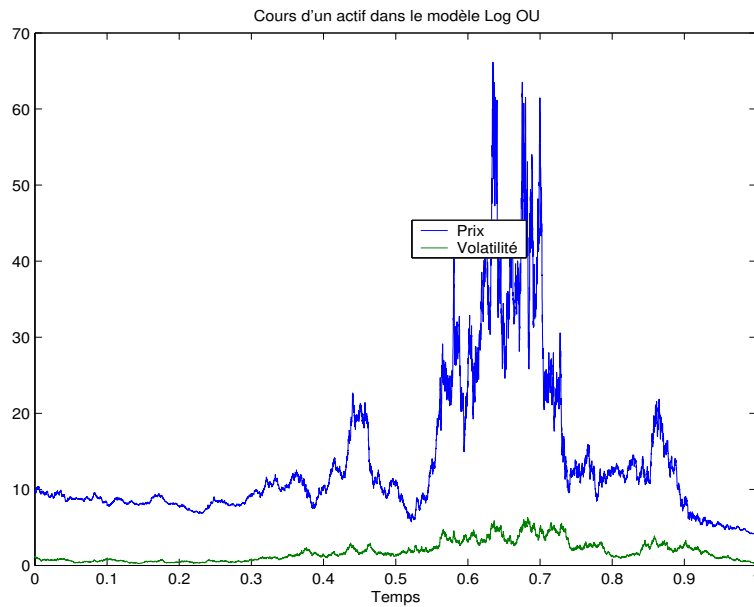
De la même façon que pour le tracé du smile de la volatilité implicite, nous allons simuler des trajectoires de cours d'actifs suivant le modèle Log d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour mieux visualiser les variations du cours par rapport aux variations

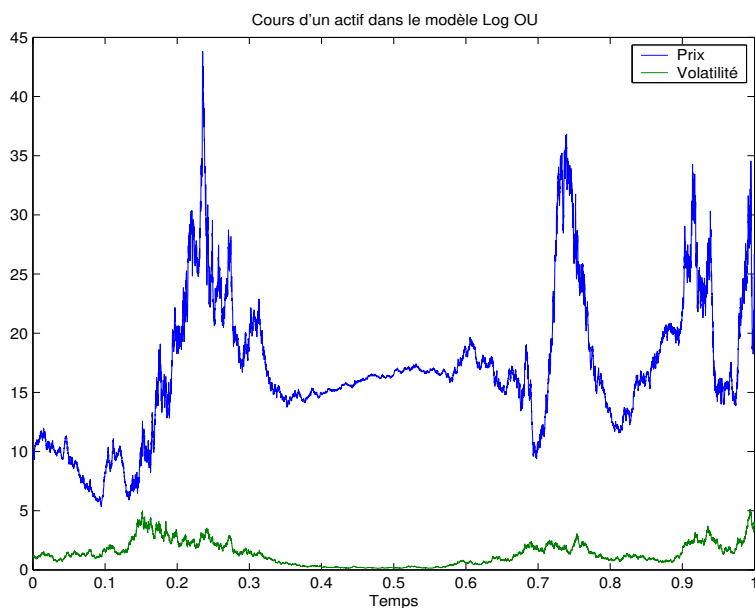
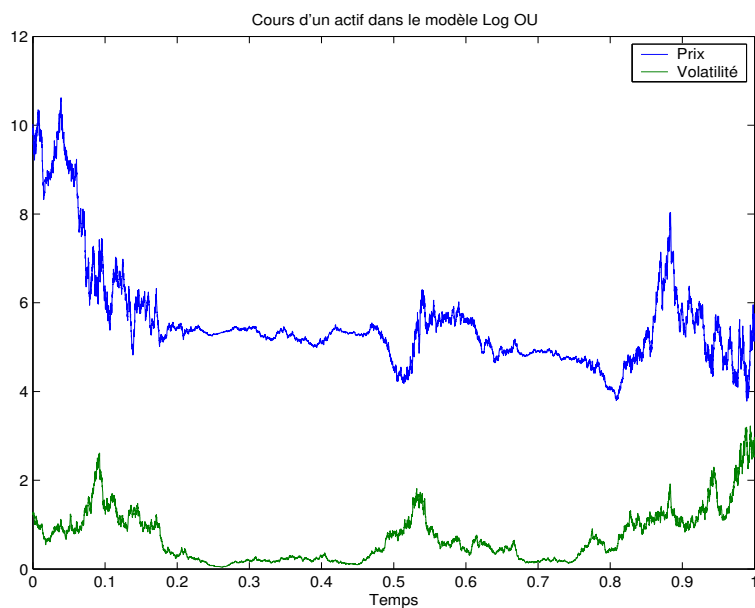
aléatoires de la volatilité, on peut mettre en oeuvre la fonction *OU* définie de la façon suivante :

```
function X=OU(mu,alpha,beta,m,rho,S0,Y0,pas,FonctVol)  
n=1/pas;  
S=[S0; zeros(n,1)];  
Y=[Y0; zeros(n,1)];  
for i=2:n+1  
u1=randn*sqrt(pas);  
u3=randn*sqrt(pas);  
u2=rho*u1+sqrt(1-rho.^2)*u3;  
S(i,1)=S(i-1,1)+S(i-1,1)*mu*pas+S(i-1,1).*exp(Y(i-1,1)).*u1;  
Y(i,1)=Y(i-1,1)+alpha*(m-Y(i-1,1))*pas+beta*u2;  
end;
```

```
plot(0:pas:1,[S,exp(Y)])
```

Les résultats sont visibles sur les graphes ci-dessous.





Enfin, il est désormais possible de tracer le prix corrigé du call sur le même graphe que le prix de l'actif, en visualisant leurs fluctuations respectives. C'est l'objet de la fonction *traceActCallOU*.

```

fonction []=traceActCallOU(mu,alpha,beta,m,rho,S0,Y0,pas,FonctVol,K);
n=1/pas;
Call=zeros(n+1,1);

```

```

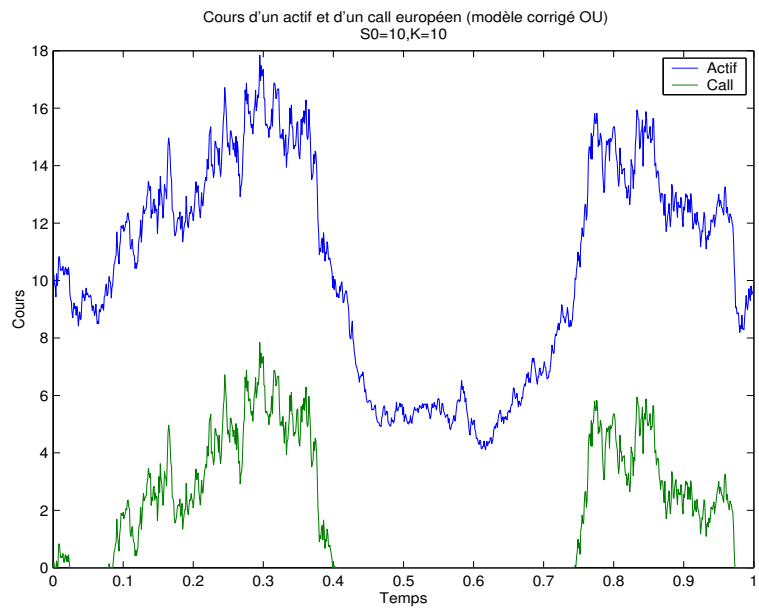
nu=beta/sqrt(2*alpha);
sigma=nu*exp(2*(nu^2-m))/sqrt(2*pi);
r=mu+0.5*sigma.^2;
S=OU(mu, alpha, beta, m, rho, S0, Y0, pas, FonctVol);
V2=-2*rho/beta*(exp(4.5*nu^2+3*m)-exp(2.5*nu^2+3*m))
-rho/beta*(mu-r)*(exp(0.5*nu^2+m)-exp(2.5*nu^2+m));
V3=-rho/beta*(exp(4.5*nu^2+3*m)-exp(2.5*nu^2+3*m));

for i=1:n
    ech=1-(i-1)*pas;
    Call(i,1)=BSchoCall(S(i,1),ech,K,sigma,r);
    d1=(log(S0/K)+(r+0.5*sigma.^2)*ech)/(sigma*sqrt(ech));
    Call(i,1)=Call(i,1)
        -(S(i,1)*exp(-0.5*d1^2)/sqrt(2*pi))
        /(sigma^2)*((V2-V3)*sigma*sqrt(ech)-V3*d1);
end
t=0:pas:1;
plot(t,[S Call])

```

Ceci résulte du fait que le prix corrigé du Call s'écrit, après explicitation des dérivées partielles de C par rapport au sous-jacent (cf. [4]) :

$$C_0 = C^{BS} - \frac{S_t g(d_1)}{\sigma^2} \left((V_2 - V_3) \sigma \sqrt{(T - t)} - V_3 d_1 \right).$$



Appendice

Théorème 3 (Formule d'Itô) Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus stochastique solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

où B_t est un mouvement brownien standard.

Soit f une fonction \mathcal{C}^2 , on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)d\langle X, X \rangle_s$$

avec :

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(s, X_s)ds.$$

De même, si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X, X \rangle_s.$$

Théorème 4 (Théorème de Girsanov) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t, 0 \leq t \leq T\}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien. Soit $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité \mathbb{P}^L de densité L_t par rapport à \mathbb{P} , le processus $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$, est un mouvement brownien standard.

Proposition 3 Soit X une variable aléatoire \mathcal{B} -mesurable à valeurs dans (E, \mathcal{E}) et soit Y une variable aléatoire indépendante de \mathcal{B} , à valeurs dans (F, \mathcal{F}) . Pour toute fonction Φ borélienne, positive (ou bornée), sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, la fonction φ définie par :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \mathbb{E}(\Phi(x, Y))$$

est borélienne sur (E, \mathcal{E}) et on a :

$$\mathbb{E}[\Phi(X, Y)|\mathcal{B}] = \varphi(\mathcal{X}) \text{ p.s.}$$

Preuve 1

Notons \mathbb{P}_Y la loi de Y . Soit maintenant Z une variable aléatoire \mathcal{B} -mesurable positive. Si on note $\mathbb{P}_{X,Y}$ la loi du couple (X, Y) et $\mathbb{P}_{X,Z}$ celle du couple (X, Z) , en utilisant l'indépendance de Y et du vecteur (X, Z) ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, Y)Z] &= \int \int \Phi(x, y)z \, d\mathbb{P}_{X,Z}(x, z) d\mathbb{P}_Y(y) \\ &= \int \left(\int \Phi(x, y) d\mathbb{P}_Y(y) \right) z d\mathbb{P}_{X,Z}(x, z) \\ &= \int \varphi(x)z \, d\mathbb{P}_{X,Z}(x, z) \\ &= \mathbb{E}[\varphi(X)Z], \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Preuve 2

Soit $(s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, tel que $s < t$.

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^* \left[\tilde{S}_s \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma(W_t - W_s) \right) | \mathcal{F}_s \right]$$

Puisque $W_t - W_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s et que \tilde{S}_s est \mathcal{F}_s -mesurable, on peut appliquer la proposition ci-dessus. On a :

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) \mathbb{E}^* [\exp(\sigma(W_t - W_s))] \right).$$

Or $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, donc :

$$\mathbb{E}^* [\exp(\sigma(W_t - W_s))] = \exp \left(\frac{\sigma^2}{2}(t-s) \right)$$

D'où :

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s.$$

Proposition 4 (Formule de parité call-put) :

On considère des options européennes. Soient C_t et P_t les prix respectivement d'un call et d'un put au temps t , avec une échéance T , un prix d'exercice K , et un taux sans risque r . Alors on a :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} C_t - P_t &= \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} ((S_T - K)_+ - (K - S_T)_+) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} ((S_T - K)_+ + (K - S_T)_-) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} (S_T - K) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[S_T e^{-r(T-t)} | \mathcal{F}_t] - Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Comme le prix actualisé est une martingale, on a :

$$\mathbb{E}[S_T e^{-rT} | \mathcal{F}_t] = S_t e^{-rt}.$$

De cette manière,

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Bibliographie

- [1] Kristina ANDERSSON. Stochastic volatility. 2003.
- [2] Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU, and K. Ronnie SIRCAR. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, 2001.
- [3] Jean-François LE GALL. Introduction au mouvement brownien.
- [4] Julien GUYON. Volatilité stochastique : étude d'un modèle ergodique. 2002.
- [5] Damien LAMBERTON and Bernard LAPEYRE. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, 1997.