



Munich Personal RePEc Archive

Optimal portfolios in the Mexican stock market minimizing a coherent measure of risk subject to expected returns and short sales constraints

Covarrubias-Sánchez, Claudia Ivett and Téllez-León,
Isela-Elizabeth and Venegas-Martínez, Francisco

Instituto Politécnico Nacional, Instituto Politécnico Nacional,
Instituto Politécnico Nacional

23 March 2018

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/85446/>
MPRA Paper No. 85446, posted 25 Mar 2018 16:16 UTC

Portafolios del mercado bursátil mexicano que minimizan una medida coherente de riesgo sujeto a restricciones de rendimientos esperados y ventas en corto

(Optimal portfolios in the Mexican stock market minimizing a coherent measure of risk subject to expected returns and short sales constraints)

Claudia Ivett Covarrubias-Sánchez
Instituto Politécnico Nacional
sanchez@gmail.com

Isela-Elizabeth Téllez-León
Instituto Politécnico Nacional
tellezelizabeth_2015@yahoo.com

Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Resumen

Este trabajo obtiene portafolios óptimos formados con activos de mercado mexicano de capitales que minimizan una medida coherente de riesgo sujetos a restricciones sobre rendimientos esperados y ventas en corto. Particularmente, se utiliza como función objetivo el Valor en Riesgo Condicional (CVaR) de acuerdo con la metodología propuesta por Rockafellar y Uryasev (2000). Esto permite calcular los pesos óptimos (proporciones óptimas) de cualquier signo para el CVaR a diferentes niveles de confianza mediante un problema de programación lineal. Por último se muestra evidencia empírica de que, en el caso mexicano, el CVaR óptimo con pesos no negativos proporciona mejores resultados que el VaR durante el periodo 2014-2016.

Clasificación JEL: D53, G11, G29.

Palabras clave: Portafolios óptimos de acciones, riesgo de mercado, medidas de riesgo, medida coherente de riesgo.

Abstract

This paper is aimed at obtaining optimal portfolios formed with assets from the Mexican stock market that minimize a coherent measure of risk subject to constraints on expected returns and short sales. In particular, the Conditional Value at Risk (CVaR) is used as the objective function according to the methodology proposed by Rockafellar and Uryasev (2000). This allows to calculate the optimal weights (optimal proportions) of any sign for the CVaR at different levels of confidence through a linear programming problem. Finally, empirical evidence shows that, in the Mexican case, the optimal CVaR with nonnegative weights provides better results than those from VaR during the period 2014-2016.

JEL Classification: D53, G11, G29.

Keywords: Stock optimal portfolios, market risk, risk measures, coherent measure of risk.

1. Introducción

La administración de riesgos ha sido un tema de interés tanto para las instituciones financieras, como para las instituciones reguladoras. De hecho, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (CSBB, en adelante el Comité) de 2004 tiene por objetivo mejorar la estabilidad financiera mediante la supervisión bancaria mundial.¹ Dos de los elementos clave del proceso de administración de riesgos son la identificación del riesgo y la evaluación del mismo. En la identificación de riesgos, el Comité (CSBB, 2004) contempla los siguientes riesgos: crédito, operativo, mercado, liquidez y “otros” riesgos. El Comité reconoce la dificultad que entraña la medición de “otros” riesgos, como el riesgo de reputación y el riesgo estratégico, los cuales son un campo que apenas se está desarrollando. Así pues, para la administración del riesgo se debe contar con modelos eficientes que identifiquen y cuantifiquen los diversos tipos de riesgo con el fin de disminuir los impactos negativos que puedan acarrear futuras crisis en las instituciones financieras.

El “Valor en Riesgo” (VaR) permite cuantificar en un solo número la peor pérdida de un portafolio de activos con un nivel de confianza α , en un periodo de tiempo preestablecido. El uso de modelos VaR también se ha implementado en la cuantificación del riesgo de crédito, tal como propone el Comité (CSBB, 2004 y 2006). A pesar de las ventajas que estas metodologías presentan (como su fácil aplicación), no cuentan con características deseables para ser consideradas buenas medidas de riesgo, ya que adolecen de subaditividad o convexidad (Rockafellar y Uryasev, 2000; Franco-Arbeláez y Franco-Ceballos, 2005; Venegas-Martínez, 2008; Martínez-Sánchez y Venegas-Martínez, 2012; y Venegas-Martínez y Rivas-Aceves, 2009). Al respecto, Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999) señalan que una medida de riesgo es “aceptable” si cumple con ciertas propiedades deseables como: monotonía, subaditividad, homogeneidad positiva, e invarianza bajo traslación. Si una medida de riesgo cumple con dichas propiedades, entonces es llamada una medida coherente de riesgo. En particular, el VaR carece de la propiedad de subaditividad, lo cual indica que la diversificación no siempre disminuye el riesgo. El objetivo de la presente investigación consiste en aplicar al caso mexicano el modelo de optimización, propuesto por Rockafellar y Uryasev (2000), en cual se minimiza el CVaR sujeto a las restricciones de rendimientos, proporción de activos, tipo de variables y ventas en corto con el fin de mostrar que el uso de dicho modelo puede mejorar las estrategias de inversión en el mercado de capitales.

Es importante destacar que la normatividad que rige al mercado mexicano accionario es impuesta por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV). Dicha norma se encuentra en el Diario Oficial de la Federación del 6 de septiembre del 2004. Bajo esta regulación, la última modificación del 28 de septiembre de 2016 promueve la utilización de modelos VaR en la administración del riesgo de mercado. En este sentido, resulta relevante comparar el desempeño del VaR con el CVaR en el contexto de portafolios óptimos dado que

¹ El Comité se instituyó a finales de 1974, por los gobernadores de los bancos centrales de los países del G-10. En 1988 el Comité publicó el acuerdo conocido como “Basilea I” que plantea un conjunto de recomendaciones para establecer un capital mínimo que debe tener una entidad bancaria para hacer frente a los riesgos a que está expuesta. En junio de 2004 se emitió el marco de capital revisado, conocido como “Basilea II”. Y en diciembre de 2010 se emitieron un conjunto de propuestas de reforma de regulación bancaria “Basilea III”. Los acuerdos de Basilea han sido implementados en varios países del mundo incluyendo los de América Latina.

el CVaR es una medida de riesgo que tiene mejores propiedades que el VaR; siendo este último requerido por el regulador.

El desarrollo de este trabajo se divide en 4 secciones. En la siguiente sección se describen brevemente diversas medidas de riesgo. Aquí también se exponen las críticas sobre algunas de estas medidas y se define una medida coherente de riesgo en el sentido de Artzner *et al.* (1999). La sección 3 plantea el problema de optimización de portafolio, propuesto por Rockafellar y Uryasev (2000), con base en la minimización del CVaR para la integración de un portafolio con títulos del mercado mexicano accionario. Asimismo se realiza un análisis comparativo entre el portafolio óptimo y otras alternativas. En la sección 4 se presentan las conclusiones.

2. Breve descripción de las medidas de riesgo de mercado

En términos generales, el VaR es una medida de la peor pérdida potencial en el valor o el rendimiento de un portafolio con un nivel de confianza dado y en un intervalo de tiempo preestablecido. Así pues, los componentes del VaR son un periodo (día, mes, año, etc.) y un nivel de confianza adecuado (95% ó 99%). Sea $\alpha \in (0,1)$ un nivel de confianza dado y sea R la variable aleatoria que representa las pérdidas y ganancias o el rendimiento de un portafolio en el periodo $[t, t + \Delta t]$, se define el Valor en Riesgo (VaR) al nivel α como $\text{VaR}_\alpha = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid P(R > x) \leq 1 - \alpha\}$. Por lo que, el VaR está descrito con el cuantil $1 - \alpha$ de la distribución de pérdidas y ganancias en un intervalo de tiempo dado. Debe tomarse en cuenta que el VaR se localiza en la cola izquierda de la distribución; véase, al respecto, Venegas-Martínez (2012).

Es importante destacar también que el VaR puede ser expresado en unidades monetarias o en términos de una tasa de rendimiento del portafolio. Además, para el periodo establecido en el cálculo del VaR, existe un rendimiento esperado del portafolio (la media μ), si se estima el cálculo del VaR respecto a esta media se está hablando del VaR relativo (RVaR), mientras que cuando se considera una media nula se está hablando del VaR absoluto (VaR) (Jorion, 2006).

Un supuesto del VaR es que los componentes del portafolio no cambian en el horizonte y que al portafolio actual le ha sido aplicado el *mark-to-market*. Cuanto mayor sea el VaR, mayor es el riesgo del portafolio. Una ventaja del VaR es que permite al usuario especificar el nivel de confianza con el fin de reflejar su exposición al riesgo, a mayor exposición al riesgo, mayor será el nivel de confianza elegido. Los reguladores usan el VaR como una medida de riesgo de referencia y requieren que las instituciones financieras mantengan una cierta cantidad de capital como reserva, en función del VaR, en caso de contingencias, como puede ser una crisis financiera.

Existen varias metodologías para el cálculo del VaR, todas ellas se pueden clasificar en dos categorías: 1) Métodos no paramétricos: se basan en datos históricos para construir la distribución y comprende el método de simulación histórica (MSH) y 2) Métodos paramétricos en donde la distribución de los datos es dada, por ejemplo normal, y comprende

el método de varianza y covarianza (MVC) y el método de simulación Monte Carlo (MSMC). Otra clasificación de los enfoques del VAR son: 1) Métodos de valuación local mediante derivados locales y el método “Delta-Normal” o de las “Griegas” y 2) Métodos de valuación total, en este caso se presentan un conjunto de escenarios sobre los cuales se revalora el riesgo del portafolio; un ejemplo de este método es el método de simulación Monte Carlo. A continuación, se presenta una breve descripción de los métodos comunes para estimar el VaR, VaR paramétrico, aproximación delta-normal; simulación histórica y simulación Monte Carlo.

2.1 VaR paramétrico

Se supone que la distribución de pérdidas y ganancias pertenece a una familia paramétrica, como, por ejemplo, la distribución normal. En este caso, el cálculo del VaR se simplifica, ya que este se deriva directamente de la desviación estándar del portafolio utilizando un factor multiplicativo que depende del nivel de confianza (Venegas-Martínez 2008).

El VaR paramétrico se basa en el proceso estocástico que describe el comportamiento de los rendimientos de un activo o un portafolio, es decir, se especifica la función de densidad de probabilidad de los rendimientos. Si se supone que los rendimientos del portafolio son conducidos por una distribución normal el VaR obtenido se denomina VaR normal. En este caso, el rendimiento en $[t, t + \Delta t]$ está dado por $R_{[t, t + \Delta t]} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z$, $Z \sim N(0,1)$. Así el cálculo del VaR en $[t, t + \Delta t]$ se resume en las siguientes expresiones:

$$AVaR_{\alpha}([t, t + \Delta t]) = z_{1-\alpha} \sigma \sqrt{\Delta t} - \mu \Delta t, \quad (1)$$

$$VaR_{\alpha}([t, t + \Delta t]) = z_{1-\alpha} \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad (2)$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el cuantil $1-\alpha$ de una distribución normal estándar, μ es la tendencia y σ es la desviación estándar del rendimiento $R_{[t, t + \Delta t]}$ en el tiempo t .

2.1.1 VaR de un portafolio

A continuación se plantea el VaR de un portafolio, considere un portafolio formado por n activos riesgosos, cuyos rendimientos son modelados con una distribución normal multivariada con vector μ y matriz varianza-covarianza Σ . El valor del portafolio al tiempo t está dado por

$$\Pi(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j S_j(t), \quad (3)$$

donde S_j es el valor del j -ésimo activo en el portafolio. Se dice que el portafolio es autofinanciable si no hay retiros o depósitos en efectivo al portafolio. En consecuencia, el rendimiento del portafolio durante $[t, t + \Delta t]$ es guiado únicamente por el rendimiento de sus activos individuales, expresado como:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Pi(t)} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\Delta S_j}{S_j}, \quad (4)$$

donde

$$w_j = \alpha_j \frac{S_j(t)}{\Pi(t)} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad (5)$$

Sea \mathbf{R} el vector de rendimientos de los n activos, entonces $\mathbf{R} \sim N(\mu, \Sigma)$. En notación matricial sea $w^T = (w_1, \dots, w_n)$ las proporciones de un presupuesto dado que se asigna a cada activo, entonces el rendimiento del portafolio R_p durante $[t, t + \Delta t]$ es:

$$R_p = w^T \mathbf{R} \quad (6)$$

En este caso, la varianza del rendimiento del portafolio es

$$\text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (7)$$

De esta manera, el valor en riesgo relativo se reduce a:

$$\text{VaR}_p = z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}} \sqrt{\Delta t} \quad (8)$$

2.2 Aproximación Delta-Normal

En la aproximación delta-normal, se supone que el cambio en el valor del portafolio se puede aproximar linealmente, con cambios en los factores de riesgo subyacentes. La aproximación Delta-Normal es un método analítico, considera una valuación local, porque el portafolio se valúa una vez en la posición inicial; véanse, por ejemplo, Jorion (2006) y Venegas-Martínez (2008). En la aproximación delta-normal se supone que los cambios en los factores de riesgo subyacentes se distribuyen como una normal multivariada y utiliza las griegas para medir la sensibilidad del valor del portafolio por cambios en factores de riesgo.

2.3 Modelos de simulación para calcular VaR

En el VaR paramétrico, primero se modela el rendimiento del portafolio y luego se calcula el VaR mediante un método analítico o por simulación. Esta sección se concentra en dos métodos de simulación utilizados para calcular el valor en riesgo de un portafolio: la simulación histórica y la simulación de Monte Carlo. Ambos cuantifican el riesgo mediante la revaloración del portafolio con una serie de escenarios.

2.3.1 Simulación histórica

La simulación histórica es una forma común de estimar el VaR. En esta se utilizan los datos pasados como guía de lo que sucederá en el futuro (Hull, 2012; y Venegas-Martínez 2008). La simulación histórica es un enfoque no paramétrico basado en datos históricos para calcular el VaR. En este enfoque el riesgo se modela directamente de la distribución empírica de los

rendimientos de activos; en la práctica es relativamente fácil de implementar. La forma de calcular el VaR con simulación histórica ayuda a entender la simulación de Monte Carlo. No hay supuestos sobre la distribución para cualquiera de los factores de riesgo o precios.

Si los factores de riesgo subyacentes exhiben comportamiento no normal, tales como colas gordas o efectos de reversión a la media, entonces el VaR resultante incluirá estos efectos. Las condiciones del mercado, devaluaciones y cambios drásticos en precios modifican las relaciones entre las series de tiempo. En este caso, altos niveles de confianza (es decir, al 99%) son muy sensibles.

Un caso simple para mostrar el mecanismo de la simulación histórica, supone que los rendimientos de los activos son independientes e idénticamente distribuidos. Se considera un portafolio con N activos, de los cuales se cuenta con sus precios de cierre diarios, en un período de $T + 1$ días. Se denota el precio del activo j como S_t^i para $t = 1, \dots, T + 1$; $i = 1, \dots, N$, siendo el día 1 la fecha más actual y el día $T + 1$ la fecha más antigua de la serie. A continuación, se calcula el rendimiento (logarítmico) de los precios diarios de los activos como:

$$\Delta S_t^i = \ln \left(\frac{S_t^i}{S_{t+1}^i} \right), \text{ para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Se crean T escenarios para las variaciones de cada activo:

$$\{\Delta S_t^1, \dots, \Delta S_t^N\}, \text{ para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N \quad (10)$$

Con estos escenarios y el precio de mercado del día 1 se calcula el precio simulado de cada activo:

$$S_t^i = S_1^i \exp(\Delta S_t^i), \text{ para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N \quad (11)$$

Se calculan, posteriormente, las posiciones en el portafolio (número de títulos). Para el activo i se denota dicha posición por w_i , así

$$L_t^i = w_i S_t^i, \text{ para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

El valor actual del portafolio se denota por por:

$$V = \sum_{i=1}^N L^i \quad (13)$$

Por lo tanto, se tienen T valores posibles del portafolio V_1, \dots, V_T , donde

$$V_k = \sum_{i=1}^N L_t^i \text{ para } k = 1, \dots, T. \quad (14)$$

Los ingresos y rendimientos para el k -ésimo escenario del portafolio se calculan como:

$$I_k = V_1 - V_k, \text{ para } k = 2, \dots, T \quad (15)$$

$$R_k = \frac{V_k - V_1}{V_1}, \text{ para } k = 2, \dots, T \quad (16)$$

El VaR se obtiene a partir de la distribución de rendimientos empírica. El procedimiento general es como sigue:

- a) Precios de los N activos.
- b) Calcular el cambio en el precio de cada activo ΔS_t^i para $t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N$.
- c) Calcular posibles valores del portafolio v_k para $k = 1, \dots, T$.
- d) Calcular valores de los ingresos de I_k para $k = 1, \dots, T$.
- e) Ordenar en orden ascendente $\{I_1, I_2, \dots, I_T\}$ como $\{I_1^*, I_2^*, \dots, I_T^*\}$
- f). Calcular VaR

2.4 Simulación Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo constituye un método paramétrico porque se supone conocido el proceso estocástico que conduce la dinámica de los activos. Los parámetros de tal proceso estocástico se pueden estimar a partir de datos históricos o calibrados con información de mercado. Por último, se simulan trayectorias de precios de los activos y luego se genera una distribución de los valores del portafolio en su caso. El procedimiento general para el cálculo del VaR de un portafolio es el siguiente:

- a) Seleccionar el proceso estocástico adecuado para la dinámica de los activos y otras variables de mercado en el portafolio.
- b) Simular T trayectorias de las variables aleatorias involucradas, ya sea por medio de la aproximación discreta o simulación en un paso, por ejemplo, el método de Box-Müller en el caso normal.
- c) Calcular el valor del portafolio mediante fórmula cerrada o por simulación.
- d) Calcular el vector de pérdidas y ganancias del portafolio $(PL_1, PL_2, \dots, PL_T)$.
- e) Ordenar $(PL_1, PL_2, \dots, PL_T)$ en orden ascendente $(PL_1^*, PL_2^*, \dots, PL_T^*)$.
- f) Calcular VaR con un nivel de confianza α .

Por simplicidad, en primer lugar, considere una acción. Suponga que la dinámica del precio de una acción es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica: ²

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (17)$$

$$W(t) \sim N(0,t) \quad (18)$$

Por lo tanto,

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right), \quad (19)$$

donde Z es una variable de aleatoria normal estándar. Al generar n variables aleatorias normales estándar, Z_1, \dots, Z_n y estimar los parámetros μ y σ , se tienen n precios de acciones. Después de calcular el vector de pérdidas y ganancias, y ordenando esos datos en orden ascendente, se selecciona el valor que corresponde al cuantil o percentil requerido como el VaR.

2.5 Críticas al Valor en Riesgo

A pesar de que el VaR es la medida de riesgo más utilizada, ésta no está exenta de tener deficiencias. Szego (2002) y Venegas-Martínez (2008) destacan algunos problemas graves del VaR. Por ejemplo, el VaR no es una medida de riesgo subaditiva para distribuciones de pérdidas. Es decir, si se tienen dos portafolios A y B , en general no se cumple la siguiente relación:

$$\text{VaR}_q(A+B) \leq \text{VaR}_q(A) + \text{VaR}_q(B) \quad (20)$$

Esta propiedad sólo se cumple en casos especiales de la distribución de rendimientos. Es importante destacar que el utilizar distribuciones normales se puede subestimar el riesgo de eventos extremos. Ante estas desventajas o limitaciones que presenta el VaR, el estudio de las medidas de riesgo ha llevado a establecer características deseables para una medida de riesgo mediante extensiones del VaR (CSBB, Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, 2010).

2.6 Medidas coherentes de riesgo

Como se ha mencionado antes existen varias medidas de riesgo, en el trabajo de Artzner *et al.* (1999) se discuten varias propiedades que una medida de riesgo, ρ , debe cumplir para ser considerada aceptable. A continuación, se enlistan dichas propiedades en donde A es el conjunto de portafolios (véase Venegas-Martínez, 2008):

Axioma 1. Invarianza bajo traslación. Para toda $X \in A$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que:

² Diversas generalizaciones de este proceso estocástico pueden encontrarse en Venegas-Martínez (2000), (2001), (2001a), (2001b), (2006), (2009), and Venegas-Martínez and González-Aréchiga (2000).

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha \quad (21)$$

Axioma 2. Subaditividad. Para toda $X_1, X_2 \in A$, se tiene que:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \quad (22)$$

Axioma 3. Homogeneidad positiva. Para toda $\lambda \geq 0$ y para toda $X \in A$, se tiene que:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad (23)$$

Axioma 4. Monotonía. Para toda $X, Y \in A$ con $X \leq Y$, se tiene que:

$$\rho(Y) \leq \rho(X) \quad (24)$$

Una medida de riesgo es llamada coherente, si satisface estos 4 axiomas.

La subaditividad en el contexto de portafolios de inversión implica que la diversificación reduce el riesgo. El axioma de homogeneidad positiva indica que cuando un activo es multiplicado por un factor positivo, el riesgo crece en la misma proporción, *i.e.*, si se aumenta la cantidad a invertir en un activo en un factor λ el riesgo aumentará λ veces. Finalmente, la monotonía implica que si el cambio en el valor del portafolio X es menor que el de Y , entonces el riesgo de X será al menos tan grande como el de Y , esto debido a la pérdida del valor de X . Existen algunas propiedades adicionales que se desprenden de las anteriores como convexidad, continuidad, entre otras, para mayor referencia véase Venegas-Martínez (2008).

Como se ha visto en esta sección, aunque el VaR es una medida de riesgo fácil de implementar y que cuenta con diferentes enfoques y metodologías para ser calculado y además de gran aceptación (para la toma de decisiones en el área de riesgo), no es necesariamente la mejor medida para medir riesgo. Justo por esto se desarrolla la presente investigación sobre portafolios que se basan en otras medidas de riesgo con mejores propiedades. La idea es impulsar, en mercado bursátil mexicano, el desarrollo de portafolios a través de la optimización de una medida coherente de riesgo, como el CVaR.

3. Portafolio de Inversión Óptimo considerando el Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

Esta sección se enfoca en el análisis del valor en riesgo condicional (CVaR), el cual satisface los axiomas propuestos por Artzner *et al.* (1999). En esta sección se plantea y resuelve la optimización de un portafolio considerando como función objetivo el CVaR de acuerdo con la metodología propuesta por Rockafellar y Uryasev (2000). La base de datos de precios históricos del mercado de capitales mexicano comprende el periodo entre el 1 enero de 2014 y el 31 de marzo de 2016.³

³ Otra alternativa para generar portafolios óptimos y productos estructurados en mercados alpha-estables con un enfoque de minimización de riesgo se encuentra en Climent-Hernández, Venegas-Martínez y Ortiz-Arango (2015).

3.1 Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

En Venegas-Martínez (2008) se demuestra que el CVaR es una medida coherente de riesgo. Mientras que el VaR sólo permite determinar la máxima pérdida esperada en condiciones normales de mercado, en un periodo preestablecido, a un nivel de confianza determinado, el CVaR permite conocer la pérdida esperada, en un periodo preestablecido, a un nivel de confianza determinado, pero condicionado a que dicha pérdida sobrepase el valor del VaR; véase Hull (2012).

3.2 Planteamiento del problema de optimización del CVaR

Rockafellar y Uryasev (2000) demuestran que siempre se cumple que $\text{CVaR}_\alpha(x) \geq \text{VaR}_\alpha(x)$, lo que significa que CVaR de un portafolio es siempre por lo menos tan grande como su VaR. En consecuencia, portafolios con un CVaR pequeño también tienen un VaR pequeño. En vista de que en general minimizar el CVaR y VaR no es equivalente, Rockafellar y Uryasev (2000) consideran una función auxiliar más simple:

$$F_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{f(x,y) \geq \gamma} (f(x,y) - \gamma) p(y) dy, \quad (25)$$

ó

$$F_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)} \int (f(x, y) - \gamma)^+ p(y) dy, \quad (26)$$

donde: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $f(x, y)$ es la función de pérdidas y $p(y)$ es la función de densidad de los eventos aleatorios. En este caso, $F_\alpha(x, \gamma)$ vista como una función de γ , tiene propiedades importantes que la hacen útil para el cálculo de VaR y CVaR :

- a) F_α es una función convexa de γ .
- b) VaR es un punto mínimo de F_α .
- c) El valor mínimo sobre γ de la función F_α es CVaR.

Por lo tanto para minimizar el $\text{CVaR}_\alpha(x)$ sobre x , se tiene que minimizar la función $F_\alpha(x, \gamma)$ con respecto de x y γ al mismo tiempo:

$$\min_x \text{CVaR}_\alpha(x) = \min_{x, \gamma} F_\alpha(x, \gamma). \quad (27)$$

De esta manera, es posible optimizar el CVaR directamente, sin necesidad de calcular el VaR primero. Puesto que se supone que la función de pérdida $f(x, y)$ es una función convexa de las variables portafolio x , entonces $F_\alpha(x, \gamma)$ es también una función convexa de x . En este caso, dado que el conjunto de portafolios factible Ω también es convexo, los problemas de

optimización en (27) son problemas de optimización convexos, los cuales se pueden resolver mediante técnicas de optimización ya conocidas.

En lugar de usar la función de densidad $p(y)$ de los eventos aleatorios en (26) que a menudo es imposible, se puede utilizar o generar escenarios y_i , con $i=1, \dots, T$. En este caso, considere la siguiente aproximación a la función $F_\alpha(x, \gamma)$:

$$\bar{F}_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=1}^T (f(x, y_i) - \gamma)^+ . \quad (28)$$

Ahora, en el problema $\min_x \text{CVaR}_\alpha(x)$, se reemplaza $F_\alpha(x, \gamma)$ por $\bar{F}_\alpha(x, \gamma)$ de tal manera que

$$\text{Minimizar}_{x, \gamma} \left[\gamma + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=1}^T (f(x, y_i) - \gamma)^+ \right]. \quad (29)$$

Para resolver este problema de optimización, se incluyen variables artificiales z_i para reemplazar al término $(f(x, y) - \gamma)^+$ y se añaden restricciones al problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_{x, z, \gamma} \left[\gamma + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=1}^T z_i \right] & (30) \\ & \text{s. a } z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, T \\ & z_i \geq f(x, y_i) - \gamma, \quad i = 1, \dots, T \\ & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Puesto que $f(x, y)$ es lineal en x , todas las expresiones $z_i \geq f(x, y) - \gamma$ representan restricciones lineales. Por lo tanto, el problema es un problema de programación lineal que se puede resolver de manera eficiente mediante el método simplex (o dual simplex). Es importante señalar que el problema depende de la cantidad de escenarios generados. Por lo tanto, se deben emplear técnicas de programación lineal de gran escala. Una de las extensiones del problema anterior es el denominado CVaR-promedio, véase al respecto Salahi *et al.* (2013).

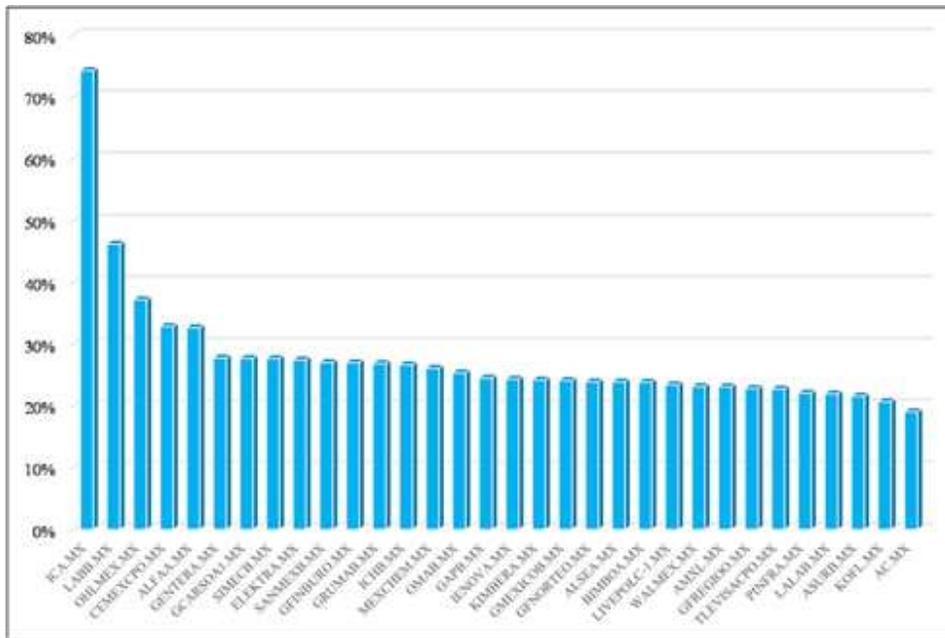
3.3 Aplicación y análisis de resultados

En esta sección se considera un portafolio formado por 10 acciones pertenecientes a la muestra del IPC. La periodicidad abarca de 01/01/2014 a 14/03/2016, con un total de 574 observaciones. La base está disponible bajo solicitud ya que por cuestiones de espacio no se presentan en este documento. Las series contienen los precios de cierre históricos de 10 emisoras que pertenecen a la muestra del IPC. Se calculan los rendimientos logarítmicos de cada uno de los activos y, después, se desarrollan los escenarios estimados a partir de los rendimientos y el precio de mercado del 14 de marzo de 2016. Finalmente, se calcula el vector de pérdidas y ganancias del portafolio. El criterio para seleccionar las acciones es el siguiente:

- Se calculan los rendimientos diarios de 32 acciones de la muestra del IPC.
- Se calcula la volatilidad anualizada de cada rendimiento y se ordenan de mayor a menor las volatilidades anualizadas.
- Se dividen en cuatro grupos de ocho activos, del primer grupo se eligen los primeros cuatro activos y del resto los primeros dos, hasta formar el portafolio con diez activos.

La Gráfica 1 muestra las volatilidades anualizadas de 32 acciones el 14 de marzo 2016 ordenadas de forma descendente. Como se observa en la Gráfica 1, con base en el criterio de selección, las acciones que conformarán el portafolio de 10 acciones son: ICA.MX; LABB.MX; OLMEX.MX; CEMEXCPO.MX; ELEKTRA.MX; SANMEXB.MX; IENOVA.MX; KIMBERA.MX; AMXL.MX; y GFREGIOO.MX.

Gráfica 1. Volatilidades anualizadas de las 32 acciones del IPC, 14 marzo del 2016



Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente se forma un portafolio balanceado entre un perfil agresivo y uno conservador ya que la volatilidad anualizada promedio de las 32 acciones es del 27.5%, mientras que la volatilidad anualizada promedio de las primeras cinco acciones es del 43.6% y de las cinco acciones restantes es del 24.3%. El criterio para elegir las acciones del portafolio es consistente con el postulado sobre la relación entre riesgo y rendimiento, es decir, un riesgo alto implica un rendimiento alto; sin embargo, como más adelante se muestra, al elegir los pesos (proporciones) óptimos del portafolio propuesto resulta que en general se debe invertir en los activos que tienen menor volatilidad anualizada.

El Cuadro 1 muestra la estadística descriptiva, así como la volatilidad anualizada de cada acción. Se observa que ICA fue la que tuvo la mayor volatilidad anualizada (74.22%), así como la mayor curtosis (30.28) aunque con un rendimiento promedio negativo (-0.32%). Por

otra parte, GFREGIOO presentó la menor volatilidad anualizada (22.79%), con un rendimiento positivo (0.04%).

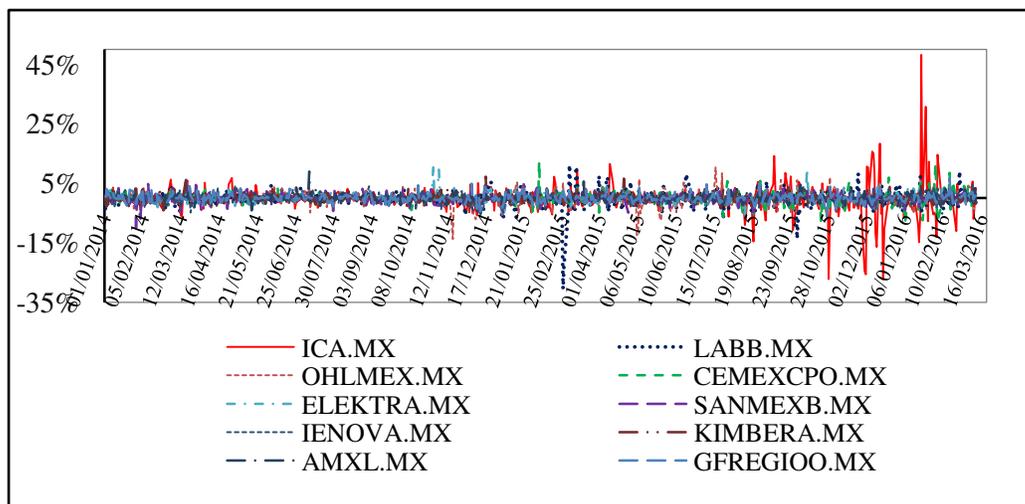
Cuadro 1. Estadística descriptiva de los rendimientos de los diez activos del portafolio

	ICA	LABB	OHLMEX	CEMEXCPO	ELEKTRA	SANMEXB	IENOVA	KIMBERA	AMXL	GFREGIOO
Media	-0.32%	-0.20%	-0.05%	-0.05%	-0.06%	-0.02%	0.05%	0.03%	-0.02%	0.04%
Error Estándar	0.20%	0.12%	0.10%	0.09%	0.07%	0.07%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%
Mediana	-0.27%	-0.09%	0.00%	0.00%	-0.15%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Desv. Estándar	4.68%	2.91%	2.34%	2.07%	1.73%	1.70%	1.53%	1.52%	1.45%	1.44%
Vol. Anualzda.	74.22%	46.19%	37.16%	32.83%	27.42%	26.99%	24.30%	24.17%	23.06%	22.79%
Varianza Muestral	0.22%	0.08%	0.05%	0.04%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%
Curtosis	30.28	27.08	4.88	5.69	7.30	2.61	0.92	1.54	3.16	1.96
Coef. De Asimetría	1.44	-2.57	-0.57	0.39	1.21	-0.46	0.10	0.41	0.41	0.43
Rango	75.51%	41.72%	24.23%	20.55%	17.92%	15.79%	11.26%	11.60%	14.76%	12.92%
Mínimo	-27.37%	-30.54%	-13.82%	-8.25%	-6.49%	-9.88%	-5.02%	-4.38%	-5.82%	-6.22%
Máximo	48.14%	11.17%	10.41%	12.30%	11.43%	5.91%	6.24%	7.23%	8.94%	6.69%

Fuente: Elaboración propia.

La Gráfica 2 muestra los rendimientos diarios de los 10 activos elegidos durante el periodo de tiempo considerado. Se destacan las primeras cuatro acciones: ICA, LABB, OHLMEX y CEMEXCPO, en cuanto a una variación significativa en la volatilidad.

Gráfica 2. Rendimientos diarios del portafolio, 01/01/2014 al 14/03/2016



Fuente: Elaboración propia.

Una vez que el portafolio se ha elegido y se ha utilizado el método de simulación histórica, se obtiene el VaR al 95% y 99% de confianza de cada uno de los activos, así como del portafolio. Dado que las series de precios históricos contienen datos diarios, el VaR reportado es a un día. En este portafolio el número de títulos es igual para cada uno de los activos (un título por activo), aunque en la práctica se pueden considerar más títulos de algunos activos que de otros. Es importante tener en mente que los siguientes resultados se calcularon con la distribución de pérdidas y ganancias en función de los rendimientos, la

interpretación de un dato negativo obtenido de la medida de riesgo significa una pérdida en este caso.

El Cuadro 2 reporta los resultados a un nivel de confianza del 95% y el Cuadro 3 a un nivel de confianza del 99%. La interpretación de los resultados del Cuadro 1 son: el VaR del portafolio es de -\$10.87, por lo que se espera que el portafolio perderá menos de \$10.87 en un día al 95% de confianza. En otras palabras, se espera perder \$10.87 o más al 5% de confianza.

Cuadro 2. Resultados del VaR al 95% de confianza por simulación histórica

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	VaR	VaR Valor Porcentual
ICA	1	4.37	-0.22	5.0%
LABB	1	11.94	-0.48	4.0%
OHLMEX	1	24.95	-0.89	3.6%
CEMEXCPO	1	10.91	-0.33	3.0%
ELEKTRA	1	315.20	-9.01	2.9%
SANMEXB	1	29.85	-0.80	2.7%
IENOVA	1	71.16	-1.91	2.7%
KIMBERA	1	38.06	-1.04	2.7%
AMXL	1	13.00	-0.31	2.4%
GFREGIO	1	95.90	-2.63	2.7%
PORTAFOLIO	10	615.34	-10.87	1.8%

Fuente: Elaboración propia.

Análogamente, a partir del Cuadro 3 se tiene que el VaR del portafolio es -\$19.93, por lo que se espera perder \$19.93 o menos al 99% de confianza, o bien se espera perder al menos \$19.93 al 1% de confianza. Con los resultados obtenidos del VaR a los diferentes niveles de confianza. Al calcular el CVaR se utiliza el mismo número de títulos y niveles de confianza.

Cuadro 3. Resultados del VaR al 99% de confianza por simulación histórica

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	VaR	VaR Valor Porcentual
ICA	1	4.37	-0.67	15.4%
LABB	1	11.94	-0.91	7.6%
OHLMEX	1	24.95	-1.41	5.7%
CEMEXCPO	1	10.91	-0.65	5.9%
ELEKTRA	1	315.20	-15.11	4.8%
SANMEXB	1	29.85	-1.14	3.8%
IENOVA	1	71.16	-2.83	4.0%
KIMBERA	1	38.06	-1.40	3.7%
AMXL	1	13.00	-0.47	3.6%
GFREGIO	1	95.90	-4.03	4.2%
TOTAL	10	615.34	-19.93	3.2%

Fuente: Elaboración propia.

El Cuadro 4 reporta los resultados obtenidos para el CVaR al 95% de confianza, el cual se calcula mediante la pérdida esperada de la distribución de pérdidas y ganancias de los valores menores o iguales a -\$10.87; siendo éste el VaR para dicho nivel de confianza.

Cuadro 4. Resultados del CVaR al 95% de confianza

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	CVaR	CVaR Valor Porcentual
ICA	1	4.37	-0.53	12.1%
LABB	1	11.94	-0.73	6.1%
OHLMEX	1	24.95	-1.30	5.2%

CEMEXCPO	1	10.91	-0.56	5.1%
ELEKTRA	1	315.20	-14.13	4.5%
SANMEXB	1	29.85	-1.07	3.6%
IENOVA	1	71.16	-2.55	3.6%
KIMBERA	1	38.06	-1.39	3.6%
AMXL	1	13.00	-0.44	3.4%
GFREGIO	1	95.90	-3.55	3.7%
PORTAFOLIO	10	615.34	-16.81	2.7%

Fuente: Elaboración propia.

La interpretación del resultado en el cuadro 4 es que si la pérdida del portafolio excede el valor del VaR, al 95% de confianza, el cual es de -\$10.87, entonces el valor esperado de la pérdida será de -\$16.81. El Cuadro 5 reporta los resultados obtenidos para el CVaR al 99% de confianza. Esto es, se calcula la pérdida esperada de la distribución de pérdidas y ganancias de los valores menores o iguales a -\$19.93; siendo éste el VaR para dicho nivel de confianza.

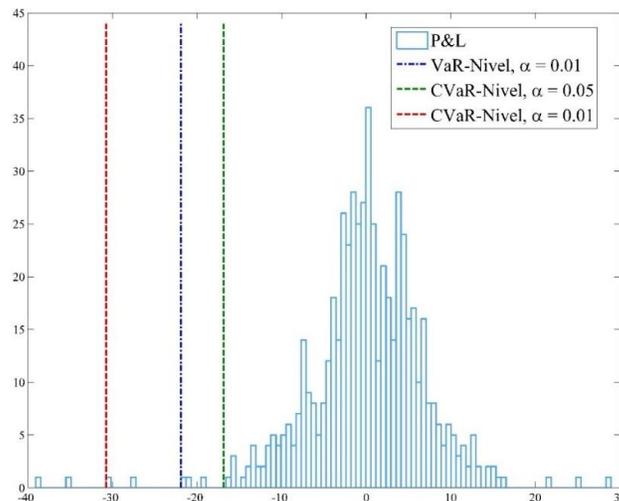
Cuadro 5. Resultados del CVaR al 99% de confianza

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	CVaR	CVaR Valor Porcentual
ICA	1	4.37	-1.27	29.1%
LABB	1	11.94	-1.19	10.0%
OHLMEX	1	24.95	-2.01	8.0%
CEMEXCPO	1	10.91	-1.03	9.4%
ELEKTRA	1	315.20	-27.32	8.7%
SANMEXB	1	29.85	-1.54	5.2%
IENOVA	1	71.16	-3.50	4.9%
KIMBERA	1	38.06	-2.18	5.7%
AMXL	1	13.00	-0.72	5.6%
GFREGIO	1	95.90	-5.11	5.3%
TOTAL	10	615.34	-30.47	5.0%

Fuente: Elaboración propia.

El Cuadro 5 tiene una interpretación similar al Cuadro 4. Si la pérdida del portafolio excede el valor del VaR, al 99% de confianza, la cual es de -\$19.93, entonces el valor esperado de la pérdida será de -\$30.47. La Gráfica 3 muestra el histograma de las pérdidas y ganancias del portafolio con el VaR al 99% de confianza y el CVaR al 95% y al 99%.

Gráfica 3. Histograma del vector de pérdidas y ganancias del portafolio



Fuente: Fuente: elaboración propia.

Se observa en la Gráfica 3 y en los Cuadros 2-5 que $CVaR_{\alpha}(x) \geq VaR_{\alpha}(x)$. Es decir, el $CVaR_{\alpha}$ es al menos tan grande como el VaR_{α} para ambos niveles de confianza.

Para determinar el portafolio óptimo se utiliza el problema de programación lineal, dado en la ecuación (30). Este problema de programación lineal tiene como ventajas que no se necesita conocer la función de densidad de probabilidad del vector de rendimientos. Para la optimización se plantean dos escenarios para cada nivel de confianza, uno en el que se restringen los pesos (proporciones) óptimos a valores no negativos y el segundo en el que se dejan los pesos libres, es decir, se permiten ventas en corto.

El Cuadro 6 presenta los pesos óptimos no negativos de cada activo para los niveles de confianza del 95% y 99%, *i.e.*, los pesos no negativos que minimizan el CVaR del portafolio para ambos niveles de confianza. Para el portafolio óptimo al 95% se observa que de los diez activos seleccionados, ICA, CEMEXCPO y SANMEXB presentan ponderaciones iguales a cero, es decir no se recomienda incluir estos activos en el portafolio. Para los demás activos la ponderación es positiva. Es decir, se toman posiciones largas (compra) en tales activos. En el portafolio óptimo al 99% para ICA, LABB, CEMEXCPO y SANMEXB, la ponderación es cero y para los demás activos la ponderación es positiva. Siendo en ambos casos IENOVA, KIMBERA y AMXL los activos que presentan mayores ponderaciones.

Cuadro 6. Pesos óptimos para el CVaR al 95% y al 99% de confianza con pesos no negativos

Nivel de confianza	95%		99%	
Acción	Pesos óptimos	Número de acciones	Pesos óptimos	Número de acciones
ICA	0.00	0.0	0.00	0.0
LABB	0.03	0.3	0.00	0.0
OHLMEX	0.03	0.3	0.09	0.9
CEMEXCPO	0.00	0.0	0.00	0.0
ELEKTRA	0.13	1.3	0.01	0.1
SANMEXB	0.00	0.0	0.00	0.0
IENOVA	0.22	2.2	0.21	2.1
KIMBERA	0.24	2.4	0.23	2.3
AMXL	0.18	1.8	0.39	3.9
GFREGIO	0.20	2.0	0.07	0.7
minCVaR	-11.28		-14.55	

Fuente: Elaboración propia.

El Cuadro 7 presenta los pesos óptimos de cada activo para los niveles de confianza del 95% y 99% con pesos libres, así como los valores del CVaR óptimo para ambos niveles de confianza.

Cuadro 7. Pesos óptimos para el CVaR al 95% y al 99% de confianza con pesos libres

Nivel de confianza	95%		99%	
Acción	Pesos óptimos	Número de acciones	Pesos óptimos	Número de acciones
ICA	-0.01	-0.1	-0.01	-0.1
LABB	0.02	0.2	0.00	0.0
OHLMEX	0.02	0.2	0.03	0.3
CEMEXCPO	-0.09	-0.9	0.04	0.4
ELEKTRA	0.12	1.2	0.07	0.7
SANMEXB	0.05	0.5	-0.15	-1.5
IENOVA	0.18	1.8	0.19	1.9
KIMBERA	0.19	1.9	0.37	3.7

AMXL	0.32	3.2	0.31	3.1
GFREGIO	0.20	2.0	0.14	1.4
minCVaR	-11.08		-13.91	

Fuente: Elaboración propia.

Para el portafolio óptimo al 95% se observa que de los diez activos seleccionados, ICA y CEMEXCPO presentan ponderaciones negativas, es decir se toman posiciones cortas (venta) en ambos activos. Para los demás activos la ponderación es positiva, es decir, se tomarán posiciones largas (compra) en tales activos. En el portafolio óptimo al 99% para ICA y SANMEXB, la ponderación es negativa, y para los demás activos la ponderación es positiva. Observe que IENOVA, KIMBERA, AMXL y GFREGIO para ambos niveles de confianza son los activos con mayor ponderación. En ambos casos se observa que conforme se aumenta el nivel de confianza, las ponderaciones del portafolio son mayores para los activos que tuvieron la menor volatilidad anualizada y las ponderaciones son menores para los activos que tuvieron la mayor volatilidad anualizada.

Como puede observarse para ambos escenarios, los pesos óptimos al 95% de confianza son diferentes a los obtenidos al 99%, esto es, los pesos óptimos dependen del nivel de confianza. Con los pesos óptimos, tanto libres como no negativos, se calcula el VaR del portafolio por simulación histórica al 95% y al 99% de confianza, los resultados se muestran en los Cuadros 8-11.

Cuadro 8. VaR al 95% de confianza del portafolio óptimo con pesos no negativos

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	VaR	VaR Valor Porcentual
ICA	0.0	0.00	0.00	0.0%
LABB	0.3	3.01	-0.12	-4.0%
OHLMEX	0.3	6.42	-0.23	-3.6%
CEMEXCPO	0.0	0.00	0.00	0.0%
ELEKTRA	1.3	394.21	-11.27	-2.9%
SANMEXB	0.0	0.00	0.00	0.0%
IENOVA	2.2	153.06	-4.10	-2.7%
KIMBERA	2.4	90.64	-2.48	-2.7%
AMXL	1.8	22.78	-0.55	-2.4%
GFREGIO	2.0	187.52	-5.14	-2.7%
PORTAFOLIO	10	857.64	-14.78	-1.7%

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 9. VaR al 99% de confianza del portafolio óptimo con pesos no negativos

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	VaR	VaR Valor Porcentual
ICA	0.0	0.08	-0.01	-15.4%
LABB	0.0	0.00	0.00	0.0%
OHLMEX	0.9	22.69	-1.28	-5.7%
CEMEXCPO	0.0	0.00	0.00	0.0%
ELEKTRA	0.1	33.40	-1.60	-4.8%
SANMEXB	0.0	0.00	0.00	0.0%
IENOVA	2.1	149.00	-5.93	-4.0%
KIMBERA	2.3	87.48	-3.21	-3.7%
AMXL	3.9	50.29	-1.82	-3.6%
GFREGIO	0.7	67.64	-2.84	-4.2%
PORTAFOLIO	10	410.57	-9.16	-2.2%

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 10. VaR al 95% de confianza del portafolio óptimo con pesos libres

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	VaR	VaR Valor Porcentual
ICA	-0.1	-0.48	-0.03	5.4%
LABB	0.2	2.61	-0.11	-4.0%
OHLMEX	0.2	6.07	-0.22	-3.6%
CEMEXCPO	-0.9	-10.09	-0.34	3.3%
ELEKTRA	1.2	377.09	-10.78	-2.9%
SANMEXB	0.5	15.24	-0.41	-2.7%
IENOVA	1.8	130.67	-3.50	-2.7%
KIMBERA	1.9	70.65	-1.93	-2.7%
AMXL	3.2	41.38	-1.00	-2.4%
GFREGIO	2.0	190.87	-5.23	-2.7%
PORTAFOLIO	10	824.00	-13.86	-1.7%

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 11. VaR al 99% de confianza del portafolio óptimo con pesos libres

Acción	No. Títulos	Valor al 14/03/2016	VaR	VaR Valor Porcentual
ICA	-0.1	-0.35	-0.05	13.7%
LABB	0.0	0.26	-0.02	-7.6%
OHLMEX	0.3	8.68	-0.49	-5.7%
CEMEXCPO	0.4	4.26	-0.25	-5.9%
ELEKTRA	0.7	219.22	-10.51	-4.8%
SANMEXB	-1.5	-44.16	-2.05	4.6%
IENOVA	1.9	133.98	-5.33	-4.0%
KIMBERA	3.7	140.71	-5.16	-3.7%
AMXL	3.1	40.27	-1.46	-3.6%
GFREGIO	1.4	136.71	-5.74	-4.2%
PORTAFOLIO	10	639.58	-17.22	-2.7%

Fuente: Elaboración propia.

Por último, los Cuadros 12 y 13 presentan un comparativo de los resultados obtenidos con los portafolios óptimos tanto con pesos no negativos como pesos libres.

Cuadro 12. CVaR mínimo, VaR y CVaR al 95% y al 99% de confianza con los pesos no negativos óptimos

Nivel de Confianza	min CVaR	$\sum_{i=1}^{10} VaR_i$	VaR	CVaR
95%	-11.28	-23.89	-14.78	-22.27
99%	-14.55	-16.70	-9.16	-13.77

Fuente: Elaboración propia.

En el caso del portafolio con pesos no negativos se observa que para ambos niveles de confianza se cumple que el CVaR del portafolio es siempre al menos tan pequeño como su VaR, es decir se cumple. En este caso, el VaR sí satisface la propiedad de subaditividad, puesto que al 95% y 99% se cumple: $\sum_i VaR_i \leq VaR_\alpha$. Además, el VaR al 99% de confianza del portafolio óptimo es menor que el del portafolio original. Mientras que en el portafolio original se espera perder en un día -\$19.93 con un 99% de confianza, en el portafolio óptimo la pérdida en que se espera incurrir es de -\$9.16. Para el CVaR también se obtienen mejores resultados con el portafolio óptimo que con el original ya que la pérdida esperada que ha sobrepasado el VaR en el portafolio óptimo es de -\$13.16, mientras que en el original es de -\$30.47. Dado que no se está minimizando la pérdida reportada por el CVaR tampoco puede

esperarse que la pérdida cuantificada por el VaR sea menor. Por esta razón, en el caso del nivel de confianza del 95%, los resultados obtenidos muestran que la máxima pérdida en que se espera incurrir con el portafolio óptimo es mayor que la del portafolio original. Lo mismo ocurre con los valores obtenidos para el CVaR.

Cuadro 13. CVaR mínimo, VaR y CVaR al 95% y 99% de confianza pesos libres óptimos

Nivel de Confianza	min CVaR	$\sum_{i=1}^{10} VaR_i$	VaR	CVaR
95%	-11.08	-23.54	-13.86	-21.14
99%	-13.91	-20.05	-17.22	-24.67

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso de los portafolios óptimos con pesos libres para los niveles de confianza de 95% y 99% se presentan comportamientos similares al caso anterior. Esto es, para el intervalo de confianza del 99% se minimiza el valor del CVaR y con ello el VaR con los pesos óptimos en comparación con el portafolio original, mientras que para el nivel de confianza de 95% se espera obtener menores pérdidas, con ambas medidas, en comparación con el portafolio original.

4. Conclusiones

Aunque existen diferentes investigaciones que intentan resolver el problema de determinar portafolios de inversión óptimos bajo diferentes criterios, no necesariamente se obtienen los mejores resultados debido, tal vez, por la falta de una buena medida de riesgo. Por ello se han propuesto medidas de riesgo alternativas como el valor en riesgo condicional (CVaR) que es una medida coherente de riesgo. En resumen, el CVaR mide la pérdida promedio en toda la cola con un cierto nivel de confianza en un periodo de tiempo dado. Si bien, en el problema de portafolio de Markowitz (1952) se plantea y resuelve la relación inversa entre la media y la varianza del rendimiento de portafolio. La varianza no es una buena medida de riesgo de mercado para distribuciones asimétricas. Otra medida de riesgo que es comúnmente utilizada por su fácil aplicación es el VaR, pero ésta también presenta varias desventajas, una de ellas es que no es una medida coherente de riesgo al no cumplir con el axioma de subaditividad. En esta investigación se aplicó un método alternativo, propuesto por Rockafellar y Uryasev (2000), para la optimización de portafolios en un contexto de minimización del CVaR en lugar de incluir la varianza o el VaR como medida de riesgo.

Hay varias ventajas en el uso de CVaR sobre el VaR como medida de riesgo y en la optimización de portafolios. En primer lugar, CVaR puede utilizarse para medir y controlar el “riesgo de cola”. En segundo lugar, CVaR es una medida coherente de riesgo. En tercer lugar, CVaR es convexa con respecto a las variables de decisión. La propiedad de convexidad elimina la posibilidad de un mínimo local. Por lo tanto, CVaR es más conveniente en el planteamiento y solución del problema de optimización de portafolio. Además, bajo este enfoque, se abandona el supuesto de normalidad, lo cual está en concordancia con las distribuciones empíricas que frecuentemente tienen colas gordas (o pesadas), asimetría (sesgo), conglomerados de volatilidad y alta influencia por eventos extremos, entre otros.

Este análisis se aplicó a un portafolio compuesto por una muestra de 10 acciones, que participan en la muestra del IPC de la BMV, durante el periodo del 1 de enero de 2014 al 14 de marzo de 2016, con un total de 574 observaciones. Primero se calculó el VaR y el CVaR por el método de simulación histórica al 95% y al 99% de confianza con una asignación de una unidad de cada acción. Posteriormente se obtuvo el CVaR de dicho portafolio para los niveles de confianza dados. Por último se determinaron el CVaR mínimo y los pesos de los activos que lo conforman al 95% y al 99% de confianza. La evidencia empírica muestra, para el caso mexicano, que $VaR_{\alpha}(x) \geq CVaR_{\alpha}(x)$ para la distribución de pérdidas y ganancias obtenida a partir de los rendimientos. Además, para el nivel de confianza de 99% se verifica que al minimizarse el CVaR también se minimiza el VaR.

Por último, aunque el VaR es una medida de riesgo estándar en la administración de riesgo de mercado, debido a su sencillez conceptual, la facilidad de cálculo, y su aplicabilidad, debe ser complementada con otras medidas como el CVaR. Cada medida de riesgo tiene un objetivo y presenta ventajas y desventajas, por lo cual complementar los resultados del VaR con los del CVaR es una manera más efectiva de establecer un control del riesgo mercado más exhaustivo.

Bibliografía

- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, y D. Heath (1999). Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.
- Climent-Hernández, J. A., F. Venegas-Martínez y F. Ortiz-Arango (2015). Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados alpha-estables: un enfoque de minimización de riesgo. *Revista Nicolaita de Estudios Económicos*, 10(2), 81-106.
- Comité de Supervisión Bancaria de Basilea. (2004). Convergencia internacional de medidas y normas de capital. Suiza: Banco de Pagos Internacionales.
- Comité de Supervisión Bancaria de Basilea. (2006). Convergencia internacional de medidas y normas de capital. Suiza: Banco de Pagos Internacionales.
- Comité de Supervisión Bancaria de Basilea. (2010). Basilea III: Marco regulador para reforzarlos bancos y sistemas bancarios. Suiza: Banco de Pagos Internacionales.
- Franco-Arbeláez, L. C. y L. E. Franco-Ceballos (2005). El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de riesgo. *Revista Ingenierías*. 4 (6), 43 - 54.
- Hull, J. (2012). Option, futures, and other derivatives. Eighth Edition. Prentice Hall, USA.
- Jorion, P. (2006). Value at risk the new benchmark for managing financial risk. Third Edition. Mc Graw-Hill. USA.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Martínez-Sánchez, J. F. y F. Venegas-Martínez (2012). Una propuesta para medir dinámica y coherentemente el riesgo operacional. *Panorama Económico*, 8(15), pp. 101-115.
- Rockafellar, R. T., and S. Uryasev (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(4), 21-51.
- Rockafellar, R. T., and S. Uryasev (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1443-1471.
- Salahi, M., Mehrdoust, F., Piri, F. (2013). CVaR robust mean-CVaR portfolio optimization. *Applied Mathematics*, 2013.
- Szego, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1253-1272.

- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano. *Momento Económico*, 111, 20-27.
- Venegas-Martínez, F. y S. Rivas-Aceves (2009). Un régimen fiscal para PEMEX con administración coherente de riesgos (Primera Parte). *Comercio Exterior*, 59(1), 51-59.
- Venegas-Martínez, F. (2000). On Consumption, Investment, and Risk. *Economía Mexicana*, Nueva Época, 9(2), 227-244.
- Venegas-Martínez, F. (2001). Temporary stabilization: a stochastic analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(9), 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2001). Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO. *Estudios Económicos*, 16(32), 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2006). Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks. *Economic Modelling*, 23(1), 157-173.
- Venegas-Martínez, F. (2009). Temporary stabilization in developing countries and real options on consumption. *International Journal of Economic Research*, 6(2), 237-257.
- Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Segunda edición. Cengage Learning. México.