



Munich Personal RePEc Archive

**MULTIDIMENSIONAL  
TIME-FREQUENCY ANALYSIS OF  
THE CAPM**

MESTRE, Roman and TERRAZA, Michel

University of Montpellier, MRE

September 2017

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/86330/>  
MPRA Paper No. 86330, posted 23 Apr 2018 13:25 UTC

# ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE TEMPS-FREQUENCE DU MEDAF\*

Roman MESTRE<sup>†</sup> Michel TERRAZA<sup>‡</sup>

## Résumé

Le MEDAF est une théorie qui permet de mesurer la sensibilité d'une action à son marché de référence. Le coefficient beta issu de cette théorie est estimé à partir de sa droite de marché. Par hypothèse il est stable au cours du temps ce qui n'est pas empiriquement vérifié. Plusieurs causes militent en faveur de cette volatilité et en particuliers celle concernant la dispersion du Beta selon les fréquences qui est liée à l'hypothèse d'hétérogénéité des agents. En utilisant la technique des ondelettes, on peut calculer la cohérence et la phase entre les rendements d'une action et ceux de son marché au cours du temps et il est possible de les visualiser. La valeur du Beta sera plus ou moins pertinente en fonction de la fréquence et de la période sur laquelle on souhaite investir puisque la cohérence-phase fournit la dynamique temporelle du pouvoir explicatif du modèle. Pour vérifier le bien fondé de la méthodologie retenue, on fait appel à trois actions (AXA, LVMH et Orange) avec des Betas différents sur la période 2005 – 2015 qui comprend deux crises. Nous montrons que la cohérence associée à la phase en ondelettes permet d'améliorer la compréhension et la classification des actions selon leurs natures et leurs périodes d'observation. Les actions AXA et LVMH possèdent globalement une cohérence forte et positive avec le marché tandis qu'Orange est moins corrélée quelle que soit les fréquences. Notre étude nous permet de révéler les phénomènes de contagion et d'interdépendance entre les actions et le marché en réalisant l'analyse sur différentes périodes (Crises ou non). Le phénomène de contagion des chocs ( du marché vers les actions) concerne principalement les hautes-fréquences, alors que l'interdépendance porte sur des horizons plus lointain ( Basses-fréquences). Le lien entre le beta et la cohérence-phase permet ainsi aux investisseurs de choisir de façon plus efficace la période sur laquelle ils souhaitent intervenir que ce soit en périodes ou non de crises financières.

**Keywords** : Wavelets ; Coherence ; CAPM ; Co-Movement

---

\* Article présenté à l'International Conference on Time Series Analysis : ITISE 2017 18 – 20 Septembre 2017, Grenades. Disponible en Anglais dans les Proceedings de la Conférence

<sup>†</sup>Corresponding author, email: roman.mestre@live.fr MRE, University of Montpellier, UFR Economie, Site de Richter, Avenue Raymond Dugrand, CS 79606, 34960 Montpellier, Cedex 2, France

<sup>‡</sup>MRE, University of Montpellier

Dans un soucis d'efficacité, les gestionnaires de fonds doivent obtenir un niveau de rendements élevé avec un risque maîtrisé. Ils peuvent pour cela recourir à la théorie du MEDAF de Sharpe (1962) qui fournit une mesure de risque (le Beta), correspondant à la sensibilité des rendements de l'action avec ceux du marché. La théorie du MEDAF indique que les rendements en excès du taux sans risque d'une action (ou prime de risque) sont déterminés par la prime de risque du marché. L'équation dérivée de cette théorie (la Droite de Marché des titres) s'écrit :

$$r_{i,t} = \alpha + \beta \cdot r_{m,t} + \epsilon_t \quad (1)$$

Avec  $r_{i,t}$  la prime de risque de l'actif  $i$  et  $r_{m,t}$  celle du marché,  $\epsilon_t$  obéit à un processus  $i.i.d(0, \sigma_\epsilon)$ .

Le risque systématique d'une action est donné par le  $\beta$  de la droite de marché. Une action aura un Beta d'autant plus élevé qu'elle est sensible à son marché. Le  $\beta$  est un paramètre de régression et il est, par hypothèse, constant ainsi que la corrélation entre  $r_{i,t}$  et  $r_{m,t}$ . Cependant en raison des fluctuations erratiques du marché, le lien action-marché n'a pas la même intensité au cours du temps. Par ailleurs, une action peut être faiblement corrélée avec son marché à long-terme mais avoir un lien plus ténu à court-terme où des facteurs spécifiques entrent en jeu. Lorsque les agents sont informés sur la variabilité de la relation Action-Marché ils peuvent ajuster leurs portefeuilles de manière plus optimale. La volatilité du Beta est ainsi liée à l'hypothèse de comportements hétérogènes des agents<sup>1</sup>.

Pour analyser le phénomène d'instabilité du Beta, nous recourons, dans cet article, à la technique des ondelettes pour calculer la cohérence entre deux séries. Cet instrument élaboré par Haar en 1909, popularisé par Morlet et Grossmann en 1984 (qui sont à l'origine du nom "d'ondelette"), par Meyer en 1986 – 1987<sup>2</sup>, dépasse les limites de l'analyse spectrale, en particulier son atemporalité, et permet de réduire l'arbitrage temps-fréquence. En finance, les ondelettes occupent une place importante car elles sont devenues l'instrument par excellence permettant de prendre en compte l'hypothèse comportementale des agents. Les approches univariées des ondelettes ont trouvé des applications dans l'analyse de la volatilité des taux de change et dans la construction d'une VaR prenant en compte l'hétérogénéité des agents, appelée WVVaR (Wavelets Value-at-Risk). Les ondelettes ont été utilisées par Gençay et al (2005) pour estimer le risque systématique des actions américaines et ils ont mis en évidence la possibilité d'estimer par fréquence le Beta d'une action. Par ailleurs, Auth (2013) utilise la cohérence en ondelettes afin d'appréhender les liens entre des portefeuilles Hedge Funds et d'autres actifs financiers. Il arrive ainsi à montrer les facteurs influençant la diversification de ces portefeuilles.

Les prolongements multivariées avec la cohérence d'ondelettes permettent d'apprécier la causalité fréquentielle de manière dynamique. Les séries financières sont, en effet, rarement de variance constante au cours du temps et de ce fait l'analyse co-spectrale<sup>3</sup> n'est pas une méthode fiable. Dans ce cas multivarié temps-fréquence, les ondelettes permettent de définir la cohérence que l'on peut rapprocher de la corrélation par fréquence au cours du temps entre deux signaux

---

1. Cf. Bibliographie [14]

2. Prix Abel en Mathématiques 2017) et Mallat [1989-2009]

3. Cf. Bibliographie [12;13]

stationnaires. La cohérence, complétée par la phase évolutive, permet de tester la significativité des relations (des liens) entre les variables au cours du temps et d'appréhender les dépendances (les effets de contagion) des portefeuilles.

L'objet de cet article est de montrer que l'association cohérence-phase d'ondelettes est un outil puissant de mesure du risque pour les investisseurs selon leurs horizons d'investissement. Pour cela nous l'appliquons aux cours boursiers des action AXA, LVMH et Orange cotés sur le marché français (l'indice CAC40 servant de référence) pour la période journalière 2005 à 2015. Le choix des actions se justifie par la valeur différente de leurs Betas respectifs (estimés par les MCO) de 1.51 pour AXA, 1 pour LVMH et 0.72 pour Orange. En partant du postulat que le Beta du marché est égal à 1, nous disposons ainsi d'une action fortement sensible aux marché qui "surréagit" aux signaux du marché (AXA), d'une action relativement peu sensible qui atténue les variations du marché (Orange) et d'un actif qui "suit" le marché (LVMH).

Nous présentons dans un première partie une synthèse de la méthodologie utilisée avant de l'appliquer aux données sélectionnées et de conclure sur les bénéfices de recourir à la technique de la cohérence-phase en ondelettes pour gérer des portefeuille.

## 1 L'analyse temps-fréquence

### Les ondelettes

Les ondelettes permettent d'améliorer l'interprétation de la cohérence au sens de Fourier où l'information temporelle d'une série est "perdue" au profit de la fréquentielle. Un premier essai dans ce sens est du à Gabor (1946) avec la transformation de Fourier à fenêtre (ou par morceaux) appelée Short-Time Fourier Transform (STFT) qui utilise une fenêtre de taille constante qui glisse (ou roule) le long de la chronique. Cette procédure permet de choisir son degré de résolution temporel et fréquentiel, mais pas de résoudre totalement l'arbitrage temps-fréquence. Le paramètre central est la taille de la fenêtre qui, si elle est élevée, concerne un nombre important de points et donc une localisation fréquentielle bonne (au détriment de la localisation temporelle). A l'inverse une fenêtre plus étroite améliore la résolution temporelle mais détériore la localisation fréquentielle. Ce constat est le dilemme purement Physique explicité par Heisenberg (le Principe d'incertitude éponyme) : il est impossible de mesure correctement et simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule. Dans notre cas ce principe empêche de trouver, de façon concomitante, la position temporelle et fréquentielle d'une variable. Les ondelettes sont limitées par ce principe mais elles "réduisent" l'effet d'arbitrage en permettant une analyse Temps-Fréquence simultanée.

Une ondelette, notée  $\varphi(t)$  (ou ondelette-mère), joue, en quelque sorte, le rôle de la fenetre. Celle-ci est de moyenne nulle et préserve l'énergie/variance de la série de départ. La fonction  $\varphi(t)$  sera translatée par  $\tau$  et dilatée par  $s$  pour extraire de la série des informations sur plusieurs niveaux de fréquences et à un moment précis du temps. L'information est concentrée dans la famille d'ondelette  $\varphi_{s,\tau}(t)$  qui rassemble toutes les versions translatées et dilatées de  $\varphi(t)$ .

Une ondelette se définit mathématiquement par l'équation suivante :

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (2)$$

La transformation en ondelettes (ou décomposition en ondelettes) consiste à projeter la fonction  $x(t)$  sur la famille d'ondelette. Elle indique comment l'ondelette-mère donne "naissance" aux ondelettes, et elle fournit aussi les coefficients d'ondelettes  $W(s, \tau)$ . Ceux-ci reproduisent les variations de la série initiale au voisinage de  $t \mp \tau$  de largeur fréquentielle  $s$ . En faisant varier  $\tau$  et  $s$  on obtient, par conséquent, les variations temporelles de la série sur une échelle fréquentielle donnée, d'où le terme d'analyse temps-fréquence.

Formellement on a le résultat suivant <sup>4</sup> :

$$W(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (3)$$

Où  $\varphi^*$  signifie la complexe conjuguée de  $\varphi$ .

On peut reconstruire la série originelle par sa transformée inverse en ondelettes. Son expression mathématique fait apparaître la condition d'existence  $C_\varphi$  des ondelettes.

$$x(t) = \frac{1}{C_\varphi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(s, \tau)| \varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (4)$$

Elle garantit la nullité de la moyenne et la préservation de l'énergie lors de la décomposition.

$$C_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\varphi(f)}|}{|f|} df < \infty \quad (5)$$

Avec  $\widehat{\varphi(f)}$  correspondant à la transformée de Fourier de  $\varphi(f)$

Cette relation est respectée sous les contraintes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0 \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 dt = 1 \quad (7)$$

La Transformation Continue en Ondelettes (CWT) nécessite pour son implémentation un grand nombre de calculs. Sa version discrète (ou Discrete Wavelet Transform) réduit le nombre de fréquences grâce à un pas de variation de  $s$  et  $\tau$  moins important. La réduction de ce pas a pour objectif de construire un échantillonnage optimal en limitant les calculs. Cette discrétisation impose l'utilisation d'une échelle dyadique (le nombre d'observations doit être un multiple de 2) et d'un filtre Passe-Haut et Passe-Bas, déterminant l'ordre de la décomposition  $J$  qui indique le nombre de bandes de fréquence nécessaire pour reconstruire la série. Dans ce cas  $J = \text{Log}_2(N)$ , avec  $N$  étant le nombre d'observation de la série. Cette procédure porte le nom d'algorithme pyramidal (ou cascade) et a

4. Cf. par exemple Mallat [9;10;11]

été construit par Mallat (on l'appelle aussi algorithme de Mallat). Il existe une version de la DWT qui relache la contrainte dyadique, appelée Maximal Overlap Discrete Wavelets Transform ( ou MODWT) <sup>5</sup>.

Les différentes décompositions se distinguent par la forme de l'ondelette-mère et de la famille qui en découle, définissant alors les caractéristique du filtre d'ondelette. Chacune des famille d'ondelette possèdent des caractéristiques propres comme l'orthogonalité, la symétrie, la compacité de son support etc. La famille des ondelettes de Daubechies est la plus couramment utilisée avec celle de Morlet ( ou mexican-hat wavelets). Au sein d'une même famille les ondelettes se différencient par le nombre de moments nuls qu'elles possèdent, ce qui lui donne son nom. Par exemple l'ondelette "D8" est une ondelette de la famille Daubechie avec 8 moments nuls, l'ondelette "La8" possède le meme nombre de moments nuls mais elle n'appartient pas à la meme famille car c'est une ondelette de Daubechie faiblement asymétrique (Least asymétric). Des explications plus précises sur les propriétés des ondelettes sont données par Farge(1992) et par Daubechie (1992).

Nous appliquons, dans cet article, la transformation continue avec l'utilisation de l'ondelette de Morlet complexe qui possède de bonne capacité de localisation temporelle et fréquentielle. La CWT est, par ailleurs, bien adaptée pour obtenir un maillage fréquentiel fin (le pas fréquentiel). Son expression mathématique est la suivante :

$$\varphi_{s,\tau}^M(t) = \pi^{-1/4} e^{(if_0 t)} e^{(-t^2/2)}. \quad (8)$$

Avec  $f_0$  la fréquence non-dimensionnelle, qui dans notre cas est égale à 6 afin de satisfaire la condition d'admissibilité.

Les logiciels de calculs réalisent, en pratique, un échantillonnage fréquentiel pour implémenter la CWT afin de définir le niveaux de résolution de la transformation. Il s'agit d'un aspect pratique lié à la limite de la puissance des ordinateurs pour calculer une intégrale à l'infinie à partir de séries finies. En théorie, l'ordre de la décomposition découle uniquement du pas fréquentiel  $\delta_j$ . Dans le cas continu, il peut être choisi arbitrairement (Farge (1992)) mais en pratique, l'ordre  $J$  dépend de la taille de l'échantillon  $N$ . Cet ordre est important pour définir la résolution graphique et diminuer le temps de calculs. Torrence et Compo (1997) donnent la formule suivante qui permet de déterminer le niveau maximal d'échelle fréquentielle :

$$J = \delta_j^{-1} \text{Log}_2(N\delta_t/s_0) = \delta_j^{-1} \text{Log}_2(N/2) \quad (9)$$

Avec  $\delta_j$  le pas fréquentiel,  $\delta_t$  le pas temporel, et  $s_0 = 2\delta_t$  la plus petite échelle. Il est commun d'utiliser une valeur de 1/8 pour  $\delta_j$  car on obtient une bonne résolution fréquentielle et des temps de calculs raisonnable. Lau et Weng(1995) ont montré que l'ensemble des échelles découlant d'une décomposition d'ordre  $J$  sont définit par :

$$s_j = s_0 2^{j\delta_j}; j = 1, \dots, J \quad (10)$$

On notera que la valeur de  $s_j$  détermine, pour chaque échelle  $j$ , un horizon temporel (exprimé en unité de temps de la série d'origine).

<sup>5</sup>. Pour un développement de ces méthodes les lecteurs peuvent se référer aux ouvrages de Mallat [9;10;11] et de Gençay et al [7]

## La cohérence d'ondelettes

La cohérence d'ondelettes entre deux fonctions de même taille  $N$ , appelée parfois *Time-Varying Coherence*, est basée sur une transformation continue qui utilise l'ondelette de Morlet. Comme pour la cohérence de Fourier, on dispose d'une mesure de la covariance spectrale en ondelettes définie par le spectre croisé d'ondelettes  $SW_{xy}(s, \tau)$  :

$$SW_{xy}(s, \tau) = W_x(\tau, s) \cdot W_y^*(\tau, s) \quad (11)$$

Avec  $x(t)$  et  $y(t)$  les deux fonctions chronologiques,  $W_x(\tau, s)$  les coefficients d'ondelettes issus de la transformation, et  $W_y^*$  le complexe conjugué de  $W_y(\tau, s)$ .

Le spectre de puissance croisé entre  $x(t)$  et  $y(t)$  est noté  $|W_{xy}(s, \tau)|$ . Associé aux auto-spectres de puissance on peut définir la cohérence en ondelettes :

$$WQ(f) = \frac{|\mathfrak{S}(s^{-1} \cdot SW_{xy})|^2}{\mathfrak{S}(s^{-1} \cdot |SW_x|^2) \cdot \mathfrak{S}(|s^{-1} \cdot SW_y|^2)} \quad (12)$$

La formule de  $WQ(f)$  est similaire à celle d'un coefficient de détermination. Pour chaque échelle fréquentielle  $s$  (défini par le pas fréquentiel) et à chaque instant du temps on dispose d'un coefficient compris entre 0 et 1 traduisant la plus ou moins forte corrélation au carré entre les séries et le pouvoir explicatif de la variable  $x(t)$  et  $y(t)$ .

Les coefficients obtenus sont issus d'une décomposition par ondelettes de Morlet, ils sont donc complexes par nature. Par conséquent, la cohérence est égale à 1 quel que soit  $\tau$  dans sa représentation réelle, ce qui nécessite de recourir à un lissage tempo-fréquentiel noté  $\mathfrak{S}$  qui conduit aux valeurs réelles de la cohérence. Le lissage temporel est noté  $\mathfrak{S}_{temps}$  pour une échelle fréquentielle donnée et celui de l'échelle fréquentielle  $\mathfrak{S}_{echelle}$  pour un instant  $t$  donné. L'opérateur de lissage complet  $\mathfrak{S}$  s'écrit :

$$\mathfrak{S}(W) = \mathfrak{S}_{echelle}(\mathfrak{S}_{temps}(W)) \quad (13)$$

Les expressions mathématiques de  $\mathfrak{S}_{echelle}$  et  $\mathfrak{S}_{temps}$  sont donnés par Torrence et Webster (1998) :

$$\mathfrak{S}_{temps}(W_N) = W_N \cdot c1^{-t^2/2s^2} \quad (14)$$

$$\mathfrak{S}_{echelle}(\cdot) = W_N \cdot c2 \Pi(0.6s) \quad (15)$$

$c1$  et  $c2$  sont des constantes de normalisations et  $\Pi$  est la fonction rectangle<sup>6</sup>.

Les ondelettes fournissent aussi une mesure de la phase entre les deux fonctions temporelles qui permet de savoir si leurs composantes fréquentielles sont positivement ou négativement corrélées et s'il existe des influences mutuelles. La fonction de phase d'ondelettes  $\theta_W(f)$  est le quotient entre la partie imaginaire  $C$  et réelle  $P$  de  $SW_{xy}$  :

$$\theta_W(f) = \arctan(C(SW_{xy}f)/P(SW_{xy}f)) \quad (16)$$

6. la fonction rectangle est une fonction égale à une valeur  $a$  dans l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$  et zéro à l'extérieur

Dans la pratique, on utilise  $x_t$  et  $y_t$  échantillons de deux processus aléatoires, et des pas temporelles et fréquentiels définis par la CWT décrite précédemment.

## 2 Résultats et discussions

- Les valeurs estimées des Betas, par la méthode des MCO, de la droite de marché et des coefficients de détermination associés sont présentées dans le tableau 1 suivant :

Table 1 : Synthèse des résultats des estimations

Actions	Beta	R <sup>2</sup>
AXA	1,5	0.68
LVMH	1	0.62
Orange	0.73	0.43

L'annexe 1 détaille les résultats issus de ces estimations : les variables de la régression sont stationnaires, les résidus sont hétéroscédastiques, auto-corrélés et ne sont pas l'échantillon d'une Loi Normale. Par conséquent les Betas ne possèdent pas les propriétés requises pour être des estimateurs BLUE mais on les considère comme des références par la suite.

Le tableau 2 rassemble les résultats dans le domaine des fréquences. Il s'agit des calculs issus de l'analyse co-spectrale entre les variables et le CAC40. Il fournit la moyenne et de l'écart-type de la cohérence et la moyenne des valeurs absolues (pour éviter les valeurs négatives) et l'écart-type de la phase.

Tableau 2 : caractéristiques de la cohérence et de la phase de l'analyse co-spectrale.

Actions	Cohérence Moyenne	Ecart-Type
AXA	0.71	0.17
LVMH	0.65	0.18
Orange	0.48	0.21

Actions	Phase Moyenne	Ecart-Type
AXA	0.21	0.17
LVMH	0.23	0.19
Orange	0.34	0.32

Les actions AXA et LVMH possèdent des cohérences moyennes plus fortes que celle d'Orange, ce qui est conforme aux valeurs trouvées pour le  $R^2$  ( du tableau 2). Par ailleurs, Orange possède une cohérence plus erratique que les deux autres actions (Cf. leurs écart-types), traduisant une variabilité plus forte de son lien avec le marché au cours des fréquences. Ces résultats sont illustrés par les graphiques issus de l'analyse co-spectrale portés en annexe 3. Les valeurs absolues moyennes des phases sont plus importantes (et volatile) pour Orange. Ce déphasage plus prononcé indique qu'Orange réagit différemment et avec retard aux signaux du marché.

Une action avec un beta faible possède un coefficient de détermination et une cohérence moyenne plus faible qu'une action avec un beta fort. Le



pouvoir explicatif du marché sur les variations de l'action est donc plus important pour une action à beta fort, mais nous ne pouvons pas vérifier si ce constat est valide quelle que soit la période considérée et l'horizon d'investissement choisi. l'analyse co-spectrale trouve ainsi sa limite par son atemporalité.

- Cette démarche, statique, est améliorée lorsque qu'on recourt à l'analyse tempo-fréquentielle multidimensionnelle qui est une véritable analyse dynamique du lien action-marché. Les graphiques suivants (Figures 1) représentent pour les trois actions les évolutions simultanées de la cohérence et de la phase.

Les échelles fréquentielles exprimées en jours sont portées en ordonnées, le temps indicé en jours en abscisses. Il débute de 0 (pour la première observation) à 2869 (pour la dernière).

L'intensité de la cohérence en ondelettes est représentée par le code couleur suivant : le rouge illustre un forte corrélation entre le CAC40 et l'action qui diminue pour l'orange et le jaune, et le bleu indique un lien faible entre les deux variables. Les traits en gras délimitent les zones pour lesquelles la corrélation ( $leR^2$  en l'occurrence) est significatif au seuil de 5% (calculé par des simulations de Monte-Carlo). Une zone particulière (la surface blanche transparente) concerne le cône d'influence. Il s'agit des effets de bords susceptibles de perturber les résultats car la majorité des échantillons sont finis et les calculs des spectres de puissance croisés peuvent être biaisés.

L'analyse de la phase s'effectue par la lecture de l'orientation des flèches portées sur les graphiques : une flèche dirigée vers la droite indique que les séries sont *en phase*, si elle est dirigée vers la gauche alors  $x_t$  et  $y_t$  sont *déphasées* (ou hors-phase).

La cohérence et la phase donne lieu a une représentation simultanée qui enrichit l'analyse de la relation entre les variables. La phase peut s'interpréter comme le sens de la corrélation. Des séries en phase seront positivement corrélées tandis qu'elles le seront négativement lors d'un déphasage. La phase permet aussi d'appréhender la volatilité des séries et leurs liens : si la flèche pointe vers le haut alors  $x_t$  est le "leader" dans le sens ou il amène  $y_t$  vers une forte corrélation ; à l'inverse si elle pointe vers le bas c'est la variable  $y_t$  qui conduit  $x_t$ . Nous avons ainsi, en quelque sorte, une mesure de la causalité entre les séries.

Figures 1 : Cohérences-phases en ondelettes des actions

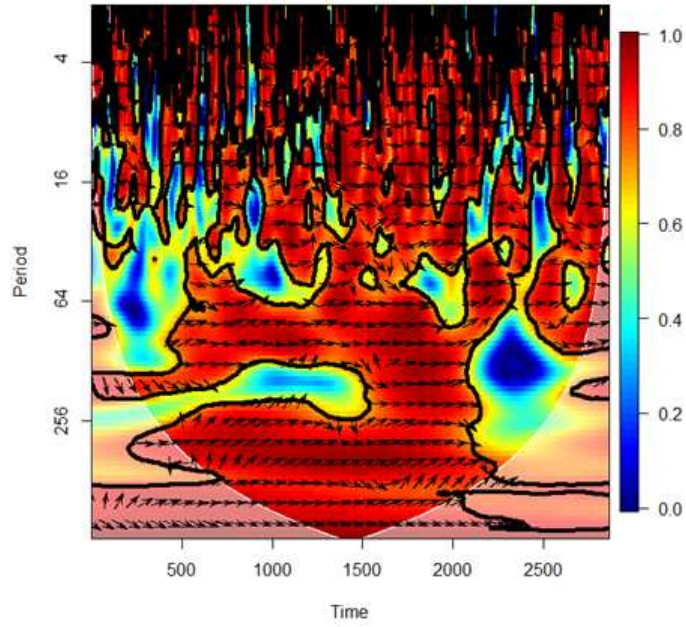


Figure 1.1 *AXA - CAC40*

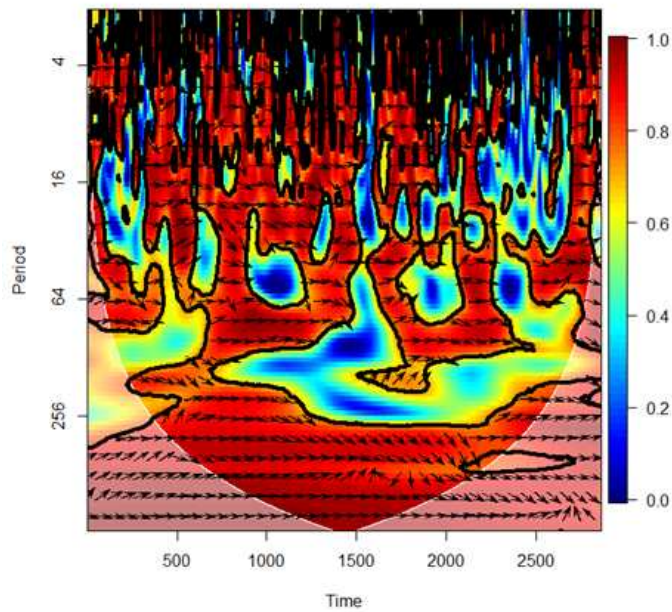


Figure 1.2 *LVMH - CAC40*

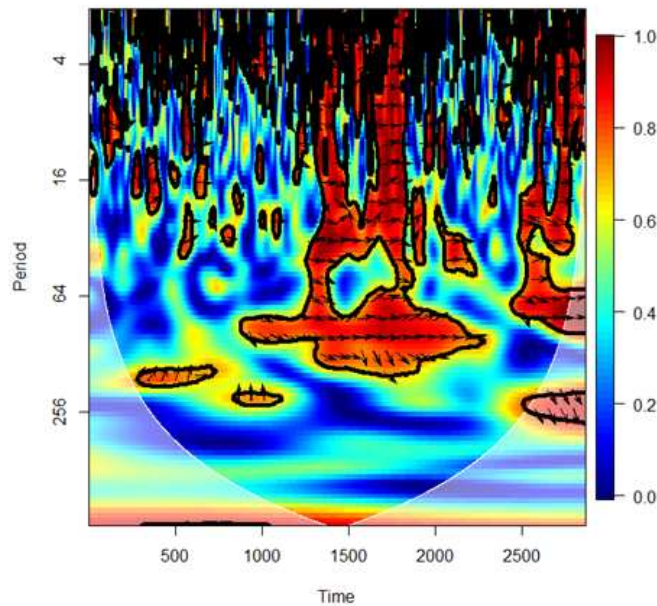


Figure 1.3 *Orange – CAC40*

Ces graphiques mettent en évidence une dominance du rouge pour AXA et pour LVMH (dans une moindre mesure), traduisant une forte corrélation entre les actions et le marché. Celle-ci n'est pas continue sur les hautes-fréquences où l'on observe une alternance de zones rouges et bleues. Pour l'action Orange, la couleur bleue domine malgré une zone rouge de moindre importance. Globalement AXA et LVMH sont corrélées quelle que soit la fréquence, alors que, a contrario l'action Orange ne l'est pas. Les actions ayant un Beta fort ont, en général, une cohérence dominée par le rouge quelle que soit la période et les fréquences. A l'inverse, une action avec un Beta faible possède une cohérence dominée par le bleu, mais les zones de co-mouvements avec le marché seront situées sur des fréquences particulières et à des instants précis du temps.

Pour mettre en évidence l'environnement qui influence ces résultats, une synthèse des points les plus importants est réalisée en divisant la période temps global en 5 sous-périodes,

- La période d'avant crise qui s'étend de 2005 jusqu'au début de l'année 2008 ( en ordonnée autour des 800 jours).
- La crise des subprimes couvrant la période de 2008 jusqu'à la fin 2010 (autour des 800 jours jusqu'à 1300 jours).
- La crise de la dette englobant les années 2011–2012 ( autour des 1700-2000 jours).
- La période d'après crise qui débute à la moitié de l'année 2012 jusqu'à la fin de notre échantillon au 31 décembre 2015 (au niveau de 2000 jours).

Nous donnons dans le tableau 3, pour chaque action, l'intensité de la corrélation (Forte, Moyenne, Faible), le leadership du marché est indiqué par la lettre M et celui de l'action par la lettre A. Nous utilisons la lettre I si on ne peut pas

définir un leadership dominant, illustrant ainsi une Interaction entre le marché et l'action.

Tableau 3 : Synthèses des cohérences

Actions	Fréquence	2005-2008	Crise Subprimes 2008-2010	2010-2011	Crise de la dette 2011-2012	2012-2015
AXA	HF	Forte-M	Forte-M	Forte-M	Forte-M	Forte-I
	MF	Moyenne-I	Forte-M	Forte-I	Forte-M	Forte-I
	BF	Forte-M	Forte-M	Forte-I	Forte-M	**
LVMH	HF	Forte-M	Moyenne-M	Moyenne-M	Forte-M	Moyenne-M
	MF	Forte-I	Forte-I	Moyenne-I	Forte-M	Moyenne-I
	BF	Forte-M	Forte-A	Forte-I	Forte-A	Forte-I
Orange	HF	Moyenne-M	Moyenne-M	Forte-M	Moyenne-M	Moyenne-Forte-M
	MF	Faible-I	Moyenne-Faible-M	Forte-I	Moyenne-I	Moyenne-Forte-I
	BF	Faible	Faible	Faible-I	Faible	Faible

HF=Hautes fréquences, MF=Moyenne-Fréquences et BF=Basses-Fréquences.

On peut vérifier les hypothèses du MEDAF aux **hautes fréquences** : les variations du marché causent les fluctuations des actions, mais chacune possède un lien différent au cours du temps. AXA est plus souvent sensible qu'Orange, ce qui est logique d'après la valeur de leur Beta. On peut donc mettre en évidence le phénomène de *Contagion* entre le Marché et les Actions qui y sont cotées. Si on constate qu'elle est déphasée par rapport au marché alors elle a un rôle contra-cyclique (qui n'est pas observé ici). Elle joue un rôle pro-cyclique si elle est en phase avec son marché. Cependant à court-terme (aux **hautes-fréquences**) une action peut rarement influencer le marché.

Sur les **Moyennes Fréquences**, on remarque que le marché n'est plus systématiquement le Leader : il y a une interaction bilatérale. Ces résultats montrent que la nature du lien action-marché n'est pas uniforme et homogène dans le domaine temps-fréquence révélant l'intérêt de recourir à cette démarche par rapport à celle utilisant les outils traditionnels précédents. On constate que chaque action est corrélée avec le marché durant les deux périodes de crise avec une nature du lien différente. A titre d'exemple, l'action AXA possédant un Beta fort avant la crise des subprimes (ou elle est le Leader) amplifie les mouvements du marché (d'après le MEDAF). Celui-ci réagit à ces mouvements par une phase d'emballerment (phase d'instabilité) avant de s'effondrer. Pendant la crise, le marché redevient le Leader. Ce constat est valable pour les autres actions : Orange, par exemple, est une action peu corrélée avec son marché (en temps normal) mais qui subit ses chocs, elle contribue néanmoins à le redynamiser en minimisant ses variations négatives. LVMH est un mélange de ces deux profils, ce qui explique sont Beta moyen égal à 1.

Pour les **Basses-Fréquences** (en dessous de l'échelle 256), Orange n'est pas corrélée avec le CAC40 à l'inverse d'AXA et de LVMH. Ces dernières sont en phases mais leur lien avec le marché est plus complexe. En effet on ne peut pas définir clairement qui est Leader, à cause de flèches qui pointent vers le haut et vers le bas. Les actions répondent bien aux signaux du Marché mais celui-ci est aussi influencé par leurs réponses. Ce résultat permet de conclure à une interdépendance forte entre le marché et les actions. Cela signifie qu'à long terme les fluctuations des actifs et du marché se répondent mutuellement ("interréagissent"); ce constat résulte du principe de l'ajustement des prix.

## Conclusion

La cohérence-phase en ondelettes se révèle bien comme un outil puissant pour comprendre les interactions entre le marché et les actifs qui y sont cotés. Elles constituent une procédure indispensable pour compléter l'estimation de la droite de marché et l'atemporalité de l'analyse co-spectrale. Les actions sélectionnées comptent parmi les plus "grosses" du *CAC40* dans le sens où leurs poids indiciel est relativement important (LVMH compte pour 8%, AXA 4–5% et orange 2–3%). Il n'est donc pas choquant d'observer que LVMH influence plus le marché qu'Orange. Il s'agit d'une des limites du MEDAF pour lequel théoriquement le Marché doit contenir tous les actifs possibles. Or le *CAC40* est un portefeuille français composé de 40 actifs, et le Beta estimé mesure la sensibilité de l'action aux mouvements du marché dont elle-même contribue à la hauteur de  $x\%$ . Ce défaut du MEDAF est ici "réduit" puisque la cohérence nous indique clairement les périodes où l'action répond au marché. De plus, la décomposition fréquentielle présente un intérêt récurrent car chaque agent peut classer ses actifs d'après son horizon d'investissement (l'échelle des fréquences en ordonnée). Par exemple Orange est plus corrélée au *CAC40* à Court-terme durant les périodes tumultueuses qu'à long-terme. Par conséquent un Fond de pension (investissant sur 5 ans) sera relativement moins exposé qu'un agent THF (Trading de Hautes-Fréquences) investissant à court-terme. Mais les THF peuvent repérer et exploiter les périodes où l'action et le marché sont non-corrélés.

Cette étude met aussi en évidence la nature des liens fréquents actions-marchés :

- Aux hautes-fréquences, on observe, le phénomène de Contagion indiquant que les fluctuations du marché définissent celles de l'action. Cependant, les actions ne sont pas à chaque instant  $t$  fortement corrélées avec le marché, mais les mouvements du marché les ramène vers une forte corrélation (ou co-mouvement intense).
- Aux basses-fréquences, le phénomène d'Interdépendance domine par des interactions bilatérales entre l'action et le marché. Le marché influence les mouvements des rendements des actions mais celui-ci réagit aux fluctuations des actifs. Le jeu de réponse entre l'action et le marché indique un risque systématique de nature différente. Ce résultat est surtout visible pour AXA et LVMH, Orange n'étant pas corrélée avec le *CAC40* à ces fréquences.
- Aux Moyennes fréquences, les deux phénomènes se combinent selon les actions et la période.

En définitive, il existe une pluralité de profils d'actions réalisables permettant de construire des portefeuilles relativement mieux diversifiés au cours du temps avec des horizons d'investissement différents. La cohérence-phase d'un portefeuille est un indicateur nouveau de la plus ou moins bonne diversification en fonction des appétences et des profils des investisseurs.

## Annexes

### A1-Tests sur les variables et les régressions

Test de Stationnarité de Phillips-Perron sur les rendements

Actions	Test Value	Critical Value at 1%
CAC	-56.11	-3.96
AXA	-51.22	-3.96
LVMH	-55.7	-3.96
Orange	-54.42	-3.96

Tests sur les résidus des estimations des Betas

Actions	Beta	T-Stat	R <sup>2</sup>	LB	ARCH	JB
AXA	1,5	31.74	0.68	21.07	62.13	41993.2
LVMH	1	36.81	0.62	13.24	38.34	10867.6
Orange	0.73	18.83	0.43	17.7	37.81	4480.43

Pour un risque de 5%, colonne LB (Ljung-Bpx Test) :  $\chi^2(5) = 11.1$ , colonne ARCH (ARCH-LM Test) :  $\chi^2(2) = 5.99$ , Colonne JB (Jarque-Bera Test) :  $\chi^2(2) = 5.99$ .

**A2-Cohérences et phases issues de l'analyse co-spectrale entre les actions et le marché** La cohérence est portée en ordonnées et les fréquences sont exprimées par périodes en abscisses (exprimée en jours).

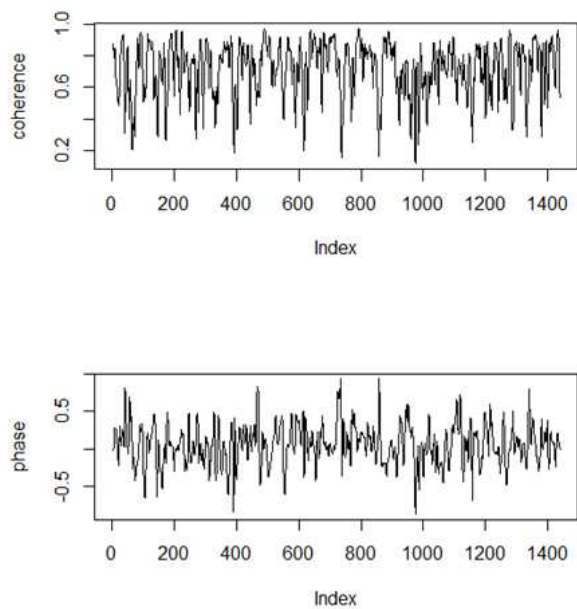


Figure 1.1 AXA – CAC40

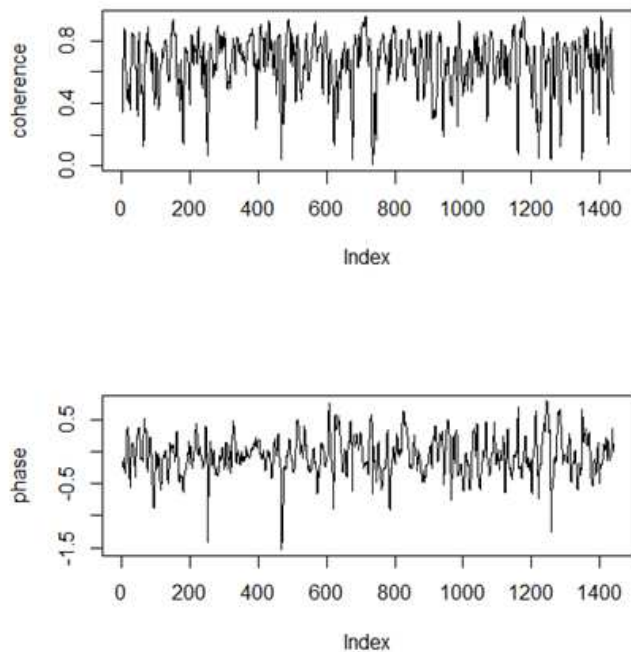


Figure 1.2 LVMH – CAC40

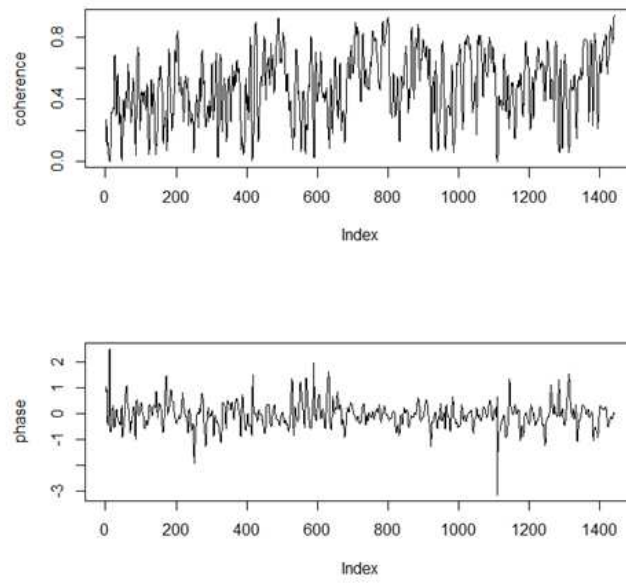


Figure 1.3 *Orange – CAC40*



## Références

- [1] Auth C., *Continuous Wavelet Transform and Wavelet Coherence-Implementation and Application to the Diversification Analysis of Hedge Funds Returns*, 2013.
- [2] Black F. and Jensen M. and Scholes M., *The Capital Asset Pricing Model : Some Empirical Test ; Studies in the Theory of Capital Markets*, M. Jensen ed., New York : Praeger Publishers, 1972, pp 79-121.
- [3] Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, Conference Series of Applied mathematics in Philadelphia, Society for industrial and applied mathematics, 1992.
- [4] , Grossmann A. and Morlet J., *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM Journal on mathematical analysis, vol 15, issue 4, 1984, pp 723-736.
- [5] Fama E. and French K., *The Cross-Section of Expected Stock Returns* , Journal of Finance, vol 47, issue 2, 1992, pp 427-465.
- [6] Farge M., *Wavelets transforms and their applications to turbulence*, Annual Review of fluid Mechanics, vol 47, issue 2, 1992, pp 427-465.
- [7] Gençay R. and Selçuk F. and Whitcher B., *Multiscale systematic risk*, Journal of internationnal Money and Finance, vol 24, 2005, pp 55-70.
- [8] Lau K.M Weng H., *Climate Signal detection using Wavelet transform : How to make a time series sing.*, Bulletin of the American Meteorological Society, vol 76, issue 12 1995, pp 2391-2402.
- [9] Mallat S., *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol 11, issue 7, july 1989.
- [10] Mallat S., *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ecole polytechnique, 2009.
- [11] Mallat S., *Wavelet tour of signal processing : the sparse way*, Academic Press, 2009.
- [12] Mélard G., *Introduction à l'analyse des séries temporelle et à la prévision* , Revue MODULAD, 2006.
- [13] Mélard G., *Examples of the evolutionary spectrum theory*, Journal of time series analysis, vol 6, issue 2, 1985, pp 81-90.
- [14] Mestre R. and Terraza M., *Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40*, MIC Conference "Managing the global economy", Treviso, Italy, 2017.
- [15] Meyer Y., Jaffard S., Rioul O., *L'analyse par ondelettes*, 1986.
- [16] Sharpe W. , *Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under risk*, Journal of Finance, Canberra. ed. Western Australia : Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand Inc. , vol 19, issue 3, Sept 1964, pp 425-442.
- [17] Torrence C. Compo G.P., *A pratical guide to wavelet analysis*, Bulletin of the American Meteorological Society, vol 79, issue 1, 1998, pp 61-78.
- [18] Torrence C. Webster P.J., *Interdecadal Changes in the ENSO-Monsoon System*, Journal of Climate, vol 12, 1999, pp 2679-2690.