The consumer theory: fundamentals and applications

Galvis Ciro, Juan Camilo and Henao Atehortúa, Edison Fred

Universidad Pontificia Bolivariana, Universidad Nacional de Colombia

10 January 2018

La teoría del consumidor:

fundamentales y aplicaciones

Enero de 2018

Documento de Trabajo

Autor(es):

Juan Camilo Galvis Ciro[1], Edison Fred Henao Atehortúa[2]

[1] PhD. Facultad de Economía. Universidad Pontificia Bolivariana. E-mail: jcgalvisciro@gmail.com
[2] MSc. Facultad de Ciencias Humanas y Económicas. Universidad Nacional. E-mail: efhenao@unal.edu.co

Índice general

INTRODUCCIÓN

Suponer racionalidad para cada agente económico (consumidores y productores) en una economía descentralizada, donde cada cual persigue un objetivo guiado por criterios individualistas, ha sido centro de análisis en la teoría económica.

En efecto, el hecho de que un sistema económico dado cada agente actué siguiendo objetivos egoístas plantea el necesario resultado del caos como consecuencia de tal conducta. Esta inquietud había sido analizada desde el mismo Adam Smith, quién postuló la figura de la mano invisible como aquella que guía las acciones individuales hacia el bien común (no caos) de una manera que no estaba en la toma de decisiones de cada agente. En efecto, dice Smith (1776):

Libro IV (cap. II, 402),

Ninguno se propone, por lo general, promover el interés público, ni sabe hasta qué punto lo promueve. Cuando prefiere la actividad económica de su país a la extranjera, únicamente considera su seguridad, y cuando dirige la primera de tal forma que su producto represente el mayor valor, sólo piensa en su ganancia propia; pero en éste como en otros muchos casos, es conducido por una mano invisible a promover un fin que no entraba en sus intenciones [...] pues al perseguir su propio interés, promueve el de la sociedad de una manera más efectiva que si esto entrara en sus designios.

Para Smith, era el mercado quien tenía la capacidad de coordinar adecuadamente la actividad económica y se refirió a esa capacidad bajo la denominación poética de mano invisible (Arrow y Hahn, 1977). No obstante, la pregunta intelectual con respecto a la posibilidad y la viabilidad de una sociedad mercantil, es decir; una sociedad donde las acciones se toman de manera descentralizada, tardaría tiempo para primero expresarse en términos de un modelo económico y, aún hoy, no se ha resuelto.

Se atribuye a León Walras (1874) la primera construcción rigurosa de un modelo de equilibrio general donde las ofertas y las demandas resultaban funciones de la principal variable del mercado: el precio. Walras buscaba la manera en cómo los mercados se vaciaban al final de cada jornada y funcionaban de manera coherente con el uso de los recursos. No obstante, el objetivo de Smith buscado por Walras a partir de un modelo económico no tenía una solución convincente ya que el sólo hecho de que las ofertas y demandas del sistema walrasiano, dieran lugar a que las ecuaciones fueran iguales a las incógnitas, no era una prueba rigurosa.

Los intentos siguieron por el lado Cassel , Wald y Koopmans[1] pero solo hasta el año 1954 con Kenneth Arrow y Gerard Debreu, Mckenzie, entre otros, se logró construir un modelo teórico bajo premisas teóricas de racionalidad individual que probaba la existencia de un equilibrio para una economía hipotética.

Es decir, Arrow y Debreu muestran las condiciones lógicas para la existencia de una situación de equilibrio de precios que hacen compatible las acciones decididas por los agentes. La pregunta que surge necesariamente es: ¿Logran responder la pregunta sobre el éxito del mecanismo de mercado? Es extensa la crítica que responde negativamente a esa pregunta y compartimos parte de ella, pero creemos que esto no imposibilita al llamado modelo Arrow-Debreu para constituirse en una poderosa caja de herramientas para acercarse a la realidad, además de que se ha convertido en el llamado modelo base por ser capaz de absorber y discutir con cualquier otra teoría[2]. En efecto, la teoría económica contemporánea continua buscando respuesta a la pregunta de la viabilidad de una economía de mercado competitiva pero partiendo del modelo base establecido por Arrow y Debreu ya que muchas proposiciones fundamentales, para resolver la pregunta abstracta de Smith, sólo se han revelado a partir del modelo que ellos proponen.

Creemos además que los problemas del modelo base están más del lado de la búsqueda del equilibrio o etapa posterior a la modelización de los agentes que hacen aparecer la llamada figura del subastador necesariamente como incomoda a la teoría y el objetivo buscado. Lo anterior muy asociado, desde luego, al

[1]Monsalve (2010) hace referencia a una tradición alemana que se diferenció de la corriente más afín a la tradición paretiana cristalizada en Hicks, en el sentido de que la primera buscó establecer bajo qué condiciones existe el equilibrio mientras la segunda lo daba por hecho. Para Monsalve, la tradición paretiana está impregnada en Arrow y Debreu y gran parte de las preocupaciones de Walras fueron viciadas.

[2]El llamado modelo base constituye hoy el núcleo de la teoría económica contemporánea y lo que es más importante: se convierte en la norma de la economía positiva, donde lo normativo no es sólo una regla para hacer recomendaciones de política sino también una metodología para la construcción del saber científico (Benneti & Cartelier, 1998).

problema de la incorporación del dinero para tener una economía monetaria y los posibles problemas y perspectivas que ello trae. A pesar de ello, creemos que esto no imposibilita la validez de un marco teórico sobre la toma de decisiones de los agentes, con base a nociones de racionalidad mínimamente aceptables como las que postula los axiomas impuestos a la conducta de los agentes en el modelo Arrow–Debreu. La discusión podría extenderse demasiado por lo que aspiramos a que la historia sea el juez y de su veredicto sobre la postura que defendemos.

Los comentarios anteriores se han hecho debido a que el objetivo, por lo menos el principal, buscado en este texto es dar los lineamientos generales sobre la forma en que se modela a los consumidores en una economía tipo Arrow–Debreu. Para ello desarrollaremos una cuidadosa formalización del agente consumidor y analizaremos detalladamente lo que se considera racionalidad individual. Para iniciar esta tarea, era necesaria la anterior contextualización histórica del modelo que se va a desarrollar para pasar luego, sin grandes saltos, a lo que se considera el modelo básico o economía tipo Arrow - Debreu.

Modelo Básico

Se denominará modelo básico al modelo de equilibrio general competitivo desarrollado por Kenneth Arrow y Gerard Debreu (1954), entre muchos otros y cristalizado en Debreu (1973) y Arrow y Hahn (1977).

Como mencionamos anteriormente, Arrow-Debreu se inscriben dentro de una tradición de economistas que desde Adam Smith hasta el presente han tratado de demostrar cómo una economía descentralizada y motivada por el interés individual, y guiada por las señales de los precios, es compatible con una disposición coherente de los recursos económicos, que podría considerarse mejor que un gran número de disposiciones alternativas posibles (Arrow y Hahn, 1977:9), (Cataño: 1997:116).

El objetivo, entonces, que tiene la teoría de equilibrio general neowalrasiana es responder una pregunta intelectual (abstracta) con respecto a la posibilidad y la viabilidad de una sociedad mercantil (Cataño: 1997:117). Para empezar a construir analíticamente un modelo que pretenda dar respuesta al objetivo anterior, es necesario primero construir un modelo que intente representar la realidad en sus principales elementos y para ello, vamos entonces a definir, en forma general y rápida, la manera en que se define la economía en el modelo Arrow-Debreu para después empezar con el tratamiento metodológico del agente consumidor.

Para construir un modelo de equilibrio general, como representación abstracta de una economía competitiva, se requiere la especificación de al menos tres elementos: las mercancías y los precios que son las variables del modelo, los agentes que son las unidades de decisión del modelo y la naturaleza de la forma en que se toman las decisiones que da el marco en que se mueven los agentes (Villar, 1996:12). El objetivo de este libro se enmarca sólo en la especificación de los dos primeros elementos dejando afuera la naturaleza del proceso de toma decisiones.

Economías Arrow - Debreu

Vamos a definir nuestra economía como una triada formada por:

$$\epsilon = [(X_i, \succsim_i, \beta_i)_{i=1}^{m}, (Y_j, \pi_j)_{j=1}^{n}, \omega]$$

Donde X_i es el conjunto de consumo del consumidor i, $\succsim_i$ es la relación binaria de preferencias sobre el conjunto de consumo del consumidor i y β_i es el conjunto de restricciones presupuestarias. Por otra parte, cada elemento de Y_j es el conjunto de producción del productor j, π_j es la función de beneficios del productor j y ω son las dotaciones iniciales. Hay un número grande m de consumidores y n de productores. En este texto, el objetivo es modelar la conducta de un agente consumidor i y en adelante se omitirá el subíndice.

El modelo supone que los agentes económicos desarrollan sus acciones sobre la base de una dotación inicial de recursos dada disponibles para la economía. Estos recursos incluyen todos aquellos activos reales, como edificios, maquinaria, tierra, recursos naturales o bienes producidos o almacenados que son la herencia del pasado y suponen la base sobre la que se desarrolla la producción. Los recursos totales se presentan por $\omega \in \mathbb{R}^l$ y es posible, entonces, ver la capacidad productiva de una sociedad como la combinación de tres tipos de recursos: los recursos materiales ω, los recursos tecnológicos (recogidos en el conjunto de producción) y el capital humano, recogidos en los conjuntos de consumo (Villar, 1996: 119).

La economía está conformada así por consumidores y productores cada uno con una función objetivo a optimizar junto con unas dotaciones iniciales de recursos. Una vez ubicado histórica y analíticamente el objetivo buscado por este texto, pasemos ahora a modelar el comportamiento del agente consumidor en una economía tipo Arrow - Debreu para ver cómo los consumidores resuelven sus problemas independientemente, sin conocerse, con un sólo mecanismo de información e influencia entre agentes: los precios.

Capítulo 1

CONSUMIDORES

1.1. Introducción

La unidad fundamental de decisión en la teoría económica es el consumidor y por lo tanto, nuestro análisis va a empezar por definir la demanda de los consumidores en una economía de mercado. Por economía de mercado, vamos a entender un escenario en el cual todos los bienes y servicios que los agentes desean adquirir están disponibles a un precio conocido y/o están disponibles para intercambiar, por otros bienes, a una tasa conocida (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:17).

Se define un consumidor, como un individuo o grupo de individuos (una familia) con un propósito de consumo unificado: declarar la preferencia sobre cada plan de consumo y elegir los planes de consumo de los distintos bienes que están disponibles para comprar en el mercado, de tal forma que sus preferencias se satisfagan al máximo. Bajo ciertas condiciones que se precisarán más adelante, el problema del consumidor puede plantearse como la maximización de una función llamada de utilidad (Lozano, Monsalve y Villa, 1999:14)[1].

Un plan de consumo es una especificación de las cantidades de bienes de consumo a demandar al comienzo del período y al conjunto de todos los planes de consumo, se le denomina conjunto de consumo. El conjunto de consumo está incluido así en el espacio de mercancías (Monsalve, 2009:337). En este sentido, el mecanismo expuesto es completamente descentralizado e impersonal: ningún agente necesita saber algo de los demás, ni de sus preferencias ni del conjunto

[1]No vamos a tener en cuenta el caso en que los individuos especifican las cantidades de servicios a ofrecer. Por lo tanto, en la cesta de consumo solo existirán entradas no negativas.

de consumo de los otros, ni de sus dotaciones, etc.

Se asumirá que el número de bienes es finito e igual a L, indexados cada uno de los bienes con un $l = 1, 2, ..., L$. Se supone también que los agentes tienen información sobre todas las características de los bienes y de los resultados de sus acciones, es decir; hay información completa además de que no hay problemas en el cumplimiento de los contratos y todas las contingencias se tienen en cuenta (Stiglitz, 2000).

Para el análisis que se va a presentar, un bien es algo que se puede intercambiar y da satisfacción. Pueden ser tangibles o intangibles. Tal como se anotó antes, se va a definir una cesta, plan o canasta de consumo como una lista de los diferentes bienes y se denotará por x donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ : \\ x_L \end{bmatrix}$$

Se tiene así que una canasta o cesta de bienes es un punto en $\mathbb{R}^l_+$ el cual es precisamente el espacio de los bienes[2]. Por lo tanto, la lth entrada del vector de bienes especificará la cantidad del bien l consumido.

Los bienes, además, son divisibles y están definidos por fecha, tiempo y espacio y por lo tanto, el mismo bien definido en dos fechas distintas es un bien distinto (Arrow y Debreu, 1954:266). Así pues, podemos definir una mercancía como un bien o servicio completamente especificado física, temporal y espacialmente.

1.2. El conjunto de consumo o de elección

El conjunto de consumo es un subconjunto del espacio de bienes $\mathbb{R}^l_+$ y lo vamos a denotar como $X \subseteq \mathbb{R}^l_+$ cuyos elementos son las canastas de consumo que el individuo puede posiblemente consumir dada las restricciones físicas[3] y económicas impuestas.

[2]Nótese de nuevo que no se van a tener en cuenta entradas negativas en el espacio de bienes ya que no se van a tomar débitos o salidas de bienes o servicios por parte del consumidor como, por ejemplo, su oferta de trabajo.

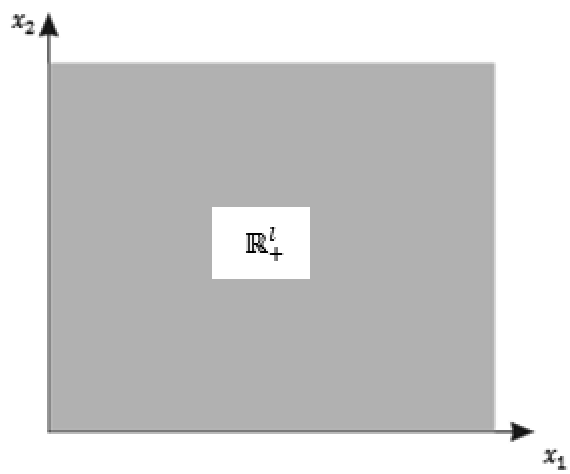
[3]Por restricciones físicas entiéndase, por ejemplo, que no es posible consumir más de 24 horas.

Así, el conjunto de consumo estará definido como

$$X \subseteq \mathbb{R}^l_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ : x_l \geq 0 \, \forall l = 1, 2, ..., L\right\}$$

En el espacio $\mathbb{R}^2_+$ para dos bienes, el conjunto de consumo sería:

Gráfico 1



Una característica que tiene el conjunto de consumo es que es un conjunto convexo. Es decir, para dos cestas de bienes como $x, x^{'} \in X \subseteq \mathbb{R}^l_+$ se cumple que una combinación de la forma $x'' = \lambda x + (1 - \lambda)x'$ también es una cesta de $X \subseteq \mathbb{R}^l_+$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

El conjunto de consumo X también cumple con la propiedad de ser cerrado. Es decir, si existe una sucesión de planes posibles de consumo $\{x^n_i\}$ que converge a algún vector x en el espacio de bienes, entonces ese vector también es un plan de consumo posible. Por último, diremos que X tiene una cota inferior para $\leq$, es decir hay un consumo mínimo de subsistencia para el consumidor[4].

[4]Es decir, un plan de consumo posible es uno que posea menor cantidad de bienes a las que posee el consumidor como dotación inicial. De esta forma el mínimo conjunto de consumo posible del consumidor no va a ser exactamente la riqueza del consumidor (Lozano, Monsalve y Villa,1999:48).

1.3. Características del mercado

Como se mencionó anteriormente, el consumidor enfrenta además de restricciones físicas, restricciones económicas. Es decir, el conjunto de consumo está limitado por la cantidad de cestas de bienes que él pueda costearse.

Para formalizar estas restricciones, es necesario introducir dos supuestos. Primero, vamos a suponer que la cantidad L bienes se comercian todos en el mercado a precios en pesos corrientes que son conocidos y públicamente cotizados. Este principio es conocido como el principio de mercados completos (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:20).

Formalmente los precios están representados por un vector de precios

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ : \\ p_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l_+$$

Con dicho vector es posible conocer entonces el costo en pesos de cada uno de los L bienes. Se va asumir de ahora en adelanta que $p \gg 0$, esto es $p_l > 0$ para todo l. Más específicamente

$$p \in \mathbb{R}^l_{++}$$

El segundo supuesto es que los precios no están influenciados por el consumidor y por lo tanto, los consumidores son precio aceptantes. Este principio es conocido como el principio de conducta paramétrica respecto a los precios. Este supuesto va de la mano de suponer que la demanda del consumidor es apenas una pequeña fracción de la demanda del mercado, ya que se supone que hay un gran número m de consumidores (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:20).

Por último, y por comodidad, vamos a suponer que el conjunto de elección del consumidor depende de dos cosas: los precios de mercado p y la renta del consumidor[5] en pesos que denotaremos $m \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta los anteriores supuestos pasemos ahora a definir el conjunto de restricción presupuestaria o de restricciones económicas.

[5]Nuestro modelo va a suponer renta como equivalente a riqueza aunque ello no sea estrictamente cierto.

1.4. Conjunto de restricción presupuestaria

Inicialmente se debe aclarar que cada elemento del conjunto de restricciones presupuestarias β, es ante todo un subconjunto del conjunto de consumo de $X \in \mathbb{R}^l_+$. Sobre este conjunto de consumo, se pueden imponer diferentes restricciones que son precisamente iguales a β.

β es así un subconjunto del conjunto de poder de $X \in \mathbb{R}^l_+$. Es decir:

$$\beta \subseteq P(X) \setminus \{\varnothing\}$$

El subconjunto de poder, es igual a $P(X) = \{\beta / \beta \subseteq X\}$ donde $\varnothing \notin P(X)$. Esta última condición se impone para que a su vez $\beta \neq \varnothing$ y así el consumidor tenga posibilidad de elegir algo. Se tiene así que un subconjunto de X puede estar en β pero un elemento de X puede no estar en β. Es decir:

Si $B \in \beta$, entonces $B \in X \in \mathbb{R}^l_+$ y $B \neq \varnothing$. Siendo B en este caso un presupuesto y β el conjunto de todos los presupuestos igual a

$$\beta = \left\{B \subseteq \mathbb{R}^l_+ / \exists (p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+ : B(p,m) = B\right\}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, y suponiendo como dados un vector de precios $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ y una renta $m \in \mathbb{R}$, es posible construir el siguiente conjunto de restricción presupuestaria que llamaremos B, para un $B \in \beta$.

$$B(p,m) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \leq m\right\}$$

Siendo x un plan de consumo del conjunto de consumo X. Es decir:

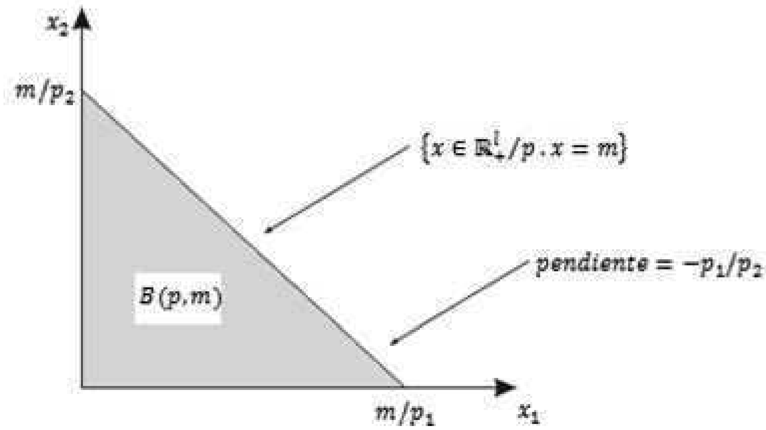
$$x \in X \subseteq \mathbb{R}^l_+$$

Se establece un supuesto adicional y es que no se va a trabajar con agentes quebrados. Es decir, de acá en adelante se va a suponer $m > 0$.

El conjunto de restricción presupuestaria es, entonces, el conjunto sobre el cual el consumidor va a tomar sus decisiones de consumo y es conocido como conjunto presupuestario walrasiano o competitivo[6]. Es decir, si $B \in \beta$ quiere decir que el agente enfrenta el problema de escoger un x tal que $x \in B \subseteq X$.

[6]Este tipo de restricción presupuestaria deja afuera no linealidades en la restricción, indivisibilidades e incertidumbre en la tasa de cambio entre bienes (Deaton y Muellbauer, 1993:14).

Gráfico 2



1.5. El consumidor y los criterios de elección

Establecidas las propiedades del conjunto de consumo y de restricción presupuestaria, se supone que cada agente de la economía tiene definido un criterio de ordenación sobre su conjunto de elección el cual está sujeto a ciertas restricciones. El agente consumidor estará definido entonces como una triada:

$$[X, \succsim, B]$$

Donde X es el conjunto de consumo, $\succsim$ es la relación binaria de preferencias sobre el conjunto de consumo y B es el conjunto presupuestario.

Por lo tanto, se tiene que tres elementos caracterizan el problema de decisión del consumidor (Villar, 1996:21):

- El conjunto de elección $X \in \mathbb{R}^l_+$
- El criterio de valoración $\succsim$
- Las restricciones sobre el conjunto de elección expresadas en B.

El objetivo del consumidor es, entonces, elegir un plan de consumo x en un subconjunto no vació de $\mathbb{R}^l$, que es su conjunto de consumo X, de tal modo que maximice su utilidad. Para poder realizar su elección del plan de consumo óptimo, es necesario tener un criterio de comparación y ordenación de los planes de consumo del conjunto de consumo. Este es precisamente el criterio de ordenación $\succsim$ al que nos referíamos antes (Lozano, Monsalve y Villa, 1999:47).

Así, el objetivo siguiente es establecer las propiedades sobre la relación binaria de preferencias definidas sobre el conjunto de elección de tal forma que el consumidor tenga un criterio claro de elección sobre su conjunto de consumo asequible o costeable.

1.6. Relación de preferencias

Para empezar se debe aclarar el concepto de lo que es una relación binaria. Esta es un criterio de comparación entre dos elementos y, para el caso que nos ocupa, le vamos a imponer un significado para darle sentido a la teoría. La relación binaria que vamos imponer acá es una relación de preferencias, expresada como $\succsim$, que va a especificar en la teoría del consumidor ´´al menos tan bueno como´´. Para el caso, la relación $\succsim$ establece por ejemplo que entre dos planes de consumo $x^1, x^2 \in X$ se puede realizar la siguiente comparación:

$$x^1 \succsim x^2, \ \forall x^1, x^2 \in X \in \mathbb{R}^l_+$$

Es decir, x^1 es al menos tan bueno como x^2. Es decir, la relación de preferencia pretende ser un concepto práctico para denotar la toma de decisiones del consumidor (Varian, 1999:36). Sobre la relación de preferencias se van a imponer los siguientes axiomas.

1.6.1. Axiomas de orden

i) Reflexiva:

$\forall x \in X \in \mathbb{R}^l_+$ se cumple que $x \succsim x$.

Es decir, toda canasta es al menos tan buena como ella misma y no es necesario especificar el cuánto de la preferencia sobre dicha canasta ya que la relación de preferencias es ordinal.

ii) Transitiva:

$\forall x^1 x^2, x^3 \in X \in \mathbb{R}^l_+$ se cumple que si $x^1 \succsim x^2$ y $x^2 \succsim x^3$ entonces: $x^1 \succsim x^3$.

Es decir, es posible comparar dos canastas con una tercera y conservar el ordenamiento de las canastas. Es importante aclarar que cuando el agente no es transitivo se puede jugar con su inconsistencia en las elecciones y arruinarlo[7].

Cuando sobre $\succsim$ se definen las propiedades i) y ii) se establece un preorden de preferencias sobre el conjunto de consumo. Además $\succsim$ se dice que es racional si es completa y transitiva. La completitud la definimos a continuación.

iii) Completitud:

La relación binaria $\succsim$ en $\mathbb{R}$ definida sobre $X \in \mathbb{R}^l_+$ es completa (o total) si:

$\forall x^1, x^2 \in X \in \mathbb{R}^l_+$ se cumple que $x^1 \succsim x^2$ ó $x^2 \succsim x^1$

Es decir, el agente esta en capacidad de decidir entre dos alternativas.

Es razonable así el axioma de la completitud debido a que si los agentes conocen adecuadamente los bienes (lo cual es supuesto) deberían saber qué les gustan más y qué les gusta menos, siendo precisamente esto lo que específica el principio de completitud (Carvajal y Riascos, 2006:4).

iv) Indiferencia:

Si para algún $x^1, x^2 \in X \in \mathbb{R}^l_+$ se cumple que $x^1 \succsim x^2$ y $x^2 \succsim x^1$ entonces se dice que:

$$x^1 \sim x^2$$

Donde $\sim$ específica una relación de indiferencia entre dos cestas.

v) Preferencia estricta:

Para algún $x^1, x^2 \in X \in \mathbb{R}^l_+$ se establecerá la relación $\succ$, que especificará ´´mejor a´´, para el caso siguiente:

$$x^1 \succ x^2 \Longleftrightarrow \text{no es cierto que } x^2 \succsim x^1$$

Esta relación de preferencia estricta es un concepto práctico. Si el consumidor prefiere una cesta a otra, significa que elegirá la cesta que prefiere porque está

[7]Supongamos que el agente no es transitivo y pasa la siguiente relación: $x^1 \succsim x^2$ y $x^2 \succsim x^3$ pero $x^3 \succsim x^1$. En esta situación otro agente podría comprar x^1 y cambiárselo al agente en cuestión por x^2. A su vez, x^2 lo podría cambiar por x^3 para después cambiarle x^3 por x^1 más un remanente dada la preferencia del agente hacia x^1. En el límite, si se repite la operación anterior es posible quitarle todo al agente y así dejarlo sin nada. Por último, es necesario recordar que la transitividad exige conocimiento completo de las alternativas.

mejor en esta situación si tiene posibilidad de hacerlo. Por lo tanto, la idea de preferencia se basa en la conducta del consumidor (Varian, 1999:36).

Teniendo en cuenta la relación de preferencias, vamos a establecer un nuevo supuesto y es que el conjunto de elección $X \in \mathbb{R}^l_+$, definido como el espacio de alternativas que la persona puede escoger, es un conjunto no vació. Es decir: $X \neq \varnothing$. Sobre este espacio de elección van a estar definidas la relación de preferencias que con las propiedades i) y ii) establecerán un preorden sobre los distintos elementos o cestas del conjunto de consumo.

Si se le suma a las anteriores propiedades la propiedad iii) el conjunto de consumo queda ordenado. Se tiene así un conjunto de consumo con un preorden y listado. Con las anteriores propiedades se esta suponiendo entonces que el consumidor no tiene problemas de información ya que se va a suponer un preorden total sobre las distintas posibilidades de elección. Esto implica, además, que el consumidor no tiene problemas de elección (indecisión).

1.6.2. Axioma de racionalidad propiamente dicha

Para un $B \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^l_+$ si x^* resulta elegida entre el conjunto de alternativas X, es decir:

$$\text{si} \quad x^* \in B \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^l_+$$

entonces $\forall x' \in B \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^l_+$ resulta que:

$$x^* \succsim x'$$

El axioma establece entonces que si una cesta es elegida entre el conjunto de opciones, es porque esta cesta es mejor a todas las otras. Este axioma, en cierto sentido, es incompleto porque si existe un conjunto de alternativas que son indiferentes a x^* y están al interior del conjunto de elección, no nos específica cómo se elige x entre la clase indiferente a la que pertenece (Green, 1982). No obstante, la importancia del axioma radica en su similitud con lo que se conoce como el axioma de la preferencia revelada.

1.6.3. Axiomas analíticos

vi) Convexidad:

La relación binaria de preferencias, $\succsim$, es convexa si:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^l\right)\left(\forall x^1, x^2 \in X \in \mathbb{R}_+^l\right) : x^1 \succsim x \text{ y } x^2 \succsim x$$

se cumple que:

$$(\forall \lambda \in [0,1]) : \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \succsim x$$

Se está suponiendo entonces que el agente consumidor tiene cierta preferencia por las canastas balanceadas a canastas con gran cantidad de un solo bien. Teniendo en cuenta la anterior propiedad, se va a establecer que la relación de preferencias $\succsim$ es estrictamente convexa para indicar una situación donde los medios se van *preferir estrictamente* a los extremos. Es decir, la convexidad implica que no puede haber consumo especializado.

vii) Convexidad estricta o fuerte:

La relación binaria de preferencias, $\succsim$, es estrictamente convexa si:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^l\right)\left(\forall x^1, x^2 \in X \in \mathbb{R}_+^l\right) : x^1 \succsim x \text{ y } x^2 \succsim x \text{ siendo } x^1 \neq x^2$$

se cumple que:

$$(\forall \lambda \in (0,1)) : \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \succ x$$

viii) Continuidad:

Para todo para de sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\left(x_n^1\right)_{n=1}^{\infty}$ tales que cumplan las siguientes hipótesis:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \succsim x_n^1$. Es decir, suponiendo que cada elemento de x es al menos tan bueno como cada uno de los elementos de x^1.
- $x_n \to x \in \mathbb{R}_+^l$. Donde $\to$ específica en este caso que la sucesión x_n ´´converge a ´´.
- $x_n^1 \to x^1 \in \mathbb{R}_+^l$. Es decir, tanto la sucesión x_n y x_n^1 tienen un límite al que convergen.

La relación binaria de preferencias, $\succsim$, se dice que es continua si para las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\left(x_n^1\right)_{n=1}^{\infty}$ se cumple que:

$$x \succsim x^1$$

Por lo tanto, se dirá que la relación $\succsim$ es continua si se conserva en los límites. En otras palabras, la continuidad quiere especificar que la conducta observada durante todo el tiempo se debe mantener en el límite.

También se puede visualizar la continuidad mediante el conjunto de no peores y no mejores para lo cual el lector interesado puede consultar Villar(1996:36). Es difícil visualizar, pero sí existen preferencias que no son continuas, o no se conservan, y son las llamadas preferencias de orden lexicográfico. De hecho este tipo de preferencias implica que ellas no sean representables mediante una función de utilidad *continua* y más importante aún: *no es representable por cualquier tipo de función* (Carvajal y Riascos, 2006:5).

1.6.4. Axiomas de no saciedad

Es razonable asumir, y sucede a menudo en la realidad, que grandes cantidades de bienes son preferidas a pequeñas cantidades. Esta característica de las preferencias es capturada en los supuestos de monotocidad (Mas-Colell, et.al, 1995: 42). Se va a suponer a continuación tres propiedades de no saciedad, cada una más débil que la que le sigue.

ix) Localmente no saciado:

La relación binaria de preferencias, $\succsim$, es localmente no saciada si:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+\right)\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}\right)\left(\exists x' \in B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{R}^l_+ : x' \succ x\right)$$

Es decir, la relación binaria de preferencias es localmente no saciada si para cualquier plan de consumo x existe un x' definido sobre una bola con centro en x y con radio pequeño ε, tal que dicho plan es *´´preferido o mejor a´´* x. Con dicha propiedad se esta suponiendo, entonces, que para cualquier plan de consumo existe otro plan de consumo mejor.

x) Monótonas:

La relación binaria de preferencias, $\succsim$, es monótona si $\left(\forall x, x' \in \mathbb{R}^l_+\right)$ tal que $x \gg x'$ se cumple que $x \succ x'$.

Es decir, canastas con todos los componentes mayores son siempre preferidas[8]

xi) Estrictamente monótonas o monotocidad fuerte:

La relación binaria de preferencias, $\succsim$, es estrictamente monótona si $\left(\forall x, x \in \mathbb{R}_{+}^{l}\right)$ tal que $x \geq x'$ y $x \neq x'$ se cumple que $x \succ x'$.

Con esta propiedad se está suponiendo que canastas con al menos un componente mayor con respecto a otras van a ser preferidas.

Dada las características de cada uno de los axiomas de no saciedad, es fácil comprobar que si la relación binaria de preferencias, $\succsim$, es estrictamente monótona entonces es monótona. A su vez, si la relación binaria de preferencias, $\succsim$, es monótona entonces es localmente no saciada. Además, una implicación de la no saciedad es que deja afuera conjuntos de indiferencia gruesos (Mas-Colell, et.al, 1995: 43).

También debemos recordar que si estamos partiendo de que existen problemas económicos debido a la escasez relativa, el axioma de no saciedad es un resultado necesario de la escasez ya que de existir saciedad no podrían existir ni problemas económicos relevantes ni escasez.[9]

1.7. Representación de las preferencias mediante una función de utilidad

Antes de empezar a utilizar el concepto de función de utilidad, es necesario volver a recalcar que se esta suponiendo que hay un consumo mínimo de subsistencia a partir del cual se habla de preferencias. Es decir: primero necesidades después preferencias (Muñoz, 2010). Esto es importante, ya que necesariamente la función de utilidad está definida a partir de un umbral.

Teniendo en cuenta las anteriores propiedades impuestas sobre la relación binaria de preferencias, surge entonces la pregunta sobre si para un conjunto de consumo preordenado mediante una relación binaria ¿existe una función que asigne valores reales a las cestas de consumo de tal forma que permita la representación numérica?

[8] Al final del texto, en el capítulo de notación, se especifica que denota en $\mathbb{R}_{+}^{l}$ la notación $x \gg x'$ y $x \geq x'$.

[9] La Economía no es una disciplina interesante en el mundo de la saciedad.

La respuesta es afirmativa y para ello nos valemos del teorema de Debreu (1973) que establece que si la relación de preferencias es reflexiva, completa, transitiva, continua y monótona entonces es representable mediante una función de utilidad continua $U(x) : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$. A continuación presentamos la prueba de que dicha función de utilidad existe y es continua para después imponerle las propiedades necesarias.

Antes de presentar la prueba se dice que una función $U(x) : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$ representa las preferencias si y sólo si $\left(\forall x, x' \in X \in \mathbb{R}_+^l\right)$ se cumple que:

$$u(x) \geq u(x') \Longleftrightarrow x \succsim x'$$

Prueba

i) Existencia:

Sea e un vector de $\mathbb{R}_+^l$ con todos sus componentes iguales a uno. Para cualquier plan de consumo o vector $x \in X \in \mathbb{R}_+^l$ vamos a suponer que $u(x)$ es un número tal que $x \sim u(x).e$

Es decir, la prueba consiste en mostrar que $u(x)$ es un número que efectivamente existe y es único (Varian, 1992:116).

Sea el conjunto de peores o iguales a t definido como $PI(t) = \{t \in \mathbb{R} : \ t.e \succsim x\}$. Por el supuesto de motonocidad, es posible afirmar que al menos el conjunto $PI(t)$ contiene al cero y por lo tanto $PI(t) \neq \varnothing$.

De igual manera podemos asegurar que el conjunto de mejores o iguales a t definido como $MI(t) = \{t \in \mathbb{R} : \ x \succsim t.e\}$ es también no vacío. Si además se agregara el supuesto de continuidad, entonces los conjuntos anteriores son cerrados. Ver prueba en Villar(1996:36).

Dado que los dos conjuntos anteriores son no vacíos (y cerrados si agregamos continuidad), entonces necesariamente $PI(t) \cap MI(t) \neq \varnothing$ y por lo tanto, existe algún t_x que conecta los dos conjuntos tal que este número representa las preferencias. Es decir, $t_x.e \sim x$. Para concluir la prueba no queda más que demostrar que t_x efectivamente representa las preferencias. Sea:

$$u(x) = t_x$$

donde $t_x.e \sim x$

$$u(y) = t_y$$

donde $t_y.e \sim y$

Si $t_x \geq t_y$ entonces por monotocidad debe ocurrir que $t_x.e \geq t_y.e$ y por transitividad se debe tener que $x \succsim y$. Del mismo modo, debe ocurrir que si por ejemplo se tiene que $x \precsim y$ entonces $t_x.e \leq t_y.e$ y por lo tanto $t_x \leq t_y$. Se tiene así que efectivamente existe un número $u(x)$ que representa las preferencias (Varian, 1992:116). ■

Aunque mucho se discute acerca de la existencia de una función de utilidad, debe quedar claro que ella no es más que un instrumento analítico que nos hace la vida más fácil y que no es necesaria en la construcción del equilibrio general pero si permite simplificar el comportamiento de los agentes desde el punto de vista matemático (Carvajal y Riascos, 2006:5). En cuánto a su significado, se puede decir que la naturaleza de la función de utilidad es parecida a las máquinas que ponen precios a los bienes en los supermercados: se le asignan precios mayores a bienes más deseados. Para nuestro caso, esta máquina va a ser la función de utilidad que asignará valores mayores a bienes más preferidos en relación a otros. Podemos decir así que la función de utilidad va a ser el termómetro que mide las preferencias del consumidor.

Queda demostrado, entonces, que para que una condición necesaria para que la relación de preferencias sea representable es que sea racional (completa, reflexiva y transitiva). Sólo una condición más es suficiente y es que la *relación de preferencias sea continua* con lo que se tiene que esas preferencias son representables mediante una función de *utilidad continua*. La prueba se presenta a continuación.

ii) Continuidad:

t_x es una función continua si $\forall x$ y para cualquier secuencia $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $lim_{n\to\infty}x^n = x$ se cumple que la función t_x conserva los límites de la secuencia.

Es decir, debe cumplirse que $lim_{n\to\infty}t(x^n) = t(x)$.

En otras palabras, lo que se está estableciendo es que una función $F : \mathbb{R}^l_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si para un x tal que la función evaluada en dicho punto sea $f(x)$, debe tenerse que para un punto arbitrariamente cerca de x la función debe también asignarle una imagen muy cerca a $f(x)$. Es decir, una función es continua si no presenta saltos (Mas-Colell, et.al, 1995:944).

Prueba

Consideremos una secuencia $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$tal que $lim_{n\to\infty}x^n = x$.

Notemos primero que la secuencia $\{t(x^n)_{n=1}^{\infty}\}$ debe tener una subsecuencia convergente ya que toda secuencia tiene una subsecuencia convergente.

Por monotocidad, tenemos que $\forall\varepsilon > 0$, $t(x')$ se debe encontrar en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}_+$, denotado como $[t_0, t_1]$, tal que la distancia métrica entre x' y x es $\parallel x' - x \parallel \leq \varepsilon$.

Ya que $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, existe un N tal que la función evaluada en la secuencia $t(x^n)$ se encuentra en el subconjunto compacto, para un $n > N$. Además, ya que cualquier secuencia infinita fijada sobre un conjunto compacto debe tener una subsecuencia convergente, debe cumplirse entonces que todas las subsecuencias convergentes de $\{t(x^n)_{n=1}^{\infty}\}$ convergen a $t(x)$.

Supongamos que no y que existe alguna otra función estrictamente creciente $m(\cdot)$ tal que a cada entero positivo n le asigna otro entero positivo $m(n)$ y para alguna subsecuencia $\left\{t(x^{m(n)})_{n=1}^{\infty}\right\}$, se cumple que esta converge a $t' \neq t(x)$. Nuestra prueba va a consistir así en demostrar que si $t' > t(x)$ se llega a una contradicción , igual en el caso de que $t' < t(x)$.

Para empezar nótese que por monotocidad si $t' > t(x)$ esto implicaría que $t'.e \succ t(x).e$. Denotemos ahora un $t^* = \frac{1}{2}[t' + t(x)]$. Es decir, t^* es un punto medio entre $t'.e$ y $t(x).e$. De nuevo por monotocidad se tiene que $t^*.e \succ t(x).e$.

Ahora, ya que $t(x^{m(n)})$ converge a $t' > t^*$, debe existir un $\bar{N}$ tal que para todo $n > \bar{N}$, $t(x^{m(n)}) > t^*$ y por lo tanto, por monotocidad para algún n se tiene que $x^{m(n)} \sim t(x^{m(n)}).e \succ t^*.e$. Pero dado que las preferencias son continuas, esto implicaría que $x \succsim t^*.e$ pero ya que $x \sim t(x).e$ se llegaría que $t(x).e \succsim t^*.e$ lo cual es una contradicción. De manera similar, es posible probrar que si el supuesto de partida fuera $t' < t(x)$ también se llegaría a una contradicción.

Así, ya que todas las subsecuencias convergentes de $\{t(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ deben converger a $t(x)$ se tiene que $lim_{n\to\infty} t(x^n) = t(x)$ y por lo tanto, $t(x)$ es continua (Mas-Colell, et.al, 1995:49). ■

1.8. Propiedades de la función de utilidad

Teniendo en cuenta que existe una función de utilidad continua $U(x)$ que representa las preferencias vamos a continuación a ´´imponerle´´ ciertas propiedades que en realidad no son más que propiedades que se trasladan de los axiomas impuestos a la relación binaria hacia la función de utilidad[10].

[10]Es necesario anotar, además, que la teoría de la demanda basada en el concepto de utilidad sólo toma sentido cuando el consumidor ha satisfecho ciertas necesidades básicas ya que de no ser así la elección no se regirá, en general, por la racionalidad (Green, 1982).

Como se recordará, hemos dicho que la función $U(x) : \mathbb{R}^l_+ \rightarrow \mathbb{R}$, que llamaremos función de utilidad, representa las preferencias si y sólo si:

$\forall x, x' \in X \in \mathbb{R}^l_+$ se cumple que:

$$u(x) \geq u(x') \Longleftrightarrow x \succsim x'$$

Esta función de utilidad del consumidor cumplirá las siguientes propiedades.

i) Si la relación de preferencias $\succsim$ es monótona entonces $U(x)$ es monótona creciente

Prueba

La relación $\succsim$ es monótona si $\forall x, x' \in \mathbb{R}^l_+$ tal que $x \gg x'$ se cumple que $x \succ x'$. Ya que $U(x)$ representa las preferencia se cumple que $x \succ x'$ si y solo si $u(x) > u(x')$. Y si se cumple que $u(x) > u(x')$ es porque $x \succ x'$ lo que implica a su vez que $x \gg x'$ con lo cual se concluye la prueba.$\blacksquare$

ii) $U(x)$ debe admitir transformaciones monótonas

Para cualquier función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

estrictamente creciente, se debe cumplir:

$$f(u(x)) \geq f(u(x')) \Longleftrightarrow u(x) \geq u(x') \Longleftrightarrow x \succsim x'$$

Por lo tanto, si $u(x)$ es monótona creciente y representa las preferencias, se cumple que cualquier función también creciente también debe representar las mismas preferencias, sin que las magnitudes específicas posean significado ya que sólo interesa que canastas más preferidas que otras se les asignen valores mayores. Por lo tanto, esta propiedad impone que $U(x)$ debe admitir transformaciones monótonas.

Prueba

Supongamos que $\succsim$ es una relación binaria sobre $\mathbb{R}^l_+$ y que $u(\cdot)$ es una función de utilidad que la representa. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente sobre el rango de $u(\cdot)$. De acuerdo a la definición de la función de utilidad, $x \succsim x'$ si y sólo si $u(x) \geq u(x')$. Como $f(\cdot)$ es una función creciente sobre el rango $u(\cdot)$ entonces $f(u(x)) \geq f(u(x'))$ si y sólo si $u(x) \geq u(x')$ y si sucede ello entonces es porque $f(\cdot)$ también representa las mismas preferencias que $u(\cdot)$. Es decir, cualquier función creciente $v(x)$ definida sobre el rango de $u(\cdot)$ representa la relación binaria de preferencias $\succsim$ (Lozano, 2009:75).■

iii) Bajo el supuesto de que $\succsim$ es una relación convexa, entonces la función de utilidad $U(x)$ es una función cuasicóncava

Una función $F : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es cuasicóncava si:
$\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^l$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumple que:

$$F(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq min[F(x^1), F(x^2)]$$

Prueba

La relación binaria $\succsim$ es convexa si

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+\right) \left(\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^l_+\right) : x^1 \succsim x \quad \text{y} \quad x^2 \succsim x$$

se cumple que:

$$\forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \succ x$$

Con esta propiedad se supone la preferencia de canastas balanceadas a canastas con gran cantidad de un solo bien.

Sea
$$x^3 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$$

Por definición $x^3 \succsim x$ y por lo tanto $u(x^3) \geq u(x)$. Si a esto le sumamos que $x^1 \succsim x^2$ por hipótesis, tenemos que $u(x^3) \geq min[u(x^1), u(x^2)]$ ó lo que es lo mismo:
$$u(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq min[u(x^1), u(x^2)]$$

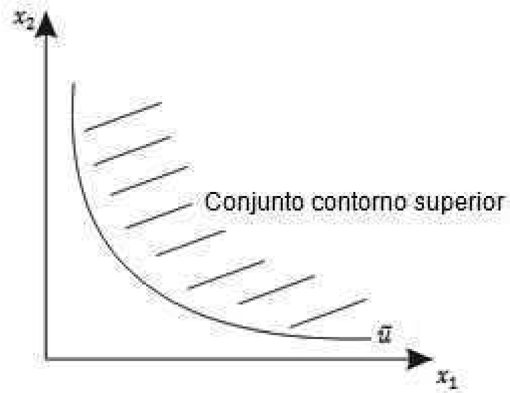
Esto es precisamente la definición de cuasicóncavidad.■

Se deja al lector la prueba de que si $\succsim$ es una relación estrictamente convexa, entonces la función de utilidad $U(x)$ es una función estrictamente cuasicóncava. Como se puede ver la noción de cuasiconcavidad es un concepto ordinal ya que afirma que canastas balanceadas son mejores a no balanceadas y por lo tanto, la función cuasicóncava asigna unos valores mayores (no importa en cuánto) a canastas balanceadas y valores menores a canastas no balanceadas.

Corolario 1

Si $U(x) : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ es cuasicóncava el conjunto contorno superior es convexo.

Gráfico 3



1.9. El problema del consumidor

El objetivo de lo que hemos llamado agente consumidor, definido como una triada $[X, \succsim, B]$, va a ser maximizar las preferencias sobre su conjunto de consumo dadas unas restricciones. Vamos a suponer que los gustos están representados por una función de utilidad y en cierta forma el consumidor va a ´´ser´´ una función de utilidad

$$U(x) : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$$

Enfoque desde el análisis real

Teniendo en cuenta lo anterior, uno de los objetivos principales sobre el estudio de la conducta del consumidor va a ser la función de demanda ya que es en ella que se reflejan los objetivos del consumidor y es, además, la solución a lo que hemos denominado el problema del consumidor.

Empecemos, entonces, por definir una correspondencia de demanda. Esta se define como:

$$X : \mathbb{R}^l_+ \times : \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^l_+$$

Esta correspondencia[11] también la podemos expresar con una notación más exhaustiva, Veamos:

$$X(p,m) = Arg_{x\in B(p,m)} max\, u(x) = \{x \in B(p,m)/\forall x' \in B(p,m) : u(x') \leq u(x)\}$$

Es decir[12], la correspondencia de demanda del consumidor van a ser todos los argumentos o elementos que maximizan la utilidad y que están sobre el conjunto presupuestario. La correspondencia va a estar formada así por todos los maximizadores que son financiables.

En lo que resta, vamos a definir todas las propiedades que subyacen a la correspondencia de demanda $X(p,m)$

Teorema 1

Si $U(x)$ es continua entonces $X(p,m)$ es de valores no vacíos.

Ante todo, debe quedar claro que este es un teorema de existencia para la correspondencia de demanda. Si se prueba que $X(p,m) \neq \varnothing$ se estaría garantizando que el consumidor toma decisiones y por lo tanto el consumidor, al tener una renta m dados unos precios p, escoge entre las alternativas que se le presentan.

Prueba

Fijamos cualquier $(p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+$. Para este (p,m) tenemos:

i) $B(p,m)$ es cerrado ya que por definición $B(p,m) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \leq m\right\}$ es un conjunto que incluye sus fronteras al ser definido por desigualdades débiles. Es decir, se preservan en los límites.

ii) $B(p,m)$ es acotado. Es decir, existe la posibilidad de hacer una bola con centro en x y un radio ε grande $B_\varepsilon(x)$ tal que el conjunto $B(p,m)$ quede encerrado en dicha bola lo que es precisamente la definición de un conjunto acotado.

[11] Sean S y T dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia es una regla que asigna a cada elemento $x \in S$ un subconjunto no vacío de T (Lozano, 2009). Para nuestro caso una correspondencia de demanda, es una regla que asigna a cada (p,m) un subconjunto no vacío en $\mathbb{R}^l_+$

[12] La notación Arg específica un conjunto que soluciona un problema

Teniendo en cuenta que si $B(p,m)$ es cerrado y acotado entonces es compacto, por el teorema de Weierstrass[13] es posible afirmar que dicho conjunto alcanza un valor máximo. Es decir:

$$\exists x \in B(p,m)/\forall x' \in B(p,m) : u(x) \geq u(x')$$

y si $x \in B(p,m)$ entonces $x \in X(p,m)$ ■

Teorema 2

$X(p,m)$ es homogénea de grado cero en (p,m)

Es decir,

$$\forall (p,m), \forall \lambda \gg 0 : \; X(\lambda p, \lambda m) = X(p,m)$$

Para el agente consumidor no es importante entonces si los precios y la renta están, por ejemplo, en centavos o en pesos y no sufre así de ilusión monetaria. Es decir, las unidades de los precios y la renta están expresados de tal forma que no incidan en la percepción de oportunidades del consumidor (Deaton y Muellbauer, 1993:15). Por lo tanto, lo que importan son las restricciones y no la forma en que se presenten (Kreps, 1995:18).

Prueba

Fijamos cualquier $(p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+$. Para este (p,m) tenemos:

$\forall (p,m)$ y $\forall \lambda \gg 0$, $B(\lambda p, \lambda m) = B(p,m)$ ya que por definición:

$$B(p,m) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \leq m\right\}$$

$$B(\lambda p, \lambda m) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / \lambda p.x \leq \lambda m\right\}$$

cancelando a ambos lados λ se tiene:

$$B(p,m) = B(\lambda p, \lambda m)$$

Es decir, el conjunto de restricción presupuestaria no cambia si se alteran en la misma proporción sus argumentos y si no cambia el conjunto de elección sobre

[13] De manera formal el teorema es: Si una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, con $X \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto (es decir cerrado y acotado), entonces alcanza un valor máximo y un mínimo, ambos globales (Monsalve, 2009:64).

la que está definida la correspondencia de demanda, entonces esta tampoco lo hace. ■

Teorema 3

Si la función de utilidad es cuasicóncava entonces $X(p,m)$ es de valores convexos. Recordar que $U(x) : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ es cuasicóncava si:

$$\left(\forall x.x' \in \mathbb{R}^l_+\right)\left(\forall \lambda \in \mathbb{R}^l_+\right) : u(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq min[u(x), u(x')]$$

Prueba

Fijamos cualquier $(p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+$, un $\lambda \in \mathbb{R}^l_+$ y un $x, x' \in X(p,m)$.

De la última parte tenemos, por definición de correspondencia, que $u(x) = u(x')$. Además ya que $B(p,m)$ es un conjunto convexo (por definición) se tiene que:

$$\lambda x + (1-\lambda)x' \in B(p,m)$$

Por cuasiconcavidad de $U(x)$ se tiene que $u(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq min[u(x), u(x')]$. Dado que $u(x) = u(x')$ podemos decir que $u(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq u(x)$ y por último afirmar que $u(\lambda x + (1-\lambda)x') = u(x)$. Con base en esto, podemos establecer que $\lambda x + (1-\lambda)x' \in X(p,m)$ y por lo tanto, $X(p,m)$ es de valores convexos. ■

Es decir, si por las preferencias tenemos que es mejor tener canastas balanceadas y esto debe estar expresado en una función de utilidad cuasicóncava, entonces las acciones deben reflejarlo y por lo tanto, $X(p,m)$ debe ser de valores convexos.

Teorema 4

Si la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava entonces $X(p,m)$ tiene a lo sumo un elemento.

Recordar que $U(x)$ es estrictamente cuasicóncava si:

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^l_+, \forall \lambda \in (0,1); u(\lambda x + (1-\lambda)x) > min[u(x), u(x')]$$

La prueba de este teorema se realizará por contradicción. Ya que algunas pruebas en adelante se harán por contradicción especificaremos un poco qué se entiende por este tipo de pruebas.

Una prueba por contradicción es aquella que partiendo de un teorema tipo $A \to B$, léase A implica B, se busca probar qué consecuencias trae si sucede A

y no B. Es decir: $A \nrightarrow B$. Si partiendo de lo anterior se llega que en el caso en que se tenga $A \nrightarrow B$ se contradice lo que A mismo implica diremos, entonces, que llegamos a una contradicción y por lo tanto, necesariamente se cumple el teorema, es decir: $A \to B$. Pasemos ahora a la prueba del teorema.

Prueba

Supongamos que $\exists(p,m):\ x, x' \in X(p,m)$ y $x \neq x'$

Por definición de correspondencia se tiene que $u(x) = u(x')$. Además ya que $B(p,m)$ es un conjunto convexo (por definición) se tiene que:

$$\lambda x + (1-\lambda)x' \in X(p,m).$$

Ahora por definición de estricta cuasiconcavidad de $U(x)$:

$$u(\lambda x + (1-\lambda)x) > min[u(x), u(x')]$$

Dado que $u(x) = u(x')$ podemos decir que $u(\lambda x + (1-\lambda)x) > u(x)$ pero esto sería una contradicción ya que por definición el $x \in X(p,m)$ es un óptimo y no puede existir, por ejemplo, otro $x^2 = \lambda x + (1-\lambda)x'$ tal que $u(x^2) > u(x)$ ya que en ese caso x no seria óptimo y por lo tanto, $x \notin X(p,m) \to\leftarrow$ $\blacksquare$

Por lo tanto, si $U(x)$ es estrictamente cuasicóncava, la correspondencia de demanda $X(p,m)$ sólo puede tener a lo sumo un elemento.

Corolario 2

Si $U(x)$ es continua y estrictamente cuasicóncava entonces

$$\forall(p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+$$

$X(p,m)$ tiene un solo elemento.

Con lo anterior pasamos a que $X : \mathbb{R}^l_+ \times : \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^l_+$ pasa a estar definida como una función, es decir:

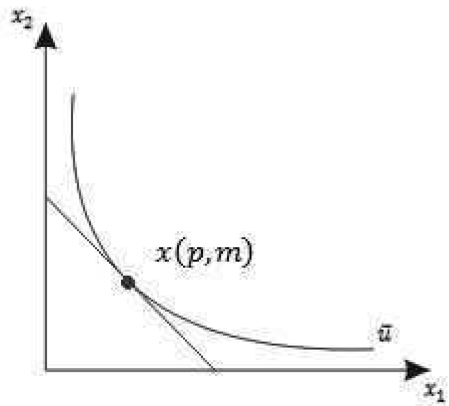
$$X(p,m) = \{x(p,m)\}$$

De igual manera que antes, podemos definir formalmente la función de demanda o correspondencia de un solo elemento como:

$$x(p,m) = arg_{x \in B(p,m)} maxu(x) = \{x \in B(p,m)/x' \in B(p,m),\ x \neq x' : \ u(x') < u(x)\}$$

Con esto estamos especificando que hay uno y sólo un elemento que maximiza sobre el conjunto presupuestario la función de utilidad. Es decir, $x(p.m)$ es el único maximizador. Es necesario diferenciar así entre $X(p,m)$ que es una correspondencia de demanda y $x(p,m)$ el cual es una función de demanda. Con este teorema estamos regresando así a la microeconomía elemental.

Gráfico 4



Teorema 5

Si $U(x)$ es localmente no saciada entonces $\forall(p,m)$ y $x \in X(p,m)$ se cumple que $p.x = m$

Otra notación posible es:

$$\sum_{i=1}^{L} p_i x_i = m$$

Es decir, si se cumple la no saciedad local, el consumidor debe gastarse toda la renta[14] . Este teorema recibe el nombre de ´´la ley de Walras´´ o agotamiento del gasto.

[14]Recordemos que estamos en un modelo estático o de un solo período. En varios períodos hay incentivos para ahorrar en un período y gastar lo ahorrado al siguiente período por lo que en los modelos dinámicos la Ley de Walras se convierte en lo que se conoce como condición de transversabilidad.

Prueba

Recordemos primero la forma en que se define la no saciedad local. $U(x)$ es localmente no saciada si:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+\right)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})\left(\exists x' \in B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{R}^l_+ : u(x') > u(x)\right)$$

Es decir, el consumidor es no saciado si ante cualquier cesta x es posible encontrar canastas muy cerca a ella, o en una bola con centro en x y radio ε muy pequeño, tal que esa canasta que se encuentra es mejor a x. En otras palabras, es posible encontrar un x' tal que $u(x') > u(x) \Longleftrightarrow x' \succ x$

Teniendo en cuenta la definición de no saciedad local, vamos a realizar la prueba por contradicción. Supongamos que $\exists(p,m)$ y $\exists x \in X(p,m) : p.x \leq m$

Empecemos entonces por definir[15] un ε para la bola $B_\varepsilon(x)$ tal que:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} min\left\{\frac{m-p.x}{p_1}, \frac{m-p.x}{p_2}, ..., \frac{m-p.x}{p_l}\right\} > 0$$

Por definición vamos a postular un $x' \in B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{R}^l_+$ y $\varepsilon > 0$ para tener:

$$p.x' \leq p.x + \varepsilon.max(p_1, p_2, ..., p_l)$$

Es decir, se postula un x' con el cual el consumidor no se gasta toda la renta y aquella parte que le queda de su renta, se la va a gastar en el bien más caro que se encuentre cerca, es decir a una distancia ε. Equivalentemente estamos afirmando que se va a gastar la parte que le quede de la renta en el bien más caro, $\varepsilon.max(p_1, p_2, ..., p_l)$.

Ahora, teniendo en cuenta que el épsilon ε lo hemos definido como un radio muy pequeño igual a $\varepsilon = \frac{1}{2} min\left\{\frac{m-p.x}{p_1}, \frac{m-p.x}{p_2}, ..., \frac{m-p.x}{p_l}\right\}$ podemos afirmar que el $min\left\{\frac{m-p.x}{p_1}, \frac{m-p.x}{p_2}, ..., \frac{m-p.x}{p_l}\right\}$ es equivalente al $max(p_1, p_2, ..., p_l)$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$p.x' \leq p.x + \varepsilon.max(p_1, p_2, ..., p_l)$$

Reemplazando ε:

[15] No es un por simpleza que se elige $p.x \leq m$ ya que si se opta por $p.x \geq m$ estaríamos tratando con consumidores que prestan o están quebrados y esta situación la hemos descartado desde antes. Ahora, no se elige $p.x = m$ porque de esa manera no llegaríamos a ninguna contradicción.

$$p.x' \leq p.x + \frac{1}{2}\frac{m - p.x}{max(p_1, p_2, ..., p_l)}.max(p_1, p_2, ..., p_l)$$

Cancelando términos iguales:

$$p.x' \leq p.x + \frac{1}{2}(m - p.x)$$

Ahora si $p.x'$ es menor que $p.x + \frac{1}{2}(m - p.x)$ es porque también es menor a $p.x + (m - p.x)$. Se tiene así lo siguiente:

$$p.x' \leq p.x + (m - p.x)$$

$$p.x' \leq m$$

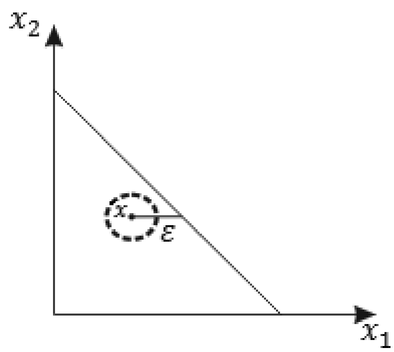
Ahora, por no saciedad de $U(x)$ se tiene:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+\right)\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}\right)\left(\exists x' \in B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{R}^l_+ : u(x') > u(x)\right)$$

Si fijamos justo a x' se tiene que $x' \in B(p, m)$ entonces $u(x') > u(x)$ pero en este caso $x \notin X(p, m) \rightarrow\leftarrow$.$\blacksquare$

Con la prueba se tiene, entonces, que para un x que es óptimo no puede ocurrir que $p.x \leq m$ ya que en ese caso por no saciedad local existe un x' mejor en una vecindad cercana o bola con centro en x y radio ε tal que ese x' es mejor. Por lo tanto, si x es óptimo se debe cumplir la Ley de Walras.

Gráfico 5



Tal como se observa en el gráfico anterior, desde que la cesta x no cumpla con agotar el gasto siempre será posible encontrar una canasta en su vecindad cercana tal que tampoco agote el gasto y dé mayor utilidad. Nótese que la cesta que se encuentra, x', está justo en la mitad del radio ε de la bola ya que en la construcción del teorema se buscó un $\varepsilon = \frac{1}{2}min\left\{\frac{m-p.x}{p_1}, \frac{m-p.x}{p_2}, ..., \frac{m-p.x}{p_l}\right\}$ para que la bola quede siempre en el interior del conjunto presupuestario y el teorema adquiera relevancia. En el límite, la cesta elegida debe estar entonces en la frontera y agotar el gasto.

Corolario 3

Si $U(x)$ es monótona entonces $\forall(p,m)$ $x \in X(p,m)$ cumple con agotar el gasto. Es decir, $p.x = m$

Teorema 6

Si $U(x)$ es continua entonces $X(p,m)$ es hemicontinua superior e inferior. La prueba es demasiado técnica por lo que se omitirá. El lector interesado puede consultar Monsalve (2009).

Corolario 4

Si $U(x)$ es continua y estrictamente cuasicóncava, entonces $x(p,m)$ es continua. Se debe recordar que la estrictamente cuasiconcavidad garantiza que $X(p,m) = \{x(p,m)\}$ es decir, que la correspondencia se vuelva función. Con este corolario se garantiza además que la función de demanda $x(p,m)$ está bien definida y es una función continua.

Teorema 7

La correspondencia de demanda $X(p,m)$ satisface el axioma débil general de la preferencia revelada (ADGPR). Es decir:

$\forall (p,m),(p',m') \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+$ lo siguiente es cierto:

$$\left\{ \begin{array}{c} i)\; x \in X(p,m) \\ ii)\; x' \in X(p',m') \\ iii)\; p.x' \leq m \\ iv)\; x \notin X(p',m') \end{array} \right\} \Rightarrow v)\; p'.x > m$$

El teorema específica así que si se tienen dos óptimos de dos correspondencias distintas, $i)\; x \in X(p,m)$ y $ii)\; x' \in X(p',m')$, siendo x' financiable a (p,m) ya que $iii)\; p.x' \leq m$ pero no óptimo ya que a (p,m) el óptimo es x, debe suceder entonces que cuando se elige x' a (p',m') es porque ya x no es financiable a (p',m') ya que $v)\; p'.x > m$ lo que implica a su vez que $iv)\; x \notin X(p',m')$ y por lo tanto, el óptimo a (p',m') pasa a ser x'.

En otras palabras, el teorema especifica que cuando se elige x siendo asequible x' no puede pasar que cuando se elija x' siga siendo asequible x.

Prueba

Cambiemos el resultado principal de la prueba, $p'.x > m$, y veamos si llegamos a una contradicción. Por lo tanto:

$$\left\{ \begin{array}{c} i)\; x \in X(p,m) \\ ii)\; x' \in X(p',m') \\ iii)\; p.x' \leq m \\ iv)\; x \notin X(p',m') \end{array} \right\} \Rightarrow v)\; p'.x \leq m$$

De acuerdo a lo anterior, se tiene que $v)\; p'.x \leq m$ implica a su vez que $x \in B(p',m')$. Es decir, x es financiable a (p',m'). A pesar de ser financiable, no obstante, x no es un maximizador ya que $iv)\; x \notin X(p',m')$ y por lo tanto: $u(x') > u(x)$. Se tiene además que a pesar de que x' es financiable a (p,m) y por tanto, $ii)\; x' \in B(p,m)$ no obstante, x' no es maximizador a (p,m) ya que el óptimo a (p,m) es $i)\; x \in X(p,m)$ y por tanto $u(x) \geq u(x')$, lo cual contradice el resultado encontrado antes.$\blacksquare$

Para concluir, es importante anotar que la importancia del teorema radica en que sobre $X(p,m)$ no hemos impuesto, para demostrar el teorema, ningún supuesto sobre las preferencias ni sobre la función de utilidad y sin embargo, vemos que se cumple un supuesto clave de racionalidad como lo es ADGPR. Este teorema es entonces un test sobre las variables observables de las variables no observables como son las preferencias.

Corolario 5

Si $U(x)$ es continua y estrictamente cuasicóncava se tiene que:

$$X(p,m) = \{x(p,m)\}$$

Es decir, la correspondencia queda con un solo elemento. Ahora podemos afirmar además que $x(p,m)$ satisface el axioma débil de la preferencia revelada (ADPR). Por lo tanto:

$\forall (p,m), (p',m')$ se cumple lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{c} i)\ p.x(p',m') \leq m \\ ii)\ x(p',m') \neq x(p,m) \end{array} \right\} \Rightarrow iii)\ p'.x(p,m) > m'$$

La prueba es una aplicación del teorema del máximo.

Hasta acá el tratamiento a la demanda, pasemos ahora a la función de utilidad indirecta, la cual no es más que la función de utilidad evaluada en la función de demanda óptima.

1.10. La función de utilidad indirecta

Sobre el supuesto de que $U(x)$ es continua, una función de utilidad indirecta se define como:

$$V : \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(p,m) = max_{x \in B(p,m)} u(x)$$

Es necesario aclarar primero que la función de utilidad indirecta es una función y no una correspondencia como se observa del hecho de que los elementos del dominio $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ y $m \in \mathbb{R}_+$ mapean $(\rightarrow)$ en un solo punto de $\mathbb{R}$. Lo segundo es que es ´´indirecta´´ debido a que en el problema del consumidor lo que se tiene es la función de utilidad directa $U(x)$, la cual no está expresada ni en función de precios ni en renta. Pero es posible llegar a una función de utilidad indirecta que directamente depende de rentas y precios cuando se realiza el proceso de maximización de $U(x)$ sujeto a la restricción presupuestaria $p.x = m$

Teorema 8

$V(p, m)$ es homogénea de grado cero en (p, m)

Prueba

Debido a que $x(p, m)$ no cambia si (p, m) lo hacen -*el consumidor no sufre de ilusión monetaria*- se puede afirmar por el teorema del máximo que si los argumentos de la función V son homogéneos de grado cero en (p, m) la función V también lo será.■

Teorema 9

Si $U(x)$ es localmente no saciada, entonces V es estrictamente creciente en m. Es decir, el agente consumidor le reporta más utilidad tener más renta. En cualquier caso, V es no decreciente en m y no creciente en p_l para todo $l = 1, 2, 3, ..., L$

Prueba

Sean p, p' dos vectores de precios tales que $p' \geq p$ definamos los siguientes presupuestos:

$$B(p, m) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \leq m\right\}$$

$$B(p', m) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / p'.x \leq m\right\}$$

Se evidencia primero que $B(p', m) \subseteq B(p, m)$ y por lo tanto, el máximo que puede alcanzar $u(x)$ sobre $B(p, m)$ es al menos tan grande como el que puede alcanzar en $B(p', m)$. Ya que V está en función del óptimo que $u(x)$ alcanza sobre el conjunto presupuestario, se tiene que el valor que tomará V a los precios p sera al menos tan grande como el que tomará a los precios p'. Se tiene así que V no puede ser creciente en precios (Varian, 1992:122). ■

De igual manera podemos definir dos presupuestos m, m' tal que $m' > m$ y construir dos conjuntos $B(p, m)$ y $B(p, m')$. Igual que sucede en el caso anterior

V alcanzará valores no decrecientes con rentar mayores que con respecto a rentas menores.■

Teorema 10

La función de utilidad indirecta V es cuasiconvexa. Es decir, $\forall (p,m),(p',m'), \forall \lambda \in [0,1]$ se cumple que:

$$V(\lambda p + (1-\lambda)p', \lambda m + (1-\lambda)m') \leq max\{V(p,m), V(p',m')\}$$

Prueba

Fijamos $(p,m),(p',m') \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+$ y un $\lambda \in [0,1]$

Sea

$$x \in B(\lambda p + (1-\lambda)p', \lambda m + (1-\lambda)m')$$

tal que

$$(\lambda p + (1-\lambda)p').x \leq \lambda m + (1-\lambda)m'$$

Con base en lo anterior se cumplen dos situaciones:

$$p.x \leq m$$

ó

$$p'.x \leq m'$$

Si no fuera cierto su negación no será cierta, veamos:

$p.x > m$ y $p'.x > m'$

Multiplicando el primero por λ y el segundo por $(1-\lambda)$ se tiene:

$\lambda p.x > \lambda m$ y $(1-\lambda)p'.x > \lambda m'$

Sumando las dos desigualdades:

$$\lambda p.x + (1-\lambda)p'.x > \lambda m + (1-\lambda)m'$$

Lo cual no es cierto. Se tiene así que sólo hay dos posibilidades: $p.x \leq m$ ó $p'.x \leq m'$. Esto es equivalente a afirmar que:

$x \in B(p,m)$ ó $x \in B(p',m')$.

Con ello podemos decir:

$$x \in B(p,m) \cup B(p',m')$$

Dada la anterior definición, es posible postular un $x^* \in B(\lambda p + (1-\lambda)p', \lambda m + (1-\lambda)m')$ tal que;

$$V(\lambda p + (1-\lambda)p', \lambda m + (1-\lambda)m') = u(x^*)$$

por tanto:

$x^* \in B(p,m)$ ó $x^* B(p',m')$

$u(x^*) \leq V(p,m)$ ó $u(x^*) \leq V(p',m')$

Se llega entonces a lo siguiente:

$$u(x^*) \leq max\,\{V(p,m), V(p',m')\}$$

Pero por construcción se ha dicho que:

$$u(x^*) = V(\lambda p + (1-\lambda)p', \lambda m + (1-\lambda)m')$$

y así:

$$V(\lambda p + (1-\lambda)p', \lambda m + (1-\lambda)m') \leq max\,\{V(p,m), V(p',m')\}$$

■

Teorema 11

$V(p,m)$ es continua.

Prueba

Por definición $V(p,m) = u(x(p,m))$ y ya que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua y dado que $x(p,m)$ son funciones de demanda continuas, podemos afirmar entonces que $V(p,m)$ también lo es. ■

1.11. Enfoque desde el análisis diferencial

El análisis anterior se ha hecho sin recurrir al mundo diferencial y se ha hecho para demostrar que, ante todo, la teoría del consumidor es una teoría analítica. Ahora vamos a pasar al mundo diferencial porque en cierta forma se tiene una matemática más amena y porque en él también podemos extraer tests de racionalidad.

Es necesario aclarar que se necesitan tres condiciones, que se imponen más abajo, para trabajar en el mundo diferenciable:

- La función objetivo, f, deber ser diferenciable.
- Son necesarios conjuntos abiertos.
- Los supuestos del mundo analítico se deben llevar al mundo diferenciable.

Estas condiciones quedarán en términos de nuestra función de utilidad como presentamos a continuación.

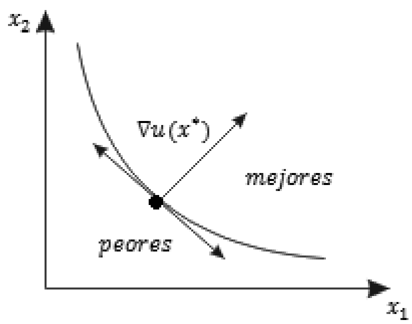
Supuestos:

Teniendo de nuevo la función de utilidad $U(x) : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ se define lo siguiente:

- $U(x) \in \mathbb{R}^l_{++}$. La importancia de ello es que el espacio $\mathbb{R}^l_+$ es cerrado porque incluye los ejes mientras el espacio $\mathbb{R}^l_{++}$ es abierto porque no toca los ejes y, como se recordará, son necesarios conjuntos abiertos.
- $U(x) \in C^2$. Es decir, la función de utilidad es doblemente diferenciable. Por lo tanto, la función $U(x)$ debe cumplir que la matriz de primeras derivadas $Du(x)$ existe y que la matriz de segundas derivadas $D^2u(x)$ también exista y sea continua en cada uno de sus componentes[16].
- $U(x)$ es monótona y en $\mathbb{R}^l_{++}$ es diferenciable y estrictamente monótona. Por lo tanto, $Du(x) \gg 0$. Es decir, la utilidad de una unidad de consumo adicional es positiva.
- $U(x)$ es cuasicóncava y en $\mathbb{R}^l_{++}$ es diferenciable y estrictamente cuasicóncava. Es decir, $\forall q \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ se tiene que: $q^T Du(x) = 0$ y $q^T D^2u(x)q < 0$. Por lo tanto, la utilidad de una unidad de consumo adicional es positiva pero decreciente.

[16] A la matriz de primeras derivadas $Du(x)$ se le conoce con el nombre de Jacobiano y a la matriz de segundas derivadas $D^2u(x)$ se le conoce con el nombre de Hessiano.

Gráfico 6



Por las propiedades anteriores, se tiene que el hessiano debe ser semidefinido negativo por la estricta cuasiconcavidad y por lo tanto, es ortogonal a la tangente, $q^T Du(x) = 0$. Así el vector ortogonal especifica los mejores y la tangente hacia los laterales muestra los peores ya que $q^T D^2 u(x) q < 0$ indica que la utilidad disminuye al movernos por la línea tangencial. Además la tangente esta por fuera del conjunto de opciones mejores. Esto es lo que se observa en el gráfico 6.

- Interioridad de las soluciones.$\forall x \in \mathbb{R}^l_{++}$ se tiene que $\left\{x \in \mathbb{R}^l_{+} / u(x') \geq u(x)\right\} \subseteq \mathbb{R}^l_{++}$. Es decir, las canastas mejores también van a estar en el interior y por tanto, no deben haber soluciones de esquina. Técnicamente este supuesto se puede también expresar así: Para toda secuencia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^l_{++}$ tal que converja a un X, es decir $X_n \to X$, este punto donde converge cumplirá que $X \in \partial\mathbb{R}^l_{++} = \mathbb{R}^l_{+} \setminus \mathbb{R}^l_{++}$

Por lo tanto, si definimos una función de demanda como $x : \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^l_{++}$ esta función siempre va a estar en el interior y no va a tocar el borde[17].

Una vez definido los supuestos sobre la función de utilidad, continuamos con los teoremas que en el mundo diferencial se cumplen sobre $X(p, m)$.

Teorema 12

La correspondencia de demanda $X(p, m)$ es diferenciable.

Es decir, $\forall (p, m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ $X(p, m)$ es diferenciable. Por lo tanto, para cualquier renta m y precios p se tiene un momento único.

[17]Por lo tanto, no se va a tener en cuenta el problema de los bienes sustitutos perfectos.

Prueba

Por condiciones de Kuhn-Tucker[18] $\exists \lambda > 0$ tal que:

$$Du(x) = \lambda p$$

$$p.x = m$$

Preguntemonos ahora ¿Cuánto cambiará x ante un pequeño cambio en p y m ? Diferenciemos y veamos:

$$D^2u(x)dx = d\lambda p + \lambda dp$$

$$p.dx + x.dp = dm$$

Reordenando las ecuaciones anteriores se tiene:

$$D^2u(x)dx - d\lambda p = \lambda dp$$

$$-p.dx = xdp - dm$$

Construyendo un sistema matricial con las ecuaciones anteriores se llega a:

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}_{L+1xL+1} \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}_{L+1x1} = \begin{bmatrix} \lambda dp \\ x.dp - dm \end{bmatrix}_{L+1x1}$$

Este es un sistema del tipo $A.X = b$ y tiene solución para X si y solo sí A tiene inversa. Es decir, si A^{-1} existe. Decir que A tenga inversa es sinónimo de que sea no singular o que su determinante sea distinto a cero.

Supongamos entonces, para efectos de llegar a una contradicción, de que A es singular ya que si esto sucede se tiene que $\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}_{L+1x1}$ no existe y por lo tanto, $X(p, m)$ no sería diferenciable.

Postulemos que existe un vector $\begin{bmatrix} a_{1x1} \\ b_{1x1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L+1} \setminus \{0\}$ tal que:

[18] Sobre dichas condiciones ver Monsalve (2009). No se debe olvidar que se está trabajando con soluciones interiores.

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}_{L+1xL+1} \begin{bmatrix} a_{1x1} \\ b_{1x1} \end{bmatrix}_{L+1x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{L+1x1}$$

De este sistema se tiene:

$$D^2u(x).a - p.b = 0$$

$$p^T.a = 0$$

Es necesario aclarar que $p^T_{1xL}.a_{Lx1} = a^T_{1xL}.p_{Lx1}$ y el resultado es un número $(1x1)$.

Reordenando las ecuaciones anteriores:

$$D^2u(x).a = p.b$$

$$a^T.p = 0$$

De la primera ecuación podemos afirmar que $p.b \neq 0$ ya que $b \neq 0$ y $p \gg 0$. En caso contrario, si se tuviera $p.b = 0$ sería necesario que $b = 0$ y $a = 0$ pues $D^2u(x) \neq 0$. No obstante, esto no se puede cumplir ya que desde antes se ha postulado que $\begin{bmatrix} a_{1x1} \\ b_{1x1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L+1} \setminus \{0\}$.

Además por ser $p \neq 0$ se garantiza que $a \neq 0$. Esta condición la llamaremos condición (a)

Por condiciones de primer orden (C.P.O) del problema de optimización del consumidor, se tiene también lo siguiente:

$$p = \frac{1}{\lambda}Du(x)$$

Donde $\lambda > 0$ es la utilidad marginal de la renta. Reemplazando esta expresión en $a^T.p = 0$ se llega a:

$$a^T.(\frac{1}{\lambda}Du(x)) = 0$$

$$a^T.(Du(x)) = 0$$

La cual llamaremos condición (b)

Multiplicando $D^2u(x).a = p.b$ a ambos lados por a^T se tiene:

$$a^T[D^2u(x).a] = a^T[p.b]$$

Ya que $a^Tp.b = b.a^T.p$ y tomando $a^T.p = 0$ llegamos a:

$$a^T[D^2u(x).a] = 0$$

La cual llamaremos la condición (c)

Por lo tanto, para que $X(p,m)$ no sea diferenciable se deben cumplir al mismo tiempo las condiciones (a), (b) y (c) pero esto no es posible debido a que por el supuesto de cuasiconcavidad de la función de utilidad, es necesario que $\forall q \in \mathbb{R}^l$ se tenga que $q^TD^2u(x)q < 0$ pero esta condición es violada en la condición (c). Por lo tanto, es posible afirmar que $X(p,m)$ es diferenciable. ■

Antes de continuar, vamos a solucionar el sistema[19] anterior y establecer algunas notaciones:

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}_{L+1xL+1} \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}_{L+1x1} = \begin{bmatrix} \lambda dp \\ x.dp - dm \end{bmatrix}_{L+1x1}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}_{L+1x1} = \begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda dp \\ x.dp - dm \end{bmatrix}_{L+1x1}$$

Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p}\partial p + \frac{\partial x}{\partial m}\partial m$$

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p}\partial p + \frac{\partial \lambda}{\partial m}\partial m$$

En forma matricial:

$$dx = D_px(p,m)dp + D_mx(p,m).dm$$

$$d\lambda = D_p\lambda(\cdot)dp + D_m\lambda(\cdot)dm$$

[19]Lo siguiente es teniendo en cuenta que $\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}$ debe ser invertible.

Lo que es equivalente a tener:

$$\begin{bmatrix} D_p x(p,m) & D_m x(p,m) \\ D_p \lambda(\cdot) & D_m \lambda(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^2 u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ x(p,m) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dm \end{bmatrix}$$

De ahora en adelante se adoptará la siguiente notación:

$$\begin{bmatrix} D^2 u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} S & -v \\ -v^T & k \end{bmatrix}$$

Teorema 13

Se cumple la condición de agregación de Cournot. Es decir;

$$\forall (p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++}$$

y $\forall l \in \{1, 2, ..., L\}$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l} p_k = -x_l(p,m)$$

En forma matricial la notación sería:

$$\forall (p,m) : \ p^T D_p x(p,m) = -x(p,m)^T$$

La agregación de Cournot quiere decir que si varía el precio de un bien p_l en una unidad, inmediatamente perdemos $(-x_l(p,m))$ un valor igual a las cantidades, por tanto tenemos que reordenar nuestro gasto en los otros bienes $\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l} p_k$ en una medida igual al valor de lo que hemos perdido por el aumento del precio.

Prueba

Por la ley de Walras se cumple $p.x = m$, $\forall (p,m)$. En un sistema de ecuaciones el equivalente sería:

$$\sum_{k=1}^{L} x_k(p,m) p_k = m$$

Derivando con respecto a p_l:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l} p_k + x_l(p,m) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l} p_k = -x_l(p,m) \blacksquare$$

Teorema 14

Se cumpla la condición de agregación de Engel. Es decir,

$$\forall (p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++}$$

y $\forall l \in \{1,2,...,L\}$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m} p_k = 1$$

En la forma matricial la notación sería:

$$\forall (p,m) : p^T D_m x(p,m) = 1$$

Es decir, si al agente consumidor le dan un peso más se lo gasta todo o lo que es equivalente: la variación que experimente la demanda de los l bienes al variar la renta debe dar como resultado la variación total o el 100 %.

Prueba

Por la ley de Walras se cumple:

$$\sum_{k=1}^{L} x_k(p,m) p_k = m$$

Derivando parcialmente respecto a m:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m} p_k = 1 \blacksquare$$

Teorema 15

Se cumple la condición de Euler. Es decir;

$$\forall(p,m) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++}$$

y $\forall l \in \{1,2,...,L\}$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m} m = 0$$

En la forma matricial la notación sería:

$$\forall(p,m) : D_p x(p,m).p + D_m x(p,m).m = 0$$

Es decir, ya que $x(p,m)$ es homogénea de grado cero, al variar la renta y los precios en la misma proporción no cambia $x(p,m)$

Prueba

Por homogeneidad de grado cero de $x(p,m)$ se cumple:

$$x_k(\lambda p, \lambda m) = x_k(p,m)$$

Derivando respecto a λ:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(\lambda p, \lambda m)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_k(\lambda p, \lambda m)}{\partial m} m = 0$$

Esto se cumple $\forall\lambda > 0$. Particularmente cuando $\lambda = 1$ llegamos a

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m} m = 0 \quad \blacksquare$$

1.12. El efecto sustitución y el aporte de Slutsky

Volviendo de nuevo al sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}_{L+1x1} = \begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda dp \\ x.dp - dm \end{bmatrix}_{L+1x1}$$

Teniendo en cuenta la notación establecida, se tiene:

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}^{-1}_{L+1xL+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}S & -v \\ -v^T & k \end{bmatrix}_{L+1xL+1}$$

El sistema sería entonces:

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}_{L+1x1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}S & -v \\ -v^T & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda dp \\ x.dp - dm \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones, para el caso de dx, es así igual a:

$$dx = \frac{1}{\lambda}S(\lambda dp) - v(x^T.dp - dm)$$

Simplificando:

$$dx = S(dp) - v(x^T)dp + v.dm$$

Teniendo en cuenta esta última ecuación, vamos a suponer los siguientes eventos:

- Primero: Supongamos un choque igual a $dp \neq 0$ y compensemos la renta en $dm = x^T dp$ de tal manera que ante los cambios en los precios, el agente consumidor tenga capacidad de adquirir la cesta inicial.

Reemplazando $dp \neq 0$ y $dm = x^T dp$ en $dx = S(dp) - v(x^T)dp + v.dm$ se tiene:

$$dx = Sdp - v(x^T)dp + v(x^T dp)$$

Simplificando:

$$dx = Sdp$$

Es decir:

$$S = \frac{dx}{dp}$$

Siendo $S = D_p x(p, m)$ la matriz de sustitución.

- Segundo: Supongamos ahora un choque $dm \neq 0$ y $dp = 0$.

Reemplazando en $dx = S(dp) - v(x^T)dp + v.dm$ se tiene:

$$dx = vdm$$

Es decir:

$$v = \frac{dx}{dm}$$

Siendo $v = D_m x(p,m)$ compuesta por el efecto ingreso.

- Tercero: Supongamos, por último, un choque $dp \neq 0$ pero esta vez no compensemos renta de modo que $dm = 0$.

Reemplazando en $dx = S(dp) - v(x^T)dp + v.dm$ se tiene:

$$dx = Sdp - v(x^T)dp$$

Tomando el límite en dp:

$$\frac{dx}{dp} = s - v(x^T)$$

En forma matricial es equivalente a tener:

$$D_p x(p,m) = S - v.x(p,m)^T$$

Reemplazando $v = \frac{dx}{dm}$:

$$D_p x(p,m) = S - D_m x(p,m).x(p,m)^T$$

Esta es finalmente la conocida Ecuación de Slutsky (1953). Esta ecuación reviste gran importancia ya que es una manera de llegar a algo no observable, como es la matriz de efecto sustitución S, mediante la observación de $D_p x(p,m)$ y $D_m x(p,m).x(p,m)^T$. Es decir, es posible mediante la ecuación anterior encontrar la matriz S, definida como la matriz de efecto sustitución. Este efecto sustitución viene de suponer un cambio en los precios $dp \neq 0$ y compensar una renta $dm = x^T dp$ de tal manera que el agente consumidor sustituya los bienes que se hacen más caros en relación con otros, sin importar las variaciones en la renta real y tomando en cuenta sólo las variaciones en los precios relativos.

La matriz de efecto sustitución S está definida entonces como:

$$S = D_p x(p,m) + D_m x(p,m).x(p,m)^T$$

Se observa así que al ser observables $D_p x(p,m)$ y $D_m x(p,m).x(p,m)^T$, la importancia de Slutsky(1953) radica en encontrar aquello que no observamos, es decir, podemos estimar la matriz de efecto sustitución S.

En relación a un $x_l(p,m)$ la ecuación Slutsky puede ser escrita como:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_k} = S_{l,k} - \frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} x_l(p,m)$$

Nótese entonces que $S_{l,k}$ será la parte de la variación de la demanda atribuible al efecto sustitución. Este se debe estrictamente a variaciones en los precios relativos de los bienes, ya que los componentes de la matriz de efecto sustitución tienen implícito un componente de renta compensada para que se mantenga la capacidad de adquisición de la renta necesaria para alcanzar la cesta inicial. Por otra parte, $\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} x_l(p,m)$ será la parte de la variación de la demanda atribuible a lo que se conoce como el efecto renta. Este tiene que ver con las variaciones que experimenta la renta en términos de poder adquisitivo provocada por el cambio en los precios de los bienes. Por lo tanto, el aporte de Slutsky también se puede expresar como la división de las variaciones de la demanda ante cambios en los precios en dos componentes: el efecto sustitución y el efecto renta.

Teorema 16

$\forall(p,m)$ se cumple que la matriz $S(p,m)$ es una matriz singular.

Antes de hacer la prueba es necesario recordar que una matriz es singular si tiene columnas linealmente dependientes y por lo tanto, es de rango no completo de tal manera que su determinante es cero.

Prueba

Recordemos nuevamente la notación:

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix}^{-1}_{L+1xL+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}S & -v \\ -v^T & k \end{bmatrix}_{L+1xL+1}$$

Teniendo en cuenta que $AA^{-1} = I$ se puede afirmar:

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ -p^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}S & -v \\ -v^T & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo I la matriz identidad. Con base al sistema matricial, es posible extraer la siguiente ecuación:

$$-p^T(\frac{1}{\lambda}S) - 0(-v^T) = 0$$

Simplificando:

$$p^T(\frac{1}{\lambda}S) = 0$$

$$p^T(S) = 0$$

Ya que $p^T \gg 0$ sólo existe la posibilidad de que $S = 0$. Es decir, las filas de S son linealmente dependientes. Además ya que las dimensiones de S son LxL su rango debe ser inferior a L. ■

Teorema 17

$\forall(p, m)$ se cumple que la matriz $S(p, m)$ es semidefinida negativa. Es decir;

$$\left(\forall q \in \mathbb{R}^l, q^T.S.q \leq 0\right)$$

Por lo tanto, la forma cuadrática de S es cóncava con un máximo igual a cero.

Prueba

Sea un $q \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\} \to Sq = \mu q$ siendo μ el valor propio característico de S tal que $\mu \leq 0$. Por lo tanto, se tiene que $\left(\forall q \in \mathbb{R}^l, q^T.S.q \leq 0\right)$ ■

Teorema 18

$\forall(p, m)$ se cumple que la matriz $S(p, m)$ es de rango $L - 1$. Es decir, en $S(p, m)$ hay $L - 1$ ecuaciones linealmente independientes.

Prueba

Por definición el rango de $\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}S & -p \\ -v^T & k \end{bmatrix}$ es igual a $L + 1$ ya que las dimensiones de esta matriz son $L + 1xL + 1$ y es invertible.

Ahora:

$$rango \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}S & -v \\ -v^T & k \end{bmatrix} \leq rango(\frac{1}{\lambda}S) + 2$$

Por lo tanto:

$$rango(\frac{1}{\lambda}S) + 2 \geq L + 1$$

Simplificando:

$$rango(\frac{1}{\lambda}S) \geq L - 1$$

Ya que λ es un escalar, entonces es posible afirmar:

$$rango(S) \geq L - 1$$

Se tienen así dos posibilidades. Si el rango de S es $\geq L - 1$ es porque:

$$rango(S) = L - 1 \text{ ó } rango(S) = L$$

Teniendo en cuenta que S es una matriz singular su rango no puede ser L y por lo tanto, $rango(S) < L$. Así, el $rango(S)$ debe ser menor a L y mayor o igual a $L - 1$. Es decir:

$$L > rango(S) \geq L - 1$$

Sólo existe así la posibilidad de que $rango(S) = L - 1$ ■

En resumen, la matriz de efecto sustitución es singular, semidefinida negativa y de rango no completo.

Por último, presentamos a continuación dos teoremas importantes antes de pasar al problema auxiliar de la minimización del gasto y la dualidad.

Teorema 19

$\forall (p, m)$ la función de utilidad indirecta $V(p, m)$ es diferenciable.

Prueba

Ya que $V(p, m) = u(x(p, m))$ y teniendo en cuenta que se ha probado que $x(p, m)$ es diferenciable y por hipótesis $u(\cdot)$ es continua, entonces por el teorema del máximo es posible asegurar que $V(p, m)$ es diferenciable. ■

Teorema 20

Se cumple la identidad de Roy. Es decir, $\forall (p, m)$ y $\forall l$ se cumple:

$$x_l(p, m) = -\frac{\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l}}{\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}}$$

En forma matricial, la notación sería:

$$\forall(p,m): \; x(p,m) = -\frac{1}{\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}} D_p V(p,m)$$

Prueba

Recordemos que la función de utilidad indirecta está definida como

$$V(p,m) = u(x(p,m)$$

Diferenciando parcialmente respecto a p_l:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(x(p,m))}{\partial x_k} . \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l}$$

Por las C.P.O del problema de maximización se cumple que:

$$\frac{\partial u(x(p,m))}{\partial x_k} = \lambda p_k$$

Reemplazando en la expresión anterior llegamos entonces a:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l} = \sum_{k=1}^{L} \lambda p_k . \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l}$$

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l} = \lambda \sum_{k=1}^{L} p_k . \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l}$$

Tomando en cuenta la condición de agregación de Cournot, $\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial p_l} p_k = -x_l(p,m)$, la expresión anterior queda:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l} = \lambda(-x_l(p,m)) \; [1]$$

Realizando ahora la derivada parcial respecto a m:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial m} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(x(p,m))}{\partial x_k} . \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m}$$

De nuevo utilizando la C.P.O llegamos a:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial m} = \lambda \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_k(p,m)}{\partial m}$$

Recordando la condición de agregación de Engel, $\sum_{l=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} p_l = 1$, se puede reemplazar en la expresión anterior y llegar a:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial m} = \lambda \; [2]$$

llevando [2] a [1]:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l} = \frac{\partial V(p,m)}{\partial m}(-x_l(p,m))$$

Despejando para $x(p,m)$ llegamos finalmente a la identidad de Roy:

$$x_l(p,m) = -\frac{\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_l}}{\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}} \; \blacksquare$$

1.13. El problema auxiliar del consumidor: la minimización del gasto

Para empezar, es necesario aclarar que la felicidad no puede tener precio y por lo tanto, un individuo que este por el mundo minimizando el costo de ser feliz no es racional ya que lo racional es maximizar la utilidad sin importar el costo. Sin embargo, el problema de minimización del gasto sirve analíticamente por algunas dualidades presentes con el problema de la maximización de la utilidad.

Para empezar, vamos a suponer de nuevo que el consumidor está representado por una función de utilidad $U(x) : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ continua. Se va a establecer, además, el siguiente supuesto crucial para cuando definamos el teorema de no exceso de utilidad.

- Monotocidad débil: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+\right) : u(x) \geq u(0)$.

Con este supuesto se establece, explícitamente, que para el agente consumidor no tener nada no puede ser *estrictamente mejor* que tener algo.

Enfoque desde el análisis real

Se va analizar el problema de la minimización del gasto sujeto a alcanzar un determinado nivel de utilidad, de igual manera como se hizo con el problema de la maximización de la utilidad, es decir, mediante la demanda ya que en ella están expresadas las decisiones racionales del problema.

Primero es necesario definir el siguiente conjunto:

$$\mho = U[\mathbb{R}^l_+]$$

$$\mho : \left\{ \underline{u} \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}^l_+ : \ u(x) \geq \underline{u} \right\}$$

Este conjunto está formado así por un nivel de utilidad constante posible $\underline{u} \in \mathbb{R}$, para el cual existen elementos que dan por lo menos ese nivel de utilidad $\exists x \in \mathbb{R}^l_+ : \ u(x) \geq \underline{u}$.

Teniendo en cuenta el anterior conjunto, vamos a definir la correspondencia de demanda compensada para el problema de la minimización del gasto:

$$H : \ \mathbb{R}^l_{++} \times \mho \rightrightarrows \mathbb{R}^l_+$$

$$H(p, \underline{u}) : \ Arg_{x \in \mathbb{R}^l_+} min\, p.x \ s.a\, u(x) \geq \underline{u}$$

Más formalmente:

$$H(p, \underline{u}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u} \ \wedge \ \left(\forall x' \in \mathbb{R}^l_+ : u(x') \geq \underline{u} \right) : p.x' \geq p.x \right\}$$

Esta correspondencia de demanda compensada está definida, entonces, como aquel conjunto de elementos que minimizan la renta para alcanzar por lo menos un nivel de utilidad $\underline{u}$. En otras palabras, es un conjunto de elementos x con los cuales es posible alcanzar nivel de utilidad $\underline{u}$ tal que cualquier otro x' con el que también sea posible alcanzar $\underline{u}$ cuesta más, $p.x' \geq p.x$. Es decir, esta correspondencia de demanda compensada va a estar formada por todos los x factibles, en el sentido de que con ellos es posible alcanzar un nivel de utilidad $\underline{u}$ ($u(x) \geq \underline{u}$), y que cuestan menos que cualquier otro x' factible ($u(x') \geq \underline{u}$). Es decir: $p.x' \geq p.x$.

Teorema 21

La correspondencia de demanda compensada es de valores no vacíos. Es decir:

$$\forall (p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho : \ H(p, \underline{u}) \neq \varnothing$$

Prueba

Fijamos un $(p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho$ y dado que $\underline{u} \in \mho$ es posible afirmar que $\exists x' \in \mathbb{R}^l_+ : \ u(x') = \underline{u}$. Es decir, se va a postular un x' cualquiera que también esta en $\mho$.

Definimos ahora el siguiente conjunto:

$$D(p, \underline{u}, \bar{x}) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u} \ \wedge \ p.\bar{x} \geq p.x\right\}$$

En primer lugar, este conjunto es distinto a $\mho$ ya que se ha incorporado la parte de $p.\bar{x} \geq p.x$. También es posible definir el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ de la siguiente manera:

$$D(p, \underline{u}, \bar{x}) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u}\right\} \cap B(p,\, p.\bar{x})$$

Es decir, el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ es la intersección del conjunto $\mho$ con un conjunto presupuestario $B(p,\, p.\bar{x})$. Por definición, el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x}) \neq \varnothing$ ya que cualquier presupuesto cumple la propiedad de hacer que $B(p,\, p.\bar{x}) \neq \varnothing$ y es posible afirmar que la intersección de un conjunto cualquiera con un conjunto no vacío será un conjunto no vacío.

Es necesario, ahora, que el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ cumpla además lo siguiente:

- Los conjuntos que lo forman deben ser cerrados.
- Si los conjuntos son cerrados, es posible afirmar que la intersección de dos conjuntos cerrados será un conjunto cerrado.
- Uno de los conjuntos que lo forman debe ser acotado ya que con la existencia de un conjunto acotado, se garantiza que la intersección también sea acotada (el conjunto acotado acota al otro).

El lector se habrá percatado entonces que es necesario que $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ sea cerrado y acotado con lo cual se cumple que $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ será compacto. La importancia de esta propiedad es que por el teorema de Weierstrass podemos garantizar que el conjunto compacto tendrá al menos un elemento, lo cual es precisamente la prueba.

Pasemos entonces a realizar la prueba por partes. Primero probemos que los conjuntos que forman $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ son cerrados.

$D(p, \underline{u}, \bar{x}) = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u}\right\} \cap B(p,\, p.\bar{x})$ es cerrado.

Para que un conjunto sea cerrado es necesario que cualquier secuencia definida sobre el conjunto converja a algún punto y ese punto pertenezca al conjunto.

Definamos así la secuencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}_+^l / u(x) \geq \underline{u}\}$. Supongamos que $x_n \to x \in \mathbb{R}_+^l$. La primera prueba consiste en probar lo siguiente:

$$x \in \mathbb{R}_+^l$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \{x_n \geq 0 \Rightarrow x \geq 0\}$$

Es decir, ya que en el límite se satisfacen las desigualdades débiles, si la secuencia converge a un x entonces ese $x \geq 0$ y por lo tanto: $x \in \mathbb{R}_+^l$.

La segunda parte de la prueba consiste en probar que efectivamente $\forall n \in \mathbb{N} : u(x_n) \geq \underline{u}$. La prueba consiste así en demostrar que $lim_{n\to\infty} u(x_n) \geq \underline{u}$. Es decir, es necesario probar que el límite de la secuencia existe y que ese límite cumple con la propiedad de ser $\geq \underline{u}$. Ya que se supone que la función de utilidad es continúa y que la secuencia converge a x se tiene que la función de utilidad conserva los límites de la secuencia y por lo tanto:

$$lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(x) \geq \underline{u}$$

Se ha probado entonces que una secuencia que hemos definido sobre el conjunto$\{x \in \mathbb{R}_+^l / u(x) \geq \underline{u}\}$ tiene la propiedad de que para cualquier x se cumple que $x \in \mathbb{R}_+^l$ y el límite de dicha secuencia, x, cumple la propiedad de que $u(x) \geq \underline{u}$. Por lo tanto, queda demostrado que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}_+^l / u(x) \geq \underline{u}\}$ es cerrado.

La otra parte de la prueba consiste en probar si el conjunto $B(p,\, p.\bar{x})$ es cerrado. Definamos de nuevo una secuencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R}_+^l / p.\bar{x} \geq p.x\}$.

Supongamos que la secuencia converge. Es decir $x_n \to x \in \mathbb{R}_+^l$. Ya antes se ha probado que es posible afirmar que el punto al que converge, x, cumple con la propiedad de ser tal que $x \in \mathbb{R}_+^l$. Es necesario ahora probar si:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\{ \begin{array}{c} x_n \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ p.x_n \leq p.\bar{x} \Rightarrow lim_{n\to\infty} p.x_n \leq p.\bar{x} \end{array} \right\}$$

Es decir, al estar definida la secuencia sobre el conjunto $B(p,\, p.\bar{x})$ esta debe cumplir las propiedades de cualquier elemento que pertenezca a dicho conjunto. Es posible asegurar por continuidad que $lim_{n\to\infty} p.x_n \to p.x \leq p.\bar{x}$. Por lo tanto, se comprueba así que el conjunto $B(p,\, p.\bar{x})$ es un conjunto cerrado.

Ya que la intersección de dos conjuntos cerrados da como resultado un conjunto cerrado, se cumple que $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ será un conjunto cerrado. Es necesario ahora probar si $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ es un conjunto acotado para lo cual basta probar si alguno de los conjuntos que lo forman es un conjunto acotado. Elijamos el conjunto $B(p,\, p.\bar{x})$. $\forall x \in B(p,\, p.\bar{x}), \forall l$ se cumple que $0 \leq x_l \leq \frac{p.\bar{x}}{p_l}$. Si no fuera así y pasara por ejemplo que $p_l x_l > p.\bar{x}$ se tendría la situación en que en un solo bien se estaría destinando más de la renta disponible[20] y esta propiedad, viola lo que hemos llamado la ley de Walras. Por otra parte, el supuesto $0 \leq p_l x_l$ no genera mayor problema.

Se cumple entonces que el conjunto $B(p,\, p.\bar{x})$ está acotado y por lo tanto, se tiene como resultado que el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ también es acotado. Con la propiedad que se había probado antes (el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ es un conjunto cerrado) se tiene como resultado que $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ es un conjunto compacto y por el teorema de Weierstrass se puede asegurar que en $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ existe un elemento tal que:

$$(\exists x^* \in D(p, \underline{u}, \bar{x})) : \forall x \in D(p, \underline{u}, \bar{x}) : \; p.x^* \leq p.x$$

Es decir, por Weierstrass existe un elemento x^* que es mínimo.

Es necesario recordar que era necesario un mínimo para el conjunto $\mho$ el cual después de interceptarlo con $B(p,\, p.\bar{x})$ dieron como resultado el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$. Conjunto el cual fue, finalmente, al que se le encontró un elemento mínimo. Se necesita entonces que elemento encontrado cumpla lo siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u} : \; p.x^* \leq p.x$$

Por lo tanto, se debe cumplir que para cualquier otro elemento $x \in \mathbb{R}^l_+$ que sea factible, $u(x) \geq \underline{u}$, se cumpla que el elemento encontrado x^* sea realmente un mínimo en el conjunto $\mho$ es decir: $p.x^* \leq p.x$

Se necesita probar entonces que para un $x \in D(p, \underline{u}, \bar{x})$ o que no este en el conjunto, $x \notin D(p, \underline{u}, \bar{x})$, se cumpla que $p.x^* \leq p.x$. Por definición, si se toma un elemento x que pertenezca al conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ es posible asegurar por Weierstrass que el mínimo es x^* y por lo tanto $p.x^* \leq p.x$.

Por otra parte, si se toma un elemento x que no pertenezca a $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ es porque se cumple que $p.x > p.\bar{x}$ y por lo tanto $p.x > p.\bar{x} > p.x^*$. Es decir, ese

[20] En este caso $p.\bar{x}$ hace el papel de renta m.

$x \notin D(p, \underline{u}, \bar{x})$ no sería financiable y no podría por ello ser un mínimo. Se llega así que la cota impuesta sobre $\mho$, $p.x \leq p.\bar{x}$ con la cual se formo el conjunto $D(p, \underline{u}, \bar{x})$ lo único que ha hecho es excluir los x no financiables del conjunto $\mho$ y en realidad no ha tenido mayor influencia.

Podemos asegurar entonces que el elemento mínimo hallado pertenece al conjunto $\mho$ y por lo tanto, la correspondencia de demanda compensada es no vacía, es decir: $H(p, \underline{u}) \neq \varnothing$ ■

Teorema 22

La correspondencia de demanda compensada es homogénea de grado cero en precios p. Es decir:

$$\left(\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho, \forall \lambda \in \mathbb{R}^l_{++}\right)$$

Se cumple:

$$H(\lambda p, \underline{u}) = H(p, \underline{u})$$

En cierta forma este teorema nos ilustra que para el consumidor no importan los precios absolutos si no los precios relativos. Es decir, si varían los precios en la misma proporción la demanda no varía ya que el nivel de utilidad a alcanzar no cambia (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:61).

Prueba

La homogeneidad de grado cero en p se debe a que el vector óptimo que minimiza $p.x$ s.a $u(x) \geq \underline{u}$ es el mismo que minimiza $\lambda p.x$ sujeto a la misma restricción, para cualquier escalar $\lambda > 0$. Es decir, si lo que se pretende es minimizar el gasto $p.x$, cuando se alteran todos los precios por un escalar λ no cambia el objeto a minimizar ya que todos los precios cambiaron en una proporción igual. ■

Teorema 23

$$\left(\forall (p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho,\ \forall x \in H(p, \underline{u})\right) : u(x) = \underline{u}$$

Este teorema, llamado teorema de no exceso de utilidad, establece que todo x en el óptimo la utilidad que se le exige debe ser exactamente $\underline{u}$, ni más ni menos. Es decir, cualquier canasta que sea óptima debe dar el nivel de utilidad requerido. Este teorema, en cierta forma, cumple el papel de la ley de Walras en la correspondencia de demanda ordinaria o no compensada.

Prueba

Se fija cualquier $p \in \mathbb{R}^l_{++}$. Se trae de nuevo el supuesto crucial de monotocidad débil que establece que $u(x) \geq u(0)$. Se tienen así dos casos:

i) $u(x) = u(0) \rightarrow H(p, \underline{u}) = \{0\}$**.** Es decir, si el agente consume algo que tiene valor y por lo tanto $p \gg 0$, lo más barato en el caso de que lo que adquirió reporte un nivel de utilidad $u(x) = u(0)$ sería no adquirir nada y así $H(p, \underline{u}) = \{0\}$. Se observa además que el caso en que $u(x) < u(0)$ no se tiene en cuenta ya que en esta ocasión lo que adquirió el agente sería un ´´mal´´ que le reporta desutilidad y lo mejor en este caso sería no adquirir nada.

Es posible afirmar entonces que $x \in H(p, \underline{u}) : u(x) = \underline{u}$

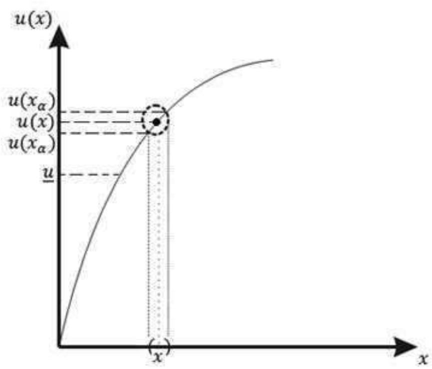
ii) $u(x) > u(0)$**.** Supongamos que el $x \in H(p, \underline{u})$ es tal que $x > 0 \Rightarrow p.x > 0$. Primero se debe aclarar que el hecho de que $x > 0$ es necesario ya que se supone $u(x) > 0$ y $p \gg 0$ lo que garantiza que $p.x > 0$.

Tomemos ahora un $\alpha \in (0, 1)$ y sea $x_\alpha = \alpha.x$. Ya que $\alpha < 1$ y $p.x > 0$ es posible afirmar que $x_\alpha \in \mathbb{R}^l_+$ y por tanto $p.x_\alpha < p.x$ debido a que $\alpha < 1$ hace que $x_\alpha < x$ y así x_α es financiable.

Supongamos que sucede que $u(x) > \underline{u}$. En este caso, por continuidad de la función de utilidad, existe un $\alpha \in (0, 1)$ y un $x_\alpha \in \mathbb{R}^l_+$ tal que $u(x_\alpha) \geq \underline{u}$ y $p.x_\alpha < p.x$. Pero esto va en contradicción de que x fuera un óptimo y por tanto, va en contradicción de que $x \in H(p, \underline{u}) \rightarrow\leftarrow$ ■

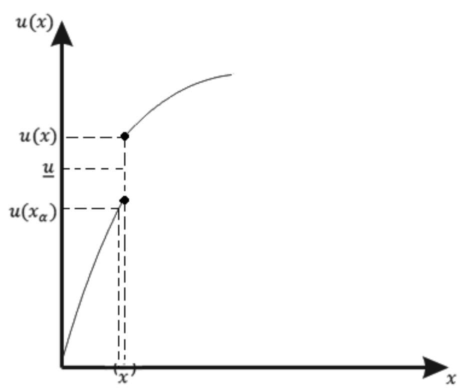
Es posible afirmar entonces que $x \in H(p, \underline{u}) : u(x) = \underline{u}$. La representación gráfica de la prueba se muestra a continuación.

Gráfico 7



En el caso en que la función de utilidad no fuera continua el teorema no se podría verificar. Veamos el caso graficamente.

Gráfico 8



Cuando la función de utilidad no es continua, el x_α que se encuentra a la izquiera de x podría dar menos utilidad que $\underline{u}$ y esto hace que esta cesta de entrada no sea factible.

Se ha establecido entonces que $\forall x \in H(p, \underline{u}) : \ u(x) = \underline{u} > u(0)$

Tal como se verifica, es realmente importante el supuesto de que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+\right)$: $u(x) \geq u(0)$ ya que de tomarse el caso de que $u(x) < u(0)$ el teorema no se cumpliría, veamos.

Inicialmente es necesario aclarar de entrada que $u(x) < u(0)$ implica que x sería un ´´mal´´. Por lo tanto se está intentando comprobar lo siguiente:

$\exists \underline{u}^{mal} \in \mho$ tal que $\underline{u}^{mal} < u(0)$.

En este caso, necesariamente $H(p, \underline{u}^{mal}) = \{0\}$, sería cero siempre y cuando cero sirva en el mínimo ya que no se puede gastar menos que no gastar nada. Por lo tanto si $H(p, \underline{u}^{mal}) = \{0\}$ no es cierto que $u(0) > \underline{u}^{mal}$ ya que hay puntos óptimos en que se obtienen estrictamente más utilidad de lo que la cesta exige, ya que en cero se tiene más utilidad. Luego el supuesto de que $u(x) \geq u(0)$ no es una necesidad técnica para que la prueba funcione, es que sin este supuesto el teorema no es cierto.

Teorema 24

Si $u(x)$ es cuasicóncava entonces $H(p, \underline{u})$ es de valores convexos y si $u(x)$ es estrictamente cuasicóncava entonces $H(p, \underline{u})$ es de valores unitarios. Es decir:

$$\forall (p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho : H(p, \underline{u}) = \{h(p, \underline{u})\}$$

Se tiene entonces, en el último caso, que la correspondencia de demanda compensada pasa a ser una función. La función de demanda compensada puede expresare también como:

$$h : \mathbb{R}^l_{++} \times \mho \to \mathbb{R}^l_{+}$$

$$h(p, \underline{u}) = arg_{x \in \mathbb{R}^l_{+}} min\, p.x \;\; s.a\; u(x) \geq \underline{u}$$

La prueba es bastante parecida a la que se hizo con la correspondencia de demanda ordinaria y la omitiremos.

Teorema 25

Se cumple la ley compensada de la demanda. Es decir:

$$\forall p, p' \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho, \forall x \in H(p, \underline{u}) \text{ y } \forall x' \in H(p', \underline{u})$$

se cumple:

$$(p - p')(x - x') \leq 0$$

$$\triangle p \triangle x \leq 0$$

Con este teorema se establece una de las principales proposiciones de la teoría del consumidor, dados los axiomas establecidos, y es que las cantidades demandadas varían en forma opuesta a los precios o lo que es equivalente: el efecto sustitución es inverso a la variación de los precios.

Este teorema también recibe el nombre de *Teorema fundamental de la teoría del consumidor* (Green, 1982).

Prueba

Se fija un $p, p' \in \mathbb{R}^l_{++}$. Por definición:

$p.x \leq p.x'$ ya que a los precios p la demanda óptima es $x \in H(p, \underline{u})$.

$p'.x' \leq p'.x$ ya que a los precios p' la demanda óptima es $x' \in H(p', \underline{u})$.

La primera desigualdad es equivalente a tener: $p(x - x') \leq 0$ y de la segunda se puede llegar a: $p'(x' - x) \leq 0$

Sumando las dos desigualdades:

$$p(x - x') + p'(x' - x) \leq 0$$

$$(p - p')(x - x') \leq 0$$

Definiendo $\triangle p = (p - p')$ y $\triangle x = (x - x')$ se llega finalmente a la ley compensada de la demanda, $\triangle p \triangle x \leq 0$. ■

Es necesario tener en cuenta que la ley compensada de la demanda o la variación inversa entre precios y cantidades sólo se cumple en las demandas compensadas y no en las demandas ordinarias (no compensadas) ya que allí existe el problema de los bienes Giffen (bienes muy inferiores). Sin embargo, en la correspondencia de demanda ordinaria hemos establecido, y probado, otro de los pilares de la racionalidad: El Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Corolario 6

Si la correspondencia de demanda compensada $H(p, \underline{u})$ es homogénea de grado cero en precios, entonces $h(p, \underline{u})$ también lo es.

1.14. La función de gasto

Teniendo definidas las propiedades sobre la correspondencia de demanda compensada $H(p, \underline{u})$, y establecido bajo qué condiciones ella se convierte en una función, es posible definir lo que se conoce como la función de gasto y los teoremas que de ella se desprenden.

La función de gasto está definida como:

$$e : \mathbb{R}^l_+ \times \mho \rightarrow \mathbb{R}^l_+$$

$$e(p, \underline{u}) = min_{x \in \mathbb{R}^l_+} p.x \; s.a \; u(x) \geq \underline{u}$$

$$e(p, \underline{u}) = p.x, \text{ para cualquier } x \in H(p, \underline{u}) \neq \varnothing$$

La función de gasto es entonces la cantidad mínima de renta necesaria para lograr el nivel de utilidad $\underline{u}$ a los precios p.

Teorema 26

La función de gasto $e(p, \underline{u})$ es homogénea de grado uno en precios. Es decir:

$$\left(\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho, \forall \lambda > 0\right) : \; e(\lambda p, \underline{u}) = \lambda e(p, \underline{u})$$

Prueba

Si x minimiza el gasto a los precios p, x también minimiza el gasto a los precios λp. Supongamos que no fuera así y que fuera x' la combinación minimizadora de gasto a los precios λp tal que: $\lambda p.x' < \lambda p.x$

Simplificando y cancelando λ esto implicaría que $p.x' < p.x$ por tanto se contradice el hecho de que a los precios p la solución minimizadora es x. Así, la solución minimizadora del gasto no varía cuando se multiplican los precios por un escalar $\lambda > 0$ y el gasto debe multiplicarse exactamente por el mismo escalar: $e(\lambda p, \underline{u}) = \lambda e(p, \underline{u})$ (Varian, 1992:86).

Recordemos también que antes se había probado que la función de demanda compensada $h(p, \underline{u})$ es homogénea de grado cero en precios. Ya que la función de gasto también está definida como $e(p, \underline{u}) = p.h(p, \underline{u})$ se tiene entonces que al variar los precios por un escalar $\lambda > 0$, $h(p, \underline{u})$ no cambia y lo único que cambia es el nivel de gasto $e(p, \underline{u})$. Es decir:

$$e(\lambda p, \underline{u}) = \lambda p.h(p, \underline{u}) = \lambda e(p, \underline{u}) \quad \blacksquare$$

Teorema 27

La función de gasto $e(p, \underline{u})$ es estrictamente creciente en $\underline{u}$ y no decreciente en p. Es decir:

$$i) \quad \forall p \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u}, \underline{u}' : \underline{u} > \underline{u}' \Longrightarrow e(p, \underline{u}) > e(p, \underline{u}')$$

$$ii) \quad \forall \underline{u} \in \mho, \forall p, p' : p > p' \Longrightarrow e(p, \underline{u}) \geq e(p', \underline{u})$$

Con este teorema se establece, entonces, que para alcanzar niveles de utilidad más alto es necesario gastar más renta. Por otra parte, se establece también que cuando suben los precios y se desea mantener el mismo nivel de utilidad, es necesario gastar por lo menos la misma renta que antes de la variación de los precios. Es decir, cuando suben los precios el nivel de gasto no puede ser menor y mínimo debe ser igual que el existente antes de la variación en caso de que se presente alguna sustitución de bienes cuando suben los precios.

Prueba

i) Fijamos un $p, \underline{u}, \underline{u}' \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho$. Supongamos que $\underline{u} > \underline{u}'$ pero sucede que $e(p, \underline{u}) \leq e(p, \underline{u}')$

Sea un $x \in H(p, \underline{u})$. Por definición para todo x óptimo de la correspondencia se cumple que $u(x) \geq \underline{u}$. Ya que se ha impuesto que $\underline{u} > \underline{u}'$ se tiene: $u(x) \geq \underline{u} \geq \underline{u}'$. Además: $p.x = e(p, \underline{u}) \leq e(p, \underline{u}')$

Por lo tanto, también es posible afirmar que $x \in H(p, \underline{u}')$ y $u(x) > \underline{u}'$ pero si esto ocurre se llega a que x esta dando más utilidad que el nivel requerido contradiciendo el axioma de no exceso de utilidad. Por lo tanto si $\underline{u} > \underline{u}$ debe suceder que $e(p, \underline{u}) \geq e(p, \underline{u}')$ ■

ii) Supongamos que $p \leq p'$ siendo x y x' las combinaciones minimizadoras del gasto a los precios p y p' respectivamente. En este caso, $p.x \leq p.x'$ ya que a los precios p la combinación minimizadora es x y no x'. Además $p.x' \leq p'.x'$ ya que $p \leq p'$. Uniendo las dos desigualdades se llega a que $p.x \leq p'.x'$ y por lo tanto: $e(p, \underline{u}) \leq e(p', \underline{u})$ (Varian, 1992:86). ■

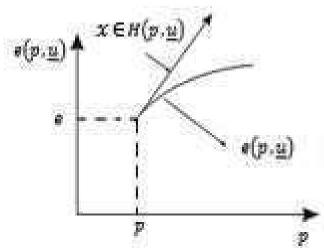
Teorema 28

La función de gasto $e(p, \underline{u})$ es cóncava en precios. Es decir:

$$\left(\forall p, p' \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho, \forall \lambda \in [0,1]\right) : e(\lambda p + (1-\lambda)p', \underline{u}) \geq \lambda e(p, \underline{u}) + (1-\lambda)e(p', \underline{u})$$

Con este teorema se establece entonces que a precios mayores el gasto crece pero cada vez menos. Por lo tanto, se esta contemplando indirectamente la posibilidad de que a precios mayores exista la posibilidad de sustituir los bienes que hacen más caros en relación con otros y así, el gasto al aumentar los precios crece pero no en la misma proporción[21]. Después se va a demostrar que el gradiente, la razón de cambio de la función de gasto, es precisamente la demanda compensada.

Gráfico 9



Prueba

Fijamos $p, p' \in \mathbb{R}^l_{++}, \underline{u} \in \mho, \lambda \in [0,1]$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+ : \ u(x) \geq \underline{u}\right) : p.x \geq e(p, \underline{u}) \text{ y } p'.x \geq e(p', \underline{u})$$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^l_+ : \ u(x) \geq \underline{u}\right) : \lambda p.x \geq \lambda e(p, \underline{u}) \text{ y } (1-\lambda)p'.x \geq (1-\lambda)e(p', \underline{u})$$

Sumando las dos desigualdades:

$$\lambda p.x + (1-\lambda)p'.x \geq \lambda e(p, \underline{u}) + (1-\lambda)e(p', \underline{u})$$

[21]Nótese que la concavidad es entonces un concepto cardinal y no ordinal, lo que es pertinente para la función de gasto $e(p, \underline{u})$ que es ante todo renta (pesos) es decir, un concepto cardinal.

$$(\lambda p + (1-\lambda)p').x \geq \lambda e(p, \underline{u}) + (1-\lambda)e(p', \underline{u})$$

Por definición si $x \in H(\lambda p + (1-\lambda)p', \underline{u})$ se cumple:

$$(\lambda p + (1-\lambda)p').x \geq e(\lambda p + (1-\lambda)p', \underline{u})$$

Por lo tanto:

$$e(\lambda p + (1-\lambda)p', \underline{u}) \geq \lambda e(p, \underline{u}) + (1-\lambda)e(p', \underline{u}) \quad \blacksquare$$

Teorema 29

Dualidad:

Bajo los supuestos de no saciedad local, $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ y una función de utilidad continua se cumple:

i) $\forall m \geq 0,\ x^* \in X(p,m) \Rightarrow x^* \in H(p, u(x^*))$

ii) $\forall \underline{u} \in \mho,\ x^* \in H(p, \underline{u}) \Rightarrow x^* \in X(p, p.x^*)$

Con este teorema se afirma entonces, en la primera parte, que el x^* que maximiza la utilidad a los precios p y renta m también minimiza el gasto a los precios p con un nivel de utilidad $u(x^*)$.

La segunda parte del teorema establece que el x^* que minimiza el gasto a los precios p para alcanzar un nivel de utilidad $\underline{u}$ también maximiza la utilidad a los precios p dada una renta $p.x^*$. Con este teorema de la dualidad es que adquiere sentido el problema de la minimización de gasto, ya que se está afirmando que dicho problema tiene su equivalente en el problema de la maximización de la utilidad.

Prueba

1. Fijamos un $m \geq 0$ y supongamos que $x^* \in X(p,m)$ pero que $x^* \notin H(p, u(x^*))$. Se esta afirmando entonces lo siguiente:

i) Ya que $x^* \in X(p,m)$ se está suponiendo que x^* es factible y por lo tanto, dado el problema de la maximización de la utilidad, un x^* factible cumple con que $p.x^* \leq m$

ii) Ya que $x^* \in X(p,m)$ estamos suponiendo que x^* es un óptimo y por tanto:

$$\forall x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \leq m : \; u(x) \leq u(x^*)$$

Es decir, al ser x^* un óptimo debe dar por lo menos la misma utilidad que cualquier otro x factible ($p.x \leq m$).

iii) Ya que $x^* \notin H(p, u(x^*))$ es porque existe otro $\tilde{x}$ que es factible. Recordemos que factible en este caso de la correspondencia de demanda compensada es aquel que da por lo menos un nivel de utilidad $u(x^*)$ pero que cuesta menos que x^* Es decir:

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^l_+ / u(\tilde{x}) \geq u(x^*) \; \wedge \; p.\tilde{x} < p.x^*$$

Se nota entonces que un x^* que satisfaga *i*) y *iii*) hace que $p.\tilde{x} < p.x^* = m$ y por tanto: $p.\tilde{x} < m$. A su vez de *ii*) y *iii*) se tiene:

$$\forall x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \leq m : \; u(x) \leq u(\tilde{x})$$

Se tiene así que por definición $\tilde{x} \in X(p, m)$ con $p.\tilde{x} < m$ pero esto va en contra de que x^* sea un óptimo y daría como resultado de que $x^* \notin X(p, m)$ ya que existe un $\tilde{x}$ con el cual se alcanza el mismo nivel de utilidad que con x^* pero con el que es necesario un menor gasto. A su vez, esto va en contravía de la ley de Walras dado que el supuesto de no saciedad, establecido al inicio, impone como condición de que no puede existir un $\tilde{x}$ con el que se no agote la renta es decir: no puede darse el caso de que $\exists \tilde{x} : p.\tilde{x} < m$ ■

2. Fijamos un $\underline{u} \in \mho$ y supongamos que $x^* \in H(p, \underline{u})$ pero que $x^* \notin X(p, p.x^*)$. Se está afirmando entonces lo siguiente:

i) Ya que $x^* \in H(p, \underline{u})$ estamos suponiendo que x^* es factible y cumple lo siguiente: $u(x^*) \geq \underline{u}$

ii) Ya que $x^* \in H(p, \underline{u})$ estamos suponiendo que x^* es un óptimo y por tanto:

$$x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u} : \; p.x \geq p.x^*$$

Es decir, al ser x^* un óptimo, para cualquier otro x factible ($u(x) \geq \underline{u}$) el gasto debe ser mayor $p.x \geq p.x^*$

iii) Ya que $x^* \notin X(p, p.x^*)$ es porque existe otro $\tilde{x}$ con el que se alcanza un gasto por lo menos igual; $p.x^* \geq p.\tilde{x}$ pero que brinda más utilidad: $u(\tilde{x}) > u(x^*)$. Es decir:

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^l_+ / p.\tilde{x} \leq p.x^* \; \wedge \; u(\tilde{x}) > u(x^*)$$

Se nota entonces que un x^*que satisfaga $i)$ y $iii)$ hace que se pueda establecer que $u(\tilde{x}) > \underline{u}$. A su vez de $ii)$ y $iii)$ se tiene:

$$\forall x \in \mathbb{R}^l_+ / u(x) \geq \underline{u} : \; p.x \geq p.x^* \geq p.\tilde{x}$$

Con base en esto podemos establecer que, por definición, el resultado es $\tilde{x} \in H(p, \underline{u})$ con $u(\tilde{x}) > \underline{u}$ pero esta ve en contradicción de que x^* sea un óptimo y por lo tanto se llegaría a que $x^* \notin H(p, \underline{u})$ ya que existe un $\tilde{x}$ que cuesta por lo menos lo mismo que x^* pero que brinda más utilidad. A su vez esto va en contradicción del teorema de no exceso de utilidad que se desprende del supuesto inicial de que $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ ■

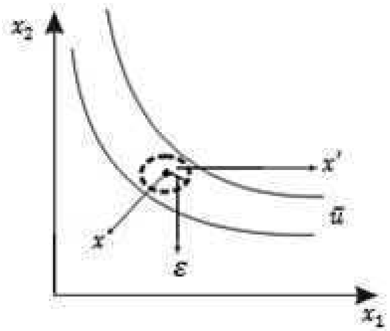
1.15. Importancia de los precios mayores a cero y la no saciedad local

Es necesario establecer la importancia que tienen los supuestos sobre los que hemos hecho las pruebas anteriores, a saber: no saciedad local y precios estrictamente mayores a cero.

No saciedad local

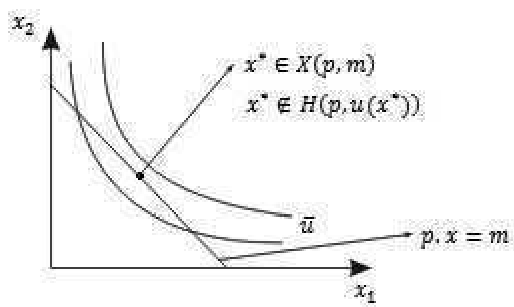
Una función de utilidad que viole el principio de no saciedad local implica curvas de indiferencia gruesas ya que de no cumplirse la no saciedad local, es porque para un $x \in \mathbb{R}^l_+$ existe un x' cualquiera, tal que $x' \in B_\varepsilon(x)$. No obstante, esta cesta brinda el mismo nivel de utilidad. Gráficamente equivale a tener:

Gráfico 10



El problema que se presenta es que en el caso de dar solución al problema de maximización de utilidad (sujeto a restricciones de presupuesto) se presentaría *holgura en el gasto* para alcanzar un nivel de utilidad $\underline{u}$. Es decir, si bien se resuelve el problema de maximización de la utilidad y por tanto se encuentra un $x^* \in X(p, m)$ no obstante, queda sin resolver el problema de la minimización gasto ya que no es posible encontrar un solo minimizador para alcanzar un nivel de utilidad $\underline{u}$ como se observa en el siguiente grafico.

Gráfico 11



Precios mayores a cero

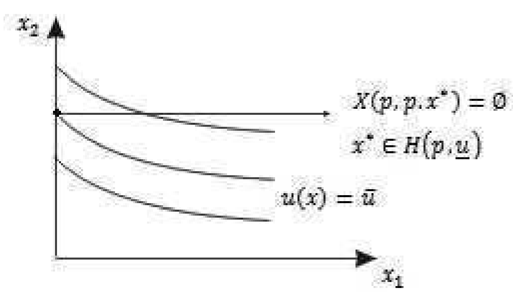
Supongamos que no todos los precios cumplen el principio de $p \in \mathbb{R}^l_{++}$ y que existe un bien para el cual el precio es cero, es decir $p = 0$. En este caso estaríamos postulando un bien que es gratis y por tanto, bajo el supuesto de no saciedad local, el consumo de dicho bien sería infinito.

Por otra parte, si vamos al caso de $\mathbb{R}^2$ la recta presupuestal es $p_1x_1+p_2x_2 = m$ pero bajo el supuesto de que, por ejemplo, $p_2 = 0$ se tendría una recta $p_1x_1 = m$ cuya pendiente ya no seria $-\frac{p_1}{p_2}$ ya que bajo el supuesto de $p_2 = 0$ se vuelve igual a ∞. Por lo tanto, en este caso, siempre el agente agente consumidor va a tratar de maximizar su utilidad con base en el bien gratis y no consumirá del bien x_1. Así, en la presencia de bienes gratis, nunca maximizará su utilidad y el resultado sería: $X(p, p.x^*) = \varnothing$.

Por otra parte, si bien existe un x^* que minimiza el gasto, ya que el gasto mínimo va a ser igual a cero, siempre será posible obtener mayor nivel de utilidad a $\underline{u}$ y por lo tanto, hay *holgura en el nivel de utilidad*.

Con base en lo anterior se desprende un resultado clave. Si un consumidor está maximizando su utilidad y no existe consumo de saciedad en su conjunto de consumo, entonces el resultado es que no todas las mercanías pueden ser gratuitas o tener precio cero (Lozano, Monsalve y Villa (1999:48).

Gráfico 12



Corolario 7

1. Si se cumple el supuesto de no saciedad local entonces $\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho, \forall m \in \mathbb{R}^l_{++}$ se cumple:

i) $e(p, v(p, m)) \equiv m$

ii) $v(p, e(p, \underline{u})) \equiv \underline{u}$

La primera parte específica que el gasto mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad $v(p, m)$ es precisamente m. Con la segunda parte se específica que la utilidad máxima generada por la renta $e(p, \underline{u})$ es u.

2. Si $u(x)$ es estrictamente cuasicóncava se cumple lo siguiente:

i) $h(p, v(p, m)) \equiv x(p, m)$

ii) $x(p, e(p, \underline{u})) \equiv h(p, \underline{u})$

La primera parte establece que la demanda compensada (hicksiana) correspondiente al nivel de utilidad $v(p, m)$ es equivalente a la demanda no compensada (marshalliana) correspondiente a la renta m. La segunda parte establece que la demanda no compensada (marshalliana) correspondiente al nivel de renta $e(p, \underline{u})$ es equivalente a la demanda compensada (hicksiana) correspondiente al nivel de utilidad $\underline{u}$.

1.16. Enfoque desde el análisis diferencial

En necesario recordar que nuestra función de utilidad está definida como $U(x) : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$. Esta función de utilidad continua, cuasicóncava, monótona y definida sobre $\mathbb{R}^l_{++}$ para soluciones interiores, le vamos a agregar ahora el supuesto:

$$u(x) \geq u(0)$$

Más formalmente:

$$\mho^0 = int\, \mho = (u(0), sup_{x \in \mathbb{R}^l_+} u(x))$$

Con base a los teoremas establecidos antes, es posible afirmar entonces que las siguientes funciones de demanda:

$$x : \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^l_{++}$$

$$h : \mathbb{R}^l_{++} \times \mho^0 \to \mathbb{R}^l_{++}$$

son funciones únicas y están definidas en el interior. Con lo anterior, se puede afirmar por dualidad que $h(p, \underline{u})$ es diferenciable ya que $x(p, m)$ es diferenciable.

Más exactamente:

$$\forall (p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho^0 \to x = h(p, \underline{u})$$

Si y sólo sí:

$\exists\mu > 0$ tal que satisface: $p = \mu Du(x)$ y $u(x) = \underline{u}$. Donde estas propiedades vienen de la solución al problema de la minimización de gasto:

$$min\, p.x\; s.a\; u(x) = \underline{u}$$

Este problema de maximización con restricciones, se resuelve mediante la condiciones para un óptimo del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = p.x + \mu(u(x) - \underline{u})$$

Condiciones de primer orden (C.P.O) para un óptimo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} :\; p = \mu Du(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} :\; u(x) = \underline{u}$$

Teniendo en cuenta que $h(p, \underline{u})$ es diferenciable y que $x = h(p, \underline{u})$ vamos entonces a definir los teoremas que en el mundo diferencial se tienen para el problema de la minimización del gasto.

Teorema 30

$\forall(p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++} \times \mho^0$ la función de gasto $e : \mathbb{R}^l_{++} \times \mho^0 \rightarrow \mathbb{R}^l_{++}$ es diferenciable.

Prueba

Recordemos que $e(p, \underline{u}) = p.h(p, \underline{u}))$ y ya que $h(p, \underline{u})$ es diferenciable, $e(p, \underline{u})$ también es diferenciable por el teorema del máximo. ■

Teorema 31

$\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho^0, \forall l \in \{1, 2, ..., L\}$ se cumple:

$$\frac{\partial e}{\partial p_l}(p, \underline{u}) = h_l(p, \underline{u})$$

La notación matricial sería:

$$(\forall p, \forall \underline{u} :\; D_p e(p, \underline{u}) = h(p, \underline{u}))$$

Este teorema recibe el nombre de Lema de Shepard (1953).

Prueba

Se fija un $(p, \underline{u}) \in \mathbb{R}^l_{++}$. Por definición:

$$e(p, \underline{u}) = p.h(p, \underline{u})$$

Derivando respecto a p_l:

$$\frac{\partial e}{\partial p_l}(p, \underline{u}) = h_l(p, \underline{u}) + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h_k(p, \underline{u})}{\partial p_l}$$

Teniendo en cuenta que $x = h(p, \underline{u})$ y que además $u(x) = \underline{u}$ se tiene entonces:

$$u(h(p, \underline{u}) = \underline{u}$$

Derivando parcialmente con respecto a p_l se tiene:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(h(p, \underline{u}))}{\partial x_k} . \frac{\partial h_k(p, \underline{u})}{\partial p_l} = 0$$

Recordemos además las C.P.O del problema de minimización:

$$p = \mu Du(x)$$

$$Du(x) = \frac{p}{\mu(p, \underline{u})}$$

Llevando las C.P.O a la expresión anterior se llega a:

$$\frac{1}{\mu(p, \underline{u})} \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial h_k(p, \underline{u})}{\partial p_l} = 0$$

Existen entonces dos posibilidades para la igualdad:

$$\frac{1}{\mu(p, \underline{u})} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial h_k(p, \underline{u})}{\partial p_l} = 0$$

Por el método de Lagrange es necesario que $\mu(p, \underline{u}) \neq 0$ y por lo tanto

$\frac{1}{\mu(p,\underline{u})} \neq 0$. Además ya que $p_k \neq 0$ se tiene entonces como única opción:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h_k(p,\underline{u})}{\partial p_l} = 0$$

Teniendo en cuenta ello, la expresión inicial:

$$\frac{\partial e}{\partial p_l}(p,\underline{u}) = h_l(p,\underline{u}) + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h_k(p,\underline{u})}{\partial p_l}$$

Se convierte en:

$$\frac{\partial e}{\partial p_l}(p,\underline{u}) = h_l(p,\underline{u})$$

Este es precisamente el Lema de Shepard[22]. ■

Corolario 8

Si la función de gasto $e(p,\underline{u})$ es cóncava en precios, entonces la función de demanda compensada $h(p,\underline{u})$ es de pendiente negativa. Es decir: se cumple el teorema fundamental de la teoría del consumidor:

$$\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_i} < 0$$

Prueba

Debido a que $e(p,\underline{u})$ es cóncava se tiene que la matriz de segundas derivadas o matriz hessiana es semidefinida negativa y así sus menores principales son negativos. Esos menores principales van a ser precisamente $\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_i}$ por el lema de Shepard.■

Teorema 32

$\forall p, \underline{u}$ se cumple:

$$D_p h(p,\underline{u}) = D^2_{pp} e(p,\underline{u})$$

Es una matriz simétrica, semidefinida negativa, singular y de rango $L-1$.

[22]El lector puede notar que el teorema es una aplicación directa del teorema de la envolvente.

Prueba

Por el lema de Shepard se tiene que $D_p e(p,\underline{u}) = h(p,\underline{u})$. Ahora, ya que $e(p,\underline{u})$ cumple la propiedad de ser una función cóncava, la matriz de segundas derivadas de $e(p,\underline{u})$ es semidefinida negativa y además, por ser una matriz de segundas derivadas o matriz Hessiana, es una matriz simétrica por el teorema de Young. ■

Es necesario recordar que la función de gasto también esta definida como $e(p,\underline{u}) = p.h(p,\underline{u})$ y por lo tanto, la matriz de segundas derivadas de la función de gasto va a estar formada por los cambios que experimentan las demandas compensadas al variar los precios. Esta matriz es entonces la matriz de efecto sustitución ya que, por definición, en las demandas compensadas se compensa la renta cuando se altera el precio para mantener un nivel de utilidad constante y por tanto, las propiedades de la matriz $D_p h(p,\underline{u}) = D^2_{pp} e(p,\underline{u})$ son equivalentes a las de la matriz de efecto sustitución S de Slutsky definida antes.

Teorema 33

$\forall p, \underline{u}, \forall l, k \in \{1, 2, ..., L\}$ se cumple:

$$\frac{\partial h_k(p,\underline{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_k} + x_k(p,m)\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m}$$

con $m = e(p,\underline{u})$

La notación en forma matricial sería:

$$\forall p, \underline{u} : \left(D_p h(p,\underline{u}) = D_p x(p,m) + D_m x(p,m) x^T(p,m)\right)$$

Este teorema se conoce nuevamente como la Ecuación de Slutsky y no es trivial que se hubiera llegado nuevamente a él por la vía del problema de la demanda compensada o hicksiana. Más abajo explicamos a qué nos referimos.

Prueba

Por el corolario 7 se tiene:

$$h_l(p,\underline{u}) = x_l(p, e(p,\underline{u}))$$

Derivando parcialmente respecto a p_k:

$$\frac{\partial h_l(p,\underline{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,e(p,\underline{u}))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,e(p,\underline{u}))}{\partial m} . \frac{\partial e(p,\underline{u})}{\partial p_k}$$

Por el lema de Shepard se tiene:

$$\frac{\partial e(p,\underline{u})}{\partial p_k} = h_k(p,\underline{u})$$

Por tanto:

$$\frac{\partial h_l(p,\underline{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,e(p,\underline{u}))}{\partial p_k} + h_k(p,\underline{u})\frac{\partial x_l(p,e(p,\underline{u}))}{\partial m}$$

Nuevamente por el corolario 7 se tiene:

$$h_k(p,\underline{u}) = x_k(p,e(p,\underline{u}))$$

Se llega entonces:

$$\frac{\partial h_l(p,\underline{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,e(p,\underline{u}))}{\partial p_k} + x_k(p,e(p,\underline{u}))\frac{\partial x_l(p,e(p,\underline{u}))}{\partial m}$$

Bajo el supuesto de que $m = e(p,\underline{u})$ se llega finalmente:

$$\frac{\partial h_k(p,\underline{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_k} + x_k(p,m)\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} \quad \blacksquare$$

1.17. La equivalencia de los enfoques de Hicks y Slutsky

Corolario 9

Teniendo el cuenta el teorema anterior:

i) $D_p h(p,\underline{u}) = D_p x(p,m) + D_m x(p,m)x^T(p,m)$

Tomando de nuevo lo que se ha definido como el aporte de Slutsky, en el problema de la maximización de la utilidad, se tiene:

ii) $D_p x(p,m) = S(p,m) - D_m x(p,m)x^T(p,m)$

Nótese entonces lo siguiente:

iii) $S(p,m) = D_p x(p,m) + D_m x(p,m)x^T(p,m)$

Por lo tanto de *i)* y *iii)* se cumple:

$$S(p,m) = D_p h(p,\underline{u})$$

Es decir, con los teoremas establecidos hasta el momento podemos afirmar que los aportes de Slutsky y Hicks son equivalentes como aproximaciones para especificar lo que se denomina el efecto sustitución.

Se puede observar entonces que Hicks al igual que Slutsky divide las variaciones de la demanda ante cambios en los precios en dos componentes:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_k(p,\underline{u})}{\partial p_k} - x_k(p,m)\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m}$$

La diferencia con respecto a Slutsky es que aproxima el efecto sustitución mediante las demandas compensadas (o hicksianas), $\frac{\partial h_k(p,\underline{u})}{\partial p_k}$, ya que en estas demandas hay una renta implícita que compensa la renta para mantener un nivel de utilidad constante[23]. La otra parte en que divide la variación de la demanda, es lo que se denomina efecto renta, $x_k(p,m)\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m}$. No obstante, hemos comprobado anteriormente que las dos aproximaciones son equivalentes. Una prueba más formal la presentamos a continuación.

Prueba

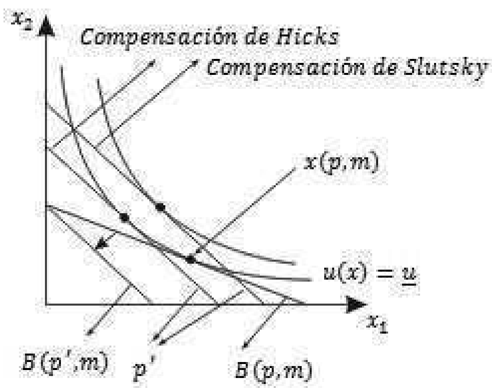
Supongamos que se tiene una función de utilidad $u(\cdot)$ y se está en una posición inicial a unos precios y renta $(\bar{p},\bar{m})$ con una cantidad demanda $\bar{x} = x(\bar{p},\bar{m})$. Ahora, supóngase que cambian los precios a p' y se quiere cambiar el nivel de renta con el fin de compensar el cambio provocado por la variación en los precios. En principio la compensación puede ser de dos formas. Cambiando la renta por una cantidad igual a $\triangle m_{Slutsky} = p'.x(\bar{p},\bar{m}) - \bar{m}$ que permitiría al consumidor adquirir la cesta inicial $\bar{x}$. Alternativamente también se podría cambiar la renta por una cantidad $\triangle m_{Hicks} = e(p',\underline{u}) - \bar{m}$ que permitiría al consumidor alcanzar su nivel de utilidad constante inicial. Se tiene entonces que $\triangle m_{Hicks} \leq \triangle m_{Slutsky}$ ya que $e(p',\underline{u}) \leq p'.x(\bar{p},\bar{m})$.

Por los teoremas anteriores tenemos que $D_p e(\bar{p},\underline{u}) = h(\bar{p},\underline{u}) = x(\bar{p},\bar{m})$ por lo tanto, las dos compensaciones son idénticas para un cambio diferencial en los precios a partir de $\bar{p}$ ya que, intuitivamente, para un cambio diferencial en los precios el efecto total de la compensación requerido para mantener un nivel de utilidad $\underline{u}$ (la compensación hicksiana) es el efecto directo del cambio en los precios, asumiendo que la cesta de consumo $\bar{x}$ no cambia. Esto es precisamente el cálculo que se hace en la compensación de Slutsky y por lo tanto, los dos

[23]La compensación de Slutsky, por otra parte y como hemos definido más arriba, es una compensación de renta de tal forma que el consumidor pueda alcanzar la cesta inicial.

mecanismos de compensación son equivalentes (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:72). ■

Gráfico 13 (Fuente: Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:73)

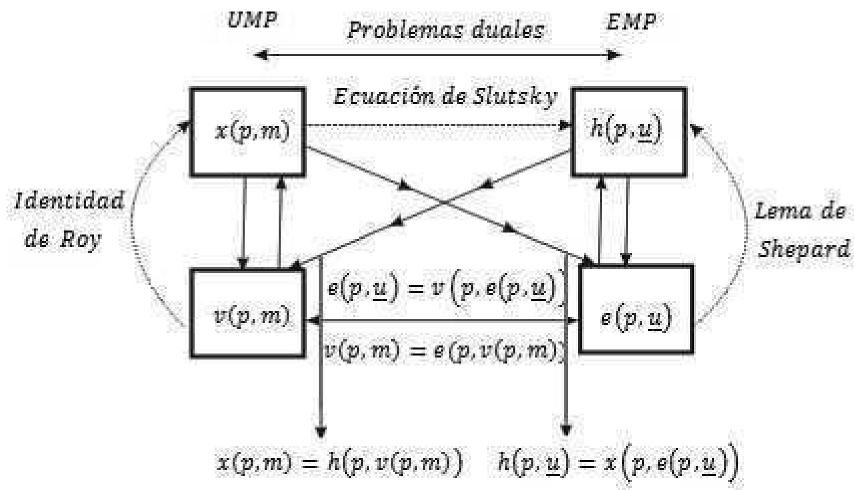


1.18. De lo observable a lo no observable

En la teoría del consumidor desarrollada hasta acá a partir de un primitivo, es decir de la relación de preferencias $\succsim$, hemos procedido de manera progresiva a partir de una serie de teoremas alrededor de la correspondencia de demanda ordinaria y compensada. Es decir, hemos ido de lo no observable $\succsim$ hacia lo observable $X(p, m)$, $H(p, \underline{u})$ y desde allí hemos establecido teoremas como la ley de Walras y el teorema de no exceso de utilidad entre otros. Además, con las correspondencias hemos construido funciones de valor como la función de utilidad indirecta $v(p, m)$ y la función de gasto $e(p, \underline{u})$. También se ha establecido la dualidad y algunos teoremas que han evidenciado que es posible regresarse hacia las funciones de demanda.

Teniendo en cuenta los teoremas y corolarios establecidos hasta el momento con base a los problemas de maximización de la utilidad (por sus siglas en ingles: UMP) y el problema de la minimización del gasto (EMP), podemos resumir los resultados a los que se ha llegado en el siguiente gráfico.

Gráfico 14 (Fuente: Mas-Colell, Whinston y Green, 1995:75)



Teniendo en cuenta, entonces, que hemos establecido teoremas desde lo no observable $\succsim$ hacia lo observable $X(p,m)$ y $H(p,\underline{u})$, nos preguntamos ahora si podemos hacer algo más fuerte aún y es ver si, a partir de lo observable, es posible llegar a lo no observable.

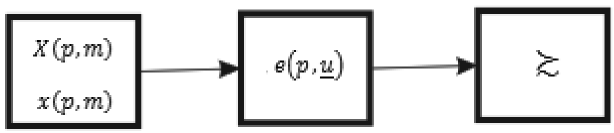
Es decir, hasta el momento todos los teoremas han sido del tipo $A \rightarrow B$, léase A implica B. En otras palabras, a partir de algo no observable A hemos llegado a algo observable B. Con ello se han realizado ciertas pruebas de hipótesis lógicas y ha sido posible establecer que si a partir de algo observable se cumplen ciertas propiedades se cumplira A.

Por lo tanto, la mejor prueba para los teoremas del tipo $A \rightarrow B$ es ver si $B \rightarrow A$. La prueba más fuerte que le podemos poner a los postulados es entonces precisamente lo observable, es decir: B. Es deseable por lo tanto, ver si es posible pasar así una segunda etapa y tratar de probar, dada la información disponible, si se cumplen o no ciertos postulados. Si ello es posible, esto daría criterio para afirmar que el trabajo hecho hasta el momento es susceptible de someterse a la prueba de falsacionismo (o refutacionismo) de Popper que afirma que sólo las teorías que son refutables son conocimiento científico.

En la teoría económica actual existen varios desarrollos que, en efecto, permiten ir de lo observable hacia nuestro primitivo. Dentro de los desarrollos teóricos

cos se destacan tres. El primero que llamaremos el problema de la integrabilidad, y que desarrollaremos acá, permite mediante construcción teórica, teniendo funciones de demanda $x(p,m)$, ir hacia la función de gasto parar después encontrar la función de utilidad que representa las preferencias $\succsim$ y racionaliza la demanda observada.

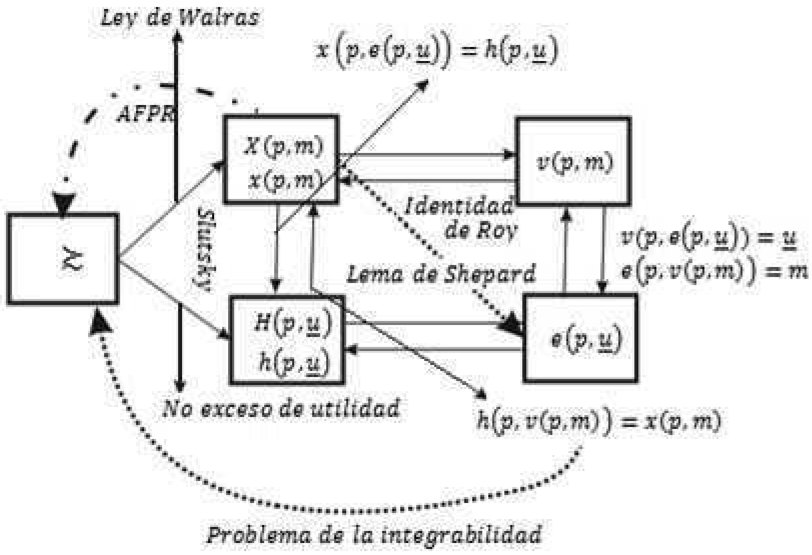
Gráfico 15



La segunda aproximación, que llamaremos la aproximación mediante el axioma fuerte de las preferencias reveladas (AFPR), permite ir hacia el primitivo $\succsim$ partiendo de un conjunto de datos observados y apoyándose en clausulas transitivas de axiomas débiles. Es decir, esta aproximación permite probar si a partir de un conjunto de datos observados, que cumplen el axioma de las preferencias reveladas, existe una conducta que racionalice dichos datos.

La tercera aproximación, que llamaremos el enfoque de la función Lipschitzian fue desarrollado por Mas-Colell (1977) y su explicación cae fuera de los contenido de este texto.

Gráfico 16



Pasamos entonces a ilustrar la forma de proceder de la integrabilidad.

El problema de la integrabilidad

Para poder ir de la función de demanda $x(p, m)$ hacia las preferencias que la generan, es necesario que se cumplan las siguientes propiedades:

- $x(p, m)$ debe ser diferenciable.
- $x(p, m)$ debe ser homogénea de grado cero.
- $x(p, m)$ debe satisfacer la ley de Walras.

Además, es necesario que la matriz de efecto sustitución S sea semidefinida negativa y simétrica. Con base a lo anterior, el problema de la integrabilidad lo podemos expresar a modo de teorema.

Teorema 34

Para $x : \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^l_{++}$continuamente diferenciable, existe una función de utilidad $U : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ que racionaliza a x tal que U es continua, estrictamente monótona y estrictamente cuasicóncava si y sólo si x es homogénea de grado cero, satisface la ley de Walras y S es semidefinida negativa y simétrica. Es decir:

$U : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ racionaliza a $x : \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^l_{++}$ si:

$$\forall (p, m) : x(p, m) = arg_{x \in B(p,m)} max\, u(x)$$

Es necesario aclarar que se dice *´´racionaliza´´* en el sentido de que existen unas preferencias tales que de ellas se desprende una conducta para un agente. La prueba del teorema se hará mediante etapas y con un ejemplo para mayor claridad.

Paso 1

Construir la función de gasto $e(p, \underline{u})$ a partir de lema de Shepard y por dualidad.

$$D_p e(p, \underline{u}) = h(p, \underline{u}) = x(p, e(p, \underline{u}))$$

Para poder hallar la función de gasto a partir de $x(p, e(p, \underline{u}))$ es necesario que la matriz Jacobiana de primeras derivadas de $x(p, e(p, \underline{u}))$ o la matriz Hessiana de $e(p, \underline{u})$ sea simétrica y semidefinida negativa. Esta propiedad siempre se cumple ya que:

i) $D^2_{pp} e(p, \underline{u}) = S(p, e(p, \underline{u}))$ es una matriz simétrica ya que todo Hessiano cumple con esta condición.

ii) $e(p, \underline{u})$ es creciente en p, homogénea de grado uno en p y cóncava en p. Por lo tanto se puede asegurar:

a. $D_p e(p, \underline{u}) = x(p, e(p, \underline{u})) > 0$ ya que $e(p, \underline{u})$ es creciente en p

b. $D^2_{pp} e(p, \underline{u}) = S(p, e(p, \underline{u}))$ es semidefinida negativa ya que $e(p, \underline{u})$ es cóncava en p

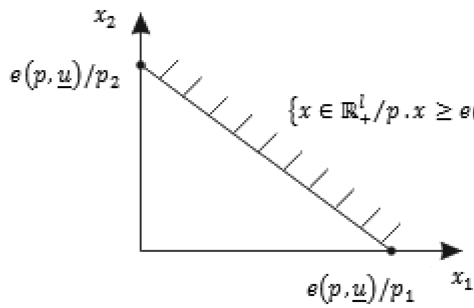
Es posible asegurar así que mediante la integración de la función de demanda $x(p, e(p, \underline{u}))$ se puede encontrar una función de gasto coherente con la conducta observada.

Paso 2

$\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}$ se fija un nivel de utilidad $\underline{u}$ y se contruye el conjunto:

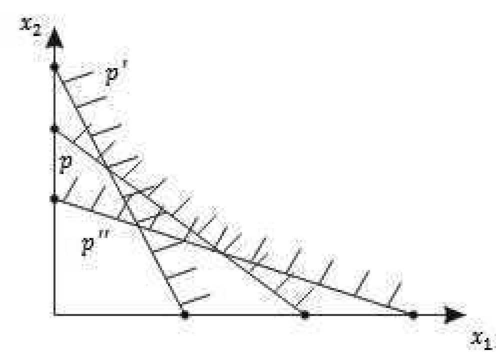
$$\left\{x \in \mathbb{R}^l_+ / p.x \geq e(p, \underline{u})\right\}$$

Gráfico 17



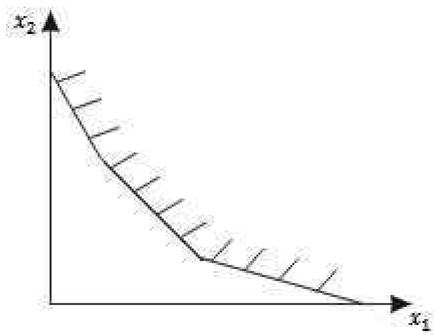
Se hace lo mismo para tres relaciones de precios diferentes. Es decir, $p, p', p'' \in \mathbb{R}^l_{++}$

Gráfico 18



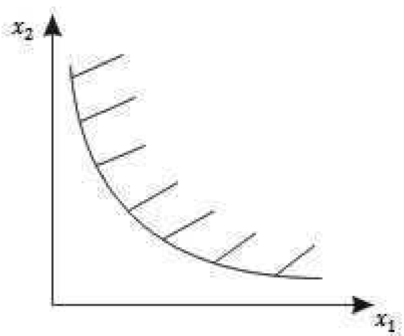
Se toma el área común para los tres precios $p, p', p'' \in \mathbb{R}^l_{++}$

Gráfico 19



Para un caso en que se tomará la mayor cantidad de combinaciones de precios posibles, es decir: $\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}$ el conjunto común a todos sería más suave y similar a una curva de indiferencia:

Gráfico 20

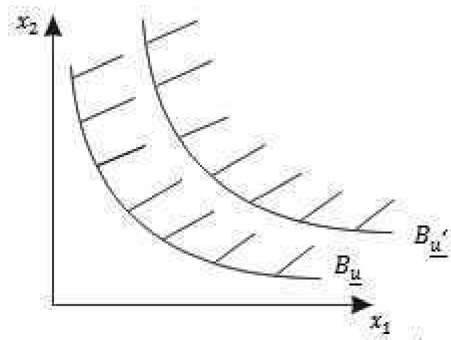


Se define a continuación las curvas contorno superior de la función de gasto. Estas son iguales a:

$$B_{\underline{u}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^l_{++} / \forall p \in \mathbb{R}^l_{++} : p.x \geq e(p, \underline{u}) \right\}$$

Este conjunto está formado asó por todos los niveles de gasto mayor a $e(p, \underline{u})$ que dan por lo menos un nivel de utilidad $\underline{u}$. Por lo tanto, este conjunto se comporta para diferentes niveles de utilidad de la siguiente manera:

Gráfico 21



Es necesario recordar que la función de gasto $e(p, \underline{u})$ hallada sea la que efectivamente cumple la condición de ser el mínimo gasto para alcanzar el nivel de utilidad $\underline{u}$ de la curva contorno. Es decir:

$$min_{x \in B_{\underline{u}}} p.x = e(p, \underline{u})$$

También debe cumplirse que la utilidad reportada por $x(p, e(p, \underline{u}))$ sea máxima. Es decir:

$$u(x) = max \left\{ \underline{u} \in \mathbb{R} / x \in B_{\underline{u}} \right\}$$

Con $x(p, e(p, \underline{u}))$ se debe tener así la curva contorno $B_{\underline{u}}$ más alejada posible.

Teniendo en cuentas los pasos anteriores, se ilustra la forma de proceder de la integrabilidad mediante un ejemplo.

Ejemplo

Sea el siguiente sistema de demandas:

$$x(p, m) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\alpha_1 m}{p_1} \\ \frac{\alpha_2 m}{p_2} \end{array} \right\}$$

Con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Encontrar la función de utilidad que racionaliza a $x(p, m)$

Paso 1

Encontrar la función de gasto asociada. Por el lema de Shepard y la dualidad se conoce lo siguiente:

$$\frac{\partial e(p,\underline{u})}{\partial p_1} = \frac{\alpha_1 e(p,\underline{u})}{p_1}$$

$$\frac{\partial e(p,\underline{u})}{\partial p_2} = \frac{\alpha_2 e(p,\underline{u})}{p_2}$$

Organizando el sistema se tiene:

$$\frac{\frac{\partial e(p,\underline{u})}{\partial p_1}}{e(p,\underline{u})} = \frac{\alpha_1}{p_1}$$

$$\frac{\frac{\partial e(p,\underline{u})}{\partial p_2}}{e(p,\underline{u})} = \frac{\alpha_2}{p_2}$$

Por la regla de derivación de $ln(x)$ el sistema es equivalente a:

$$\frac{\partial lne(p,\underline{u})}{\partial p_1} = \frac{\alpha_1}{p_1}$$

$$\frac{\partial lne(p,\underline{u})}{\partial p_2} = \frac{\alpha_2}{p_2}$$

Integrando respecto a p_1 y p_2 se llega a:

$$\int \frac{\partial lne(p,\underline{u})}{\partial p_1} = \int \frac{\alpha_1}{p_1}$$

$$\int \frac{\partial lne(p,\underline{u})}{\partial p_2} = \int \frac{\alpha_2}{p_2}$$

Utilizando en la parte izquierda el teorema fundamental del cálculo se llega finalmente a la función de gasto. La parte derecha se integra de manera normal:

$$lne(p,\underline{u}) = \alpha_1 lnp_1 + k_1(p_2,\underline{u})$$

$$lne(p,\underline{u}) = \alpha_2 lnp_2 + k_2(p_1,\underline{u})$$

Igualando las dos ecuaciones:

$$lne(p,\underline{u}) = \alpha_1 lnp_1 + \alpha_2 lnp_2 + ln\underline{u}$$

Nótese que la constante k la hemos hecho $ln\underline{u}$ ya que por definición cualquier transformación monótona de $\underline{u}$ representa las mismas preferencias. Es decir, también se puede utilizar $\underline{u}, \underline{u}^2$ u otra forma pero ya que en la ecuación las variables están en logaritmos lo más idóneo es utilizar $ln\underline{u}$

Por propiedades de logaritmos el sistema es equivalente a tener:

$$lne(p,\underline{u}) = ln(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \underline{u})$$

Es necesario que $\underline{u} > 0$ ya que $ln0$ no existe. Utilizando antilogaritmos se llega finalmente a la función de gasto:

$$e(p,\underline{u}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \underline{u}$$

Paso 2

Una vez encontrada la función de gasto, se debe construir el conjunto contorno superior de dicha función:

$$B_{\underline{u}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^l_{++} / \forall p \in \mathbb{R}^l_{++} : p.x \geq e(p,\underline{u}) \right\}$$

Para la función anterior el conjunto sería:

$$B_{\underline{u}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_{++} / \forall p \in \mathbb{R}^2_{++} : p_1.x_1 + p_2.x_2 \geq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \underline{u} \right\}$$

Organizando:

$$B_{\underline{u}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_{++} / \forall p \in \mathbb{R}^2_{++} : \frac{p_1.x_1 + p_2.x_2}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} \geq \underline{u} \right\}$$

La función de utilidad buscada debe cumplir la siguiente condición :

$$u(x) = max \left\{ \underline{u} \in \mathbb{R} / x \in B_{\underline{u}} \right\}$$

Para el conjunto contorno esta condición es equivalente a tener:

$$u(x) = max \left\{ \underline{u} \in \mathbb{R} / (\forall p \in \mathbb{R}^2_{++}) : \underline{u} \leq \frac{p_1.x_1 + p_2.x_2}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} \right\}$$

Si se busca entonces que $\underline{u} \leq \frac{p_1.x_1+p_2.x_2}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}$ debe cumplirse:

$$u(x) = max \left\{ \underline{u} \in \mathbb{R} / (\forall p \in \mathbb{R}^2_{++}) : \underline{u} \leq min_{p \in \mathbb{R}^2_{++}} \frac{p_1.x_1 + p_2.x_2}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} \right\}$$

Por lo tanto, la función de utilidad buscada debe cumplir la siguiente condición:

$$u(x) = \left\{ min_{p \in \mathbb{R}^2_{++}} \frac{p_1.x_1 + p_2.x_2}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} \right\}$$

Para encontrar la función de utilidad anterior se normalizan los precios y se supone:

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

Se va a suponer entonces que $p_1 = p$. Además ya que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ y por tanto: $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Se va a suponer también que $\alpha_1 = \alpha$. El problema se convierte entonces en encontrar una función de utilidad que cumpla lo siguiente:

$$u(x) = \left\{ min_{p \in (0,1)} \frac{p.x_1 + (1-p)..x_2}{p^{\alpha}(1-p)^{1-\alpha}} \right\} \quad [1]$$

Ya que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $lnf(x)$ se tiene:

$$u(x) = \left\{ min_{p \in (0,1)} ln(p.x_1 + (1-p).x_2) - \alpha lnp - (1-\alpha) ln(1-p) \right\}$$

Derivando respecto a p para un mínimo:

$$\frac{1}{p.x_1 + (1-p).x_2}(x_1 - x_2) - \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{1-p} = 0$$

$$\frac{x_1 - x_2}{p.x_1 + (1-p).x_2} = \frac{\alpha}{p} - \frac{1-\alpha}{1-p}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{p.x_1 + (1-p).x_2} = \frac{\alpha - \alpha p + \alpha p - p}{p - p^2}$$

$$(x_1 - x_2)(p - p^2) = (\alpha - p)(p(x_1 - x_2) + x_2$$

$$p(x_1 - x_2) - p^2(x_1 - x_2) = \alpha p(x_1 - x_2) - p^2(x_1 - x_2) + \alpha x_2 - p x_2$$

$$p(x_1 - x_2) = \alpha p(x_1 - x_2) + \alpha x_2 - p x_2$$

$$p x_1 - \alpha p x_1 + \alpha p x_2 = \alpha x_2$$

$$p(x_1 - \alpha x_2 - \alpha x_2) = \alpha x_2$$

$$p = \frac{\alpha x_2}{(x_1 - \alpha x_1 - \alpha x_2)}$$

$$p = \frac{\alpha x_2}{x_1(1-\alpha) + \alpha x_2} \quad [2]$$

Llevando [2] a [1]

$$u(x) = \frac{p.x_1 + (1-p).x_2}{p^{\alpha}.(1-p)^{1-\alpha}}$$

Reemplazando a p

$$u(x) = \frac{\frac{\alpha x_2}{x_1(1-\alpha)+\alpha x_2} x_1 + (1 - \frac{\alpha x_2}{x_1(1-\alpha)+\alpha x_2}).x_2}{\left(\frac{\alpha x_2}{x_1(1-\alpha)+\alpha x_2}\right)^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha x_2}{x_1(1-\alpha)+\alpha x_2}\right)^{1-\alpha}}$$

$$u(x) = (\alpha x_2 x_1 + x_1(1-\alpha)x_2).(\alpha x_2)^{-\alpha}(x_1(1-\alpha))^{\alpha-1}$$

$$u(x) = (x_2 x_1).(\alpha x_2^{-\alpha}).(x_1(1-\alpha))^{\alpha-1}$$

$$u(x) = (x_2 x_1)\alpha^{-\alpha} x_2^{-\alpha} x_1^{\alpha-1}(1-\alpha)^{\alpha-1}$$

$$u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}(\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1})$$

Haciendo $A = (\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1})$ se llega finalmente a la función de utilidad:

$$u(x) = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \quad \blacksquare$$

Capítulo 2

El problema de la agregación

Hasta el momento se han establecido las principales características de la toma de decisiones para un agente consumidor individual y la teoría del consumidor presentada antes, es la mejor que se tiene a nivel individual por el simple hecho de que ha demostrado que funciona mejor que otras teorías[1] (Deaton y Muellbauer, 1993). Examinemos ahora el caso de un conjunto de consumidores, cada uno de los cuales tiene una función de demanda de determinado número de mercancías, y veamos si la demanda agregada hereda algunas de las propiedades de las funciones de demanda individual. Este el llamado problema de la agregación.

2.1. La función de demanda agregada

Supongamos que existe un número $I \in \mathbb{N}$ de consumidores tal que cada consumidor esta indexado por un $i \in (1, 2, ..., I)$ y además:

$$\forall i, \exists u^i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$$

Es decir, para cada consumidor existe una función de utilidad que racionaliza sus decisiones. Se supone que cada función de utilidad del i-ésimo consumidor es continua, no saciada localmente y estrictamente cuasicóncava. Esto implica entonces que:

[1] Cualquier teoría que pretenda explicar el consumo individual y agregado, por lo menos lo deseable es que funcione a nivel individual.

$$\forall i, \exists x^i : \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^l_+$$

Esta función de demanda es continua y satisface la ley de Walras.

A partir de la demanda de cada agente, pasemos entonces a agregarlas para encontrar la función de demanda agregada. Esta función de demanda agregada se define como:

$$x : \mathbb{R}^l_{++} \times (\mathbb{R}_+)^I \to \mathbb{R}^l_+$$

Donde x es la función de demanda agregada y $(\mathbb{R}_+)^I$ es el vector de las diferentes rentas para cada agente $i \in (1, 2, ..., I)$. La función de demanda agregada es entonces:

$$x(p, m^1, m^2, m^3, ..., m^I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, m^i)$$

Esta demanda agregada satisface la ley de Walras. Es decir, $\forall (p, m^1 m^2, m^3, ..., m^{l)}$ se cumple:

$$p.x(p, m^1, m^2, m^3, ..., m^I) = \sum_{i=1}^{l} m^i$$

Es necesario aclarar que la función de demanda agregada no es igual a una función de demanda individual ya que tiene para cada agente i diferentes niveles de renta. Además, a parte de la ley de Walras y la continuidad, hereda pocas propiedades (Varian, 1992:180)[2].

Teorema 35

Si la función de demanda individual satisface la ley compensada de la demanda, la función de demanda agregada también. Para la prueba ver Mas-Colell, et.al. (1995:111).

Establecida la función de demanda agregada, es necesario diferenciarla de la demanda agregada de agente representativo, para lo cual haremos un paralelo con la demanda agregada trabajada comúnmente en macroeconomía.

[2]No existe, por ejemplo, una versión agregada de la ecuación de Slutsky.

2.2. La demanda agregada del agente representativo

En la macroeconomía keynesiana y clásica, se supone que la demanda agregada depende de los precios p y de la sumatoria de todas las rentas $\sum_{i=1}^{l} m^i$ y por tanto, esta función de demanda agregada de agente representativo difiere de la definida anteriormente. La demanda agregada de agente representativo es igual a:

$$\tilde{x}(p, \sum_{i=1}^{l} m^i)$$

Con base a esta función de demanda agregada, se trabajan otros conceptos. Por ejemplo, en la macroeconomía keynesiana se supone que el consumo agregado depende del nivel agregada de renta y no de cada nivel de renta correspondiente a cada agente. Es decir:

$$C = bf(p, \sum_{i=1}^{l} m^i)$$

Donde C es el consumo agregado y b es la propensión marginal a consumir.

Nótese entonces que se tiene así una agregación completamente distinta a la que hemos definido acá ya que la función de demanda agregada establecida antes depende de la distribución de la renta mientras la otra, la macroeconómica, no. Es decir:

$$x(p, m^1, m^2, m^3, ..., m^I) \neq \tilde{x}(p, \sum_{i=1}^{l} m^i)$$

El problema es que casi siempre la demanda agregada *si* depende de la distribución de la renta y por tanto, suponer demandas agregadas con un nivel de ingreso agregado que no depende de la distribución es una construcción teórica inadecuada.

Además hay varios supuestos de fondo que están en la demanda agregada de agente representativo. Veamos.

Supongamos que la demanda agregada es diferenciable y produzcamos un choque de renta $\left(dm^i\right)_{i=1}^{I}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{I} dm^i = 0$$

Es decir, supongamos que se dan choques de renta que sumen cero o lo que es equivalente: el choque de renta es tal que no se está dando ni quitando renta. En otras palabras, ya que en la demanda agregada de agente representativo $\tilde{x}$ no importa la distribución de la renta, estamos suponiendo una situación tal, que en la demanda agregada x, se hace una distribución de la renta de tal forma que no la afecte. Lo que se quiere ver entonces es qué sucede si en la demanda agregada la distribución de la renta no es importante. Formalmente:

$$x(p, m^1, m^2, m^3, ..., m^I) = \tilde{x}(p, m^1 + dm^1, m^2 + dm^2, m^3 + dm^3, ..., m^I + dm^I)$$

El choque de renta es tal que debe cumplirse:

$$\forall l : \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_l^i}{\partial m}(p, m^i) dm^i = 0$$

Es decir, ya que el choque de renta está dado por $\sum_{i=1}^{I} dm^i = 0$, se cumple que este no altera la demanda agregada. De ser así, se cumple el siguiente resultado:

$$\forall l, \forall i, i^*, (i \neq i^*), \forall p, \forall m^i, \forall m^{i^*} : \frac{\partial x_l^i}{\partial m}(p, m^i) = \frac{\partial x_l^{i^*}}{\partial m}(p, m^{i^*})$$

Por la definición de lo que es el efecto renta, esta forma de agregación (la de agente representativo) supone entonces que los efectos renta deben ser iguales para todos los agentes. Es decir, si se trabaja con una demanda agregada donde no importa la distribución de la renta[3], tal como la demanda agregada de agente representativo, el resultado es que se está suponiendo agentes consumidores con efectos rentas iguales. Además, se requiere que las sendas de expansión sean paralelas para cualquier vector de precios (Mas-Colell, et.al, 1995:107). En otras palabras, es necesario curvas de Engel paralelas. El problema es que el ciudadano de a pie no puede tener el mismo efecto renta de un peso adicional que el que tiene Julio Mario Santo Domingo (magnate colombiano).

Es decir, no solamente la demanda de agente representativo supone que la

[3]Es decir, donde no importan quién es rico o quién es pobre. Lo que importa es cuántos ricos y cuántos pobres hay (Mas-Colell, et.al, 1995:108).

distribución del ingreso no importa sino que, además, supone que los agentes son iguales al presentar el mismo efecto renta ante cambios en los precios y por tanto, la misma estructura de preferencias. Se tiene así, que no solamente un peso adicional es lo mismo para el ciudadano de a pie que para Julio Mario Santo Domingo sino que casi que tiene que gastarlo en lo mismo y les gusta casi que los mismos bienes[4]. La construcción teórica de demanda agregada de gente representativo presenta así enormes vacíos a la hora de replicar las características individuales. De esos vacíos, uno de los principales es que por lo general, en el agregado, no se cumple el axioma de la preferencia revelada.

2.3. La agregación y la preferencia revelada

Supongamos que tenemos un número finito $T \in \mathbb{N}$ de observaciones de demandas, dados unos precios y una renta para I consumidores. Por lo general, es distinto lo que observamos que lo realmente ocurrido por varias razones. Entre ellas, está la forma misma en que se agrega con el supuesto de agente representativo, además del modo en que se recolecta la información a nivel macro. Formalmente se tiene:

$$\left(p_t, (x_t^i)_{i=1}^I, (m_t^i)\right)_{t=1}^T \Rightarrow \textit{Lo que ocurrió}$$

$$\left(p_t, \sum_{i=1}^I x_t^i, \sum_{i=1}^I m_t^i\right)_{t=1}^T \Rightarrow \textit{Lo observado}$$

Es decir, en lo observado hay menos información que en lo ocurrido. Es, entonces, difícil diferenciar en el agregado lo que ocurre con cada uno de los agentes cuando la agregación se hace de manera inadecuada.

La necesaria pregunta que surge es ¿ será que en el agregado[5], algo de lo que se impuso a la conducta a nivel individual, se conserva? La respuesta es *no*, por lo menos con los hechos más relevantes de la conducta individual. Veamos.

Supongamos dos agentes y dos observaciones, es decir: $I = 2$ y $T = 2$. ¿será que se cumple el axioma fuerte de la preferencia revelada (AFPR)? Es decir, será que se cumple:

[4]Técnicamente, esto equivale a que todos los consumidores tengan preferencias cuasilineales respecto al mismo bien y que las funciones de utilidad indirecta sean del tipo Gorman (Mas-Colell, et.al, 1995:107), (Varian, 1992:180).

[5]Un agregado hecho a la manera macroeconómica. Es decir, tal como se dijo antes, el problema no es la agregación sino la forma en que se haga.

$$\left(\begin{array}{c} p_t . \sum_{i=1}^{I} x_{t'}^i \leq \sum_{i=1}^{I} m_t^i \\ \sum_{i=1}^{I} x_t^i \neq \sum_{i=1}^{I} x_{t'}^i \end{array} \right) \Rightarrow p_{t'} . \sum_{i=1}^{I} x_t^i > \sum_{i=1}^{I} m_{t'}^i$$

La respuesta es negativa.

Prueba

Supongamos que para $I = 2$ y $T = 2$ se hace la siguiente agregación:

$$m_1^1 = m_1^2 = \frac{m_1}{2}$$

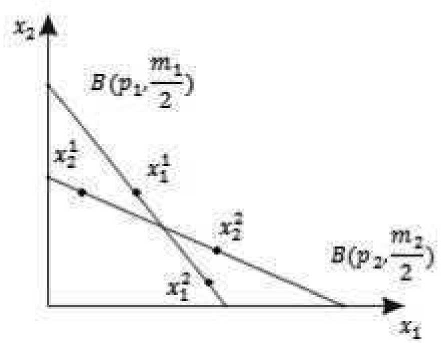
Es decir, supongamos que se agrega la renta, siendo m_1 es el nivel de renta en el período uno. Cada agente tiene entonces la mitad de esta renta.

Por otra parte, también se va a agregar la renta en el período dos, siendo m_2 la renta en este período. Es decir:

$$m_2^1 = m_2^2 = \frac{m_2}{2}$$

Vamos a suponer que los datos que ocurrieron están representados en el siguiente gráfico.

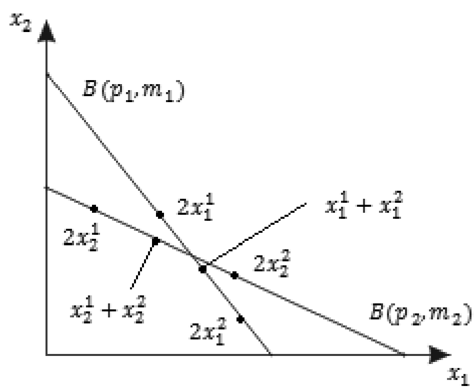
Gráfico 22



Estos datos que ocurrieron, necesariamente van a diferir de los datos observados por la forma en que se agregó la renta. Se observa también que los datos del gráfico anterior satisfacen el axioma fuerte de la preferencia revelada.

Por otra parte, dado la forma en que se agrego la renta los datos observados son los del siguiente gráfico.

Gráfico 23



Bajo el supuesto de agregación $m_1^1 = m_1^2 = \frac{m_1}{2}$ y $m_2^1 = m_2^2 = \frac{m_2}{2}$ las observaciones pasan entonces a ser $2x_1^1$, $2x_1^2$, $2x_2^1$, $2x_2^2$. Es decir, el doble de lo que realmente ocurrieron sin el supuesto de agregación. Así, bajo $\sum_{i=1}^{I} x_t^I$ para el periodo uno[6] se va observar es $x_1^1 + x_1^2$ y para el período dos se observa $x_2^1 + x_2^2$ con lo cual se viola el axioma de la preferencia revelada. ■

Se observa así que, bajo el supuesto de agregación, los datos observados ya no cumplen el axioma fuerte de la preferencia revelada, es decir, no sobrevive uno de los pilares del análisis de la conducta racional individual.

[6]Se supone a continuación y en el gráfico, para efectos prácticos, que: $2x_1^1 = x_1^1$ $2x_1^2 = x_1^2$ $2x_2^1 = x_2^1$ $2x_2^2 = x_2^2$

Capítulo 3

Demanda, bienes y elasticidades

Una vez establecidas las principales proposiciones sobre la manera en que el agente consumidor toma las decisiones, veamos ahora la forma que pueden adoptar estas. Es decir, veamos las distintas formas que adopta la demanda del consumidor ante diferentes tipos de bienes.

Definiendo nuevamente la ecuación de Slustky:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_l} = \frac{\partial h_l(p,\underline{u})}{\partial p_l} - x_l(p,m)\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m}$$

Se tiene que los cambios de la demanda marshalliana $x_l(p,m)$ al precio propio serán negativos o positivos, según se trate de bienes normales o inferiores tipo Giffen respectivamente.

Se definen bienes normales a los bienes que presentan la siguiente característica:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} > 0$$

Por otra parte, los bienes inferiores son:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} < 0$$

Es decir, los bienes inferiores son aquellos que al aumentar el poder adquisitivo, el consumidor deja de comprar. En la mayoría de casos, se tiende a pensar que los bienes inferiores son bienes de mala calidad, no obstante, es necesario tener en cuenta que los bienes serán inferiores o no dependiendo del nivel de renta del consumidor y lo que para algún consumidor puede ser un bien inferior para otro puede ser un bien normal.

Se tiene así que ante cambios en los precios y de presentarse que los bienes sean inferiores, el efecto renta puede ser positivo. Si además sucede que este efecto renta es mayor al efecto sustitución, el cual por definición no tiene nada que ver con los cambios en renta y siempre será negativo, es posible que se presente la paradoja de los bienes Giffen.

Es decir, si:

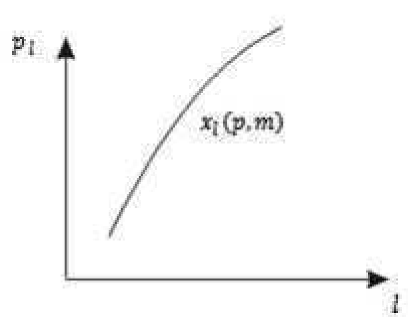
$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m} x_l(p,m) > \frac{\partial h_l(p,\underline{u})}{\partial p_l}$$

El resultado será:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_l} > 0$$

Por lo tanto, en el caso de bienes inferiores cuyo efecto renta contraresta el efecto sustitución, el resultado es que la función de demanda ordinaria tiene pendiente positiva. Cuando se presenta lo anterior diremos que se presenta la paradoja de los bienes Giffen, es decir bienes que son muy inferiores[1].

Gráfico 24



En caso de que no se presente la situación de bienes inferiores donde el efecto renta domine el efecto sustitución, se presentaría el caso de bienes inferiores

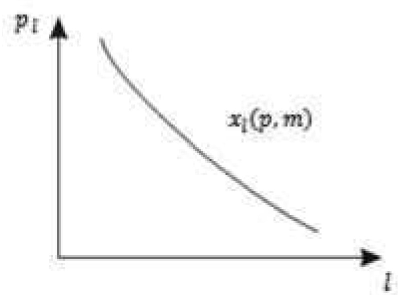
[1] Es difícil en la práctica encontrar un bien inferior y más aún, un bien inferior tipo Giffen pero en caso de que hallarse, con base en lo anteriormente expuesto, es posible dar explicación a este fenómeno (Muñoz, 2010).

cuya curva de demanda es ordinaria, es decir: presenta pendiente negativa. Para el caso de bienes normales, no hay ambigüedad en la pendiente de la demanda ya que tanto en el efecto sustitución como el efecto renta tendrán el mismo signo y así, la curva de demanda tendrá siempre pendiente negativa. Por tanto, para bienes normales e inferiores (no Giffen) se tiene:

$$\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_l} < 0$$

Samuelson (1947b) explica mejor esto en palabras: ´´Todo bien del que se sabe su demanda nunca disminuye al aumentar sólo su renta, tiene que necesariamente aumentar cuando sólo su precio disminuye.

Gráfico 25

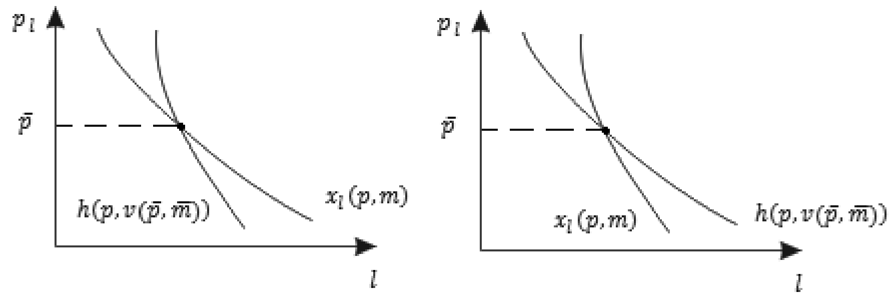


Por último, para el caso de la función de demanda compensada o hicksiana $h_l(p,\underline{u})$, se tiene que el signo de su pendiente es sin ambigüedad negativo. No obstante, su relación con la demanda marshalliana varía de acuerdo se presente el caso de bienes inferiores no Giffen, veamos:

$$\frac{\partial h_l(p,\underline{u})}{\partial p_l} = \frac{\partial x_l(p,m)}{\partial p_l} + x_l(p,m)\frac{\partial x_l(p,m)}{\partial m}$$

Se observa entonces que cuando no se presenta el caso de los bienes inferiores, la demanda hicksiana es más vertical que la demanda ordinaria. No obstante, cuando se presenta el caso de bienes inferiores no Giffen la demanda hicksiana es mas horizontal o elástica.

Gráfico 26



Corolario 10

Debido a que si $U(x)$ es localmente no saciada se cumple $\sum_{i=1}^{L} p_i x_i = m$ $\forall (p, m)$ y $x \in X(p, m)$. Entonces, no todos los bienes pueden ser inferiores.

Es decir, si aumenta el ingreso no puede suceder que disminuya la demanda de todos los bienes ya que por no saciedad local no puede existir (en un marco estático) el ahorro.

Otra forma de expresar lo anterior es haciendo uso del la condición de Engel:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} p_i = 100\,\%$$

Si todos los bienes fueran inferiores, es decir: $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} < 0$, no se cumpliría que la variación total de todas las demandas, dieran como resultado la variación total o el 100 %. Por lo tanto, solo es posible que algunos bienes, no todos, sean inferiores. ■

3.1. Bienes complementarios y bienes sustitutos

Volviendo a la ecuación de Slutsky:

$$\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p, \underline{u})}{\partial p_j} - x_j(p, m) \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m}$$

Se definen a continuación varios tipos de bienes.

Bienes complemento

Se dice que un bien i es complemento neto de un bien j si:

$$\frac{\partial h_i(p, \underline{u})}{\partial p_j} < 0$$

Recordemos que un bien es complemento de otro, si al aumentar el precio del bien j disminuye la demanda del bien i. En este caso, se dice que es complemento *neto* debido a que en la demanda compensada se aislan las variaciones del ingreso.

Por otra parte, se dice que un bien i complemento bruto de otro bien j cuando:

$$\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} < 0$$

El carácter de complemento *bruto* se debe entonces a que en la demanda compensada, por la ecuación de Slutsky, están presentes tanto el efecto sustitución como el efecto renta.

Bienes sustitutos

Se dice que un bien i es sustituto neto de un bien j si:

$$\frac{\partial h_i(p, \underline{u})}{\partial p_j} > 0$$

Es decir, un bien es sustituto neto de otro, si al aumentar el precio del bien j aumenta la demanda del bien i. El carácter de *neto* se debe de nuevo a las características de la demanda compensada.

Por último, un bien i es sustituto bruto de un bien j si:

$$\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} > 0$$

Teorema 36

Debido a que la demanda compensada es homogénea de grado cero en precios p. Es decir:

$$\left(\forall p \in \mathbb{R}^l_{++}, \forall \underline{u} \in \mho, \forall \lambda \in \mathbb{R}^l_{++}\right) \text{ se cumple: } h(\lambda p, \underline{u}) = h(p, \underline{u})$$

Entonces, todo bien debe de tener al menos un sustituto neto.

Prueba

Por homogeneidad de grado cero se debe cumplir:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_i} p_i = 0$$

Es decir, cuando varía un p_j se debe cumplir que $\frac{\partial h_j(p,\underline{u})}{\partial p_j} < 0$. Entonces, para poder mantenerse la igualdad a cero que implica la homogeneidad, es necesario que alguna demanda h_i varíe en forma positiva, $\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_j} > 0$. Es precisamente está situación, la que hace que el bien i deba tener al menos un bien sustituto neto. ■

Bienes complementos brutos y sustitutos netos

Por la ecuación de Slustky, es posible que un bien i sea complemento bruto de un bien j y a la vez sea sustituto neto del bien j siempre y cuando, el efecto renta sea mayor al efecto sustitución:

Esto sucede si:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} < 0$$

$$\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_j} > 0$$

Y si se trata de un bien normal:

$$x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} > 0$$

Por lo tanto, en la ecuación de Slustky se tendría:

$$(-) = (+) - (+)$$

Se observa, entonces, que sólo en el caso de que el efecto renta contrareste el efecto sustitución, la última parte negativa de la ecuación sería la responsable del signo.

También puede darse el caso en que un bien i sea sustituto bruto de otro bien j y, a la vez, sea complemento neto del mismo bien j si se trata de un bien inferior donde el efecto renta domine el efecto sustitución. Es decir:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} > 0$$

$$\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_j} < 0$$

Si es un bien inferior:

$$x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} < 0$$

Por lo tanto, en la ecuación de Slustky se tendría:

$$(+) = (-) - (-)$$

Se tiene así que el responsable del signo será el efecto renta que contraresta el efecto sustitución.

Se puede entonces presentar, sin contradicción, el caso en que un bien i sea complemento bruto de un bien j pero el bien j sea sustituto bruto del bien i. Veamos:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_j} - x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} < 0$$

$$\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,\underline{u})}{\partial p_i} - x_i(p,m)\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} > 0$$

En el caso de los bienes sustitutos o complementos netos no hay ambigüedad en el signo y cuando un bien es sustituto i es sustituto (complemento) neto de un bien j también se debe presentar el caso de que el bien j es sustituto (complemento) del bien i ya que por la simetría de la matriz de efecto sustitución se garantiza:

$$\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p,\underline{u})}{\partial p_i}$$

No obstante, en el caso de los bienes sustitutos o complementos brutos, no es posible garantizar que $\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}$ debido al problema de los bienes inferiores. Por ejemplo, supongamos que $\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} < 0$ (bien i complemento bruto del bien j) y que el bien i es complemento neto del bien j por lo que $\frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_j} < 0$. Supongamos además que el bien i es un bien normal.

No es posible asegurar que lo anterior implique que $\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} < 0$ (bien j complemento bruto del bien i) y por tanto: $\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}$ ya que aunque el bien j sigue siendo complemento neto del bien i por lo que $\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} < 0$, si se presenta el caso en que el bien j es un bien inferior, donde el efecto renta domine el efecto sustitución, se tiene que $x_i(p,m)\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} < 0$ y así el resultado será: $\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} > 0$.

3.2. Elasticidad precio e ingreso de la demanda

En general, las personas que toman decisiones necesitan saber cómo las cambiantes circunstancias económicas influyen en las compras de los consumidores. Tanto la dirección como la magnitud de estos efectos son importantes. Si una tienda de deportes baja el precio de sus raquetas o pelotas de tenis ¿venderá más raquetas? y ¿más pelotas de tenis?, ¿Los pacientes de un hospital se sentirán desanimados por el incremento en los precios de los cuartos de hospital?, ¿cómo se afectaron los ingresos del hospital?. Si una recesión reduce los ingresos de los consumidores, ¿se incrementará o disminuirá su demanda sobre un producto determinado?, ¿en cuánto?. Las respuestas a estas preguntas requieren mayor información acerca de las relaciones de demanda y esta información la suministra el concepto de elasticidad de la demanda (Henao, 2010).

La Elasticidad mide el grado de respuesta de una variable dependiente a cambios en una variable independiente. Elasticidad es un término sustituto de las palabras grado de respuesta, y es un número que mide los cambios porcentuales en una variable causados por cambios porcentuales en otra[2]. Se define como:

$$\varepsilon = \frac{Variación\,\%\,Variable\ dependiente}{Variación\,\%\,Variable\ independiente} \mid todo\ lo\ demás\ constante$$

Matematicamente:

$$\varepsilon = \frac{\triangle\,\%Variable\ dep}{\triangle\,\%Variable\ indep} \mid todo\ lo\ demás\ constante$$

Haciendo uso del calculo diferencial, la elasticidad es igual a:

$$\varepsilon = \frac{\partial LnVariable\ dep}{\partial LnVariable\ indep} \mid todo\ lo\ demás\ constante$$

Esta será finalmente la ecuación a utilizar para las diferentes elasticidades de la demanda.

[2]Parece ser que el concepto de elasticidad se debe a Marshall quien lo definió y lo aplicó en sus análisis de economía agrícola (Brown y Deaton, 1972).

La elasticidad se enfoca entonces a los cambios porcentuales de la variable dependiente que surge por un cambio porcentual en una variable independiente, ceteris paribus, esto es, manteniendo constante todas las demás influencias.

Elasticidad de la demanda con respecto a su propio precio

Esta elasticidad mide la sensibilidad que presentan las cantidades demandadas ante variaciones en los precios del bien, dependiendo de la sustituibilidad del bien. Se define como el cociente entre la variación proporcional de x_i y la variación porcentual de su precio p_i, permaneciendo constante p_j, m y los demás factores que afecten la demanda. Es igual a:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial ln x_i}{\partial ln p_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}$$

Desde que se este en el caso de bienes normales o inferiores no Giffen, se tiene que siempre $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \leq 0$ y debido a que $p_i, x_i > 0$ el resultado será siempre:

$$\varepsilon_{ii} \leq 0$$

Si $\varepsilon_{ii} < -1$ o en valor absoluto $\mid \varepsilon_{ii} \mid > 1$ se tiene que la cantidad demanda reacciona más que proporcionalmente ante cambios en el precio y el bien i se dice que es de lujo y elástico.

Si $\varepsilon_{ii} > -1$ o en valor absoluto $\mid \varepsilon_{ii} \mid < 1$ se tiene que la cantidad demanda reacciona menos que proporcionalmente ante cambios en el precio y el bien i se dice que es necesario e inelástico.

Por ultimo, si $\varepsilon_{ii} = -1$ o en valor absoluto $\mid \varepsilon_{ii} \mid = 1$ se dice que el bien presenta elasticidad unitaria.

Para saber cómo se comporta el gasto ante variaciones del precio, se deriva el gasto, igual a $p.x$, que se hace en el bien. Es decir:

$$\frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} = x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

Multiplicando arriba y abajo por x_i:

$$\frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} = \frac{x_i^2}{x_i} + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{x_i}{x_i}$$

$$\frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} = x_i \left(1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_i}.\frac{p_i}{x_i}\right)$$

$$\frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} = x_i.(1 + \varepsilon_{ii})$$

Así, ante incrementos en el precio, el gasto del consumidor aumentará si $\varepsilon_{ii} > -1$ (bien inelástico), disminuirá si $\varepsilon_{ii} < -1$ (bien elástico) y permanecerá inalterado si $\varepsilon_{ii} = -1$ (bien con elasticidad unitaria).

$$\mid \varepsilon_{ii} \mid < 1 \rightarrow \frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} > 0$$

$$\mid \varepsilon_{ii} \mid = 1 \rightarrow \frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} = 0$$

$$\mid \varepsilon_{ii} \mid > 1 \rightarrow \frac{\partial p_i x_i}{\partial p_i} < 0$$

Elasticidad Cruzada de la Demanda

Esta elasticidad es la razón entre el cambio proporcional en la cantidad demandada de un bien i y la variación proporcional en el precio de otro bien j. Se define como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial ln x_i}{\partial ln p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}$$

Es de notarse que el signo de ε_{ij} lo determina $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ ya que p_j y x_i son mayores a cero.

Por lo tanto, si:

$\varepsilon_{ij} > 0$ Los bienes x_i y x_j son bienes sustitutos brutos. Esto sucede debido a que $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$

$\varepsilon_{ij} < 0$ Los bienes x_i y x_j son bienes complementos brutos. Esto sucede debido a que $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0$

$\varepsilon_{ij} = 0$ Los bienes x_i y x_j son bienes independientes.

Si la elasticidad cruzada de la demanda se define con base en la demanda compensada h_i, en este caso se tendrían bienes sustitutos netos y complementos netos respectivamente.

Elasticidad Ingreso de la Demanda

Esta elasticidad se define como el cociente entre la variación de la cantidad de un bien y la variación proporcional del ingreso, permaneciendo todos los precios constantes. Es igual a:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial ln x_i}{\partial ln m} = \frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}$$

Debido a que $m, x_i > 0$ el signo de ε_i dependerá de $\frac{\partial x_i}{\partial m}$. Es decir, el signo depende si el bien en cuestión es normal o inferior.

Por lo tanto, si:

$\varepsilon_i > 0$ el bien i es normal.

Si además $\varepsilon_i > 1$ el bien i es de lujo y si $0 < \varepsilon_i < 1$ el bien i es necesario. Por otra parte si:

$\varepsilon_i > 0$ el bien i es inferior.

3.3. Elasticidades y condiciones de agregación

Agregación de Cournot en términos de elasticidades

Definiendo de nuevo la condición de agregación de Cournot como:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} p_i = -x_j(p,m)$$

$\forall j = 1, 2, ..., L$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{x_i}{x_i}\frac{p_j}{m}$:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}\frac{p_i x_i}{x_i}\frac{p_j}{m} = -x_j(p,m)\frac{p_j}{m}$$

Haciendo uso de la definición de la elasticidad precio de la demanda se llega a:

$$\sum_{i=1}^{L} \varepsilon_{ij}\frac{p_i x_i}{m} + \frac{x_j(p,m)p_j}{m} = 0$$

Definiendo $w_i = \frac{p_i x_i}{m}$ como la participación del gasto en cada bien sobre el gasto total. Es decir, la fracción del gasto total que se dedica a cada bien

(Deaton y Muellbauer, 1993), se tiene:

$$\sum_{i=1}^{L} \varepsilon_{ij} w_i - w_j = 0$$

$\forall j = 1, 2, ..., L$

Esta ecuación sería entonces la condición de Agregación de Cournot en términos de elasticidades y participaciones.

Agregación de Engel en términos de elasticidades

Definiendo de nuevo la agregación de Engel igual a:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} p_i = 1$$

Multiplicando al lado izquierdo por $\frac{x_i}{x_i}\frac{m}{m}$:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} \frac{p_i x_i}{x_i} \frac{m}{m} = 1$$

Haciendo uso de la definición de la elasticidad ingreso de la demanda se llega a:

$$\sum_{i=1}^{L} \varepsilon_i \frac{p_i x_i}{m} = 1$$

Utilizando de nuevo $w_i = \frac{p_i x_i}{m}$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{L} \varepsilon_i w_i = 1$$

Esta ecuación es entonces la condición de agregación de Engel en términos de elasticidades.

Agregación de Euler en términos de elasticidades

Definiendo de nuevo la condición de agregación de Euler igual a:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} m = 0$$

$\forall j = 1, 2, ..., L$

Multiplicando la parte izquierda por $\frac{1}{x_j}$ y la parte derecha por $\frac{1}{x_j}$:

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_j} + \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} \frac{m}{x_j} = 0$$

Utilizando la definición de la elasticidad precio de la demanda y la elasticidad ingreso de la demanda se tiene:

$$\sum_{i=1}^{L} \varepsilon_{ji} + \varepsilon_i = 0$$

$\forall j = 1, 2, ..., L$

Esta sería la consecuencia, en términos de elasticidades, que impone la homogeneidad de grado cero en precios y renta de la demanda.

Ecuación de Slutksy en términos de elasticidades

Definiendo de nuevo la ecuación de Slutsky igual a:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_i} - x_i(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}$$

Multiplicando $\frac{p_i}{x_i}$ a las dos primeras expresiones y en la última expresión por $\frac{p_i}{x_i}\frac{m}{m}$:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i} = \frac{\partial h_i(p,\underline{u})}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i} - x_i(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} \frac{p_i}{x_i} \frac{m}{m}$$

Haciendo uso del concepto de elasticidad precio de la demanda ordinaria y compensada, elasticidad ingreso de la demanda y la participación del gasto se llega a:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^{*} - w_i \varepsilon_i$$

Antes de pasar a la parte práctica, es necesario definir algunos conceptos adicionales que son útiles a la hora de hacer inferencias sobre la situación de los hogares en distintos escenarios tales como aumentos del ingreso, aumento del número de bienes, variación de miembros del hogar, etc.

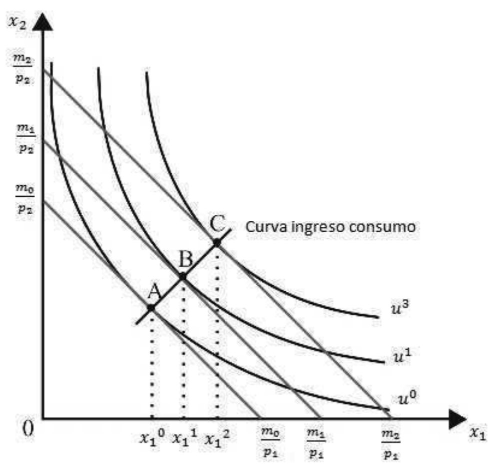
3.4. Curvas de ingreso - consumo y curva de Engel

Los cambios en el ingreso, cuando los precios permanecen constantes, usualmente producen cambios correspondientes en las cantidades que se adquieren de los bienes. Un aumento del ingreso, por ejemplo, desplaza la línea de presupuesto hacia arriba y a la derecha y el desplazamiento es paralelo cuando suponemos que los precios nominales permanecen constantes, dando como resultado un conjunto de consumo costeable más amplio y por lo tanto, unas demandas mayores (Henao, 2010). Vamos entonces a definir algunos conceptos.

La curva de ingreso - consumo

Esta curva muestra las diferentes combinaciones de equilibrio en el consumo de x_1 y x_2 que se producen cuando varía el nivel de (ingreso) y los precios permanecen constantes. Si los precios cambiaran tendríamos una nueva curva de ingreso –consumo (CIC).

Gráfico 27



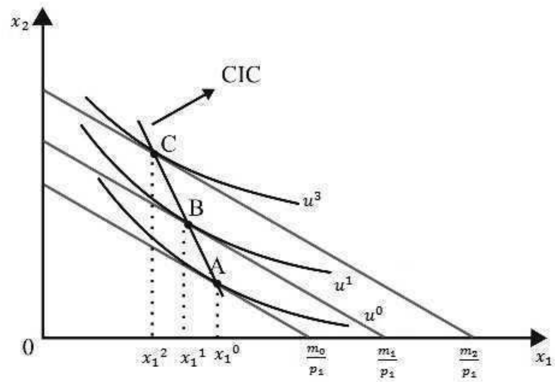
Cuando la CIC tiene pendiente positiva, está señalando que a mayores ingresos aumentan las unidades compradas de x_1 y x_2 y estos bienes son entonces normales.

Tal como se había anteriormente, un bien es normal cuando un aumento en el nivel de ingreso produce un aumento en el consumo y una disminución del ingreso produce una caída en el consumo del bien.

Si la CIC tiene pendiente negativa, como en el gráfico 27, uno de los dos bienes es inferior. Un incremento en el ingreso reduce la cantidad de x_1 y aumenta la de x_2. Los bienes para los cuales se reduce la cantidad consumida, cuando aumenta el ingreso, se les llama bienes inferiores.

Es necesario aclarar que para mostrar cuando un bien es inferior, el otro bien debe ser normal. Es decir, la inferioridad del bien se aplica sólo a una parte del rango[3].

Gráfico 28



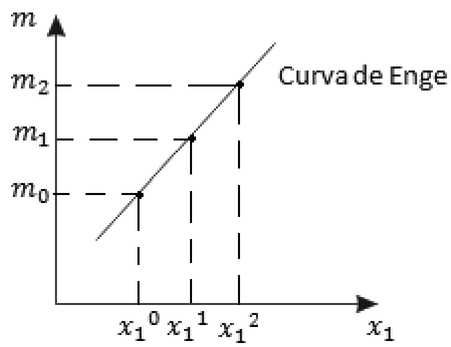
Curva de Engel

La CIC se relaciona con la curva de Engel y utilizando la primera se obtiene la segunda. Utilizando el gráfico 26 se tiene que para la relación de precios constantes $\frac{p_1}{p_2}$ el consumidor adquiere x_1^0 cuando el ingreso es m_0. Adquiere x_1^1 cuando la renta es m_1 y adquiere x_1^2 cuando el ingreso es m_2. La curva de Engel, precisamente representa las unidades de x_1 que el consumidor adquiere a diferentes niveles de ingreso por unidad de tiempo cuando los precios de los bienes permanecen constantes. Es decir:

$$x_i = f_i(m) \mid_{\bar{p}}$$

[3]Recordemos que no todos los bienes pueden ser inferiores.

Gráfico 29



La curva de Engel se desplazará cuando se presente un cambio en las relaciones de precios o cuando el mapa de indiferencia se desplace debido a un cambio en las preferencias del consumidor. Para un bien inferior, las curvas de ingreso-consumo y de Engel tendrán pendientes negativas.

Las curvas de Engel son cóncavas desde abajo, líneas rectas o cóncavas desde arriba, según que la elasticidad ingreso de la demanda sea mayor, igual o menor que uno, pero positiva (Henao, 2010). Veamos:

Si la elasticidad es $\varepsilon_i = \frac{\partial x_i}{\partial m} \frac{m}{x_i} = b$ entonces:

$$\frac{\partial x_i}{x_i} = b.\frac{\partial m}{m}$$

Integrando esta expresión se obtiene:

$$\int \frac{\partial x_i}{x_i} = \int b.\frac{\partial m}{m}$$

$$lnx = blnm + lnc$$

Donde c es una constante arbitraria. La curva de Engel sería entonces:

$$x_i = cm^b$$

cuya pendiente es:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m} = cbm^{b-1}$$

y la curvatura sería igual a:

$$\frac{\partial x_i^2}{\partial m^2} = cb(b-1)m^{b-2}$$

Se tiene entonces lo siguiente:

$b = 1$ (elasticidad unitaria) la curva de Engel es una línea recta.

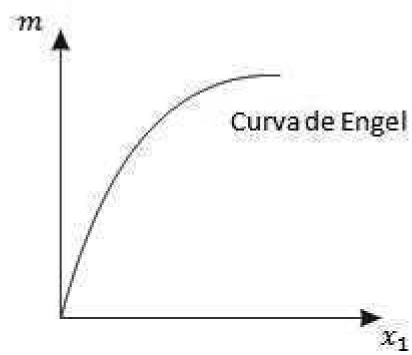
$b > 1$ (bien elástico) la curva de Engel es cóncava desde abajo.

$b < 1$ (bien inelástico) la curva de Engel es cóncava desde arriba

La representación gráfica es la siguiente:

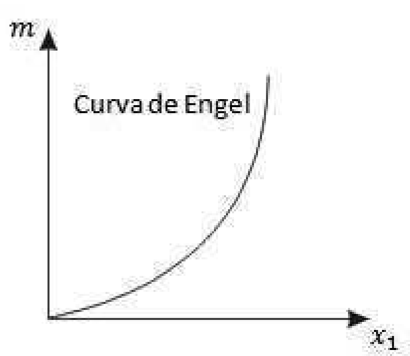
Curva de Engel para un bien de lujo o de alta elasticidad:

Gráfico 30



Curva de Engel para un bien necesario o de baja elasticidad:

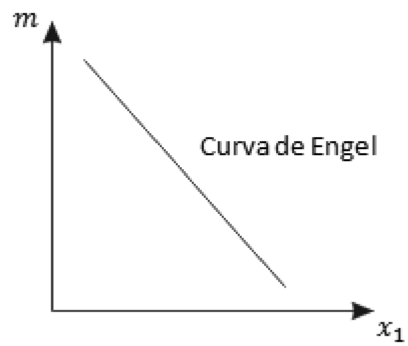
Gráfico 31



Por último, como se había anotado antes, la curva de Engel para un bien inferior es con pendiente negativa.

Curva de Engel para un bien inferior

Gráfico 32



Teniendo definido los principales aspectos de la teoría del consumidor, pasemos ahora a las aplicaciones de la teoría con base en los diferentes sistemas de demanda que se han venido estimando desde la mitad del siglo XX, reviviendo en parte los aportes pioneros de Engel (1895).

Capítulo 4

Sistemas de demanda: aplicaciones de la teoría

La teoría del consumidor ha funcionado bastante bien cuando se le ha contrastado con los datos. Si no resulta plausible los supuestos básicos acerca del comportamiento de los individuos en que está basada, esto no es razón ni para alarma ni para conformismo. En muchos casos la teoría del consumidor es la mejor que tenemos y no se le rechazará, tal como se había anotado antes, a menos que se tenga alguna mejor que, por lo menos, explique de manera convincente la toma de decisiones a nivel *individual*. Ha sido el trabajo empírico el que en los últimos años ha enriquecido la teoría y esta última parte del texto se ocupa parcialmente de algunas aplicaciones de la teoría del consumidor.

4.1. Elasticidades y estimaciones

La importancia y consecuencias del concepto de elasticidad y el hecho de que sea un número puro, ha incidido en que muchos economistas vean la estimación de las elasticidades en el trabajo empírico como uno de los principales propósitos del análisis de la demanda.

En el análisis de la demanda, importa no solo el análisis de los datos de series de tiempo si no también las explicaciones de las diferentes conductas entre hogares en estudios de sección cruzada. En la mayoría de veces, se asume que los hogares enfrentan unos mismos precios y las explicaciones de las diferencias entre conductas se explican por las diferencias en el gasto total y en las características y composición del hogar. La mayoría de los casos al asumirse precios constantes, la homogeneidad de la demanda no puede jugar un papel importante mientras que la condición de agotamiento del gasto[1], que restringe algunas veces las elasticidades gasto de la demanda[2], es casi siempre relevante (Deaton y Muellbauer, 1993).

Cuando se aisla el efecto de los precios, las funciones de demanda adoptan la siguiente forma:

$$x_i = f_i(m)$$

Este tipo de relación, es precisamente lo que se había definido antes como curvas de Engel. Hay una amplia selección de formas funcionales para las curvas de Engel pero ninguna de esas formas son totalmente consistentes con la condición de agotamiento del gasto y otras condiciones, lo que crea problemas, por ejemplo, en el análisis de series de tiempo.

Una forma extremadamente útil que es consistente con la condición de agotamiento del gasto, fue estimada primero por Working (1943) y usada con éxito por Leser (1963). Es precisamente esta primera forma funcional la que analizaremos a continuación.

4.2. El sistema Working y Lesser.

El sistema ad-hoc que exponemos a continuación recibe el nombre de sistema Working y Leser. El sistema plantea que existe una relación lineal entre las participaciones del gasto de cada bien y el logaritmo del gasto. Veamos.

[1]Se recuerda que la condición de agotamiento del gasto o adding-up es $\sum_i p_i x_i(m,p) = m$

[2]Si todos los bienes tienen elasticidades ingreso constantes e iguales entre sí, estas deben ser iguales a la unidad. Veamos.

La condición de agotamiento del gasto, en términos de elasticidades ingreso de la demanda, es igual a:

$$\sum_{i=1}^{L} w_i \varepsilon_i = 1$$

Ya que todas las $\varepsilon_i = A$, siendo A una constante, se tiene:

$$A \sum_{i=1}^{L} w_i = 1$$

Por lo tanto, debido a $\sum w_i = 1$ se debe cumplir que:

$$A = 1$$

Sea:

$$w_i = \frac{p_i x_i}{m}$$

la participación en el gasto del bien i. Working y Leser plantean el siguiente sistema:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i Ln(m)$$

Las implicaciones son:

$\beta_i > 0$ el bien i es necesario.

$\beta_i < 0$ el bien i es inferior.

$\beta_i > 1$ el bien i es de lujo.

Recordemos además que:

$$x_i = f(p_1, p_2 ... p_L, m)$$

Es decir, hay L bienes. Pero en el sistema Working y Leser la demanda de esos L se supone que no depende de los precios porque se asumen constantes. La idea que se tiene, entonces, con el sistema Working y Leser es verificar si se cumple[3]:

1. La condición de agotamiento del gasto: $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{m} = \frac{m}{m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

En Working y Leser, la condición de agotamiento del gasto es satisfecha si:

$$\sum w_i = 1$$

Esto sucede si y sólo si:

$$\sum \alpha_i = 1 \quad \sum \beta_i = 0$$

[3]Debido al supuesto de precios constantes, la homogeneidad de grado cero no se puede verificar.

En el trabajo empírico, si el sistema Working y Leser es estimado ecuación por ecuación por mínimos cuadrados ordinarios, los parámetros $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}_i$ satisfacen automáticamente la condición anterior y esto ha traído como consecuencia variadas aplicaciones del sistema.

Debido a que las condiciones teóricas de antes son satisfechas, el propósito que se tiene comúnmente con la especificación del sistema Working y Leser, es estimar las elasticidades ingreso de la demanda para cada bien y realizar análisis de calidad de vida mediante la ley Engel por ejemplo. En el sistema, las elasticidades son iguales a:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i Ln(m)$$

$$\frac{p_i x_i}{m} = \alpha_i + \beta_i Ln(m)$$

Despejando a x_i:

$$x_i = \frac{m}{p_i}[\alpha_i + \beta_i Ln(m)]$$

Realizando $\frac{\partial x_i}{\partial m}$ se tiene:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m} = \frac{1}{p_i}[\alpha_i + \beta_i Ln(m)] + \frac{m}{p_i}\frac{\beta_i}{m}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial m} = \frac{1}{p_i}(w_i + \beta_i)$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{m}{x_i}$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i} = \frac{m}{x_i}\frac{1}{p_i}(w_i + \beta_i)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i} = \frac{1}{w_i}(w_i + \beta_i)$$

Se tiene entonces que la elasticidad ingreso de la demanda del bien i, definida anteriormente como $\varepsilon_i = \frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}$, es igual a:

$$\varepsilon_i = 1 + \frac{\beta_i}{w_i}$$

Estimación del sistema Working y Leser para la economía colombiana

Definido el sistema Working y Leser, veamos ahora su aplicación para patrones de gasto de las familias colombianas. Se utilizará los datos de la encuesta de calidad de vida (ECV) del año 2008 realizada por el Dane, la cual contiene un rubro donde está la encuesta de ingresos y gastos para familias de todo el país. De esta encuesta se hará uso de los datos pertenecientes 13000 familias.

La encuesta de ingresos y gastos de la ECV 2008 contiene información sobre el gasto de las familias para un mes en categorías que podemos agrupar en doce. Estos grupos son:

1. Alimentos: Comprende todos los alimentos comprados por el hogar incluyendo las comidas fuera de casa.

2. Bebidas y tabaco: Cigarrillos, tabaco y bebidas alcohólicas

3. Vestuario y calzado

4. Servicios de la vivienda: Incluye arriendos, imputación del arriendo para los propietarios, ocupantes de hecho y usufructuarios, pago de servicios públicos, artículos para el aseo del hogar, combustibles y gastos de administración o celaduría.

5. Enseres y utensilios para el hogar: colchones, cobijas, manteles, ropa de cama, ollas, vajillas, cubiertos y otros utensilios domésticos.

6. Salud: Medicamentos, consultas médicas, servicios hospitalarios, aparatos ortopédicos, lentes y similares, exámenes de diagnóstico, seguros médicos, medicina prepagada y planes complementarios de salud.

7. Transporte y comunicaciones: Pasajes, bicicletas, gasto en celulares, radio teléfonos, gasolina para vehículo, reparación y mantenimiento del vehículo.

8. Recreación y servicios culturales: Incluye diversiones (cines, discotecas, ferias), periódicos y revistas, libros y discos, juguetes y pagos por vacaciones, compra de mascotas, hoteles y cuadros u obras de arte.

9. Educación: Incluye pago de pensiones y matriculas, transporte escolar, alimentación, compra de textos y útiles escolares, uniformes, transporte escolar.

10. Bienes y servicios personales: Loterías, funerales, regalos, anillos, relojes y otras joyas, artículos para aseo personal, fósforos y encendedores, lustrado de zapatos, lavado de ropa, peluquería y manicura.

11. Otros pagos: Pago de tarjetas de crédito, pago de otros préstamos diferentes de vivienda, seguros de vida, vehículo, incendio, robo, etc. y transferencia de dinero a otros hogares.

12. Impuestos.

El sistema a estimar es:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i Ln(m)$$

Es necesario anotar que las estimaciones se hacen usando el método de los mínimos cuadrados ordinarios y utilizando el programa estadístico SAS. La estimación del sistema Working y Leser arroja los siguientes resultados[4].

[4] Es necesario recordar que en los supuestos de los mínimos cuadrados ordinarios está implícito el supuesto de errores gaussianos distribuidos de manera normal. El problema es que como no hay gastos menores a cero. lo que realmente vamos a suponer es una distribución normal truncada a la hora de estimar no solo el sistema Working y Leser, sino también todos los sistemas que se van a exponer.

Tabla 1

Sistema Working y Leser para la economía colombiana

Variable. Depend.			Intercepto		LN_GASCOR	Wi	Elasticidades
W1 alim.	R^2 0,0243	*	0,869221786	*	-0,033877896	0,3111878	0,891133599
W2 bebi.	R^2 0,0002	†	0,003470223	†	0,000734939	0,0127798	1,057507827
W3 vest.	R^2 0,0109	*	-0,043144333	*	0,004827666	0,0250879	1,192430072
W4 vivi.	R^2 0,0825	*	0,998970967	*	-0,052641865	0,2665716	0,802522607
W5 enseres.	R^2 0,0013	**	-0,002336876	*	0,000334665	0,0024525	1,136458596
W6 salud.	R^2 0,0071	*	-0,071893274	*	0,008619281	0,0514424	1,167552085
W7 trans.	R^2 0,0694	*	-0,284324082	*	0,026797558	0,1107238	1,242021661
W8 recre.	R^2 0,0572	*	-0,078147388	*	0,006605363	0,0200095	1,330111325
W9 educ.	R^2 0,0159	*	-0,081542472	*	0,00911585	0,0594784	1,153263199
W10 s pers.	R^2 0,0443	*	0,168400623	*	-0,009170272	0,0344686	0,733952869
W11 otros pa.	R^2 0,0857	*	-0,262773158	*	0,020597879	0,0512244	1,4021107
W12 impuestos	R^2 0,0891	*	-0,215902016	*	0,018056832	0,0545732	1,330873615

Suma interceptos = 1 **Suma parámetros = 0**

Fuente: DANE (2008), estimaciones propias. *Significativo al 1%, **Significativo al 5%, † No significativo

Según la tabla 1, para todos los grupos de bienes, el sistema Working y Leser explica menos del 10 % de la varianza total de los datos, lo que se refleja en el hecho de que el coeficiente de ajuste R^2 no alcance el 10 %. No obstante, el sistema es significativo en sus parámetros para la mayoría de los diferentes grupos de bienes, excepto Bebidas. Se cumplen, además, las condiciones que aseguran el agotamiento del gasto. Es decir:

$$\sum \hat{\alpha}_i = 1 \quad \sum \hat{\beta}_i = 0$$

Las elasticidades estimadas son algunas consecuentes con lo se esperaba. La elasticidad gasto de los Alimentos es $\varepsilon_1 = 0,891 < 1$ y por tanto, los alimentos son un bien necesario y así, para las familias colombianas, a medida que aumenta el ingreso se compra menos alimentos y más de otros bienes. Grupos de bienes como Vestidos, Enseres, Salud, Transporte, Recreación, Educación, Otros pagos e Impuestos presentan elasticidades gasto de la demanda mayor a uno y en este caso son bienes de lujo. Por lo tanto, al aumentar el ingreso de las familias se espera que aumente la demanda de este grupo de bienes. Por último, no se encuentran, según los resultados, bienes inferiores ya que ninguna elasticidad es negativa.

El sistema anteriormente expuesto, y estimado, es un sistema adhoc en el sentido de que fue especificado sin hacer uso a ninguna función de utilidad, función de gasto o función de utilidad indirecta. Esto trae como consecuencia la pobre significancia del modelo y algunas elasticidades poco consecuentes. Como resultado, ha sido necesario idear formas funcionales que sean robustas en la estimación y compatibles, por lo menos, con la mayoría de las propiedades que la teoría del consumidor impone a las funciones de demanda (Ramírez, 1989).

Fue Richard Stone (1954) quien postuló y estimó el primer sistema de ecuaciones de demanda derivado explícitamente de la teoría del consumidor y su influencia se ha manifestado en la búsqueda continua de especificaciones alternativas y formas funcionales de sistemas de ecuaciones cada vez más ideales (Deaton y Muellbauer, 1980).

El sistema propuesto por Stone es el llamado Sistema Lineal de Gastos (SLG) que presentamos a continuación.

4.3. El sistema lineal de gastos (SLG)

El SLG se define como:

$$p_i x_i = p_i \gamma_i + \beta_i (m - \sum p_k \gamma_k)$$

Donde $p_i \gamma_i$ lo definió Samuelson (1947) como el gasto de supervivencia o subsistencia en el bien i y $(m - \sum p_k \gamma_k)$ es el ingreso disponible después de satisfacer las necesidades básicas. Los parámetros β_i son, entonces, propensiones marginales a consumir después de satisfacer necesidades mínimas.

Se supone que las funciones de demanda son lineales y, por motivos de realismo, que la cantidad demandada de cada bien depende de los precios. Una función de utilidad que genera este tipo de funciones de demanda es la llamada función de utilidad del tipo Stone-Geary:

$$U(x) = \prod_{j=1}^{L} (x_j - \gamma_j)^{\beta_j}$$

Para ilustrar la forma en que se llega al SLG vamos a suponer que sólo hay dos bienes.

$$u(x_1 x_2) = (x_1 - \gamma_1)^{\beta_1} (x_2 - \gamma_2)^{\beta_2}$$

Maximizar esta expresión, por monotocidad, es equivalente a maximizar la función en logaritmos:

$$u(x_1 x_2) = \beta_1 ln(x_1 - \gamma_1) + \beta_2 ln(x_2 - \gamma_2)$$

La restricción presupuestal es:

$$p.x = m$$

Pasemos ahora a la maximización con restricciones. Condiciones de primer orden para un máximo:

$$\frac{\beta_1}{x_1 - \gamma_1} = \lambda p_1$$

$$\frac{\beta_2}{x_2 - \gamma_2} = \lambda p_2$$

Igualando las condiciones:

$$\frac{\beta_1}{p_1(x_1 - \gamma_1)} = \frac{\beta_2}{p_2(x_2 - \gamma_2)}$$

Suponiendo $\beta_1 + \beta_2 = 1$ se tiene[5]:

$$x_1 = \gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1}(m - \gamma_2 p_2 - \gamma_1 p_1)$$

$$p_1 x_1 = p_1\gamma_1 + \beta_1(m - \gamma_2 p_2 - \gamma_1 p_1)$$

Donde $p_1\gamma_1$ es el gasto de subsistencia y $m - \gamma_2 p_2 - \gamma_1 p_1$ es el residuo del gasto.

Para el caso de L bienes se tiene, entonces, que el SLG es:

$$p_i x_i = p_i\gamma_i + \beta_i(m - \sum p_k\gamma_k)$$

El SLG muestra, no obstante su versatilidad, dos limitaciones importantes. Una es que no permite trabajar con bienes inferiores y que las demandas son rígidas en el sentido de que es necesario que $\gamma_i \geq 0$ por la especificación misma de la función de utilidad[6]. Esto hace también que la elasticidad precio propio este en un cierto rango. Veamos.

Realizando $\frac{\partial x_i}{\partial p_i}$ al SLG se tiene:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{-\beta_i m}{p_i^2} + \frac{\beta_i}{p_i^2}\sum p_k\gamma_k - \frac{\beta_i}{p_i}\gamma_i$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{p_i}{x_i}$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i} = \frac{-\beta_i m}{p_i x_i} + \frac{\beta_i}{p_i x_i}\sum p_k\gamma_k - \frac{\beta_i}{x_i}\gamma_i$$

Se tiene entonces:

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\beta_i}{w_i} + \frac{\beta_i}{p_i x_i}\sum p_k\gamma_k - \frac{\beta_i}{x_i}\gamma_i$$

Sumando y restando $\frac{p_i\gamma_i}{p_i x_i}$:

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\beta_i}{w_i} + \frac{\beta_i}{p_i x_i}\sum p_k\gamma_k + \frac{\beta_i}{x_i}\gamma_i + \frac{p_i\gamma_i}{p_i x_i} - \frac{p_i\gamma_i}{p_i x_i}$$

Se tiene finalmente:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\gamma_i}{x_i}(1 - \beta_i) - 1$$

[5] β_i representa la participación de la demanda del bien i en el gasto de sobre subsistencia de forma que sólo se han normalizado dichas participaciones (Segura, 1996:113)

[6] También se debe a que no existe un gasto de subsistencia negativo (Segura, 1996).

Teniendo en cuenta que $0 < \beta_i < 1$ el resultado es:

$$-1 < \varepsilon_{ii} < 1$$

La segunda limitación del SLG, es que impone que todos los bienes sean sustitutos netos y complementos brutos. Veamos:

Por un procedimiento igual al de antes se llega a:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = -\frac{\beta_i}{p_i}(\gamma_j)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} = -\frac{\beta_i p_j}{p_i x_i}(\gamma_j) < 0$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\beta_i p_j}{p_i x_i}(\gamma_j) < 0$$

Es decir, los bienes i y j son siempre complementos brutos. Además, todos los bienes son sustitutos netos ya que:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = -\beta_i\frac{\gamma_j}{p_j} + x_j\frac{\beta_i}{p_j} = \frac{\beta_i}{p_j}(x_j - \gamma_j) > 0$$

A pesar de las restricciones anteriores, en el SLG se verifica la negatividad del efecto sustitución. Es decir:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} = \frac{1}{p_i}(\beta_i - 1)(x_i - \gamma_i) < 0$$

Por último, en el SLG la elasticidad ingreso de la demanda estará dada por:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m} = \frac{\beta_i}{p_i}$$

Multiplicando $\frac{m}{p_i}$ a ambos lados:

$$\varepsilon_i = \frac{\beta_i m}{x_i p_i}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\beta_i}{w_i}$$

siendo $w_i = \frac{m}{x_i p_i}$.

El sistema lineal de gastos es uno de los más usados en las estimaciones empíricas con información tanto de sección cruzada como de series de tiempos. No obstante, el SLG tiene problema ya que hay L bienes y por tanto L elasticidades ingreso y precio propias. Existen además $\frac{L(L-1)}{2}$ elasticidades precio cruzadas para un total de $\frac{L(L+3)}{2}$ parámetros sin tener en cuenta constantes. El problemas es que el SLG permite estimar solamente $2L$ parámetros de modo que el sistema tiene un problema de identificación (Ramírez, 1989). A continuación presentamos una forma de solucionar el problema.

Solución al problema de la identificación

El sistema lineal de gastos suponiendo precios constantes esta definido como:

$$x_i = \gamma_i + \beta_i(m - \sum \gamma_k)$$

Como se mencionó anteriormente, el sistema tiene problemas de identificación. Es decir, no se sabe si se están estimados variables endógenas o exógenas ya que no todas las variables son linealmente independientes. Además, el parámetro γ_i es a la vez una variable y un parámetro a estimar.

Sea la siguiente forma reducida del sistema lineal de gastos:

$$x_i = \alpha_i + \beta_i m$$

donde $\alpha_i = \gamma_i - \beta_i \sum \gamma_j$. La idea es pasar de los α_i a los γ_i.

Para tres ecuaciones, por ejemplo, se tiene el sistema:

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \quad [1]$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \beta_2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \quad [2]$$

$$\alpha_3 = \gamma_3 - \beta_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \quad [3]$$

Donde $\gamma_{1,2,3}$ son desconocidos y $\sum \beta_i = 1, \sum \alpha_i = 0$. Es decir:$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Por lo tanto:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

$$-\alpha_3 = \gamma_1 + \gamma_2 - (1 - \beta_3)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

$$-\alpha_3 = -\gamma_3 + \beta_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

Es decir, se tienen tres ecuaciones pero una es linealmente dependiente de las otras. Por lo tanto, hay problemas para encontrar $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. De [3] se tiene:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{\gamma_3 - \alpha_3}{\beta_3}$$

Por lo tanto de [1]:

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \beta_1[\frac{\gamma_3 - \alpha_3}{\beta_3}]$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\beta_3}(\gamma_3 - \alpha_3)$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 + \frac{\beta_2}{\beta_3}(\gamma_3 - \alpha_3)$$

La idea entonces, es tener un γ_i de otros estudios que permitan la identificación. Para resolver el problema se puede hacer lo siguiente.

De $\gamma_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\beta_3}(\gamma_3 - \alpha_3)$ se supone que γ_3 es el parámetro asociado al ahorro (gasto en bienes durables por ejemplo) y que $\gamma_3 = 0$. Con este supuesto sería posible estimar los demás γ_i. Para el ejemplo anterior, si $\gamma_3 = \gamma_s = 0$ y $\beta_3 = \beta_s$ se tiene:

$$\gamma_1 = \alpha_1 - \frac{\beta_1}{\beta_s}(\alpha_s)$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 - \frac{\beta_2}{\beta_s}(\alpha_s)$$

Para el caso de L bienes:

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{\beta_i}{\beta_s}(\alpha_s)$$

Donde β_s, α_s corresponde a los parámetros estimados para el ahorro o el bien durable y, la estimación de estos parámetros, permite que se encuentre los gamas de los otros bienes. Por construcción, necesariamente $\gamma_s = 0$.

Estimación del sistema lineal de gasto para la economía colombiana

Se van a utilizar nuevamente datos sobre ingresos y gastos de 13000 familias colombianas extraídos de la Encuesta de calidad de vida 2008 realizada por el DANE. Ya que no hay información sobre precios, se supone nuevamente precios constantes y por lo tanto, el sistema a estimar es:

$$x_i = \gamma_i + \beta_i(m - \sum \gamma_k)$$

Se agrupan los bienes nuevamente en doce categorías las cuales son: 1) Alimentos, 2) Bebidas y tabaco, 3) Vestuario y calzado, 4) Vivienda, 5) Enseres y utensilios, 6) Salud, 7) Transporte y comunicaciones, 8) Recreación y servicios culturales, 9) Educación 10) Bienes y servicios personales, 11) Otros pagos. En esta ocasión el grupo 12 será el de bienes durables para estimar el sistema de tal modo que sea posible, mediante el método que se expuso antes, identificar los gamas del gasto en los primeros 11 grupo de bienes.

Teniendo en cuenta la información a utilizar pasamos ahora a la estimación del SLG. Es necesario anotar que las estimaciones se hacen usando el método de los mínimos cuadrados ordinarios y se hacen utilizando el programa SAS. El sistema a estimar en forma reducida es:

$$x_i = \alpha_i + \beta_i m$$

donde $\alpha_i = \gamma_i - \beta_i \sum \gamma_j$. A continuación se presentan los resultados en la tabla 2.

Tabla 2

Sistema lineal de gasto para la economía colombiana

MODEL			Variable Depend.		Intercepto		GAS_COR	Gama i	Wi	Elasticidad gasto
MODEL1	R^2	0,5251	GAS_ALIM	*	182996,8265	*	0,2009711	288149,2872	0,3057	0,657412836
MODEL2	R^2	0,0459	GAS_BEBID	*	2876,234747	*	0,01167486	8984,775473	0,0128	0,912098375
MODEL3	R^2	0,2991	GAS_VEST	*	-2004,727974	*	0,02722528	12240,12947	0,0225	1,21001225
MODEL4	R^2	0,6993	GAS_VIV	*	19318,17711	*	0,23947961	144619,1275	0,2668	0,897599739
MODEL5	R^2	0,0852	GAS_ENSERES	†	-63,09855313	*	0,0025265	1258,81981	0,0025	1,010598862
MODEL6	R^2	0,2623	GAS_SALUD	*	-13169,55248	*	0,06340497	20005,30936	0,0513	1,235964326
MODEL7	R^2	0,5518	GAS_TRANS	*	-29805,64779	*	0,12601283	36127,00964	0,1121	1,124110866
MODEL8	R^2	0,3823	GAS_CULTURA	*	-14736,23149	*	0,02991504	915,9699988	0,0205	1,45927031
MODEL9	R^2	0,3079	GAS_EDUC	*	-13729,99897	*	0,0619506	18683,90703	0,0601	1,030792083
MODEL10	R^2	0,3212	GAS_SERPER	*	18044,83216	*	0,02152018	29304,65938	0,0342	0,629245036
MODEL11	R^2	0,398	GAS_OTRPAG	*	-102023,087	*	0,12854966	-34763,10122	0,0532	2,416347085
MODEL12	R^2	0,1143	GAS_DURABLE	*	-67234	*	0,1285	0	0,0549	2,340619308
								Suma Gama i = 560288,99	**Suma Wi = 1**	

Fuente: DANE (2008), estimaciones propias. *Significativo al 1%, † No significativo

Para poder identificar el sistema lineal de gastos, se estimó el sistema incluyendo el gasto en bienes durables. Con la estimación del α_s y β_s asociado al gasto en bienes durables (Modelo 12) se identifican los restantes γ_i (gastos de subsistencias en el bien i) mediante:

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{\beta_i}{\beta_s}(\alpha_s)$$

Se encuentra, según los resultados, que el gasto de subsistencia en alimentos es $\gamma_1 = \$288149,28$. El gasto de subsistencia total, que es una aproximación a una línea de pobreza para los hogares de la economía colombiana, es igual a:

$$\sum \gamma_i = \$560288,99$$

Por ultimo, debido a que no se dispone de información de precios, la única elasticidad posible de calcular es la elasticidad gasto. Esta es igual a:

$$\varepsilon_i = \frac{\beta_i}{w_i}$$

Donde w_i es la participación en el gasto total del bien i. En la tabla 2 están las distintas participaciones las cuales, necesariamente, cumplen con que $\sum w_i = 1$. Según los resultados, la elasticidad gasto de los Alimentos es igual a $\varepsilon_1 = 0,65$ por lo que serían un bien necesario. Igual sucede con grupo de bienes como Bebidas y Vivienda.

Por último, según los resultados grupos de bienes como Vestidos, Salud, Transporte, Cultura, Educación, Otros pagos y Bienes durables serían bienes de lujo ya que $\varepsilon_i > 1$.

A pesar de la versatilidad y estimación del SLG para diversas economías, este sistema no permite captar la no linealidad de la función ingreso-consumo ya que el sistema no se captan las variaciones en la participación del gasto de cada bien a medida que el nivel de ingreso cambia. Este problema es el que intenta resolver el llamado sistema cuadrático de gastos que exponemos a continuación.

4.4. Sistema cuadrático de gastos.

El sistema cuadrático de gastos (SCG) parte de una función indirecta de utilidad. Cumple con las propiedades de agotamiento del gasto, homogeneidad de grado cero en precios e ingresos y simetría de la matriz Slutsky. Este sistema también puede ser modificado para tener en cuenta el efecto de la composición socio demográfica del hogar (Rivas, 2000). El sistema fue postulado inicialmente por Nicholson (1949) quien estimó funciones cuadráticas de las curvas de Engel pero sin que las ecuaciones estimadas fueran derivadas de un enfoque de maximización de la utilidad. Más tarde, sería Howe (1974) quien demostrara que las funciones de ingreso-consumo cuadráticas podían ser derivadas de un proceso de maximización de la utilidad y que estas funciones en su forma reducida eran idénticas a un sistema de gastos. Pocos años después, serían Howe, Pollak y Wales (1979) quienes generalizarían el SCG.

El modelo.

Se parte de la siguiente función de utilidad indirecta:

$$v(p,m) = \frac{-g(p)}{m-b(p)} + \frac{g(p)}{f(p)}$$

donde $g(p), b(p), f(p)$ son funciones homogéneas de grado uno en precios. Además, la función de utilidad indirecta satisface las condiciones de la teoría como homogeneidad de grado cero en precios y renta, continua en precios y no decreciente en renta.

Aplicando la identidad de Roy a la función anterior es posible encontrar la cantidad demandada:

$$x_i(p,m) = -\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}}$$

Realizando primero $\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}$:

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i} = \frac{-g'(p)(m-b(p)) - g(p)b'(p)}{(m-b(p))^2} + \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{(f(p))^2}$$

Ahora, $\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}$ es igual a:

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \frac{g(p)}{(m-b(p))^2}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$x_i(p,m) = -\frac{\left[\frac{-g'(p)(m-b(p))-g(p)b'(p)}{(m-b(p))^2} + \frac{g'(p)f(p)-g(p)f'(p)}{(f(p))^2}\right]}{\frac{\partial\psi(p,m)}{\partial m}}$$

$$x_i(p,m) = \frac{\frac{-1}{f(p)}\left[g'(p) - \frac{g(p)f'(p)}{f(p)}\right]}{\frac{g(p)}{(m-b(p))^2}}$$

$$x_i(p,m) = \frac{g'(p)(m-b(p)) + g(p)b'(p)}{g(p)} - \frac{(m-b(p))^2(g'(p) - \frac{g(p)}{f(p)}g'(p))}{g(p)f(p)}$$

$$x_i(p,m) = b'(p) + \frac{g'(p)}{g(p)}(m-b(p)) - \left(\frac{g'(p).g(p)\frac{f'(p)}{f(p)}}{f(p)g(p)}\right)(m-b(p))^2$$

Se comprueba que $x_i(p,m)$ es homogénea de grado cero en (p,m). Esta ecuación es finalmente la demanda en el sistema cuadrático de gastos. Además: $b(p) = \sum p_i\gamma_i$, siendo $b'(p) = \gamma_i$ el cual se puede definir con base a Samuelson (1947) como el gasto mínimo de subsistencia en el bien i. La interpretación como se puede ver es igual a la que se tiene en el llamado sistema lineal de gasto (Muñoz, 2004).

En este sentido, tanto el SCG como el Sistema lineal de gastos (SLG) se pueden utilizar para construir umbrales de pobreza a partir de la estimación de los consumos de subsistencia para un determinado grupo de hogares, bien sea en rubros agregados (o desagregados) de bienes y servicios. Además, la valoración de estos consumos ofrece una estimación de la canasta básica de bienes y servicios mínima con la que un hogar puede satisfacer sus necesidades esenciales la cual puede utilizarse con fines de valorar una línea de pobreza (Muñoz A., 2009).

Se puede verificar también bajo qué condiciones se cumple la simetría en el efecto sustitución cruzado (matriz Slutsky), veamos.

Por Slutsky tenemos:

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

Realizando primero $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ se tiene:

$$x_i(p,m) = -\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}} = -\frac{v_i}{v_m}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = -\left(\frac{\psi_m \psi_{ij} - \psi_i \psi_{mj}}{(\psi_m)^2}\right)$$

Encontrando ahora a $\frac{\partial x_i}{\partial m}$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m} = -\left(\frac{v_{im} v_m - v_{mm} v_i}{(v_m)^2}\right)$$

Juntando las dos expresiones se llega a:

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = -\left(\frac{v_m v_{ij} - v_i v_{mj}}{(v_m)^2}\right) + \frac{v_j}{v_m}\left(\frac{v_{im} v_m - v_{mm} v_i}{(v_m)^2}\right)$$

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{1}{(v_m)^2}\left[v_i v_{mj} - v_{ij} v_m + v_j v_{im} - \frac{v_{mm} v_i v_j}{v_m}\right]$$

De la misma manera se tiene:

$$\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} = \frac{1}{(v_m)^2}\left[v_j v_{mi} - v_{ji} v_m + v_i v_{jm} - \frac{v_{mm} v_i v_j}{v_m}\right]$$

Por lo tanto, podemos decir que $\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}$ y se cumple así la simetría de la matriz Slustky. Además, el sistema cumple con lo que se conoce como las condiciones de integrabilidad (Howe, Pollak y Wales,1979).

Por último, se puede comprobar la condición de agotamiento del gasto. Volviendo al sistema de demanda:

$$x_i(p,m) = b'(p) + \frac{g'(p)}{g(p)}(m - b(p)) - \left(\frac{g'(p).g(p)\frac{f'(p)}{f(p)}}{f(p)g(p)} \right)(m - b(p))^2$$

Simplificando se tiene:

$$x_i(p,m) = \gamma_i + \beta_i(m - \sum \gamma_j) + \delta_i(m - \sum \gamma_j)^2$$

Multiplicando a ambos lados por p_i:

$$p_i x_i(p,m) = p_i\gamma_i + \beta_i(m - \sum p_j\gamma_j) + \delta_i(m - \sum p_j\gamma_j)^2$$

La condición de agotamiento del gasto, definida como:

$$\sum p_i x_i = m$$

Se cumple en el sistema cuando:

$$\sum p_i x_i = \sum p_i\gamma_i + \sum \beta_i(m - \sum p_j\gamma_j) + \sum \delta_i(m - \sum p_j\gamma_j)^2 = m$$

Es decir, si y sólo si $\sum \beta_i = 1$ y $\sum \delta_i = 0$ ya que en este caso se tiene:

$$\sum p_i x_i = \sum p_i\gamma_i + m - \sum p_j\gamma_j = m$$

Sistema reducido

Una vez verificado las condiciones que impone la teoría del consumidor en el sistema de demanda, se intenta a continuación reducirlo en una ecuación que sea fácil de estimar. Sea:

$$p_i x_i(p,m) = p_i\gamma_i + \beta_i(m - \sum p_j\gamma_j) + \delta_i(m - \sum p_j\gamma_j)^2$$

Asumiendo $b_i(p) = \sum p_i \gamma_i$ y $b'(p) = \gamma_i$ se tiene:

$$q_i = b_i + \beta_i(m - \sum b_k) + \delta_i(m - \sum b_k)^2$$

Donde $q_i = p_i x_i$ es el gasto en el bien i. Se puede considerar, al igual que en el SLG, b_i como el consumo de subsistencia, y $m - \sum b_k$ puede ser considerado como el ingreso supernumerario que se define como el monto del ingreso que está por encima del ingreso de subsistencia. Por último, $(m - \sum b_k)^2$ intenta captar no linealidades en la curva de ingreso-consumo. Si β_i es positivo se considera al bien i como normal y si es negativo seria inferior.

Si se realiza el producto de la parte derecha del sistema se tiene:

$$q_i = b_i + \beta_i m - \beta_i \sum b_k + \delta_i m^2 - \delta_i 2m \sum b_k + \delta_i(\sum b_k)^2$$

$$q_i = b_i - \beta_i \sum b_k + \delta_i(\sum b_k)^2 + (\beta_i - 2\delta_i \sum b_k)m + \delta_i m^2$$

En forma reducida la ecuación a estimar sería finalmente:

$$q_i = \theta_{i1} + \theta_{i2} m + \delta_i m^2$$

Siendo:

$$\theta_{i1} = b_i - \beta_i \sum b_k + \delta_i(\sum b_k)^2$$

$$\theta_{i2} = \beta_i - 2\delta_i \sum b_k$$

El término al cuadrado, que es lo que distingue al SCG del SLG, permite captar la no linealidad de la función ingreso-consumo lo que hace que el sistema capture las variaciones en la participación del gasto de cada bien a medida que el nivel de ingreso cambia[7]. Por ejemplo, si en las estimaciones el término al cuadrado es negativo se tendría que la participación de este bien sobre el gasto total desciende a medida que aumenta el ingreso (Howe, 1974). Es decir, el SCG tiene una ventaja respecto al SLG ya que en este último las funciones de ingresos consumo necesitan ser lineales, lo que significa que el porcentaje de un peso adicional del ingreso es distribuido en algún grupo de bienes de manera igual para todos los hogares de cada grupo, sin importar el nivel de ingreso de cada hogar. No obstante, a menudo las curvas de ingreso consumo no son lineales y es precisamente esto lo que intenta captar el SCG (Martín, 1981).

Problemas de especificación

Especificado el sistema de demandas del sistema cuadrático de gastos en una ecuación reducida y verificado bajo qué condiciones cumple la simetría de la ecuación de Slutsky y la Ley de Walras o agotamiento del gasto, lo ideal sería pasar a la estimación. El problema es que el sistema presenta algunos problemas de identificación que se deben resolver antes de estimarlo.

Teniendo el sistema en forma reducida:

$q_i = \theta_{i1} + \theta_{i2}m + \delta_i m^2$

Se tiene que hay Lb_i y otros $L\beta_i$, es decir $2L$ incógnitas con $2L$ ecuaciones por lo que es necesario definir una ecuación adicional para poder especificar bien el sistema a la hora de la estimación (Muñoz, 2010).

Además θ_{i1}, θ_{i2} son ecuaciones no linealmente independientes. Veamos:

$$\sum \theta_{i1} = 0$$

$$\sum \theta_{i1} = \sum b_i - \sum \beta_i \sum b_k + \sum \delta_i (\sum b_k)^2 = (1 - \sum \beta_i) \sum b_i + \sum \delta_i (\sum b_k)^2$$

$$\sum \theta_{i2} = \sum \beta_i - 2 \sum \delta_i \sum b_k$$

[7] Muñoz, Ramírez y Zambrano (2005) estiman curvas de Engel con el sistema de Working y Leser ampliado intentando captar la no linealidad de las curvas y encuentran, tanto en estimaciones paramétricas como no paramétricas, que las curvas de Engel para diferentes bienes en la economía colombiana son no lineales.

$$\sum \beta_i = \sum \theta_{i2} + 2 \sum \delta_i \sum b_k$$

Por lo tanto:

$$\sum \theta_{i1} = (1 - \sum \theta_{i2} + 2 \sum \delta_i \sum b_k) \sum b_i + \sum \delta_i (\sum b_k)^2$$

$$\sum \theta_{i1} = \sum b_i - \sum b_i \sum \theta_{i2} - 2 \sum \delta_i (\sum b_k)^2 + \sum \delta_i (\sum b_k)^2$$

$$\sum \theta_{i1} = \sum b_i (1 - \sum \theta_{i2}) - \sum \delta_i (\sum b_k)^2$$

Es decir, hay una ecuación que es linealmente dependiente de las otras por lo que es necesario incluir una ecuación adicional.

La ecuación para el ahorro

Igual que sucede con el sistema lineal de gastos, para solucionar y especificar adecuadamente el sistema es necesario adicionar una ecuación, la cual puede ser una ecuación para el ahorro (Muñoz, 2010).

Sea:

$$x_s = b_s + \beta_s (m - \sum b_k) + \delta_s (m - \sum b_k)^2$$

Donde x_s es la demanda de bienes durables. Esta será nuestra ecuación para el ahorro.

Realizando el producto:

$$x_s = b_s - \beta_s \sum b_k + \delta_s (\sum b_k)^2 + (\beta_s - 2\delta_s \sum b_k) m + \delta_s m^2$$

Se supone de nuevo que b_s es igual a cero, es decir, la propensión marginal a ahorrar es igual a cero. Con ello se tiene lo siguiente:

$$x_s = -\beta_s \sum b_k + \delta_s(\sum b_k)^2 + (\beta_s - 2\delta_s \sum b_k)m + \delta_s m^2$$

En forma reducida el sistema sería:

$$x_s = \theta_{s1} + \theta_{s2}m + \delta_s m^2$$

Siendo:

$$\theta_{s1} = -\beta_s \sum b_k + \delta_s(\sum b_k)^2$$

$$\theta_{s2} = \beta_s - 2\delta_s \sum b_k$$

$$\beta_s = \theta_{s2} + 2\delta_s \sum b_k$$

Llevando a θ_{s1} se tiene:

$$\theta_{s1} = -(\theta_{s2} + 2\delta_s \sum b_k) \sum b_k + \delta_s(\sum b_k)^2$$

$$\theta_{s1} = -\theta_{s2} \sum b_k - \delta_s(\sum b_k)^2$$

$$-\delta_s(\sum b_k)^2 - \theta_{s2} \sum b_k + \theta_{s1} = 0$$

$$\delta_s(\sum b_k)^2 + \theta_{s2} \sum b_k - \theta_{s1} = 0$$

Esta última ecuación es de la forma $ax^2 + bx + c$ y permite identificar así a los b_k restantes del sistema:

Solucionando el sistema para $\sum b_k$ se llega finalmente a lo siguiente:

$$\sum b_k = \left(-\theta_{s2} \pm \sqrt{\theta_{s2}^2 - 4\delta_s(-\theta_{s1})}\right)/2\delta_s$$

Esta ecuación va a ser la que nos permitirá identificar los b_i del sistema y será aproximada mediante la estimación del sistema con bienes durables.

Una vez encontrado a $\sum b_k$ se estiman los Gama i restantes del sistema mediante la ecuación $b_i = \theta_{i1} + \beta_i \sum b_k - \delta_i(\sum b_k)^2$ donde $\beta_i = \theta_{i2} + 2\delta_i \sum b_k$

Propensión marginal a consumir

También es posible encontrar con el SCG las propensiones marginales a consumir[8]. Recordemos las siguientes ecuaciones:

Sistema reducido:

$$q_i = \theta_{i1} + \theta_{i2}m + \delta_i m^2$$

Sistema en forma estructural estructural:

$$q_i = b_i + \beta_i(m - \sum b_k) + \delta_i(m - \sum b_k)^2$$

De acá podemos calcular $\frac{\partial q_i}{\partial m}$:

$$\frac{\partial q_i}{\partial m} = \beta_i + 2\delta_i(m - \sum b_k) = pmgc_i$$

Donde

$$\sum pmgc_i = 1$$

Esta sería la propensión marginal a consumir del bien i. Dada la estructura del sistema se tiene que la propensión marginal a consumir no es constante[9] ya que cambia con el gasto total m. Para efectos de estimación lo que se calcula es la propensión marginal a consumir en el punto medio con $\bar{m} = \frac{1}{n}\sum m$ como el gasto promedio.

[8]En el SLG también es posible encontrar las propensiones marginales a consumir.

[9]En el SLG la propensión marginal a consumir en el bien i seria entonces igual a β_i.

Elasticidades

Por último, se pueden encontrar las elasticidades de los diferentes bienes. De nuestro sistema tenemos que $q_i = p_i x_i$, siendo x_i la demanda del bien i. Por tanto:

$$x_i = \frac{1}{p_i}\left(b_i + \beta_i(m - \sum b_k) + \delta_i(m - \sum b_k)^2\right)$$

Realizando $\frac{\partial x_i}{\partial m}$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m} = \frac{1}{p_i}\left(\beta_i + 2\delta_i(m - \sum b_k)\right)$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{m}{x_i}$ se tiene:

$$\frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i} = \frac{m}{x_i}\frac{1}{p_i}\left(\beta_i + 2\delta_i(m - \sum b_k)\right)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{w_i}(Pmgc_i)$$

La estimación de esta elasticidad de nuevo se hace en el punto medio suponiendo una media para el gasto dados los datos y una media ponderada para el gasto en los diferentes bienes (que llamaremos ww_i) para encontrar w_i. Donde:

$$ww_i = gasto\ del\ bien\ i/gasto\ corriente$$

Es decir cada ww_i mide la participación del gasto en el bien i sobre el gasto corriente.

Estimación del sistema cuadrático para la economía colombiana

Se van a utilizar nuevamente datos sobre ingresos y gastos de 13000 familias colombianas extraídos de la Encuesta de calidad de vida 2008 realizada por el DANE. Se agrupan los bienes de nuevo en doce categorías las cuales son: 1) Alimentos, 2) Bebidas y tabaco, 3) Vestuario y calzado, 4) Vivienda, 5) Enseres y utensilios, 6) Salud, 7) Transporte y comunicaciones, 8) Recreación y servicios culturales, 9) Educación 10) Bienes y servicios personales, 11) Otros pagos y 12) Bienes durables.

Teniendo en cuenta la información a utilizar, pasamos ahora a la estimación del SCG. Es necesario anotar que las estimaciones se hacen usando el método de los mínimos cuadrados ordinarios y se hacen utilizando el programa SAS. El sistema a estimar en forma reducida es:

$$q_i = \theta_{i1} + \theta_{i2} m + \delta_i m^2$$

Siendo:

$$\theta_{i1} = b_i - \beta_i \sum b_k + \delta_i (\sum b_k)^2$$

$$\theta_{i2} = \beta_i - 2\delta_i \sum b_k$$

Los resultados se muestran a continuación en la tabla 3.

Tabla 3

Sistema Cuadrático de gastos para la economía colombiana

MODEL		Variable Depen.		Intercepto		GAS_TOT		GAS_TOT2	Gamai	Pmg C.	WWI	Elasticidades
MODEL1	R^2 0,4908	GAS_ALIM	*	165337,360	*	0,21399	*	-3,444E-09	304878,84	0,213712	0,2972	0,7191
MODEL2	R^2 0,0514	GAS_BEBID	†	-198,035	*	0,01434	*	-2,824E-10	9129,4353	0,013966	0,012	1,1638
MODEL3	R^2 0,308	GAS_VEST	†	408,138	*	0,02355	†	-1,337E-11	15926,712	0,023537	0,0233	1,0102
MODEL4	R^2 0,6483	GAS_VIV	*	47073,102	*	0,20366	*	-5,462E-10	181066,66	0,202943	0,2522	0,8047
MODEL5	R^2 0,1068	GAS_ENSERES	*	467,056	*	0,00182	*	3,158E-11	1683,5693	0,001825	0,0022	0,8295
MODEL6	R^2 0,2389	GAS_SALUD	*	-15464,076	*	0,06418	*	-8,792E-10	26455,387	0,063023	0,0487	1,2941
MODEL7	R^2 0,5274	GAS_TRANS	*	-33454,135	*	0,12562	*	-1,415E-09	48722,305	0,123751	0,1037	1,1934
MODEL8	R^2 0,3536	GAS_CULTURA	*	-10452,002	*	0,02462	†	-1,938E-11	5766,8332	0,024595	0,0185	1,3295
MODEL9	R^2 0,3013	GAS_EDUC	*	-16824,614	*	0,06292	*	-7,351E-10	24325,269	0,061951	0,0558	1,1102
MODEL10	R^2 0,3357	GAS_SERPER	*	13687,199	*	0,02524	*	-4,759E-10	30115,964	0,024613	0,0326	0,7550
MODEL11	R^2 0,4092	GAS_OTRPAG	*	-47550,096	*	0,06912	*	2,207E-09	-1037,608	0,072026	0,0469	1,5357
MODEL12	R^2 0,4316	GAS_DURABLE	*	-67655,397	*	0,09883	*	5,792E-09	0,00000	0,106469	0,0548	1,9429

Gasto promedio **1277772,73** **Suma Gamai = 647033**

Fuente: DANE (2008), estimaciones propias. *Significativo al 1%, † No significativo

Teniendo en cuenta los resultados de la estimación, se tiene que el gasto mínimo de subsistencia en los diferentes grupo de bienes o línea de pobreza para la economía colombiana es $\sum \gamma_i = \$647033$. Para el caso de alimentos, el gasto mínimo de subsistencia sería de $\gamma_1 = \$304878,8$. Una vez estimados los parámetros del sistema, es posible encontrar las diferentes propensiones marginales a consumir. Para ello, primero es necesario aclarar que se calcula es la propensión marginal a consumir promedio y se utiliza un gasto promedio de $\bar{m} = \$1277772,73$.

La propensión marginal a consumir promedio en el bien i es:

$$pmgc_i = \beta_i + 2\delta_i(\bar{m} - \sum b_k)$$

Según los resultados, la propensión marginal a consumir en Alimentos es $pmgc_1 = 0,2137$ y es la más alta debido a que participa con la mayor parte en el gasto promedio con un $ww_i = 0,29$. Le sigue la propensión marginal a consumir en Servicios de Vivienda con $pmgc_4 = 0,20$, Transporte $pmgc_7 = 0,123$ y Bienes Durables con $pmgc_{12} = 0,106$. El resto de bienes presentan una propensión marginal a consumir promedio menor a uno.

Por último, según los resultados los Alimentos serían un bien necesario ya que $\varepsilon_1 = 0,71 < 1$. Igual sucede con grupo de bienes como Vivienda, Enseres y Servicios personales.

Grupos de bienes como Bebidas, Vestido, Salud, Transporte, Cultura, Educación, Otros pagos y Bienes Durables son bienes de lujo ya que presentan una elasticidad mayor a uno.

Los sistemas trabajados hasta el momento, tienen como supuesto de fondo el asumir que existe un consumidor representativo. Deaton y Muellbauer (1980, 1993) han intentado construir diversos sistemas de ecuaciones de demanda con el propósito de obtener condiciones bajos las cuales se cumpla una cierta forma de agregación que replique la mayor parte de características a nivel individual para no tener que trabajar así, con todas las consecuencias que trae el asumir agentes representativos. Uno de los sistemas mejor equipados para ello, es el llamado sistema casi ideal de demanda que exponemos a continuación.

4.5. Sistema casi ideal de demanda (SCID)

Las llamadas *formas flexibles* de sistemas de ecuaciones de demanda, reciben este nombre porque se aproxima la función de utilidad $u(x)$, la función de utilidad indirecta $v(p,m)$ o la función de gasto $e(p,u)$ mediante alguna forma funcional específica que tenga suficientes parámetros para permitir una aproximación razonable de la verdadera función desconocida y de este modo, se evita el llamado problema de la identificación que se presenta, por ejemplo, en el sistema lineal de gastos y el sistema cuadrático de gastos (Muñoz, 2004).

El sistema casi ideal se debe a Deaton y Muellbauer (1980) y se llama así, porque la participación de cada uno de los bienes en la demanda agregada tiene la misma forma que la participación de cada uno de los bienes en las demandas individuales. Además, el sistema es una aproximación de primer orden (de Taylor) a un sistema de ecuaciones de demanda. Se le suma también, que el sistema en el agregado es perfecta para todos los consumidores sin necesidad de tener que suponer curvas de Engels paralelas como se debe hacer cuando se trabaja con agentes representativos. El sistema, además, puede ser usado para comprobar los test de homogeneidad y simetría sin necesidad de imponerlos apriori teniendo, así, ventajas notables respecto a los modelos tipo Stone-Geary (Henao, 1996).

Antes de desarrollar el sistema son necesarias unas consideraciones previas.

1. Una función $u(x)$ es homogénea de grado k si:

$$u(tx) = t^k u(x)$$

Las funciones homogéneas de grado k tienen curvas de indiferencia paralelas:

$$\frac{u_i(tx)}{u_j(tx)} = \frac{t^k u_i(x)}{t^k(u_j(x)} = \frac{u_i(x)}{u_j(x)}$$

Es decir, las curvas de indiferencia de las funciones homogéneas son copias o ampliaciones las unas de las otras.

2. Una función homotética es una transformación positiva de una función homogénea de grado uno. Es decir, una función homotética puede expresarse como:

$$f(x) = g(h(x))$$

Siendo $h(x)$ homogénea de grado uno.

Supongamos entonces una función de gasto homotética:

$$e(u,p) = ub(p)$$

Siendo $b(p)$ homogénea de grado uno en precios y cóncava.

Se observa que en la función de gasto anterior, si $u = 0$ el gasto es cero. No obstante, como lo han anotado Green (1983) y otros, el consumidor debe hacer siempre un mínimo de gasto necesario para sobrevivir y de todas formas $u = 0$ implica realizar un gasto identificable con ese mínimo de subsistencia. A esto, se le suma que para que la teoría de la elección cobre sentido, los individuos deben haber satisfecho un mínimo de necesidades básicas para poder hablar del concepto de utilidad. Realizando entonces una modificación a nuestra función de gasto del tipo Gorman se tiene:

$$e(u,p) = a(p) + ub(p)$$

También podemos realizar una combinación convexa para tener finalmente:

$$e(u,p) = (1-u)a(p) + ub(p)$$

Se observa entonces que $a(p)$ es el gasto de subsistencia identificable para $u = 0$. Esta es precisamente la función considerada por Deaton y Muellbauer (1980).

Sea la siguiente función de gasto:

$$lne(u,p) = a(p) + ub(p)$$

Donde:

$$a(p) = \alpha_0 + \sum \alpha_k p_k + \frac{1}{2}\sum_k \sum_l \gamma_{kl}^* lnp_k lnp_l$$

$$b(p) = \beta_0 \prod p_k^{\beta_k}$$

$$lne(u,p) = \alpha_0 + \sum \alpha_k p_k + \frac{1}{2}\sum_k \sum_l \gamma_{kl}^* lnp_k lnp_l + u\beta_0 \prod p_k^{\beta_k}$$

Haciendo uso del lema de Shepard se tiene:

$$\frac{\partial lne(u,p)}{\partial lnp_i} = \frac{\partial e(u,p)}{e(u,p)}\frac{p_i}{\partial p_i} = \frac{x_i p_i}{e(u,p)} = \frac{x_i p_i}{m} = w_i$$

Volviendo al sistema y realizando ∂lnp_i se tiene:

$$w_i = \alpha_i + 1/2 \sum \gamma_{ij} lnp_j + 1/2 \sum \gamma_{ji} lnp_i + \beta_i u \beta_o \prod p_k^{\beta_k}$$

Se va a utilizar la función de utilidad indirecta de Lau y Jorgenson (1975) definida como:

$$u = v(p, m) = \alpha_0 + \sum \alpha_k ln(\frac{p_k}{m}) + 1/2 \sum \sum \beta_k ln(\frac{p_k}{m}) ln(\frac{p_j}{m})$$

Reemplazando u en la expresión de antes se tiene:

$$w_i = \alpha_i + \sum \gamma_{ij}^* lnp_j + \beta_i ln(\frac{m}{P})$$

Donde:

$$\gamma_{ij}^* = (\gamma_{ij} + \gamma_{ji})/2$$

Este es finalmente el sistema casi ideal de demandas.

Se puede utilizar el índice de Stone, $lnP^* = \sum w_k lnp_k$ donde $P \approx \xi P^*$. En este caso el sistema sería:

$$w_i = \alpha_i^* + \sum \gamma_{ij}^* lnp_j + \beta_i ln(\frac{m}{P^*})$$

donde $\alpha_i^* = \alpha_i - \beta_i ln\xi$.

Esta aproximación recibe el nombre aproximación lineal al SCED (AL/SCED).

La otra alternativa es usar:

$$lnP = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k lnp_k + (1/2) \sum_k \sum_j lnp_k lnp_j$$

Volviendo al SCED $w_i = \alpha_i + \sum \gamma_{ij}^* lnp_j + \beta_i ln(\frac{m}{P})$ se tiene que si:

$\beta_i > 0$ entonces w_i crece con m y por lo tanto el bien es de lujo.

$\beta_i < 0$ entonces w_i decrece con m y por lo tanto el bien es necesario.

Las condiciones teóricas se cumplen en el sistema si:

Condición de agotamiento del gasto:

$$\sum w_i = 1$$

Se cumple si y sólo si:

$$\sum \alpha_i = 1 \quad \sum \gamma_{ij} = 0 \quad \sum \beta_i = 0$$

Condición de homogeneidad en precios y renta

Se cumple si y sólo si:

$$\sum \gamma_{ij} = 0$$

Simetría en el efecto sustitución cruzado.

Se cumple si y sólo si:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

Prueba (Muñoz, 2010)

$$w_i = \alpha_i + \sum \gamma^*_{ij} lnp_j + \beta_i ln(\frac{m}{P})$$

Utilizando $lnP = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k lnp_k + (1/2) \sum_k \sum_j lnp_k lnp_j$ se tiene:

$$w_i = \alpha_i + \sum \gamma^*_{ij} lnp_j + \beta_i [lnm - (\alpha_0 + \sum_i \alpha_1 lnp_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij} lnp_i lnp_j)]$$

Para el caso de dos bienes:

$$w_1 = \alpha_1 + \gamma_{11} lnp_1 + \gamma_{12} lnp_2 + \beta_1 [lnm - (\alpha_0 + \alpha_1 lnp_1 + \alpha_2 lnp_2 + \frac{1}{2} \gamma_{11} lnp_1 lnp_1$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma_{12} lnp_1 lnp_2 + \frac{1}{2} \gamma_{21} lnp_2 lnp_1 + \frac{1}{2} \gamma_{22} lnp_2 lnp_2)]$$

Despejando de $w_1 = p_1 x_1 / m$ a x_1 se tiene:

$$x_1 = \frac{m}{p_1} (\alpha_1 + \gamma_{11} lnp_1 + \gamma_{12} lnp_2 + \beta_1 [lnm - (\alpha_0 + \alpha_1 lnp_1 + \alpha_2 lnp_2 + \frac{1}{2} \gamma_{11} lnp_1 lnp_1 + \frac{1}{2} \gamma_{12} lnp_1 lnp_2$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma_{21} lnp_2 lnp_1 + \frac{1}{2} \gamma_{22} lnp_2 lnp_2)])$$

La simetría de la matriz Slutsky exige que:

$$\frac{\partial h_i}{p_j} = \frac{\partial x_i}{p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{m}$$

En nuestro caso:

$$\frac{\partial x_1}{p_2} = \frac{m}{p_1}\left(\gamma_{12}/p_2 - \beta_1[\alpha_2/p_2 + \frac{1}{2}\gamma_{12}lnp_1/p_2 + \frac{1}{2}\gamma_{21}lnp_1/p_2 + \gamma_{22}lnp_2/p_2]\right)$$

Dado que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ entonces:

$$\frac{\partial x_1}{p_2} = \frac{m}{p_1 p_2}\left(\gamma_{12} - \beta_1[\alpha_2 + \gamma_{12}lnp_1 + \gamma_{22}lnp_2)]\right)$$

llamando $lnP = \alpha_0 + \sum_i \alpha_1 lnp_i + (1/2)\sum_k \sum_j lnp_k lnp_j$ se tiene:

$$\frac{\partial x_1}{p_2} = \frac{m}{p_1 p_2}\left(\gamma_{12} - \beta_1[w_2 - \beta_2(lnm - lnP)]\right)$$

A su vez, se tiene para el bien 2 lo siguiente:

$$\frac{\partial x_2}{p_1} = \frac{m}{p_1 p_2}\left(\gamma_{21} - \beta_2[w_1 - \beta_1(lnm - lnP)]\right)$$

Es posible demostrar que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial m}x_2 = \frac{x_2}{p_1}(w_1 + \beta_1) = \frac{p_2 x_2 m}{p_1 p_2 m}(w_1 + \beta_1) = \frac{m}{p_1 p_2}w_2(w_1 + \beta_1)$$

De igual forma:

$$\frac{\partial x_2}{\partial m}x_1 = \frac{m}{p_1 p_2}w_1(w_2 + \beta_2)$$

Entonces:

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \frac{m}{p_1 p_2}\left(\gamma_{12} - \beta_1[w_2 - \beta_2(lnm - lnP)]\right) + \frac{m}{p_1 p_2}w_2(w_1 + \beta_1)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \frac{m}{p_1 p_2}\left[\left(\gamma_{12} - \beta_1[w_2 - \beta_2(lnm - lnP)]\right) + w_2(w_1 + \beta_1)\right]$$

De la misma manera se tiene:

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_1} = \frac{m}{p_1 p_2}\left[\left(\gamma_{21} - \beta_2[w_1 - \beta_1(lnm - lnP)]\right) + w_1(w_2 + \beta_2)\right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \frac{\partial h_2}{\partial p_1}$$

si y sólo si

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} \quad \blacksquare$$

Elasticidades

- Elasticidad precio de la demanda:

Sea w_1 igual a:

$$w_1 = \frac{p_1 x_1}{m}$$

Derivando respecto a p_1:

$$\frac{\partial w_1}{\partial p_1} = \frac{1}{m}(x_1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1})$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial p_1} = \frac{x_1 p_1}{m}(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1})$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial p_1} = \frac{x_1}{m}(1 + \varepsilon_{11})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial p_1}\frac{m}{x_1} - 1 = \frac{\partial w_1}{\partial p_1}\frac{m p_1}{x_1 p_1} - 1$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{w_1} - 1$$

Realizando ahora $\frac{\partial w_1}{\partial p_1}$ en el sistema casi ideal de demanda:

$$w_i = \alpha_i + \sum \gamma_{ij}^{*} ln p_j + \beta_i ln(\frac{m}{P})$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial p_1} = \frac{\gamma_{11}}{p_1} - \beta_i(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\sum \gamma_{ik} ln p_k}{p_1})$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1}\left(\gamma_{11} - \beta_i(\alpha_1 + \sum \gamma_{ik} ln p_k)\right)$$

Dividiendo por w_1 a ambos lados:

$$\frac{\partial w_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{w_1} = \frac{1}{w_1}\left(\gamma_{11} - \beta_i(\alpha_1 + \sum \gamma_{ik} lnp_k)\right)$$

Se tiene entonces:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{w_1}\left(\gamma_{11} - \beta_i(\alpha_1 + \sum \gamma_{ik} lnp_k)\right) - 1$$

- Elasticidad ingreso de la demanda:

Sea w_1 igual a:

$$w_1 = \frac{p_1 x_1}{m}$$

Derivando respecto a m se tiene:

$$\frac{\partial w_1}{\partial m} = \frac{p_1 \frac{\partial x_1}{m} m - p_1 x_1}{m^2} = \frac{p_1}{m^2}(\frac{\partial x_1}{m} m - x_1) = \frac{p_1 x_1}{m^2}(\varepsilon_1 - 1)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial m}\frac{m}{w} = \varepsilon_1 - 1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial w_1}{\partial m}\frac{m}{w} + 1$$

Realizando ahora $\frac{\partial w_1}{\partial m}$ en el sistema se tiene:

$$w_i = \alpha_i + \sum \gamma^*_{ij} lnp_j + \beta_i ln(\frac{m}{P})$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial m} = \beta_1/m$$

La elasticidad ingreso de la demanda es finalmente igual a:

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{w_1} + 1$$

Es posible también encontrar las elasticidades compensadas de la demanda usando la ecuación de Slutsky $\varepsilon^*_{11} = \varepsilon_{11} + w_1\varepsilon_1$.

Una vez definido el sistema lo ideal sería pasar a la estimación. El problema es que es difícil construir una serie de precios[10] para estimar el sistema y si se

[10]Para poder construir una serie de precios es necesario utilizar equivalencias y pseudo unidades de valor, lo cual cae fuera del alcance de este texto. Para más ver Lewbel (1989) y Perali (2003).

supone precios constantes, el sistema sería idéntico al sistema Working y Leser que se expuso antes. Por lo tanto, la estimación del sistema no se hará en este texto. El lector interesado en una aplicación de este sistema para la economía colombiana se le recomienda ver Pérez y Cortés (2010).

4.6. Sistemas de demanda con demografía

Para exponer los sistemas con demografía se hará uso del sistema lineal de gastos. Recordemos que el SLG está definido como:

$$p_i x_i = p_i \gamma_i + \beta_i (m - \sum p_k \gamma_k)$$

Se pretende ahora (utilizando el sistema lineal de gastos) incorporar los efectos en el gasto de la composición del hogar y sus características socio demográficas para ver, por ejemplo, cómo se afecta el gasto mínimo de subsistencia y ver si este cambia con las proporciones de la participación de la población en sus diferentes categorías. Sea:

$$p_i x_{ih} = p_i \gamma_{ih} + \beta_i (m_h - \sum p_k \gamma_{kh})$$

$$p_i x_{ih} = p_i \gamma_{ih} + \beta_i m_h - \beta_i \sum p_k \gamma_{kh}$$

Siendo

$$\gamma_{ih} = c_{i1} z_{1h} + c_{i2} z_{2h} + ... + c_{im} z_{mh}$$

$$\gamma_{ih} = \sum_{g=1}^{m} c_{ig} z_{gh}$$

Donde c_{ig} es la contribución de la persona tipo g^{th} a la cantidad consumida (gastada) de subsistencia del bien i y z_{gh} es el número de personas del tipo g^{th} en el hogar h^{th}. Por ejemplo, z_{1h} es la persona del tipo 1 en el hogar h y c_{i1} es la proporción del gasto en el bien i de la persona tipo 1. Por lo tanto, $c_{i1} z_{1h}$ es la proporción del gasto en el bien i de la persona tipo 1 del hogar h (Martín, 1981).

Podemos notar, además, que ahora el gasto de subsistencias varía entre hogares $p_i \gamma_{ih}$. Se nota también que el efecto de una persona adicional en una clase dada es estrictamente acumulativo. Es decir, esta formulación no permite formulaciones de economías de escala en consumo[11]. Se asumirá además, que los hogares se enfrentan a idénticos conjuntos de precios.

Sea $e_{ih} = p_i x_{ih}$ el gasto del hogar h en el bien i. Podemos redefinir nuestro sistema, incluyendo la composición del hogar tal que:

$$e_{ih} = p_i \sum_{g=1}^{m} c_{ig} z_{gh} + \beta_i m_h - \beta_i \sum_{k=1}^{n} \sum_{g=1}^{m} p_k c_{kg} z_{gh}$$

Definiendo $\gamma_{ig}^{*} = p_i c_{ig}$ como el valor de la contribución de la persona tipo g^{th} a la cantidad consumida (gastada) de subsistencia del bien i se tiene finalmente (Martín, 1981):

$$e_{ih} = \sum_{g=1}^{m} \gamma_{ig}^{*} z_{gh} + \beta_i m_h - \beta_i \sum_{k=1}^{n} \sum_{g=1}^{m} \gamma_{kg}^{*} z_{gh}$$

Donde γ_{ig}^{*} es ahora el valor (dados los precios) de la contribución de la g^{th} persona al valor de subsistencia del bien i.

En forma reducida el sistema puede expresarse como:

$$e_{ih} = \sum_{g=1}^{m} \sigma_{ig} z_{gh} + \beta_i m_h$$

Siendo

$$\sigma_{ig} = \gamma_{ig}^{*} - \beta_i \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kg}^{*}$$

El sistema lineal de gastos con demografía presenta también problemas de identificación (Martín, 1981). Por ejemplo, supongamos que hay sólo un tipo de persona $g = 1$ y hay tres bienes. Con esto se tiene:

$$\sigma_{11} = \gamma_{11}^{*} - \beta_1(\gamma_{11}^{*} + \gamma_{21}^{*} + \gamma_{31}^{*})$$

$$\sigma_{21} = \gamma_{21}^{*} - \beta_1(\gamma_{11}^{*} + \gamma_{21}^{*} + \gamma_{31}^{*})$$

$$\sigma_{31} = \gamma_{31}^{*} - \beta_1(\gamma_{11}^{*} + \gamma_{21}^{*} + \gamma_{31}^{*})$$

De nuevo, como en el sistema lineal de gasto aparece el problema de la identificación ya que una ecuación es linealmente dependiente de las otras. Para

[11] Ver sección 4.8 sobre este tema.

este caso existen tres ecuaciones con tres incógnitas pero la dependencia lineal crea problemas para identificar exactamente el sistema. Veamos.

Es fácil ver que $\gamma_{11}^* + \gamma_{21}^* + \gamma_{31}^* = \frac{\gamma_{31}^* - \sigma_{31}}{\beta_3}$ y por lo tanto, las otras dos ecuaciones quedan en términos de la tercera:

$$\sigma_{11} = \gamma_{11}^* - \frac{\beta_1}{\beta_3}(\gamma_{31}^* - \sigma_{31})$$

y

$$\sigma_{21} = \gamma_{21}^* - \frac{\beta_2}{\beta_3}(\gamma_{31}^* - \sigma_{31})$$

Para un caso genérico tendríamos:

$$\sigma_{i1} = \gamma_{i1}^* - \frac{\beta_i}{\beta_k}(\gamma_{k1}^* - \sigma_{k1})$$

Para solucionar este problema de identificación, de nuevo como en el caso del SLG, hay que recurrir a una ecuación adicional. Una opción puede ser el uso de una ecuación exógena para el gasto de alimentos que muestre el consumo de subsistencia y que permita hallar el γ_{ig}^* faltante para identificar las otras ecuaciones. Ó puede hacerse uso de nuevo, como se hizo antes, de la ecuación del ahorro y suponer que el γ_{ig}^* asociado tiene una propensión marginal a consumir igual a cero. Haciendo uso de alguna de estas ecuaciones exógenas se podría ahora sí identificar el sistema. Para efectos prácticos, el método a seguir es estimar el sistema con bienes durables haciendo el papel de la ecuación del ahorro y suponer el consumo de subsistencia en bienes durables igual a cero.

Estimación del sistema lineal de gasto con demografía

Antes de la estimación son necesarias algunas consideraciones finales:

- Para efectos prácticos, cuando con la encuesta de calidad de vida se estima el sistema lineal de gasto con demografía y se incluye las personas en edad de 0-7 años por ejemplo, incorporando además la ecuación de bienes durables para identificar el sistema, la sumatoria de los γ_{ig}^* asociados a los gastos de la población de edad de 0-7 años en los diferentes bienes (alimentos, vivienda, bebidas, educación, etc.) nos da el gasto de subsistencia de una persona de 0-7 años.

- Debido a que existe un mayor gasto por nuevos miembros del hogar, hay entonces una alta variabilidad de la demanda en diferentes bienes y por lo tanto, suponer homoscedasticidad en la varianza es inadecuado. En este caso, es necesario normalizar la varianza a uno dividiendo todo el sistema sobre el gasto total para tener finalmente homoscedasticidad. Por lo tanto, el sistema a estimar queda:

$$e_{ih} = \sum_{g=1}^{m} \sigma_{ig} z_{gh} + \beta_i m_h$$

Dividiendo por m_h se tiene:

$$\frac{e_{ih}}{m_h} = \beta_i + \frac{\sum_{g=1}^{m} \sigma_{ig} z_{gh}}{m_h}$$

Es decir, en este caso no se estima el gasto en el bien i si no el gasto en el bien i normalizado por el gasto total. Como se dijo antes, esto es con el fin de corregir heteroscedasticidad. A la hora de la estimación del SLG con demografía, el interés va a estar centrado en estimar cuánto varía el gasto a medida que llegan nuevos miembros al hogar y no se va a hacer una estimación de la línea de pobreza debido a que el intercepto en este caso no tiene dicha interpretación y, en todo caso, la estimación de la línea de pobreza ya se había hecho antes con el SLG y el SCG.

Se van a utilizar nuevamente datos sobre ingresos y gastos de 13000 familias colombianas extraídos de la Encuesta de calidad de vida 2008 realizada por el DANE. Se agrupan los bienes de nuevo en doce categorías las cuales son: 1) Alimentos, 2) Bebidas y tabaco, 3) Vestuario y calzado, 4) Vivienda, 5) Enseres y utensilios, 6) Salud, 7) Transporte y comunicaciones, 8) Recreación y servicios culturales, 9) Educación 10) Bienes y servicios personales, 11) Otros pagos y 12) Bienes durables.

Teniendo en cuenta la información a utilizar, pasamos ahora a la estimación del SLG. Es necesario anotar que las estimaciones se hacen usando el método de los mínimos cuadrados ordinarios y se hacen utilizando el programa SAS. Las variables demográficas a incluir serán: Población de 0-7 años (P0-7), Población de 8-17 años(P8-17) y Población de 18 años o más (P18YMÁS). Por lo tanto, el sistema a estimar es:

$$\frac{e_{ih}}{m_h} = \beta_i + \delta_1 \frac{P0-7}{m_h} + \delta_2 \frac{P8-17}{m_h} + \delta_3 \frac{P18YM\acute{A}S}{m_h}$$

Es necesario aclarar antes que P07_2 será el coeficiente asociado a $\frac{P0-7}{m_h}$, P817_2 será el coeficiente asociado a $\frac{P8-17}{m_h}$ y P18YMAS_2 sera el coeficiente asociado a $\frac{P18YM\acute{A}S}{m_h}$. Los resultados se muestran en la tabla 4.

Tabla 4

Sistema lineal de gasto con demografía para la economía colombiana

MODEL	Variable depen. [1]				Intercepto		P07_2		P817_2		P18YMAS_2
MODEL1	GAS_ALIM	R^2	0,0158	*	0,3908551	*	9353,581493	*	2124,15508	*	-1386,918612
MODEL2	GAS_BEBID	R^2	0,001	*	0,0137288	**	-400,6431777	**	-272,79714	†	26,94215506
MODEL3	GAS_VEST	R^2	0,0063	*	0,0234075	†	213,5584148	†	-62,56890743	*	-526,8282375
MODEL4	GAS_VIV	R^2	0,0621	*	0,2556328	*	-3865,361225	*	-3073,911131	*	7173,190727
MODEL5	GAS_ENSERES	R^2	0,0007	*	0,0021376	†	-2,498016678	*	-52,29760054	†	3,202246848
MODEL6	GAS_SALUD	R^2	0,0006	*	0,0451946	†	-358,4318175	†	188,7266464	**	-310,5134813
MODEL7	GAS_TRANS	R^2	0,017	*	0,0844325	*	-2021,123205	*	-702,0716148	*	-1297,889347
MODEL8	GAS_CULTURA	R^2	0,0204	*	0,0133543	*	-599,4776596	*	-250,1217471	*	-358,6046673
MODEL9	GAS_EDUC	R^2	0,0776	*	0,0386775	*	1104,67686	*	4556,550252	*	-1246,735013
MODEL10	GAS_SERPER	R^2	0,0316	*	0,0377488	*	1202,364368	†	42,00847618	*	889,4821437
MODEL11	GAS_OTRPAG	R^2	0,0197	*	0,0220515	*	-1332,004679	*	-700,7870031	*	-934,0019842
MODEL13	GAS_DURABLE	R^2	0,017	*	0,0388433	*	-1090,472833	*	-770,7963626	*	-1491,397572
		Gasto por edad:					**$ 11.874,18**		**$ 6.911,44**		**$ 8.092,82**

Fuente: DANE (2008), estimaciones propias. *Significativo al 1%, **Significativo al 5%, † No significativo

[1] Las variables dependientes están normalizadas por el gasto total. Es decir: Variable dep / Gasto total.

Según los resultados para la economía colombiana, se tiene que la variación del gasto para el hogar representativo cuando llega un miembro al hogar con edad entre 0 y 7 años[12] es igual a $11874,1. Este tipo de nuevos miembros del hogar traen una variación mayor que miembros del hogar entre 8-17 años ya que la variación en el gasto por estos miembros es de $6911,4. Por último miembros del hogar entre 18 años y más traen una variación en el gasto de $8092,8 para el hogar, que es mayor a los nuevos miembros de edad entre 8-17 años pero menor a los miembros de edad entre 0-7 años (bebes y niños pequeños).

A pesar de que la mayoría de parámetros asociados a las variables demográficas son significativas, el sistema muestra, no obstante, una pobre significancia en los diferentes bienes ya que ningún coeficiente de ajuste R^2 llega ni al 8 %.

Para ampliar la aplicaciones que en la parte demográfica se pueden hacer con la teoría del consumidor, presentamos por último el sistema Working y Leser con demografía donde es posible verificar economías a escala en consumo además de cuantificar la llegada de nuevos miembros al hogar.

4.7. Sistema Working - Leser con demografía

Recordemos que el sistema Working - Leser está definido como:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i Ln(m)$$

Utilicemos ahora el método de Engel (1895) para la inclusión de variables demográficas y cuantifiquemos el impacto de personas adicionales sobre el gasto en Alimentos. Sea:

$$w_A = \alpha_A + \beta_A Ln(\frac{m}{n}) + \delta_A ln(n) + \gamma_1 \frac{P0-7}{n} + \gamma_2 \frac{P8-17}{n}$$

Donde:

w_A es el gasto en alimentos. n es el número de personas y por lo tanto $\frac{m}{n}$ es el gasto per-capita. Se incluyó además la variable $P0-7$ para especificar la población de 0 a 7 años y $P8-17$ que es la población de 8 a 17 años. No se incluye las personas mayores de 18 años porque se tendría multicolinealidad perfecta.

Recordemos que la proposición de Engel es que a medida que aumenta el ingreso disminuye el gasto en alimentos y por lo tanto, la proporción de gasto

[12] Es necesario recordar que los gastos negativos en los diferentes bienes no se toman en cuenta.

en alimentos puede ser un índice de calidad de vida. Por ejemplo, a mayor proporción del gasto en alimentos menor calidad de vida.[13]

Vamos a suponer, para efectos prácticos, que estamos en la situación en que el hogar consta de dos (2) personas. La idea es ver cómo cambia la proporción del gasto en alimentos por la llegada de una persona de 0-7 años por ejemplo. Según Engel, la proporción del gasto en alimentos debe crecer ante la llegada de un nuevo miembro al hogar ya que baja el gasto per capita.

Supongamos entonces la situación inicial sin la llegada de una persona de 0-7 años en un hogar de dos personas:

$$w_A = \alpha_A + \beta_A Ln(\frac{m}{n}) + \delta_A ln(n)$$

Si $n = 2$ se tiene:

$$w_A = \alpha_A + \beta_A Ln(m) + (\delta_A - \beta_A) ln(2)$$

Ahora veamos el sistema con la llegada de una persona de 0-7 años al hogar (en este caso el hogar quedaría conformado con tres personas):

$$w_A^* = \alpha_A + \beta_A Ln(m^*) + (\delta_A - \beta_A) ln(3) + \gamma_1(\frac{1}{3})$$

Igualemos ahora $w_A = w_A^*$ para ver el gasto necesario requerido ante la llegada de la persona de 0-7 años al hogar, método que es sugerido por Deaton (1997).

$$w_A = w_A^*$$

$$\alpha_A + \beta_A Ln(m) + (\delta_A - \beta_A) ln(2) = \alpha_A + \beta_A Ln(m^*) + (\delta_A - \beta_A) ln(3) + \gamma_1(\frac{1}{3})$$

$$\beta_A \left[Ln(m^*) - Ln(m) \right] = (\delta_A - \beta_A) ln(2/3) - \gamma_1 \frac{1}{3}$$

$$\left[Ln(m^*) - Ln(m) \right] = \frac{1}{\beta_A} \left((\delta_A - \beta_A) ln(2/3) - \gamma_1(\frac{1}{3}) \right)$$

[13]Para un análisis más detallado sobre la compensación necesaria que necesita un hogar ante la llegada de nuevos miembros ver Brown y Deaton(1972) y Deaton (1997).

$$ln(\frac{m^*}{m}) = \frac{1}{\beta_A}\left((\delta_A - \beta_A)ln(2/3) - \gamma_1(\frac{1}{3})\right)$$

Esta es finalmente la ecuación que nos permite ver el cambio en el gasto ante la llegada de una persona de 0-7 años. Si aplicamos antilogaritmos a ambos lados se tiene el cambio en el gasto:

$$m^* - m = \exp(\frac{1}{\beta_A}\left((\delta_A - \beta_A)ln(2/3) - \gamma_1(\frac{1}{3})\right)$$

Una vez definido el sistema pasemos ahora a la estimación.

Estimación sistema W-L con demografía

Se van a utilizar nuevamente datos sobre ingresos y gastos de 13000 familias colombianas extraídos de la Encuesta de calidad de vida 2008 realizada por el DANE. Se agrupan los bienes de nuevo en doce categorías las cuales son: 1) Alimentos, 2) Bebidas y tabaco, 3) Vestuario y calzado, 4) Vivienda, 5) Enseres y utensilios, 6) Salud, 7) Transporte y comunicaciones, 8) Recreación y servicios culturales, 9) Educación 10) Bienes y servicios personales, 11) Otros pagos y 12) Gasto en impuestos.

Es necesario anotar que las estimaciones se hacen usando el método de los mínimos cuadrados ordinarios y se hacen utilizando el programa SAS. El sistema a estimar en forma reducida es:

$$w_A = \alpha_A + \beta_A Ln(\frac{m}{n}) + \delta_A ln(n) + \gamma_1 \frac{P0-7}{n} + \gamma_2 \frac{P8-17}{n}$$

En esta ocasión las estimaciones sólo se harán para cuantificar la llegada de nuevos miembros al hogar y la estimación de elasticidades se omitirá.

Tabla 5

Sistema Working y Leser con demografía para la economía colombiana

Variable depen.		Intercepto	LN_GASPER	LN_PERS	P0_7	P8_17
W1 alim.	R^2 0,0624	* 0,85055	* -0,03704	† 0,00299	* 0,01753	* 0,0063
W2 bebi.	R^2 0,0074	† 0,00041	* 0,00159	* -0,00667	*** 0,00107	† 0,0004
W3 vest.	R^2 0,0185	* -0,05185	* 0,00577	** -0,00197	* 0,00477	* 0,0025
W4 vivi.	R^2 0,1314	* 1,0206	* -0,05022	* -0,08041	* -0,0167	* 0,0122
W5 enseres.	R^2 0,0032	* -0,00303	* 0,00041	† -0,0002	* 0,00043	† 0,0001
W6 salud.	R^2 0,0106	* -0,06283	* 0,00725	* 0,02112	** -0,0028	* -0,0048
W7 trans.	R^2 0,0728	* -0,27365	* 0,02588	* 0,03389	* -0,00539	* -0,0053
W8 recre.	R^2 0,0718	* -0,0795	* 0,00714	* 0,00192	† 0,00035	† -0,0001
W9 educ.	R^2 0,1872	* -0,08969	* 0,00738	* 0,02009	* 0,00209	* 0,0195
W10 s pers.	R^2 0,0458	* 0,16569	* -0,00904	* -0,00937	* 0,00181	† -0,00007
W11 otros pa.	R^2 0,131	* -0,27493	* 0,02357	* -0,00439	* 0,00492	* 0,00165
W12 impuestos	R^2 0,1199	* -0,20105	* 0,01729	* 0,02297	* -0,0081	* -0,00787

Suma interceptos = 1

Persona de 0-7 **1,814759709**

Persona de 8-17 **1,640319684**

Fuente: DANE (2008), estimaciones propias. *Significativo al 1%,**Significativo al 5%,***Significativo al 10%, † No significativo

Una vez estimado el sistema Working - Leser, es posible cuantificar la llegada de un nuevo miembro al hogar mediante la siguiente ecuación:

$$m^* - m = \exp(\frac{1}{\beta_A}\left((\delta_A - \beta_A)ln(2/3) - \gamma_1(\frac{1}{3})\right)$$

Según los resultados, la llegada de un nuevo miembro al hogar con edad entre 0-7 años trae como resultado una variación del gasto de $m^* - m = 1,8147$, para un hogar formado inicialmente por dos personas. Es decir, un niño cuesta el 80 % de dos adultos ó lo que es equivalente, el 160 % de un adulto. Por otra parte, la llegada de un nuevo miembro entre 8-17 años cuesta el 64 % de dos adultos. En este caso, se tiene entonces que la llegada de un bebe, por ejemplo, cuesta más que la llegada de una persona con edad entre 8-17 años lo cual es un resultado paradójico. A pesar de que el sistema es significativo en la mayoría de los parámetros, el nivel de significancia de los modelos estimados para los diferentes bienes es bajo y por tanto, la estimación del sistema Working - Leser con demografía sigue siendo una aproximación pobre a las verdaderas dinámicas de la demanda de bienes del hogar y su composición demográfica. Para más ver Muñoz (2004).

4.8. Economías a escala en consumo

Como último tema de las aplicaciones de la teoría del consumidor, se realiza a continuación una breve introducción en lo que respecta a economías a escala en consumo mediante el sistema Working - Leser.

Supongamos que inicialmente un hogar tenía un gasto en consumo de G^0. ¿Qué sucede cuando, por ejemplo, se duplica la población del hogar? Esta es la pregunta teórica que se intenta responder en economías a escala en consumo (Deaton y Paxson, 1998). Hay muchos bienes que se vuelven públicos al interior del hogar cuando este crece y el nuevo gasto con los nuevos miembros puede disminuir. Es el caso, por ejemplo, del gasto en vivienda: cuando una persona vive sola gasta una proporción w_i de su ingreso en vivienda, pero cuando decide formar familia con otra persona, que también gasta antes w_i de su ingreso en vivienda, el nuevo gasto en vivienda w_i^* se puede dividir entre los dos miembros del nuevo hogar y la proporción del gasto en vivienda, para las dos personas, puede así disminuir y pasar a ser, por ejemplo, $w_i^* < w_i$. En este caso se dice que hubo economías a escala en consumo de vivienda o que la vivienda se volvió un bien público en el interior del nuevo hogar.

Más formalmente, la ecuación para economías a escala en consumo está dada por:

$$G^1 = 2^\theta G^0$$

Siendo G^0 el gasto inicial dada un hogar con ciertas personas y G^1 el gasto cuando se duplica las personas del hogar. Si $\theta < 1$ se dice que hay economías a escala en consumo.

Deaton y Paxson proponen, para estudiar economías a escala en consumo, utilizar el sistema:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i Ln(\frac{m}{n}) + \delta ln(n)$$

Siendo n la población del hogar y $\frac{m}{n}$ el gasto per-capita.

La pregunta que se intenta resolver es entonces, suponiendo inicialmente un hogar formado por cierto número de personas, ¿cómo cambia el gasto en el bien i cuando se duplica la población del hogar?

El θ de las economías a escala en consumo es igual a: $\theta = 1 - \frac{\delta_i}{\beta_i}$. Como se menciono anteriormente, un $\theta < 1$ es evidencia de que hay economías a escala para el bien i.

Estimación de economías a escala en consumo para Colombia

Se van a utilizar nuevamente datos sobre ingresos y gastos de 13000 familias colombianas extraídos de la Encuesta de calidad de vida 2008 realizada por el DANE. Se agrupan los bienes en las mismas doce categorías con la que se estimó el sistema Working y Leser con demografía. Es necesario anotar que las estimaciones se hacen usando el método de los mínimos cuadrados ordinarios y utilizando el programa SAS. Los resultados se muestran a continuación.

Tabla 6

Economías a escala en consumo con el sistema Working - Leser

Variable depen.			Intercepto	LN_GASPER	LN_PERS	Economías a escala
W1 alim.	R^2	0,0583	* 0,88011	* -0,04991	* 0,02143	1,429373
W2 bebi.	R^2	0,0071	† 0,00224	* 0,00142	* -0,0055	4,873239
W3 vest.	R^2	0,0112	* -0,04333	* 0,00493	* 0,00389	0,210953
W4 vivi.	R^2	0,1244	* 0,98879	* -0,047	* -0,10439	-1,22106
W5 enseres.	R^2	0,0017	** -0,00238	* 0,00035	† 0,0001	0,714286
W6 salud.	R^2	0,0087	* -0,07078	* 0,008	* 0,01427	-0,78375
W7 trans.	R^2	0,0696	* -0,28474	* 0,02703	* 0,02471	0,085831
W8 recre.	R^2	0,0716	* -0,07905	* 0,0071	* 0,00204	0,712676
W9 educ.	R^2	0,1221	* -0,07514	* 0,00557	* 0,04165	-6,47756
W10 s pers.	R^2	0,0446	* 0,16859	* -0,00928	* -0,00821	0,115302
W11 otros pa.	R^2	0,1279	* -0,2667	* 0,02277	† 0,000665	0,970795
W12 impuestos	R^2	0,1	* -0,21762	* 0,01901	* 0,00934	0,50868

Suma interceptos = 1

Fuente: DANE (2008), estimaciones propias. *Significativo al 1%,**Significativo al 5%, † No significativo

Para verificar economías a escala en consumo en el bien i, una vez estimados los parámetros, se halla $\theta = 1 - \frac{\delta_i}{\beta_i}$. Según los resultados y como era de esperarse, hay evidencia de que no hay economías a escala en consumo sólo en grupos de bienes como Alimentos y Bebidas. Es decir, cuando por ejemplo un hogar se multiplica por dos personas, el gasto en alimentos se incrementa en $2^{1,429} = 2{,}692 > 2$. Los demás grupos de bienes presentan economías a escala en consumo. Para el caso de Vivienda, cuando un hogar se duplica, el gasto en Vivienda se incrementa en $2^{-1,22} = 0,429 < 2$ y hay entonces evidencia de que existen economías a escala en el consumo de vivienda.

Es posible utilizar otros sistemas más refinados para tratar de estimar sistemas de ecuaciones de demanda más ideales. También es posible utilizar sistemas con variables demográficas con mejor ajuste pero la idea era sólo mostrar, a grandes razgos, lo que se puede hacer con la teoría del consumidor en la práctica.

Bibliografía

[1] Arrow, K. y Hahn, F. (1977): *Análisis general competitivo.* Fondo de cultura económica, México.

[2] Arrow, K. y Debreu, G. (1954): ´´Existence of equilibrium for a competitive economy´´, *Econometrica*, Vol. 22, págs. 265-290.

[3] Benetti, Carlo y Jean Cartelier (1998): ´´El método Normativo de la Teoría Económica Positiva´´, *Cuadernos de Economía*, No 26. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[4] Brown, Alan y Deaton, Angus (1972): ´´Surveys in applied economics: models of consumer behaviour´´, *The Economic Journal*, Vol. 82, No.328.

[5] Carvajal, Andrés. y Riascos, Alvaro (2006): *Notas de Clase en Microeconomía a Nivel Intermedio.* Working paper. Universidad de los Andes.

[6] Cataño, J. F. (1997): ´´El equilibrio general: ¿modelo estático o estéril?´´, *Cuadernos de economía*, No 27, Universidad Nacional, Bogotá.

[7] Cortés, D. y Pérez, Jorge (2010): ´´El consumo de los hogares colombianos 2006-2007: estimación de sistemas de demanda´´, *Documentos de trabajo*, Facultad de economía, Universidad del Rosario. Bogotá.

[8] DANE (2010). Departamento Administrativo Nacional de Estadistica. Encuesta de calidad de vida 2008.

[9] Deaton Angus (1997): *The Analysis of Household Surveys: A Microeconomic Approach to Development Policy.* World Bank, Johns Hopkins University Press.

[10] Deaton, Angus y Christina Paxon (1998): ´´Economies of Scale, Household Size and Demand for Food´´, *Journal of Political Economy*, vol.106, No. 5.

[11] Deaton, Angus y Muelbauer, John (1993): *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge University Press.

[12] Deaton Angus y Muelbauer, John (1980):´´An Almost Ideal Demand System´´. *American Economic Review*, Vol.70, No.3.

[13] Debreu, G. (1973): *Teoría del valor: un análisis axiomático del equilibrio económico*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.

[14] Engel, E. (1895): ´´Die productions und consumptionsverhaltnisse des Sachen´´, *Zeitschrift des Statischen Bureaus des Konglish Sachischen Ministerium des Innerum*, No.8-9.

[15] Green, John (1982): *La teoría del consumo*. Alianza Editorial. España.

[16] Henao, Edison (2010): *Notas de microeconomía*. Working paper. Universidad Nacional, Medellín.

[17] Henao, Edison (1996): ´´Modelling consumer behaviour: a comparison between aids and the stone-geary models´´, *Revista Ensayos de Economía*, Vol.7, No.11. Universidad Nacional, Medellín.

[18] Howe, Howard; Pollak, Robert y Wales, Terence (1979): ´´Theory and time series estimation of the quadratic expenditure system´´, *Econometrica*, Vol.47, No.5.

[19] Howe, H. (1974): *Estimation of the Linear and Quadratic Expenditure System: A Cross-Section Case for. Colombia*. Unpublished Ph.D. dissertation. University of Pennsylvania.

[20] Jorgenson, D. W. y Lau, L. J. (1975): ´´The Structure of Consumer Preferences´´, *Annals Econ. Soc. Measure.*, Winter 1975, 4, 49-101.

[21] Kreps, D. (1995): *Un curso de teoría microeconómica*. McGraw-Hill, España.

[22] Leser, C. E. (1963): ´´Forms of Engel Functions´´, *Econometrica*, Oct., 31, 694-703.

[23] Lewbel, A. (1989): ´´Identification and Estimation of Equivalence Scales under Weak Separability´´, *Review of Economic Studies*, 56: 311-16.

[24] Lozano, Francisco; Monsalve, Sergio, y Villa, Edgar (1999): *Introducción a los Conceptos de Equilibrio en Economía*. Editorial Unibiblos, Universidad Nacional, Bogotá.

[25] Martín, Thomas lee (1981): *Estimation of the linear and quadratic expenditure systems for Colombian households*. Rice University. Ph.D. dissertation.

[26] Mas-Colell, A.; Whinston, M.D. y Green, J.R. (1995): *Microeconomic theory*. Nueva York, Oxford University Press.

[27] Mas-Colell, A. (1977): ´´The Recoverability of Consumers' Preferences from Market Demand Behavior´´, *Econometrica*, Vol. 45, págs. 1409-1430.

[28] Monsalve, Sergio (2010): A cien años de la muerte de Léon Walras II: Huellas de la tradición Paretiana, *Ensayos de Economía*. Vol 19, No.35. Universidad Nacional, Medellín.

[29] Monsalve, Sergio (2009): *Matemáticas básicas para economistas*. Sergio Monsalve Editor, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[30] Muñoz, Manuel (2010): *Apuntes de clase: aplicaciones empíricas de la teoría del consumidor*. Universidad Nacional, Bogotá.

[31] Muñoz, Manuel; Ramírez Manuel y Zambrano, Andrés (2005): ´´Comparación del gasto de los hogares colombianos entre 1997 y 2003, según resultados de las encuestas de calidad de vida: magnitud, composición y distribución´´, *Borradores de investigación*, Facultad de economía, Universidad del Rosario. Bogotá.

[32] Muñoz, Manuel (2004): Necesidades, consumo de subsistencia y pobreza. Tesis para optar el título de Doctor en ciencias económicas, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

[33] Nicholson, Walter (2002): *Teoría microeconómica*. Thomson Editores, España.

[34] Nicholson, J. L. (1949): ´´Variations in Working-Class family expenditure´´. *Journal of the Royal statistical society*. 1949.

[35] Perali, F. (2003): ´´The Behavioral and Welfare Analysis of Consumption´´, *Kluwer Academic Publishers*, Amsterdam.

[36] Ramírez G. Manuel (1989): ´´Estimación y utilización de sistemas completos de ecuaciones de demanda´´, *Desarrollo y Sociedad*, No. 24. CEDE, UNIANDES.

[37] Samuelson, Paul (1947): ´´Some Implications of Linearity´´, *Review of Economic Studies*, 15, 88-90.

[38] Samuelson, Paul (1947b): *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press.

[39] Segura, Julio (1996): *Análisis microeconómico*. Alianza Editorial. España.

[40] Shepard, R.W., (1953): *Cost and Production Functions*. Princeton University Press.

[41] Slutsky, E. (1917): ´´On the theory of the budget of the consumer´´. *Giornale degli economisti*. Reimpreso en *Reading in price theory*, 1952. American Economic Association. págs. 27-57.

[42] Smith, Adam (1776): *Una investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones*. Fondo de cultura económica, México, 1987.

[43] Stiglitz, Joseph (2000): ´´The Contributions Of The Economics Of Information To Twentieth Century Economics´´, *The Quarterly Journal of Economics*, 115, 4.

[44] Stone, Richard (1954): ´´Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand´´, *Economic Journal*, 64, 511-527.

[45] Varian, Hal (1992): *Análisis microeconómico*. Antoni Boch editor, Barcelona.

[46] Varian, Hal (1999): *Microeconomía intermedia: un enfoque moderno*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.

[47] Villar, Antonio (1996): *Curso de microeconomía avanzada. Un enfoque de equilibrio general*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.

[48] Walras, Leon (1874): *Elementos de economía política pura*. Alianza editorial, Madrid. 1987.

[49] Working, H. (1943): ´´Statistical Laws of Family Expenditure´´, *Journal of American Statistical Association*, Marzo, 38, 43-56.

NOTACIÓN

Se presenta a continuación un resumen de las principales notaciones utilizadas.

X_i denota el conjunto de consumo.

$\succsim$ denota la relación binaria de preferencias sobre el conjunto de consumo.

B es el conjunto de restricción presupuestaria walrasiano.

Y_j denota el conjunto de producción del j-ésimo productor.

π_j denota la función de beneficios del j-ésimo productor.

ω denota dotaciones iniciales.

x denota cesta o canasta de consumo. En el capítulo 2 denota la demanda agregada.

$x(p, m)$ denota la demanda marshalliana u ordinaria.

$h(p, \underline{u})$ denota la demanda hicksiana o compensada.

S denota la matriz de efecto sustitución.

$\mathbb{R}$ denota el espacio de los números reales.

$\mathbb{R}_+$ denota el espacio de los números reales positivos, incluyendo el cero.

$\mathbb{R}^l$ denota un espacio euclidiano de l dimensiones.

$\mathbb{R}^l_+$ denota el espacio euclidiano de l dimensiones con vectores cuyos componentes son positivos, incluyendo el cero.

$\mathbb{R}^l_{++}$ denota el espacio euclidiano de l dimensiones con vectores cuyos componentes son estrictamente positivos o sin incluir el cero.

$\mathbb{N}$ denota los números naturales.

$\{x/ \ \}$ donde el espacio en blanco es llenado con algun tipo de declaración que implique a x, significando el conjunto de todas las x para los que dicha afirmación es cierta.

Sean x, y dos vectores de $\mathbb{R}^l$ entonces:

$x \geq y$ significa que $x_l \geq y_l$ para todo $l = 1, 2, ..., L$

$x > y$ significa que $x_l \geq y_l$ para algún $l = 1, 2, ..., L$

$x \gg y$ significa que $x_l > y_l$ para todo $l = 1, 2, ..., L$

$\forall$ denota para todo.

$\subseteq$ denota contenido en.

$\{x_i^n\}$ denota sucesión de x desde i hasta n

$\setminus$ denota que no se cumple o distinto a. Formalmente:

$X \setminus Y$ es igual a $\{x : x \in X \text{ pero } x \notin Y\}$

$/$ denota tal que.

$\varnothing$ denota vacío.

$\in$ denota pertenece a.

$\notin$ denota no pertenece a.

$\exists$ denota existe.

$\leq$ denota menor o igual a.

$\geq$ denota mayor o igual a.

$<$ denota menor a.

$>$ denota mayor a.

$\neq$ denota diferente a.

ε denota épsilon (número pequeño).

$\gg$ denota estrictamente mayor a.

$\rightarrow$ Tiene varios significados según el caso. Algunas veces denotará converge a. Otras denotará implica que. También denotará de un conjunto a otro y mapea en.

$\rightrightarrows$ denota que mapea en varias puntos de un conjunto.

$\rightarrow\leftarrow$ denota una contradicción.

$\Rightarrow$ denota ´´entonces se tiene que´´

$\Leftrightarrow$ denota si y sólo si.

$\cap$ denota intersección de conjuntos.

$\cup$ denota unión de conjuntos.

min denota el elemento mínimo de.

max denota el elemento máximo de.

$B_\varepsilon(x)$ denota bola con centro en x y radio ε

$\blacksquare$ denota prueba finalizada.

$\wedge$ denota ´´y´´.

∂ denota derivada parcial. También denota frontera.

C^2 denota doblemente diferenciable.

q^T denota el vector q transpuesto.

D denota matriz de primeras derivadas.

D^2 denota matriz de segundas derivadas.

D_p especificará matriz de derivadas respecto a p

D_{pp} especificará matriz de segundas derivadas respecto a p

$\sum_{i=1}^{L}$ denota sumatoria desde $i = 1$ hasta L

$\mathcal{L}$ denota lagrangiano.

∞ denota infinito.